J. Math. Soc. Japan
Vol. 35, No. 3, 1983

Fonctions hypergéométriques F_1 et fonctions automorphes I

Par Toshiaki TERADA

(Reçu le sept. 24, 1980)
(Revisé le avril 13, 1982)

Introduction.

Les propriétés intéressentes de la fonction hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ ont donné naissance à beaucoup de fruits de l'analyse, dont l'un des plus beaux sera le résultat dû à H. A. Schwarz [**10**]. Soit $\omega_1(x)$ et $\omega_2(x)$ deux solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle

$$x(1-x)y''+[\gamma-(\alpha+\beta-1)x]y'+\alpha\beta y=0$$

vérifiée par $F_1(\alpha, \beta, \gamma, x)$ et supposons que $\gamma-1$, $\alpha-\beta$ et $\gamma-\alpha-\beta$ soient contenus dans

$$\boldsymbol{Z}^{-1}=\{1/\lambda \mid \lambda \text{ est un entier sauf } \pm 1 \text{ ou l'infini}\} .$$

Alors la fonction inverse de $\tau(x)=\omega_1(x)/\omega_2(x)$ est uniforme et elle définit une fonction automorphe sur un domaine isomorphe à la sphère de Riemann, le plan complexe ou le cercle unité. Le groupe est induit par le groupe de monodromie de cette équation et le domaine fondamental est l'image par $\tau(x)$ de la sphère de Riemann avec une coupure passant en 0, 1, ∞. Si $\alpha=\beta=1/2$, $\gamma=1$, c'est la fonction modulaire elliptique $x=\lambda(\tau)$.

Après qu'Appell a présenté les séries hypergéométriques à deux variables, E. Picard [**6**]~[**9**] a généralisé le travail de Schwarz au cas de deux variables en utilisant $F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y)$, mais la démonstration ne semble pas tout à fait complète. L'inverse de l'application sur l'espace projectif définie par les trois solutions linéairement indépendantes du système d'équations différentielles vérifiées par F_1 est uniforme si tout $\lambda_i+\lambda_j-1$ $(i, j=0, 1, 2, 3, \infty, i\neq j)$ est élément de $\boldsymbol{Z}^{-1}$ où $\lambda_1=1-\beta$, $\lambda_2=1-\beta'$, $\lambda_\infty=\alpha$, $\lambda_3=\gamma-\alpha$, $\lambda_0=3-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_\infty)$; et elle donne un corps de fonctions automorphes. Le Vavasseur [**3**] a trouvé tous les assortiments des paramètres qui remplissent ces conditions. Ensuite l'auteur s'y est occupé au cas de n variables mais ne l'a pas encore parachevé.[1)]

---

1) On n'a traité que les cas où $n=2$ et $\lambda_i+\lambda_j-1\geqq 0$ et où $n=3$ et $\lambda_i=2/3$. Et de plus la démonstration était incomplète si le domaine fondamental est non-compact. D'ailleurs, G.D. Mostow [**4**] annonce qu'il l'a démontré au cas où $n=2$ et $\lambda_i+\lambda_j-1\geqq 0$.

Ici nous présentons, sous la condition qu'aucun des λ_i n'est pas entier, tous les cas où l'inverse de l'application définie par les $n+1$ solutions linéairement indépendantes du système (F_1) de l'équations différentielles hypergéométriques d'après Lauricella est uniforme et par suite définit un corps de fonctions automorphes sur la boule unité. Si $n=1$, comme on le sais bien, il existe un nombre infini d'exemples. Mais au cas de 2, 3, 4 et respectivement 5 variables, il en existe 27, 7, 1 et respectivement 1, et il n'y en a pas d'autres. D'ailleur les corps de ces fonctions automorphes sont tous purement transcendantaux; et même au cas de trois variables il existe des exemples dont le domaine fondamental est compact.

Dans Section 1, on présente quelques résultats déjà connus et les faits élémentaires en déduits. Dans Section 2, on examine l'aspect des solutions du système (F_1) d'équations différentielles hypergéométriques sur les points critiques. Section 3 donne les conditions nécessaires pour qu'on peut obtenir des fonctions automorphes. Dans Section 4, on montre que ces conditions sont aussi suffisantes. Dans Section 5, on a l'intention de diviser le domaine fondamental pour établir une relation de ces fonctions aux modules de courbes algébriques et aux travaux de G. Shimura [**11**].

D'ailleurs cet article n'épuise pas encore toutes les possibilités de construire des fonctions automorphes provenant de fonctions hypergéométriques. En effet on a repoussé le cas où quelques-uns de λ_i sont des entiers et considéré seulement l'application particulier sur $\boldsymbol{P}_n(\boldsymbol{C})$.

§ 1. Préliminaire.

Nous allons exposer les résultats déjà obtenus à fin d'expliquer les définitions et les notations et en déduire quelques conséquences. D'abord quelques notations: $\boldsymbol{N}_p=\{0, 1, \cdots, p+1\}$, $\boldsymbol{N}'_p=\boldsymbol{N}_p\cup\{\infty\}$ et surtout $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{N}_n$ et $\boldsymbol{N}'=\boldsymbol{N}'_n$; $M_i(\cdots)$ exprime la matrice dont le i-ème ligne est $(\cdots)$ et dont les autres sont nuls, diag$(\cdots)$ est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $(\cdots)$, et E_p est la matrice unité d'ordre p; λ_i $(i\in\boldsymbol{N}')$ sont des constantes complexes avec $\sum_{i\in\boldsymbol{N}'}\lambda_i=n+1$ et $\mu_i=\exp 2\pi\sqrt{-1}\lambda_i$; $I=\{i_\alpha\}\subset\boldsymbol{N}'$ $(\alpha\in\boldsymbol{N}_{p-1})$ étant donné, $\lambda_I=\lambda_{i_0}+\cdots+\lambda_{i_p}-p$, $\mu_I=\exp 2\pi\sqrt{-1}\lambda_I$, $\tilde{\mu}_i=\mu_{01\cdots i-1}(1-\mu_i)$ et $\sharp I=$(le nombre des éléments de I); un ensemble $\{a_\alpha\}$ de nombres étant donné, on dira que $\{a_\alpha\}$ est croissant si tout a_α est réel et on a $a_\alpha<a_\beta$ pourvu que $\alpha<\beta$. D'ailleurs, les deux notations différentes des éléments de $\boldsymbol{N}$ ou de son sous-ensemble qui paraissent en même endroit expriment des éléments différents: $i_\alpha\neq i_\beta$, $i\neq j$.

1. Domaine de définition. Sur l'espace projectif X à n dimensions, nous introduisons les coordonnées homogènes à déplacements: on considère l'ensemble de tous les assortiments $(x_0, x_1, \cdots, x_{n+1})$ de nombres complexes dont tous ne sont pas égaux, et, les deux x et x' en étant donnés, on dira qu'ils sont équivalents si et seulement s'il existe une constante complexe c_1 non nulle et une autre c_2 (peut être nulle) telles qu'on ait $x_i=c_1x_i'+c_2$ pour tout $i\in \boldsymbol{N}$. Dans cette circonstance on désigne

$$\mathscr{D}=\mathscr{D}_n=X\setminus S \quad \text{et} \quad S=\bigcup_{0\leq i<j\leq n+1} S_{ij}\,;$$

S_{ij} est l'hypersurface linéaire de X définie par $x_i=x_j$.

THÉORÈME 1_a [**13**]. *Pour toute application analytique F de $\mathscr{D}$ à lui-même dont l'image ne réduit pas à un point, il existe une permutation $P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & n+1 & \infty \\ p_0 & p_1 & \cdots & p_{n+1} & p_\infty \end{pmatrix}$ telle que F coïncide à l'automorphisme F_P*[2] *: $x\mapsto x'$ défini par*

$$x'(p_i,\, p_j,\, p_k,\, p_l)=x(i,\, j,\, k,\, l) \qquad (i,\, j,\, k,\, l\in \boldsymbol{N}',\ x_\infty=x'_\infty\equiv\infty)$$

où $x(i,\, j,\, k,\, l)=x(i,\, j,\, k)/x(i,\, j,\, l)$, $x(i,\, j,\, k)=x(i,\, k)/x(j,\, k)$ et $x(i,\, j)=x_i-x_j$. En conséquence, si $n\geqq 2$, le groupe d'automorphismes de $\mathscr{D}$ est isomorphe au groupe symétrique de degré $n+3$, et, si $n=1$, il est isomorphe à celui de degré 3.

Puis nous essayons de faire visible l'espace de revêtement universel $\tilde{\mathscr{D}}$ de $\mathscr{D}$. Etant donné un point $a=(a_i)$ $(i\in \boldsymbol{N}')$ de $\mathscr{D}$, on marque, sur la sphère de Riemann U avec la coordonnée u, les $n+3$ points a_i $(i\in \boldsymbol{N})$ avec $a_\infty=\infty$, aucuns deux desquels ne sont égaux; on y trace une courbe C_a simple, fermée, rectiligne qui passe tous ces points a_i par cet ordre, et on désigne par $U(C_a)$ le domaine dont le contour est la courbe C_a et qui s'en situe à gauche. Et puis désignons par $\Phi(C_a)$ l'ensemble des automorphismes topologiques φ de U admettant que l'image $\varphi(C_a)$ est une courbe simple, fermée, rectiligne, et que $\varphi(\infty)=\infty$. Etant donnés les deux éléments φ, φ' de $\Phi(C_a)$, on dit que φ et φ' sont équivalents si et seulement s'il existe deux constantes complexes c_1 $(\neq 0)$, c_2 et une famille $\{\varphi_s\}$ $(0\leqq s\leqq 1)$ continue d'applications de $\Phi(C_a)$ telles qu'on ait $\varphi_1=c_1\varphi'+c_2$, $\varphi_0=\varphi$ et $\varphi_s(a_i)=\varphi_0(a_i)$ pour tout $0\leqq s\leqq 1$ et $i\in \boldsymbol{N}'$. Cela posé, désignons par $\mathscr{E}$ l'espace de quotient de $\Phi(C_a)$ par cette équivalence. Soit l; $x_i=x_i(t)$ $(i\in \boldsymbol{N},\ 0\leqq t\leqq 1)$, une courbe sur $\mathscr{D}$ partant de a, alors on peut construire une famille $\{\varphi_t\}$ $(1\leqq t\leqq 0)$ des éléments de $\Phi(C_a)$ telle que $\varphi_t(a_i)=x_i(t)$ $(i\in \boldsymbol{N}')$. On a ainsi obtenu une application de $\tilde{\mathscr{D}}$ sur $\mathscr{E}$.

THÉORÈME 2 [**13**]. *L'espace $\tilde{\mathscr{D}}$ de revêtement universel de $\mathscr{D}$ est analytiquement isomorphe à l'espace $\mathscr{E}$.*

L'élément A_{ij} $(i\in \boldsymbol{N},\ j\in \boldsymbol{N}')$ du groupe fondamental $\pi_1(\mathscr{D},\, a)$ de $\mathscr{D}$ qui fixe le point a est défini par la courbe: $x_\alpha=a_\alpha$ $(\alpha\neq i)$, $x_i=u_{ij}(t)$ $(0\leqq t\leqq 1)$ où la courbe: $u=u_{ij}(t)$ est un lacet autour de a_j, partant de a_i et passant dans $U(C_a)$. Pour $I=\{i_\alpha\}\subset \boldsymbol{N}$ $(\alpha\in \boldsymbol{N}_p)$, on utilise la notation

$$A_I=A_{i_0i_1\cdots i_{p+1}}=A_{i_0\cdots i_p}A_{i_0i_{p+1}}A_{i_1i_{p+1}}\cdots A_{i_pi_{p+1}}\,,$$

2) F_P correspond à T_P^{-1} de Théorème 1 de [**13**].

et on dira que $\pi_1(\mathscr{D}, a)$ admet les relations $\boldsymbol{R}_0$ si on a $A_{ij}=A_{ji}$ pour tout $i, j\in\boldsymbol{N}$, et qu'il admet $\boldsymbol{R}_p$ $(1\leqq p\leqq n)$ si on a $A_I\leftrightarrow A_{i_\alpha i_\beta}$ pour tout $I\subset\boldsymbol{N}$ croissant et $i_\alpha, i_\beta\in I$, où $\leftrightarrow$ signifie la commutativité.

THÉORÈME 3 [13]. *Le groupe fondamental* $\pi_1(\mathscr{D}, a)$ *est engendré par* $\{A_{ij}|i, j\in\boldsymbol{N}, i\neq j\}$ *et les relations entre ces éléments se réduisent à* $\boldsymbol{R}_0$, $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$ *et à* $A_{01\cdots n+1}=$*unité. De plus,* $\pi_1(\mathscr{D}, a)$ *a les relations* $\boldsymbol{R}_p$ $(3\leqq p\leqq n)$.

2. Système d'équations différentielles hypergéométriques et représentation par l'intégrale. Ici, posons $x_0\equiv 0$, $x_{n+1}\equiv 1$ et considérons $x_1, \cdots, x_n$ comme étant les coordonnées inhomogènes de $\mathscr{D}$.

Les constantes λ_i $(i\in\boldsymbol{N}')$ étant données, considérons le système des équations différentielles, avec $\partial_i=\partial/\partial x_i$:

$$(F_1)\qquad \begin{cases} (x_i-x_j)\partial_i\partial_jF+(\lambda_j-1)\partial_iF-(\lambda_i-1)\partial_jF=0 \qquad (1\leqq i<j\leqq n)\,, \\ x_i(x_i-1)\partial_i^2F+[x_i(x_i-1)\sum\limits_{1\leq\alpha\leq n,\,\alpha\neq i}(1-\lambda_\alpha)/(x_i-x_\alpha)+\lambda_{0i}-1 \\ \quad +(2-\lambda_i-\lambda_{0in+1})x_i]\partial_iF+(\lambda_i-1)\sum\limits_{1\leq\alpha\leq n,\,\alpha\neq i}x_\alpha(x_\alpha-1)\partial_\alpha F/(x_i-x_\alpha) \\ \quad +\lambda_\infty(1-\lambda_i)F=0 \qquad (1\leqq i\leqq n) \end{cases}$$

qui est, en posant $\boldsymbol{F}={}^t(F, x_1\partial_1F, \cdots, x_n\partial_nF)$, équivalent à

$$d\boldsymbol{F}=\Big\{\sum_{i=1}^n[C_{i0}d\log x_i+C_{in+1}d\log(x_i-1)]+\sum_{1\leq i<j\leq n}C_{ij}d\log(x_i-x_j)\Big\}\boldsymbol{F}\,,$$

où

$$C_{i0}={}^tM_{i+1}(1\;\lambda_1-1\cdots\lambda_{i-1}-1\;\overset{i+1}{\lambda_{0i}}\;\lambda_{i+1}-1\cdots\lambda_n-1)\,,$$

$$C_{in+1}=M_{i+1}(\lambda_\infty(\lambda_i-1)\;\lambda_i-1\cdots\lambda_i-1\;\overset{i+1}{\lambda_{in+1}-1}\;\lambda_i-1\cdots\lambda_i-1)$$

et

$$C_{ij}=M_{i+1}(0\cdots0\;\overset{i+1}{\lambda_j-1}\;0\cdots0\;\overset{j+1}{1\;\;\lambda_i}\;0\cdots0)$$
$$\qquad +M_{j+1}(0\cdots0\;\overset{i+1}{1-\lambda_j}\;0\cdots0\;\overset{j+1}{\lambda_i-1}\;0\cdots0)\,.$$

Puisque $d\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}\wedge\boldsymbol{D}=0$ (où $d\boldsymbol{F}=\boldsymbol{D}\wedge\boldsymbol{F}$), il existe juste $n+1$ solutions linéairement indépendantes.

D'après Appell et Lauricella, si $\lambda_{n+1}\neq 1$, il est équivalent au système à n équations :

$$(F_1)'\qquad Q_i=\sum_{\alpha=1}^n[x_\alpha(x_i-1)\partial_i\partial_\alpha F-(\lambda_i-1)x_\alpha\partial_\alpha F]-[\lambda_\infty+\lambda_{n+1}-(\lambda_\infty+1)x_i]\partial_iF$$
$$\qquad -(\lambda_i-1)\lambda_\infty F=0\,.$$

Car, avec l'équation

$$(x_j-1)\partial_j Q_i-(x_i-1)\partial_i Q_j=0\,,$$

on a

$$(\lambda_{n+1}-1)[(x_i-x_j)\partial_i\partial_j F+(\lambda_j-1)\partial_i F-(\lambda_i-1)\partial_j F]=0\,.$$

Mais, si $\lambda_{n+1}=1$, ce n'est pas vrai. En effet, soit c une constante et g une fonction avec $g(tx_1, \cdots, tx_n)=t^{-\lambda_\infty}g(x_1, \cdots, x_n)$, et posons

$$h=\sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_n=0}^{\infty}[\lambda_\infty/(\lambda_\infty+m_1+\cdots+m_n)]\prod_{i=1}^{n}(1-\lambda_i, m_i)x_i^{m_i}/m_i!$$

(si λ_∞ est un entier non positif, $h=\sum_{m_1+\cdots+m_n=-\lambda_\infty}\prod_{i=1}^{n}(1-\lambda_i, m_i)x^{m_i}/m_i!$), où $(\lambda, m)=\lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+m-1)$. Alors $g+ch$ est une solution de $(F_1)'$, parce qu'on a $Q_i=\partial_i\Big[\Big(\sum_{\alpha=1}^{n}x_\alpha\partial_\alpha F+\lambda_\infty F\Big)(x_i-1)^{1-\lambda_i}\Big]$.

Selon Appell et Lauricella,

$$F_1(\alpha, \beta_1, \cdots, \beta_n, \gamma, x_1, \cdots, x_n)=\sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_n=0}^{\infty}\frac{(\alpha, m_1+\cdots+m_n)}{(\gamma, m_1+\cdots+m_n)}\prod_{i=1}^{n}\frac{(\beta_i, m_i)}{m_i!}x_i^{m_i}$$

$\Big($si γ est un entier non positif, $F_1=\sum_{m_1+\cdots+m_n=-\gamma}(\alpha, \gamma)\prod_{i=1}^{n}\frac{(\beta_i, m_i)}{m_i!}x_i^{m_i}\Big)$ dont Lauricella a utilisé la notation F_D, et où $\alpha=\lambda_\infty$, $\beta_i=1-\lambda_i$, $\gamma=\lambda_\infty+\lambda_{n+1}$, est une solution de (F_1). D'après [**12**], on peut obtenir toutes les solutions de (F_1) par les combinaison linéaires des prolongements analytiques de F_1 pourvu qu'aucun de λ_i ne soit pas entier. D'après Picard [**5**], on a la représentation intégrale, si λ_∞ ni λ_{n+1} n'est un entier:

$$F_1=\frac{1}{B(\lambda_\infty, \lambda_{n+1})}\int_1^\infty u^{\lambda_0-1}(u-x_1)^{\lambda_1-1}\cdots(u-x_n)^{\lambda_n-1}(u-1)^{\lambda_{n+1}-1}du\,.$$

Ultérieurement, la branche de la fonction à intégrer sera précisée et on verra que cette représentation est toujours valable.

3. Groupe de monodromie. Parce que les recherches de solutions de (F_1) reviennent à examiner l'intégrale du type d'Euler si aucun de λ_i n'est pas un entier, repartons de cette intégrale.

En revenant au début, soit $x_0, \cdots, x_{n+1}$ les coordonnées homogènes à déplacements de X. Fixons un point $a=(a_0, \cdots, a_{n+1})$ de $\mathscr{D}$ tel que $\{a_\alpha\}$ soit croissant, et définissons C_a et $U(C_a)$ comme plus haut. Etant donné un point $\tilde{x}$ de $\tilde{\mathscr{D}}$ avec les coordonnées $x_0, \cdots, x_{n+1}$, posons

$$\omega_i(\tilde{x})=\frac{1}{(1-\mu_i)(1-\mu_\infty)}\int_{\varphi(c_i)}(x_{n+1}-x_0)^{\lambda_\infty}\prod_{i=0}^{n+1}(u-x_i)^{\lambda_i-1}du\,,$$

où c_i est un double lacet qui tourne a_i et a_∞ en passant seulement dans $U(C_a)$ et près de ces points, et où $\varphi(c_i)$ est l'image de c_i par une application φ de $\Phi(C_a)$ correspondant au point $\tilde{x}$ de $\tilde{\mathscr{D}}$. La branche de la fonction intégrée est choisie de la manière qu'elle prende une valeur positive lorsque $\varphi=$identité, u est réel et $u>a_{n+1}$. Comme on l'a vu dans [**12**], ω_i vérifie (F_1), et toute solution en est représentée par une combinaison linéaires des ω_i. Mais ils ne sont pas linéairement indépendants ; on a

$$\sum_{i=0}^{n+1}\tilde{\mu}_i\omega_i=0\,.$$

Désignon par $\rho_{ij}\omega_k$ le prolongement analytique le long d'une courbe représentant l'élément A_{ij} de $\pi_1(\mathcal{D},\, a)$, et notons $\omega={}^t(\omega_0,\,\cdots,\,\omega_{n+1})$, $\omega_i^0=\omega_i-\omega_0$ et $\omega^0=(\omega_1^0,\,\cdots,\,\omega_{n+1}^0)$. Parce qu'on peut construire effectivement une famille d'applications $\{\varphi_t\}$ pour toute courbe: $x_i=x_i(t)$ et qu'on peut savoir explicitement le changement du chemin de l'intégrale et de la fonction à intégrer, on a

$$\rho_{ij}\omega={}^t(\rho_{ij}\omega_0,\,\cdots,\,\rho_{ij}\omega_{n+1})=B_{ij}\omega\,,$$

où, si $0\leqq i<j\leqq n+1$,

$$B_{ij}=E_{n+2}+{}^tM_{i+1}(0\cdots 0\ \overset{i+1}{-\mu_i(1-\mu_j)}\ (1-\mu_i)(1-\mu_j)\cdots(1-\mu_i)(1-\mu_j)\ \overset{j+1}{1-\mu_i}\ 0\cdots 0)$$
$$-{}^tM_{j+1}\ \text{(même que les précédents)}$$

(pour B_{0n+1}, il faut multiplier le deuxième membre par μ_∞), et

$$B_{i\infty}=\mu_i^{-1}E_{n+2}+\mu_i^{-1}\,{}^tM_{i+1}(\mu_i-1\cdots\mu_i-1\ \overset{i+1}{\mu_{i\infty}-1}\ \mu_\infty(\mu_i-1)\cdots\mu_\infty(\mu_i-1))$$

(si $i=n+1$, il faut multiplier le deuxième membre par μ_∞^{-1}).

Ces matrices ne se décident pas de la manière unique, mais lorsqu'on choisit ω_i^0 $(1\leqq i\leqq n+1)$ comme étant les bases, on peut déterminer les matrices uniques qui expriment la monodromie : on a

$$\rho_{ij}\omega^0=B_{ij}^0\omega^0\,,$$

où, si $0<i<j\leqq n+1$, on a B_{ij}^0 en éliminant de B_{ij} la première ligne et la première colone,

$$B_{0i}^0=E_{n+1}+{}^tM_i(-(1-\mu_i)\cdots-(1-\mu_i)\ \overset{i}{\mu_{0i}-1}\ -\mu_0(1-\mu_i)\cdots-\mu_0(1-\mu_i))$$

(si $i=n+1$, on le multiplie par μ_∞),

$$B_{i\infty}^0=\mu_i^{-1}E_{n+1}-M_i(\mu_\infty\tilde{\mu}_1\cdots\mu_\infty\tilde{\mu}_{i-1}\ \mu_\infty(\tilde{\mu}_i-1)-1\ \mu_\infty\tilde{\mu}_{i+1}\cdots\mu_\infty\tilde{\mu}_{n+1})$$
$$-(1-\mu_\infty^{-1})\sum_{\alpha=i+1}^{n+1}M_\alpha\ \text{(même que les précédents)}$$

$(i\neq 0$; si $i=n+1$, on le multiplie par $\mu_\infty^{-1})$, et

$$B_{0\infty}^0=(1/\mu_0)\Big(E_{n+1}+\mu_\infty\sum_{\alpha=1}^{n+1}M_\alpha(\tilde{\mu}_1\cdots\tilde{\mu}_{n+1})\Big)\,.$$

Incidemment, pour l'utilisér ultérieurement, nous présentons ici le changement $\rho_{01\cdots m}$ correspondant à $A_{01\cdots m}$. Comme $\omega_j = \omega_j + \sum_{\alpha=0}^{n+1} \tilde{\mu}_\alpha \omega_\alpha$, on a aussi

$$\rho_{n+1\infty}\omega = \left[\mu_{01\cdots n} E_{n+2} + \sum_{\alpha=1}^{n+1} M_\alpha(\tilde{\mu}_0 \cdots \tilde{\mu}_n 0) + M_{n+2}(0 \cdots 0\, 1 - \mu_{01\cdots n})\right]\omega .$$

Or par la définition des courbes qui exprime $A_{n+1\infty}$, on a

$$\text{l'unité} = A_{01\cdots n+1} = A_{01\cdots n} A_{0\, n+1} A_{1\, n+1} \cdots A_{n\, n+1} = A_{01\cdots n} A_{n+1\infty}^{-1}$$

et par suit $A_{01\cdots n} = A_{n+1\infty}$. Parce que les matrices représentant ρ_{ij} et $\rho_{01\cdots n}$ sont uniques pourvu que les éléments de la dernière ligne et colone soient nuls sauf l'élément diagonal, que $A_{01\cdots n}$ est un produit des $A_{ij} (i, j \in N_{n-1})$, et que $\rho_{01\cdots n} = \rho_{n+1\infty}$, on voit, en considérant le cas de dimension m,

$$\rho_{01\cdots m}\omega = \mu_{01\cdots m} E_{n+1} + \sum_{i=0}^{m} M_{i+1}(\tilde{\mu}_0 \cdots \tilde{\mu}_m 0) + M_{m+2}(0 \cdots 0\ 1 - \mu_{01\cdots m}) .$$

Si $\mu_{01\cdots m+1} = 1$, il existe un peu de trouble mais cela se réduit si on pense la limite.

4. Forme hermitienne invariante. Si tous les λ_i $(i \in N)$ sont réels, il existe une matrice hermitienne

$$A = \sum_{i=1}^{n+1} \overline{\tilde{\mu}}_i M_i(\tilde{\mu}_1 \sqrt{\mu_\infty} \cdots \tilde{\mu}_{i-1} \sqrt{\mu_\infty}\ (\sqrt{\mu_\infty}(1-\mu_i) + \sqrt{\overline{\mu_\infty}}(1-\overline{\mu}_i)) \overline{\tilde{\mu}}_i^{-1}\ \tilde{\mu}_{i+1} \sqrt{\overline{\mu_\infty}} \cdots \tilde{\mu}_{n+1} \sqrt{\overline{\mu_\infty}})$$

où $\sqrt{\mu_\infty} = \exp \pi \lambda_\infty \sqrt{-1}$, qui vérifie, pour ρ_{ij} arbitraire,

$$(\rho_{ij}\omega^0)^* A \rho_{ij}\omega^0 = (\omega^0)^* A \omega^0 .$$

A est unique à un facteur réel près. La signature de A est comme suivant.

LEMME 1 [**12**]. *Supposons que tout λ_i soit réel et aucun d'eux ne soit entier, et posons $\lambda_i = n_i + \lambda'_i$ où n_i est un entier et $0 < \lambda'_i < 1$; la forme hermitienne A est de signature $(k+1, n-k)$ où $k = \sum_{i \in N'} n_i$.*

En effet, la signature de A est même que celui de B^*AB avec $B = [\mathrm{diag}(\tilde{\mu}_1 \cdots \tilde{\mu}_{n+1})]^{-1}$, et est invariante quand λ_i se changent continument pourvu qu'aucun d'eux ne prenne pas de valeurs entières. Donc on peut supposer que $\lambda'_i = 1 - \varepsilon$ $(i = 1, \cdots, n-k)$, $\lambda_j = \varepsilon$ $(j = n-k+1, \cdots, n+1)$ et $\sum_{i=0}^{n+1} \lambda'_i = n - k + 1/2$ où ε est un nombre positif suffisamment petit. En cette situation, il est facile de savoir combien de valeurs propres sont positives.

§ 2. Aspects des ω_i sur les points critiques.

Nous allons maintenant examiner la propriété des ω_i sur S, ce qui est nécessaire pour voir la possibilité de construire de fonctions automorphes. Désignons d'abord par $\mathfrak{N}_p$ l'ensemble de tous les sous-ensembles propres I de N_p avec $\sharp I\geqq 2$ et notons $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}_n$.

1. Espace modifié $\hat{X}$ de X. Comme les sous-variétés S_{ij} de X ne croisent pas en position genérale, on va practiquer les σ-processus de Hopf à X pour que, dans le nouvel espace $\hat{X}$, les points critiques consistent en nombre fini de sous-variétés régulières qui se croisent en position générale. Mais, pour utiliser ultérieurement, définissons $\hat{X}$ de la manière un peu plus générale.

Un sous-ensemble $\mathfrak{M}$ de $\mathfrak{N}$ admettant la condition

(SP): *si $\sharp I\geqq 3$ et $I\in\mathfrak{M}$, tout J avec $J\supset I$ est un élément de $\mathfrak{M}$, et $\mathfrak{M}$ contient tout I avec $\sharp I=2$*

étant donné, pour tout $I\in\mathfrak{M}$, soit X_I[3] l'espace projectif avec les coordonnées $x_{I,i}$ $(i\in I)$ homogènes à déplacements, confondrons X (resp. x_i) avec X_N (resp. $x_{N,i}$) et posons $\Pi X=\prod_{I\in\mathfrak{M}} X_I$, $x_{I,\infty}\equiv\infty$, $x_I(i,j)=x_{I,i}-x_{I,j}$, $x_I(i,j,k)=x_I(i,k)/x_I(j,k)$ et $x_I(i,j,k,l)=x_I(i,j,k)/x_I(i,j,l)$ où $i,j,k,l\in I\cup\{\infty\}$. Dans la variété ΠX, on définit un sous-ensemble analytique $\hat{X}=X_{\mathfrak{M}}$ par les équations simultanées

(MD): $x_I(i,k)x_J(j,k)=x_I(j,k)x_J(i,k)$

où on les considère pour tout paire (I,J) avec $I\subsetneqq J\in\mathfrak{M}$ et tout $i,j,k\in I$. Et pour tout $I\in\mathfrak{M}$, on choisit j_I et k_I avec $x_I(j_I,k_I)\neq 0$, pose $u_{I,i}=x_I(i,j_I,k_I)$ $(i\in I)$ et désigne par $\hat{\sigma}=\sigma_{\mathfrak{M}}=\sigma_{X,\mathfrak{M}}$ la projection naturelle: $\hat{X}\to X$.

PROPOSITION 1. *I, J comme plus haut, si on a l'équation* (MD) *pour $j=j_I$, $k=k_I$ et tout $i\in I$, on l'a pour tout $i,j,k\in I$.*

La démonstration est triviale.

Posons, pour $I\in\mathfrak{M}\setminus\{N\}$,

$$\hat{S}_I=S_{\mathfrak{M},I}=\bigcap_{I\subsetneqq J\in\mathfrak{M}}\bigcap_{i,j\in I}\{\hat{x}\in\hat{X}\,|\,x_J(i,j)=0\}\,,$$

pour $\hat{x}\in\hat{X}$,

$$\mathfrak{M}_{\hat{x}}=\{I\in\mathfrak{M}\,|\,\hat{x}\in\hat{S}_I,\ \sharp I\geqq 3\}\cup\{I\mid \sharp I=2,\ \hat{x}\in\hat{S}_I,\ \{J\mid \sharp J=2,\ \hat{x}\in\hat{S}_J,\ I\cap J\neq\emptyset\}=\emptyset\}$$

et

$$\mathfrak{M}'_{\hat{x}}=\{I\in\mathfrak{M}\,|\,\hat{S}_I\ni\hat{x}\}\setminus\mathfrak{M}_{\hat{x}}\,.$$

Pour $\hat{x}\in\hat{X}$, $\mathfrak{M}''_{\hat{x}}$ signifie le sous-ensemble de $\mathfrak{N}$ qui vérifie (1) pour tout $I\in\mathfrak{M}'_{\hat{x}}$, il existe un et un seul $J\in\mathfrak{M}''_{\hat{x}}$ tel que $I\subset J$, (2) si $I,J\in\mathfrak{M}'_{\hat{x}}$ et $I\cap J\neq\emptyset$, il existe un $K\in\mathfrak{M}''_{\hat{x}}$ tel que $I\cup J\subset K$ et (3) si $I\subset J\in\mathfrak{M}''_{\hat{x}}$ et $\sharp I=2$, $I\in\mathfrak{M}'_{\hat{x}}$; l'existence de $\mathfrak{M}''_{\hat{x}}$ est évidente. Un sous-ensemble $\mathfrak{L}$ de $\mathfrak{N}$ sera dit admettre la *condition* (AR)

3) X_I étant de dimension 0, lorsque $\sharp I=2$, on peut éliminer la deuxième condition de (SP). C'est seulement pour abréger.

si, pour tous les paire $I,\ J\in\mathfrak{L}$, *on a* $I\cap J\neq\emptyset$, $I\subset J$ *ou bien* $I\supset J$. Un $\mathfrak{L}$ admettant (AR) et un $I\in\mathfrak{N}$ étant donnés, on désigne par $M_{\mathfrak{L}}(I)$ l'élément K de $\mathfrak{L}$ tel que $K\supsetneqq I$ et qu'il n'existe aucun $J\in\mathfrak{L}$ tel que $K\supsetneqq J\supsetneqq I$.

PROPOSITION 2. *Soit* $I,\ J\in\mathfrak{M}$ *et* $I\subsetneqq J$, *et* $\hat{x}\in\hat{X}$. *Alors,* (1) *si on a* $x_I(i,\ j)=0$ $(i,\ j\in I)$ *en* $\hat{x}$, *on a aussi* $x_J(i,\ j)=0$, *et* (2) *si on a* $x_J(i,\ j)=0$ *pour tous les* $i,\ j\in I$, *il existe un* $K\in\mathfrak{M}$ *avec* $I\subsetneqq K\subset J$ *tel que* $\hat{x}\in\hat{S}_K$.

La démonstration est évidente.

LEMME 2. $\mathfrak{M}$ *étant comme plus haut,* $\hat{X}=X_{\mathfrak{M}}$ *est une variété regulière.*

Ce sera démontré en même temps que Lemme 3.

LEMME 3. *Soit* $\mathfrak{M},\ \hat{X},\ \hat{x}$, *comme plus haut. Alors* (1) $\mathfrak{M}_{\hat{x}}\cup\mathfrak{M}''_{\hat{x}}$ *admet* (AR), (2) *en posant* $\mathfrak{M}_{\hat{x}}=\{I_\alpha\}$ $(1\leqq\alpha\leqq p)$, $\mathfrak{M}''_{\hat{x}}=\{K_\beta\}$ $(1\leqq\beta\leqq q)$ *et* $K_\beta=\{\beta_0,\ \cdots,\ \beta_{m_\beta}\}$, *on peut trouver un système de coordonnées, dans un voisinage* V *de* $\hat{x}$,

$$\hat{x}_\alpha\,(1\leqq\alpha\leqq p'),\ \hat{x}_{\beta\gamma}\,(1\leqq\beta\leqq q,\ 1\leqq\gamma\leqq m_\beta)\quad \textit{avec}\quad p'+\sum_{\beta=1}^{q}m_\beta=n\quad \textit{et}\quad p\leqq p'$$

tel que $\hat{S}_{I_\alpha}\cap V=\{\hat{x}_\alpha=0\}$ *et que*

$$\bigcup_{I\in\mathfrak{M}'_{\hat{x}}}(\hat{S}_I\cap V)=\bigcup_{1\leq\beta\leq q}\ \bigcup_{0\leq\gamma<\delta\leq m_\beta}\{\hat{x}_{\beta\gamma}=\hat{x}_{\beta\delta}\}$$

où $\hat{x}_{k0}\equiv 0$, *et* (3) $\mathfrak{M}\cap\mathfrak{M}''_{\hat{x}}=\emptyset$ *et, si* $I\in\mathfrak{M}'_{\hat{x}}$, *on a* $\#I=2$.

En effet, (3) est évident. Si $I,\ J\in\mathfrak{M}''_{\hat{x}}$, on a $I\cap J=\emptyset$ par la définition. Si $I\cup J=K\neq I,\ J$ et $I\cap J\ni\alpha$ et si $K\in\mathfrak{M}$, on a, pour tous les $i,\ j\in K$, $x_K(i,\ \alpha)=x_K(j,\ \alpha)=0$. Donc $x_K(i,\ j)=0$, ce qui contredit, et par suite (1) est démontré.

Pour tout $J\in\mathfrak{L}=\mathfrak{M}_{\hat{x}}\cup\{N\}$, soit $\{J_\alpha\,|\,1\leqq\alpha\leqq n_J\}=\{I\,|\,M_{\mathfrak{L}}(I)=J\}$ et $J_0=J\setminus\left(\bigcup_{\alpha=1}^{n_J}J_\alpha\right)$, et posons

$$C_{\hat{x}}=\bigcup_{J\in\mathfrak{L}}\left\{u_{J,j}\,|\,j\in J_0\cup\left(\bigcup_{\alpha=1}^{n_J}\{j_{J_\alpha},\ k_{J_\alpha}\}\right)\right\}.$$

$C_{\hat{x}}$ contient exactement n fonctions holomorphes en $\hat{x}$, non-constantes. Et pour tout $I\in\mathfrak{M}$, $u_{I,i}$ $(i\in I)$ sont des polynomes de $u_{J,j}\in C_{\hat{x}}$. En effet, si $I=J\in\mathfrak{L}$ et $i\in J_0$, c'est evident. Si $I=J\in\mathfrak{L}$ et si c'est vrai pour tout J_α $(\alpha=1,\ \cdots,\ n_J)$, pour $i\in J_\alpha$, on a $u_{J,i}=u_{J,k}-u_{J_\alpha,i}(u_{J,k}-u_{J,j})$ $(k=k_{J_\alpha},\ j=j_{J_\alpha})$. Si $I\notin\mathfrak{L}$, il existe, par Proposition 2, un $J\in\mathfrak{L}$ tel que $x_J(j_I,\ k_I)\neq 0$ et on a $u_{I,i}=x_J(i,\ j_I,\ k_I)$. En conséquence, par récurrence et Proposition 1, Lemme 2 est démontré.

Quant à (2), il ne faut que poser $\hat{x}_\alpha=u_{L,s}-u_{L,t}$ $(L=M_{\mathfrak{L}}(I_\alpha),\ s=j_{I_\alpha},\ t=k_{I_\alpha})$ $(1\leqq\alpha\leqq p)$, $\hat{x}_{\beta\gamma}=u_{L,\beta_\gamma}-u_{L,\beta_0}$ $(L=M_{\mathfrak{L}}(J_\beta))$ et que déterminer $\hat{x}_\alpha$ $(p<\alpha\leqq p')$ convenablement. C. Q. F. D.

LEMME 4. $\mathfrak{M}$ *et* $\hat{X}$ *étant comme plus haut, on a* $\hat{S}=\bigcup_{I\in\mathfrak{M}}\hat{S}_I=\hat{\sigma}^{-1}(S)$ *et, pour* $I\in\mathfrak{M}$, $\hat{\sigma}(\hat{S}_I)=\{x\in X\,|\,x_\alpha=x_\beta,\ \alpha,\ \beta\in I\}$. *Et de plus, si* $\mathfrak{M}_{\hat{x}}\cap\{I\,|\,\#I\geqq 3\}=\emptyset$, $\hat{\sigma}$ *est biholomorphe en* $\hat{x}$.

La démonstration est triviale.

THÉORÈME 1_b. *Soit $\mathfrak{M}$ admettant* (SP), $\hat{X}=X_{\mathfrak{M}}$ *et P une permutation* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & n+1 & \infty \\ p_0 & p_1 & \cdots & p_{n+1} & p_\infty \end{pmatrix}$, *posons* $\mathfrak{M}_P=\{I_P \mid I\in\mathfrak{M}\}$ *où, avec* $P(I)=\{p_i \mid i\in I\}$, $I_P=P(I)$ $(P(I)\not\ni\infty)$ *et* $I_P=\boldsymbol{N}\setminus P(I)$ $(P(I)\ni\infty)$, *et supposons que* $\mathfrak{M}_P$ *aussi admette* (SP). *Alors il existe l'application biholomorphe* $\hat{F}_P\colon \hat{X}\to\hat{X}'=X_{\mathfrak{M}_P}$ *qui est l'extension de* F_P, *et on a* $\hat{F}_P(\hat{S}_I)=\hat{S}'_{I_P}=S_{\mathfrak{M}_P, I_P}$.

En effet, en posant $p_k=\infty$, on définit $\hat{F}_P\colon \hat{x}\mapsto\hat{x}'$ de la manière suivante. Pour $I\in\mathfrak{L}=\mathfrak{M}_{\hat{x}}\cup\{\boldsymbol{N}\}$, si $k\notin I$ et $i\in I$, on pose, avec $x'_{I_P}(p_{j_I}, p_{k_I})\neq 0$,

$$u'_{I_P, p_i}=x'_{I_P}(p_i, p_{j_I}, p_{k_I}, \infty)=u_{I,i}/x_{I'}(i, j_I, k),$$

où $I'=M_{\mathfrak{L}}(I\cup\{k\})$; ce qui est possible vu Lemme 3 et le fait $k\notin I$. Si $P(I)\ni\infty$, pour $i\notin I$, en choisissant un $j\in M_{\mathfrak{L}}(I)\setminus I$ on pose

$$x'_{I_P}(p_i, p_j, p_\infty)=x_{I'}(i, j, \infty, k),$$

où $I'=M_{\mathfrak{L}}(I\cup\{i\})$; Ce qui est possible parce que $x_{I'}(i, k)\neq 0$ vu Lemme 3 et le fait $k\in I$. Alors, comme dans la démonstration de Lemme 2 et Lemme 3, l'application $\hat{F}_P$ est bien définie et biholomorphe. C.Q.F.D.

2. Espace $\hat{X}_{p,q}$ et voisinage de $\hat{S}_I$. Soit Y (resp. Z) l'espace projectif de dimension p (resp. q) avec les coordonnées à déplacements y_i $(i\in\boldsymbol{N}_p)$ (resp. z_j $(j\in\boldsymbol{N}_q)$), $\mathfrak{M}_Y$ (resp. $\mathfrak{M}_Z$) un sous-ensemble de $\mathfrak{N}_p$ (resp. $\mathfrak{N}_q$) admettant (SP) et

$$X_{pqij}=\{y\in Y \mid y_i\neq y_0\}\times\{z\in Z \mid z_j\neq z_0\}\times V_{pq}$$

où V_{pq} est l'espace numérique avec les coordonnées v_k $(1\leqq k\leqq r=n-p-q)$. Et définissons un espace fibré vectoriel à base $Y\times Z$ en identifiant, dans l'ensemble $\bigcup_{i=1}^{p+1}\bigcup_{j=1}^{q+1} X_{pqij}$, les deux point $(y, z, v)\in X_{pqij}$ et $(y', z', v')\in X_{pqi'j'}$ lorsqu'on a $y=y'$, $z=z'$ (comme point de l'espace projectif) et

$$v_k/y_i z_j=v'_k/y'_{i'}z'_{j'} \quad (1\leqq k\leqq r), \qquad (\text{avec } y_0=y'_0=0,\ z_0=z'_0=0)$$

dont on désigne par π_{pq} la projection. Puis, en posant $\hat{Y}=Y_{\mathfrak{M}_Y}$, $\hat{Z}=Z_{\mathfrak{M}_Z}$, $\sigma_Y=\sigma_{Y,\mathfrak{M}_Z}$ et $\sigma_Z=\sigma_{Z,\mathfrak{M}_Z}$, désignons par $\hat{X}_{pq}=X_{pq\mathfrak{M}_Y\mathfrak{M}_Z}$ (avec la projection $\hat{\pi}_{pq}$) l'espace fibré vectoriel à base $\hat{Y}\times\hat{Z}$ qui est induit par $\sigma_Y\times\sigma_Z$.

Ensuite préparons encore quelques définitions et notations. $\hat{O}_{pq}$ est la zéro-section de $\hat{X}_{pq}$ et $\hat{U}_{pq}=\hat{U}_{pq\mathfrak{M}_Y\mathfrak{M}_Z}$ est un voisinage de $\hat{O}_{pq}$ qui est l'ensemble de points de l'intérieur de, avec $y_0=z_0=0$,

$$\hat{\sigma}_{pq}^{-1}\Bigl(\bigcup_{i=1}^{p+1}\bigcup_{j=1}^{q+1}\{(y, z, v)\in X_{pqij} \mid |y_\alpha z_\beta v_\gamma/y_i z_j|\leqq 1\ (1\leqq\alpha\leqq p+1,\ 1\leqq\beta\leqq q+1,\ 1\leqq\gamma\leqq r)\}\Bigr)$$

où $\hat{\sigma}_{pq}\colon \hat{X}_{pq}\to X_{pq}$ est l'application induit par $\sigma_Y\times\sigma_Z$. Pour $J\in\mathfrak{N}_p$ (resp. $\mathfrak{N}_q$), soit $\hat{S}_{Y,J}$ (resp. $\hat{S}_{Z,J}$) défini comme $\hat{S}_I$ et notons

$$\hat{\pi}_{pq}^{-1}(\hat{S}_{Y,J}\times\hat{Z})=\hat{S}_{pqY,J} \qquad (\text{resp. } \hat{\pi}_{pq}^{-1}(\hat{Y}\times\hat{S}_{Z,J})=\hat{S}_{pqZ,J}).$$

Surtout on désigne $U_{pq\mathfrak{M}_Y\mathfrak{M}_Z}$ (resp. $\hat{S}_{pqY,J}$, $\hat{S}_{pqZ,J}$ et $\hat{O}_{pq}$) seulement par $\hat{U}_p = U_{p\mathfrak{M}_Y\mathfrak{M}_Z}$ (resp. $\hat{S}_{pY,J}$, $\hat{S}_{pZ,J}$ et $\hat{O}_p$) si $q=n-p-1$ et par $\hat{U}'_p = U'_{p\mathfrak{M}_Y}$ (resp. $\hat{S}'_{pY,J}$ et $\hat{O}'_p$) si $q=0$. $\hat{U}_p$ et $\hat{U}'_p$ étant donnés, par l'intermédiaire de l'application: $(y, z, v) \in X_{p\,n-p-1\,ij} \mapsto (y', v') \in X_{p0i1}$ définie par les formules $y=y'$ et $v'_\beta = vz_\beta/z_j$ $(1 \leqq \beta \leqq r' = n-p)$, une application holomorphe, birationnelle $\phi_p = \phi_{U_p} : \hat{U}_p \to \hat{U}'_p$ est bien définie.

LEMME 5. *$\hat{U}_p$, $\hat{U}'_p$ et ϕ_p étant comme plus haut, on a*

$$\phi_p(\hat{S}_{pY,J}) = \hat{S}'_{pY,J} \qquad (J \in \mathfrak{M}_Y),$$

$$\phi_p(\hat{S}_{pZ,J}) = \{v_{j_0} = v_{j_1} = \cdots = v_{j_{q+1}}\} \qquad (q=n-p-1,\ v_0 \equiv 0,\ J = \{j_0 \cdots j_{q+1}\}),$$

et

$$\phi_p(\hat{O}_p) = \hat{O}'_p .$$

Et, lorsque $p=n-2$, la restriction de ϕ_p sur $\hat{U}_p \setminus \hat{O}_p$ est biholomorphe.

La démonstration est triviale.

Etant donné $\mathfrak{M}$ admettant (SP), $\hat{X}$, $I \in \mathfrak{M}$ et $i_0 \in I$, on désigne par $\hat{U}_I = U_{\mathfrak{M},I} = U_{\mathfrak{M},I,i_0}$ l'ensemble de points de l'intérieur de

$$\hat{\sigma}^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I,\, j\in N\setminus I} \{x \in X \mid x(i, j, i_0) \leqq 1\}\Big).$$

$\hat{U}_I$ est un voisinage de $\hat{S}_I$. Et soit $P_Y = P_{Y,i_0}$ (resp. P_Z) une application biunivoque de I (resp. $N \setminus I$) sur N_p avec $p = \sharp I - 2$ et $P_Y(i_0) = 0$ (resp. $N_q \setminus \{0\}$ avec $q=n-p-1$), et posons $\mathfrak{M}_Y = \{P_Y(J) \mid J \in \mathfrak{M},\ J \subsetneqq I\}$ et $\mathfrak{M}_Z = \{P_Z(J) \mid J \in \mathfrak{M},\ J \cap I = \emptyset\} \cup \{P_Z(J \setminus I) \cup \{0\} \mid J \supsetneqq I\}$. $\mathfrak{M}_Y$ et $\mathfrak{M}_Z$ admettent (SP). Puis définissons une application

$$\phi_I = \phi_{I,\mathfrak{M},P_Y,P_Z,i_0} : \hat{U}_I \longrightarrow \hat{U}_p$$

par l'intermédiaire de l'application: $\hat{U}_I \setminus \hat{S} \to X_{pqij}$ avec $\hat{x} \mapsto (y, z, v)$ où $y(\alpha, 0) = y_\alpha - y_0 = x(P_Y^{-1}(\alpha), i_0)$ $(1 \leqq \alpha \leqq p+1)$, $z(\beta, 0) = 1/x(P_Z^{-1}(\beta), i_0)$ $(1 \leqq \beta \leqq q+1)$ et $v = x(P_Y^{-1}(i), P_Z^{-1}(j), i_0)$.

LEMME 6. *L'application ϕ_I plus haut est bien définie et biholomorphe. D'ailleurs, on a, pour $J \in \mathfrak{M}$,*

$$\phi_I(\hat{S}_J) = \hat{O}_P \quad (J=I), \qquad = \hat{S}_{pY,P_Y(J)} \quad (J \subsetneqq I)$$
$$= \hat{S}_{pZ,P_Z(J)} \quad (I \cap J = \emptyset) \quad \text{et} \quad = \hat{S}_{pZ,P_Z((J\setminus I)\cup\{0\})} \quad (J \supsetneqq I).$$

En effet, Théorème 1_b assure que ϕ_I est bien définie et biholomorphe, et les autre enoncés sont évidents.

Enfin définissons encore une modification $\hat{X}$ de X. Soit $\mathfrak{M} = (\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2)$ une paire de sous-ensembles de $\mathfrak{N}$ qui admet la condition

(SP): $\mathfrak{M}_1$ *admet* (SP), $\mathfrak{M}_2 \subset \{I \in \mathfrak{M}_1 \mid \sharp I = n\}$ *et pour* $I, J \in \mathfrak{M}_2$, $S_{\mathfrak{M}_1,I} \cap S_{\mathfrak{M}_1,J} = \emptyset$, *où* $S_{\mathfrak{M}_1,I}$ *est la sous-variété dans* $\hat{X}_1 = X_{\mathfrak{M}_1}$.

Alors il existe une variété $\hat{X} = X_{\mathfrak{M}}$ et une application birationnelle $\phi : \hat{X}_1 \to \hat{X}$ telles que ψ est biholomorphe sur $\hat{X}_1\setminus(\bigcup_{I\in\mathfrak{M}_2} S_{\mathfrak{M}_1,I})$ et que, pour tout $I\in\mathfrak{M}_2$, l'application $\psi\circ\psi_I^{-1}\circ\psi_p^{-1}$: $\hat{U}'_p\to\psi(U_{1I})$ (avec $\sharp I=p+2=n$) est biholomorphe, où U_{1I} est le voisinage de $S_{\mathfrak{M}_1,I}$ dans $\hat{X}_1$ et où, en définissant ψ_I, on détermine $i_0\in I$, P_Y et P_Z arbitrairement. Désignons $\psi(S_{\mathfrak{M}_1,I})$ par $\hat{S}_I$ et $\bigcup_{I\in\mathfrak{M}_1}\hat{S}_I$ par $\hat{S}$.

LEMME 3'. *Soit* $\mathfrak{M}=(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2)$ *admettant* (SP), $\hat{X}=X_{\mathfrak{M}}$, *un point* $\hat{x}\in\psi(\hat{S}_{\mathfrak{M}_1,K})$ *avec* $K\in\mathfrak{M}_2$ *et, avec* $\mathfrak{L}=\mathfrak{M}_1\setminus\mathfrak{M}_2$ *et* $\{i, j\}=\boldsymbol{N}\setminus K$,

$$\mathfrak{M}'_{\hat{x}}=\{I\in\mathfrak{L}\mid \sharp I=2,\ \hat{x}\in\hat{S}_I,\ \text{il existe un } J \text{ tel que } \sharp J=2,\ I\cap J\neq\emptyset \text{ et } \hat{x}\in\hat{S}_J\}\ ,$$

$$\mathfrak{M}_{\hat{x}}=\{I\in\mathfrak{L}\mid\hat{x}\in\hat{S}_I,\ \sharp I\leqq n-1\}\setminus\mathfrak{M}'_{\hat{x}}$$

et

$$\mathfrak{M}'''_{\hat{x}}=\{I\in\mathfrak{L}\mid\hat{x}\in\hat{S}_I\}\setminus(\mathfrak{M}_{\hat{x}}\cup\mathfrak{M}'_{\hat{x}})\,.$$

Alors on a

$$\mathfrak{M}'''_{\hat{x}}=\{K\cup\{i\},\ K\cup\{j\},\ \{i, j\}\}$$

et il existe un sous-ensemble $\mathfrak{M}''_{\hat{x}}$ *de* $\mathfrak{N}\setminus\mathfrak{M}_1$ *tel que* $\mathfrak{M}''_{\hat{x}}\cup\mathfrak{M}_{\hat{x}}\cup\{K\}$ *admette* (AR) *et qu'un* I *avec* $\sharp I=2$ *et* $\{i, j\}\neq I$ *soit un élément de* $\mathfrak{M}'_{\hat{x}}$ *si et seulement s'il existe un* $J\in\mathfrak{M}''_{\hat{x}}$ *avec* $I\subset J$.

En effet, il ne faut que remarquer Lemme 3 et la définition de $\hat{X}$.

THÉORÈME 1_c. *Soit* $\mathfrak{M}=(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2)$ *admettant* (SP) *et* P *une permutation de* $\boldsymbol{N}'$ *avec* $p_\infty=\infty$, *et posons* $\mathfrak{M}_P=(\mathfrak{M}_{1P}, \mathfrak{M}_{2P})$ *avec* $\mathfrak{M}_{\alpha P}=\{I_P|I\in\mathfrak{M}_\alpha\}$ $(\alpha=1, 2)$. *Alors il existe une application biholomorphe* $\hat{F}_P$: $\hat{X}\to X_{\mathfrak{M}_P}$ *dont la restriction sur* $\hat{X}\setminus\hat{S}$ *coïncide avec* F_P *et dont on a* $\hat{F}_P(S_{\mathfrak{M},I})=S_{\mathfrak{M}_P,I_P}$ $(I\in\mathfrak{M}_1\setminus\mathfrak{M}_2)$.

En effet, c'est évident d'après Théorème 1_b et la définition de $\hat{X}$.

Un ensemble analytique T sur une variété de dimension n sera dit admettre la *condition* (GN) *ou* $(\mathrm{GN})_{n_1n_2}$ *en un point* y *avec les composantes* T_i $(1\leqq i\leqq n'_1)$ *et* $T_{j\alpha}$ $(1\leqq j\leqq n_2,\ \alpha=0, 1, 2)$ *s'il existe un voisinage* V *de* y *et un système de coordonnées* y_i $(1\leqq i\leqq n'_1)$ *et* $y_{j\alpha}$ $(1\leqq j\leqq n_2,\ \alpha=1, 2)$ *avec* $n'_1+2n_2=n$ *et* $n_1\leqq n'_1$ *tel qu'on ait*

$$T_i\cap V=\{y_i=0\}\ ,\quad T_{j\alpha}\cap V=\{y_{j\alpha}=0\}\qquad (\textit{avec } y_{j0}=y_{j1}-y_{j2})\,.$$

LEMME 7. $(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2)$ *admettant* (SP), $\hat{S}$ *est la réunion des sous-variétés régulières* $\hat{S}_I$ $(I\in\mathfrak{M}_1\setminus\mathfrak{M}_2)$. *Et si* $\mathfrak{M}_1\supset\{I\mid\sharp I\geqq 4\}$, $\hat{S}$ *admet* (GN) *partout sur* $\hat{X}$.

En effet, la première partie est évident et on voit la deuxième par Lemme 3', Lemme 4 et Lemme 5.

3. Etats des ω_i sur les points critiques. Maintenant nous examinons les ramifications des ω_i sur leurs points critiques. D'abord présentons quelques définitions. Une variété Y de dimension n, un sous-ensemble analytique T de Y de codimension 1, un assortiment $w=(w_1, w_2, \cdots, w_{n+1})$ des fonctions localement holomorphes sur $Y\setminus T$ et un groupe G de transformations linéaires de dimension $n+1$ étant donnés, on dira que *w est de type linéaire ou de type G* lorsque w_i

sont linéairement indépendents et toute branche de w est un transformé d'une branche par un élément de G. Un point $y \in Y$, une fonction f localement holomorphe sur $V \setminus T$ où V est un voisinage de y étant donnés et T étant composé des sous-variétés $T_i = \{y_i = 0\}$ $(1 \leqq i \leqq r)$ sur V où y_i sont d'ordre 1 sur $V \cap T_i$, on dira que $w_f = (fw_1, \cdots, fw_{n+1})$ *admet la condition* $B((T), (e), (m))$ *avec* $(T) = (T_i)$, $(e) = (e_i)$, $(m) = (m_i)$ $(1 \leqq i \leqq r)$ lorsque le déterminant wronskien de w_f est de la forme

$$g \prod_{i=1}^{r} y_i^{m_i e_i - 1}$$

où g est un fonction holomorphe ne s'annulant pas en y et que, un voisinage V_0 de y existant, pour tout point $y' \in (T_i \setminus (\bigcup_{1 \leq \alpha \leq r,\, \alpha \neq i} T_\alpha)) \cap V_0$ on a, si e_i n'est pas entier, $fw_k = \sum_{j=1}^{m_i} a_{kj} y_i^{e_i} g_j + \sum_{j=m_i+1}^{n+1} a_{kj} g_j$ $(1 \leqq k \leqq n+1)$ où g_i sont holomorphe en y' et a_{kj} sont constants et, si e_i est entier,

$$fw_k = \sum_{j=1}^{m_i - 1} a_{kj} y_i^{e_i} g_i + \sum_{j=m_i+1}^{n+1} a_{kj} g_j + a_{km_i} (y_i^a g' \log y_i + y_i^b g'')$$

ou g_j, g', g'' sont holomorphes, $a = \max(e_i, 0)$ et $b = \min(e_i, 0)$.

LEMME 8. *Soit* $\hat{X} = X_{\mathfrak{N}}$, $\mathfrak{N}_{\hat{x}} = \{I \in \mathfrak{N} \mid \hat{S}_I \ni \hat{x}\} = \{I_i\}$ $(1 \leqq i \leqq r)$ *avec* $\hat{x} \in \hat{X}$ *et* w_k $(1 \leqq k \leqq n+1)$ *les* $n+1$ *solutions linéairement indépendantes de* (F_1). *Alors, si* $f = \prod_{1 \leq i \leq r,\, \{0, n+1\} \subset I_i} \hat{x}_i^{-\lambda_\infty}$ *où* $\hat{S}_i = \{\hat{x}_i = 0\}$, w_f *admet*

$$B((\cdots, \hat{S}_{I_i}, \cdots), (\cdots, \lambda_{I_i}, \cdots), (\cdots, \sharp I_i - 1, \cdots)).$$

En effet la condition concernant au wronskien est montrée de ce que le wronskien des $\omega_i - \omega_0$ par rapport à $x_1 \cdots x_n$ (avec $x_0 \equiv 0$, $x_{n+1} \equiv 1$) est, à facteur constant près, égal à

$$\prod_{0 \leq i < j \leq n+1} (x_i - x_j)^{\lambda_{ij} - 1}$$

([**12**] Corollaire 1 de Théorème 1). Quant à l'autre, il ne faut que le démontrer au cas où $r = 1$ et on peut supposer, sans restreindre la généralité, que $I_1 = I = \{0, 1, \cdots, p\}$ et $\{x_{I,k}\}$ $(k \in I)$ et $\{x_l\}$ $(l \in \boldsymbol{N})$ soient croissants en $\hat{x}$, puisqu'il ne s'agit que les points reguliers de $\hat{S}$, que, par une permutation P où le changement des ω_k par l'application F_P est explicitement donné dans Section 5, on peut transformer I à cette forme et que la pseudoconvexité et le théorème d'identité assurent la rationalité de la dernière hypothèse.

En ce cas, désignons par w'_k $(0 \leqq k \leqq n+1)$ le prolongement analytique de ω_k le long d'une courbe: $x_i = x_i(t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ telle que $\{x_i(t)\}$ soit croissant si $t \neq 1$ et $x_i(0) = a_i$. Il est evident que w'_j $(p+1 \leqq j \leqq n+1)$ sont holomorphes. Avec $x_0 \equiv 0$ et $x_{n+1} \equiv 1$, $\xi_i = x_i / x_p$ et x_j $(1 \leqq i < p \leqq j \leqq n)$ sont les coordonnées en $\hat{x}$. Et en posant $u = v x_p$, on a

$$\prod_{\alpha=0}^{n+1} (u - x_\alpha)^{\lambda_\alpha - 1} du = \sum_{\nu=0}^{\infty} h_\nu (x_{p+1}, \cdots, x_n) x_p^{\lambda_I + \nu} v^\nu \prod_{\alpha=0}^{p} (v - \xi_\alpha)^{\lambda_\alpha - 1} dv$$

où $\xi_0=0$ et $\xi_p=1$ et où h_ν sont holomorphes en $\hat{x}$. Par suite, on a, si $1\leqq i\leqq p$,

$$w_i'-w_0'=x_p^{\lambda_I}\sum_{\nu=0}^{\infty}h_\nu x_p^\nu\int_0^{\xi_i}v^\nu\prod_{\alpha=0}^{p}(v-\xi_\alpha)^{\lambda_\alpha-1}dv$$

où on définit cette intégrale par un double lacet si quelques $\mathrm{Re}\lambda_\alpha$ sont non-positives. Puisque $(1-\mu_I)w_0'+g+g'=0$ avec $g=\sum_{\alpha=0}^{p}\tilde{\mu}_\alpha(w_\alpha'-w_0')$ et $g'=\sum_{\alpha=p+1}^{n+1}\tilde{\mu}_\alpha w_\alpha'$, les w_k' $(p+1\leqq k\leqq n+1)$ et $w_k'-w_0'$ $(1\leqq k\leqq p)$ sont linéairement indépendentes si $\mu_I\neq 1$, ce qui achève la preuve si $\mu_I\neq 1$. Lorsque $\mu_I=1$, d'après la forme de la matrice correspondant à ρ_I, on a

$$\rho_I w_0'=w_0'+g$$

et par suite

$$w_0'=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}g\log x_p+h$$

où h est uniforme et holomorphe sur $\{x_p\neq 0\}$. Ensuite, en calculant l'intégrale d'Euler en divisant le chemin en deux parties: $|u|\leqq\varepsilon$ et $|u|\geqq\varepsilon$, ε étant suffisamment petit, on voit que $|w_0'|/|x_p|^{\lambda-\eta}$ (avec $\eta>0$ et $\lambda=\min(\lambda_I, 0)$) est borné lorsque x_p se situe sur un domaine angulaire au centre l'origine. Puisque $g+g'=0$ et que g' est holomorphe, ce lemme est démontré aussi au cas où $\mu_I=1$.

§ 3. Condition nécessaire.

On déjà savait que les $n+1$ solutions de (F_1) définissent une application ω localement biholomorphe de $\tilde{\mathfrak{D}}$ sur l'espace projectif à n dimensions, en les regardant comme les coordonnées homogènes. Maintenant examinons la condition pour que l'inverse ω^{-1} soit uniforme.

1. Condition nécessaire.

LEMME 9. *Soient $f_1, \cdots, f_n$ des fonctions holomorphes dans un voisinage V de l'origine O de l'espace numérique avec les coordonnées $x_1, \cdots, x_n$, λ un nombre complexe et p un entier positif avec $p\leqq n$. Et définissons une application ω par*

(a) $y_i=x_1^\lambda f_i$ $(1\leqq i\leqq p)$, $y_j=f_j$ $(p+1\leqq j\leqq n)$
(λ n'est pas un entier ni l'inverse d'un entier),

(b) $y_1=\log x_1+x_1^\lambda f_1$, $y_i=x_1^\lambda f_i$ $(2\leqq i\leqq p)$, $y_j=f_j$ $(p+1\leqq j\leqq n)$
(λ est un entier négatif, et $f_i(O)=0$ $(2\leqq i\leqq p)$),

(c) $y_1=x_1^\lambda\log x_1+f_1$, $y_i=x_1^\lambda f_i$ $(2\leqq i\leqq p)$, $y_j=f_j$ $(p+1\leqq j\leqq n)$
(λ est un entier positif et $f_j(O)=0$ $(p+1\leqq j\leqq n)$).

Alors, si le déterminant jacobien est de la forme $x_1^{\lambda p-1}f_0$ où f_0 est une fonction holomorphe ne s'annulant jamais, l'inverse ω^{-1} n'est pas uniforme.

En effet, (a) on peut supposer $f_i(O)=0$ $(2\leqq i\leqq p)$, en considérant une transformation linéaire. Par la forme du jacobien, on a $f_1(O)\neq 0$ et $\dfrac{\partial(f_2, \cdots, f_n)}{\partial(x_2, \cdots, x_n)}\neq 0$ en O. Donc, comme $f_i(O)=0$ $(2\leqq i\leqq p)$, on peut supposer $x_i=f_i$ $(2\leqq i\leqq n)$ et par suite, avec $x_i=0$ $(2\leqq i\leqq n)$, le problème se réduit au cas d'une variable: est-ce que l'inverse de $y=x^\lambda f(x)$ est uniforme?

(b) En supposant $x_i=f_i$ $(2\leqq i\leqq p)$, on encore arrive à l'uniformité de l'inverse de $y=\log x+x^\lambda f(x)$ avec $f(0)\neq 0$. Soient ε une constante positive, C une courbe sur le plan de x formée par $|x|=2\varepsilon$, $|x|=\varepsilon/2$, $\arg x=\pi/\lambda$, $\arg x=-\pi/\lambda$ qui contient $x=\varepsilon$ dans son intérieur. En posant $F(x)=\log x+x^\lambda f(x)-\log\varepsilon-\varepsilon^\lambda f(\varepsilon)$, on a $F(\varepsilon)=0$, et, si ε est suffisamment petit, on a $|F(x)|>2\pi$ sur C; donc $(1/2\pi\sqrt{-1})\int_C d\log[F(x)-2\pi\sqrt{-1}]>0$; conséquemment il existe une valeur ε' $(\neq\varepsilon)$ avec $F(\varepsilon')=0$.

(c) Si on pose $y_i'=y_i/x^\lambda$ $(1\leqq i\leqq n)$, on arrive à (b). C. Q. F. D.

2. Valeurs de λ_I vérifiant les conditions nécessaires. Par le lemme précédent, on voit que, pour que l'inverse ω^{-1} soit uniforme, il faut que, pour tout $I\subset\mathfrak{N}$, $\lambda_I\in \boldsymbol{Z}^{-1}$. En effet, on n'a besoin que Lemme 9, Lemme 8 et la formule $g+g'=0$ dans la démonstration de Lemme 8.

Au cas d'une variable, il existe un nombre infini d'exemples où ces conditions sont vérifiées. Mais au cas de deux variables, il en existe seulement 27 à permutation près:

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
$\lambda_0=\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=$	2/3	3/5	5/8	5/9	7/12
$\lambda_\infty=$	1/3	3/5	1/2	7/9	2/3

	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
$\lambda_0=\lambda_1=\lambda_2=$	2/3	2/3	1/2	1/2	3/4	3/4	5/8	3/5	3/4	3/4
$\lambda_3=$	1/2	5/6	5/6	3/4	1/2	3/8	7/8	9/10	7/12	5/12
$\lambda_\infty=$	1/2	1/6	2/3	3/4	1/4	3/8	1/4	3/10	1/6	1/3

	(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	(22)
	2/3	7/12	7/12	3/5	5/9	3/4	5/8
	7/12	11/12	3/4	11/15	17/18	9/20	17/24
	5/12	1/3	1/2	7/15	7/18	3/10	5/12

	(23)	(24)	(25)
$\lambda_0=\lambda_1=$	7/12	5/12	7/12
$\lambda_2=\lambda_3=$	3/4	2/3	2/3
$\lambda_\infty=$	1/3	5/6	1/2

	(26)	(27)
$\lambda_0=\lambda_1=$	3/4	2/3
$\lambda_2=$	7/12	1/2
$\lambda_3=$	5/12	1/3
$\lambda_\infty=$	1/2	5/6

Au cas de trois variables, il en existe 7:

	(28)	(29)	(30)		(31)	(32)	(33)
$\lambda_0=\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=$	2/3	3/4	5/8	$\lambda_0=\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=$	2/3	3/4	3/4
$\lambda_\infty=$	2/3	1/4	7/8	$\lambda_4=$	5/6	1/2	7/12
(34) $\lambda_0=\lambda_1=\lambda_2=3/4,\ \lambda_3=\lambda_4=\lambda_\infty=7/12$				$\lambda_\infty=$	1/2	1/2	5/12

Au cas de quatre et cinq variables, il en existe respectivement un:

(35) $\lambda_0=\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=3/4,\ \lambda_\infty=1/2,$

(36) $\lambda_0=\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=\lambda_6=\lambda_\infty=3/4.$

Au cas de deux variables, ce liste n'est qu'une partie de celui de Le Vavasseur [**3**]. Son liste contient le cas où quelques-uns de λ_{ij} sont ± 1 qu'on doit exclure comme on vient de le voir, et aussi le cas où quelques-uns de λ_i sont entiers qu'on a exclu au début mais il reste encore la possibilité de construire des fonctions automorphes: un problème. Si $n=3$, on obtient ce liste comme ce qui suit: la méthode est tout à fait pareil au cas de deux variables. En effet, on peut supposer que $\lambda_0 \geqq \lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \lambda_3 \geqq \lambda_4 \geqq \lambda_\infty$. D'abord, (28) est une solution. Autrement il faut que $\lambda_{01}=1/2$, et par suite $\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq 5/8$; donc $\lambda_{02}=1/2$ et $\lambda_{12} \geqq 1/4$. Si $\lambda_{12}=1/4$, on a $\lambda_1=\cdots=\lambda_\infty=5/8$, $\lambda_0=7/8$. Si $\lambda_{12}=1/3$, $\lambda_0=5/6$, donc $\lambda_1=\lambda_2=2/3$. En conséquence, $\lambda_3=\lambda_4=2/3$, $\lambda_\infty=1/2$. Si $\lambda_{12}=1/2$, on a $\lambda_0=\lambda_1=\lambda_2=3/4$ et $\lambda_{03} \geqq 1/3$. Si $\lambda_3=1/3$, on a $\lambda_3=\lambda_4=\lambda_\infty=7/12$. Si $\lambda_{03}=1/2$, on a $\lambda_3=3/4$ et de suite en suite les autres.

§ 4. Fonctions automorphes provenant de F_1.

Nous allons maintenant dans tous les cas enoncés dans la section précédente construire un corps de fonctions automorphes.

1. Lemmes. On se donne d'abord une variété Y connexe de dimension n, un ensemble analytique T (resp. T_0) de Y composé d'un nombre fini de sous-variétés regulières de codimension 1 (resp. de quelques composantes de T) et $n+1$ fonctions $w=(w_1, w_2, \cdots, w_{n+1})$ localement holomorphes sur $Y \setminus T$. On peut regarder w comme application localement holomorphe dans l'espace projectif si tous les w_i ne s'annulent simultanément en aucun point. Et les notations y, $V=V_y$, Z_V, et respectivement w_f signifient un point de Y, un voisinage suffisamment petit de y, une variété connexe étalée au-dessus de V avec la projection π_V propre dont $\pi_V^{-1}(y)$ consiste en un point, et respectivement les fonctions $(fw_1, \cdots, fw_{n+1})$ où f est une fonction algebroïde en y.

REMARQUE. Après avoir pris un V, il y aura le cas où il faut raccourcir V, mais on utilisera la même notation V aussi pour le nouveau voisinage sans rien en dire. Et il en sera de même de Z_V. D'ailleurs, on confondra quelque fois T avec $T \cap V$, etc.

LEMME 10. *Supposons que T admette $(\mathrm{GN})_{n_1 n_2}$ avec les composantes T_i $(1 \leqq i \leqq n_1)$ et $T_{j\alpha}$ $(1 \leqq j \leqq n_2,\ \alpha=0, 1, 2)$, qu'il existe au plus un i, disons i_0, dont T_{i_0} est la* *seule composante de* T_0 *passant en* y *et qu'il existe une fonction algebroïde* f *telle que* w_f *admette* $B((\cdots T_i, \cdots, T_{j\alpha}, \cdots)(\cdots e_i, \cdots, e_{j\alpha}, \cdots)(\cdots m_i, \cdots, m_{j\alpha}, \cdots))$ *où* $e_{i_0}=0$, $0<e_i\in \boldsymbol{Z}^{-1}$ $(i\neq i_0)$, $m_i=m_{j\alpha}=1$ *et où* $e_{j\alpha}$ *satisfont à l'un de* (a), (b) *suivants à permutation des* α $(=0, 1, 2)$ *près*

(a) $e_{j1}=e_{j2}=1/2\,,\quad 0<e_{j0}\in \boldsymbol{Z}^{-1}\,,$

(b) $e_{j0}=1/2\,,\quad e_{j1}=e_{j2}=1/3\,.$

Alors il existe V *et* Z_V *tels que toute branche de* fw_k $(1\leqq k\leqq n+1)$ *soient localement holomorphe sur* $Z_{V_0}=Z_V\setminus Z_{T_0}$ $(Z_{T_0}=\pi_V^{-1}(T_0))$ *et que* w_f, *comme fonctions sur* Z_{V_0}, *admette* $B(Z_{T_0}, 0, 1)$ *en* $z=\pi_V^{-1}(y)$.

En effet avec $T_i=\{y_i=0\}$ et $T_{j\alpha}=\{y_{j\alpha}=0\}$ $(y_{j0}=y_{j1}-y_{j2})$, il ne faut que considérer comme Z_V le domaine riemannien défini par le prolongement analytique simultané de $y_i^{e_i}$, z_{j1} et z_{j2} $(1\leqq i\leqq n_1,\ 1\leqq j\leqq n_2)$ où $z_{j\alpha}$ $(\alpha=1, 2)$ sont définis, suivant le cas (a) ou (b), par

(a) $y_\alpha=(z_1^m-(-1)^\alpha z_2^m)^2$

(b) $y_1=[(z_1-\zeta^4z_2)(z_1+\zeta^5z_2)(z_1+\zeta^3(1+\zeta)z_2)(z_1-(1-\zeta)z_2)]^3$

$y_2=[(z_1+\zeta^4z_2)(z_1+\zeta z_2)(z_1-\zeta^2(1-\zeta)z_2)(z_1-(1-\zeta^5)z_2)]^3$

où $\zeta=\exp\pi\sqrt{-1}/6$ et où on désigne $y_{j\alpha}$, $z_{j\alpha}$ et respectivement $1/e_{j0}$ seulement par y_α, z_α et respectivement m. On a aussi

(a) $z_\alpha=(y_1^{1/2}-(-1)^\alpha y_2^{1/2})^{1/m}\,,\quad \dfrac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(z_1, z_2)}=g_1\cdot(y_1y_2)^{1/2}(y_1-y_2)^{1/m}$

ou

(b) $z_1=(\eta_2-\zeta^3\eta_0)^{1/2}\,,\quad z_2=[\zeta^3(\eta_2-\eta_1)]^{1/2}\,,\quad \dfrac{\partial(y_2, y_2)}{\partial(z_1, z_2)}=g_2\cdot(y_1y_2)^{2/3}(y_1-y_2)^{1/2}$

où $\eta_\beta^2=(y_1^{1/3}-\zeta^{4\beta}y_2^{1/3})/(1-\zeta^4)\zeta^{2(\beta-1)}$ $(\beta=0, 1, 2)$ et où g_1 et g_2 sont holomorphes et ne s'annulent pas en y. On voit donc, en supposant $f\equiv 1$ sans restreindre la généralité, que w_k $(1\leqq k\leqq n+1)$ sont localement holomorphes sur Z_{V_0} vu la propriété pseudoconvexe de domaine d'holomorphie. Ensuite, avec $z_0=y_{i_0}\circ\pi_V$, z_0 est une fonction holomorphe sur Z_V telle que $Z_{T_0}=\{z_0=0\}$ et il existe un point $z'\in Z_{T_0}$ tel qu'on ait $w_k=c_kg_0\log z_0+g_k$ $(1\leqq k\leqq n+1)$, g_k $(0\leqq k\leqq n+1)$ étant holomorphes en z' et c_k etant constantes. Par une transformation linéaire, on peut supposer $c_k=0$ $(k\geqq 2)$ et donc, w_k étant linéairement indépendantes, g_k $(k\geqq 2)$ sont holomorphe sur Z_V vu la pseudoconvexité. Par le prolongement analytique de w_1 le long d'un lacet par rapport à Z_{V_0}, on voit g_0 une combinaison linéaire des w_k $(k\geqq 2)$. Donc g_0, et par suite, g_1 sont aussi holomorphes sur Z_V, ce qui achève la démonstration.

Y, f, w, G, un sous-groupe G_0 de G, un élément $s_0\in G_0$ et une forme $F=|w_{n+1}|^2-\sum_{i=1}^{n}|w_i|^2$ étant données, on dira que la paire (w, G_0) admet la condition

$L(f, s_0, F)$ en y lorsque G_0 est engendré par s_i $(0 \leqq i \leqq n_0)$ avec $s_i s_0 = s_0 s_i$, que, d étant une valeur propre de s_i, on a $|d|=1$, que s_i est aussi une transformation linéaire de w_f avec $s_i(fw_k)=d_i f s_i(w_k)$ et $|d_i|=1$, que $F|f|^2$ est fini et positive en y et que G_0 rend F invariant.

LEMME 11. *Soit la situation de Lemme* 10, *et*, $G_0 \subset G$ *et* F *étant donnés, supposons que* (w, G_0) *admette* $L(f, s_0, F)$ *en* y *où* s_0 *est défini par* $\log y_{i_0} \mapsto \log y_{i_0} + 2\pi\sqrt{-1}$. *Alors, pour* $\varepsilon > 0$ *arbitraire, il existe un voisinage* V_ε *de* y *ne dépendant pas de* $s \in G_0$ *tel qu'on ait*

$$F/|s(w_{n+1})^2| < \varepsilon$$

sur $V_{0\varepsilon} = V_\varepsilon \setminus T_0$ *pour tout* $s \in G_0$.

En effet, d'après Lemme 10, on peut supposer sans restreindre la généralité que $f \equiv 1$ et qu'une seule composante T_{i_0} de T passe par y et par suite $Z_V = V$ et $z_0 = y_{i_0}$. On désigne, en abrégeant, w_{n+1}, w_n et respectivement $\sum_{i=1}^{n-1} |w_i|^2$ seulement par w, w' et respectivement W. Par une transformation linéaire rendant F invariant, on peut supposer $w = g_0 \log h + g$, $w' = a g_0 \log h + g'$ avec $h = y_{i_0}$, g_0, g' et g holomorphes en y et a constante, et w_i $(1 \leqq i \leqq n-1)$ holomorphes. Alors on a

$$F = (1-|a|^2)|g_0 \log h|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{g} - a\bar{g}') g_0 \log h + |g|^2 - |g'|^2 - W.$$

Comme $s_0^m(F) = F$ pour tout entier m, on a $|a|=1$ vu le coefficient de m^2 et par suit on peut supposer $a=1$; et selon le coefficient de m, on voit $\operatorname{Im}(\bar{g}' - g) g_0 = 0$ et par suite

$$g' - g = c g_0 \qquad (\text{avec } c \text{ constante réelle}).$$

Puisque $F > 0$, on a

$$c > 0.$$

Pour $s \in G_0$, posons

$$s(w) = bw + b'w' + W_b \qquad \left(\text{avec } W_b = \sum_{i=1}^{n-1} b_i w_i\right);$$

évidemment, avec $K = \sum_{i=1}^{n-1} |b_i|^2$ et $t = b + b'$, on a $|b|^2 = 1 + K + |b'|^2$ et

$$s(w) = t g_0 \log h + t g + c g_0 b' + W_b.$$

Or par les formules $s_0 s(w) = s(w) + 2\pi\sqrt{-1}\, t g_0$, $s s_0(w) = s(w) + 2\pi\sqrt{-1}\, s(g_0)$ et $s s_0 = s_0 s$, on a

$$s(g_0) = t g_0.$$

Donc, g_0 est une fonction propre pour tous les $s \in G_0$, et, s étant un produit des s_i, on a $|t|=1$ et par suite $\operatorname{Re} b'\bar{t} = -K/2$. En conséquence, on a

$$\begin{aligned} |s(w)|^2 &\geqq |g_0|^2 |\log h + c\bar{t} b'|^2 - |g|^2 - |W_b|^2 \\ &\geqq |g_0|^2 |\log|h| - cK/2|^2 - |g|^2 - KW \end{aligned}$$

et, donc, dans un voisinage suffisamment petit de y,

$$F/|s(w)|^2 \leqq [-2\mathrm{Re}(c|g_0|^2 \log h)+|g|^2]/(|g_0|^2 \log|h|)^2 \leqq -c/\log|h|$$

ce qui achève la démonstration, parce que g_0 ne s'annule pas vu le wronskien.

LEMME 12. *Y, T, T_0, w, G et F étant donnés, supposons que Y, T et T_0 soient compacts, que T_0 consiste en les composantes $T_0^{(j)}$ avec $T_0^{(i)} \cap T_0^{(j)} = \emptyset$ $(i \neq j)$ et qu'on soit dans la situation de Lemme* 10 *en tout point y de Y avec une fonction algebroïde f où le sous groupe G_0 est, si $y \in T_0^{(j)}$, le groupe des transformations de w obtenues par les prolongements analytiques dans un voisinage $Y^{(j)}$ suffisamment petit de $T_0^{(j)}$. Alors w définit une application w_Z localement biholomorphe d'une variété Z étalé au-dessus de Y_0 avec la projection π à la boule unité*

$$B = \left\{ \sum_{i=1}^{n} |w_i|^2 < |w_{n+1}|^2 \right\}$$

dans l'espace projectif aux coordonnées homogènes w_i $(1 \leqq i \leqq n+1)$; et de plus, si, pour une courbe l continue sur Z, la longueur L de $w_Z(l)$ mésurée par la métrique de Poincaré-Bergman

$$ds^2 = (|(dw, w)|^2 - (dw, dw)(w, w))/(w, w)$$

où $dw = (dw_1, \cdots, dw_{n+1})$ et, par exemple, $(dw, w) = \sum_{i=1}^{n} \overline{w}_i dw_i - \overline{w}_{n+1} dw_{n+1}$, est finie, on a $\bar{l}_Y \cap T_0 = \emptyset$ où $\bar{l}_Y$ est la fermeture de $l_Y = \pi(l)$ dans Y.

En effet, la variété Z n'est rien d'autre que le domaine de Riemann uniformisé, défini par les prolongements analytiques simultanés des w_i/w_{n+1} $(1 \leqq i \leqq n)$. Par Lemme 11, Z est bien définie et donne une application w_Z localement biholomorphe. Si $l \cap [Z \setminus \pi^{-1}(\bigcup_j Y^{(j)})]$ avait un nombre infini de composantes connexes, L ne serait pas fini parce que Y est compacte et que, w_Z étant localement biholomorphe et G rendant invariante la forme F, la métrique sur B donne naturellement une métrique sur Z invariante par les transformations de revêtement. Donc il ne faut démontrer qu'au cas où l_Y est contenu dans un seul $Y^{(j)}$. S'il existait un point de $\bar{l}_Y \cap T_0^{(j)}$, par Lemme 11, $\partial B \cap \overline{w_Z(l)}$ ne serait pas vide et par suite L serait infini. C. Q. F. D.

LEMME 13. *Soit Y_0 une variété complexe, connexe, de dimension n, Z une variété complexe, connexe, étalée au-dessus de Y_0 avec la projection π, B une variété complexe, simplement connexe, avec une métrique riemannienne et w une application localement biholomorphe de Z à B. Et pour tout point y de Y_0, il existe un voisinage V dont chaque composante connexe V_α $(\alpha = 1, 2, \cdots)$ de $\pi^{-1}(V)$ contient seulement un point de $\pi^{-1}(y)$, dont la restriction de π sur V_α est propre, et dont il existe, pour tout α et β $(=1, 2, \cdots)$, il existe une application biholomorphe $\pi_{\alpha\beta}: V_\alpha \to V_\beta$ tel que $\pi \circ \pi_{\alpha\beta} = \pi$, que la restriction $w_{(\alpha)}$ (resp. $w_{(\beta)}$), de w sur V_α (resp. V_β) soit biholomorphe et que $w_{(\beta)} \circ \pi_{\alpha\beta} \circ w_{(\alpha)}^{-1}$ soit isométrique. D'ailleurs* *supposons que, pour toute courbe continue l sur Z dont la longueur L de $w(l)$ est finie, la projection $\pi(l)$ soit relativement compacte. Alors w est une application biholomorphe entre Z et B.*

En effet, soit z' (resp. b) un point de Z (resp. B), Ω l'inverse de la restriction de w dans un voisinage suffisamment petit de z' et $\bar{l}_B$ une courbe continue sur B joignant le point $w(z')$ à b telle que la longueur L de $\bar{l}_B$ soit finie et que Ω puisse se prolonger analytiquement le long de la courbe $l_B=\bar{l}_B\setminus\{b\}$. Alors la courbe $l=\Omega(l_B)$ est bien définie et, $\pi(l)$ étant relativement compact, il existe une suite $\{z^{(\nu)}\}$ $(\nu=1, 2, \cdots)$ de points de l telle que $\pi(z^{(\nu)})$ tende vers un point y de Y_0 et que $\lim_{\nu\to\infty} w(z^{(\nu)})=b$. Soit $\{z_\alpha\}_{\alpha=1,2,\ldots}=\pi^{-1}(y)$, et les voisinages V et V_α comme plus haut. Comme $\lim_{\nu\to\infty}\pi(z^{(\nu)})=y$, pour tous les ν suffisamment grands, il existe un $\alpha(\nu)$ tel que $z^{(\nu)}\in V'_{\alpha(\nu)}$ où $V'_\alpha=V_\alpha\cap\pi^{-1}(V')$, V' étant un voisinage de y avec $V'\Subset V$. S'il existait un nombre infini de ν tel que $\alpha(\nu)\neq\alpha(\nu+1)$, la longueur L serait infinie; il existe un ν_0 et un α_0 tels qu'on ait $z^{(\nu)}\in Z_{\alpha_0}$ pour tout $\nu\geqq\nu_0$. En posant $z=V_{\alpha_0}\cap\pi^{-1}(y)$, on a $\lim_{\nu\to\infty} z^{(\nu)}=z$ et $w(z)=b$, et par suite Ω peut se prolonger jusqu'à b le long de la courbe continue $\bar{l}_B$. Donc, comme on le voit facilement, Ω peut se prolonger partout sur la variété B simplement connexe. En conséquence, l'inverse $w^{-1}=\Omega$ de l'application w localement biholomorphe est uniforme et définie partout sur B, ce qui signifie que w est biholomorphe. C.Q.F.D.

2. Corps de fonctions automorphes. Maintenant nous construisons un corps de fonctions automorphes pour chaque cas dans Section 3. Dans ce numéro, donc, nous sommes dans une situation de (1)$\sim$(36) et surtout supposons que $0<\lambda_i<1$ $(i\in \boldsymbol{N}')$.

D'abord en posant $x_0\equiv 0$, $x_{n+1}\equiv 1$ et $w'_i=\omega_i-\omega_0$ et en calculant

$$\iint_U \prod_{i=0}^{n+1}|u-x_i|^{2(\lambda_i-1)}du d\bar{u}\,,$$

on a

$$F'=\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}w'_i\overline{w'_j}>0 \qquad (\text{avec } A=(a_{ij}))$$

sur $\mathfrak{D}$; F' est, comme on l'a vu dans Section 1, uniforme sur $\mathfrak{D}$, parce que la représentation ρ rend invariant la forme A. Or, A étant de signature $(1, n)$ (Lemme 1), il existe un système $w=(w_1, \cdots, w_{n+1})$ de solutions de (F_1) tel que, avec

$$F=|w_{n+1}|^2-\sum_{i=1}^{n}|w_i|^2\,,$$

F soit uniforme et positive sur $\mathfrak{D}$, et que w soit de type G où G est le groupe de transformations linéaires engendré par les ρ_{ij} $(0\leqq i<j\leqq n+1)$.

Pour chaque cas de (1)$\sim$(36), considérons une variété $Y=\hat{X}=X_{\mathfrak{M}}$ avec $\mathfrak{M}=(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2)$ où

$$\mathfrak{M}_1=\{I\in\mathfrak{N}\,|\,\sharp I=2\}\cup\{I\in\mathfrak{N}\,|\,\sharp I\geqq 3,\ \lambda_I\leqq 0\}\ ,$$

$$\mathfrak{M}_2=\{I\in\mathfrak{N}\,|\,\sharp I=n,\ \lambda_I<0\}\ .$$

$Y=\hat{X}$ est bien défini. Si $I\subset J$ et $\lambda_I\leqq 0$, on a $\lambda_J<0$ vu $0<\lambda_i<1$, ce qui montre que $\mathfrak{M}_1$ admet (SP). Si $n\geqq 3$ et $\sharp I=n+1$, un calcul montre que $I\in\mathfrak{M}_1$, ce qui montre, d'après Lemme 3, $\hat{S}_{\mathfrak{M}_1,J}\cap\hat{S}_{\mathfrak{M}_2,K}=\emptyset$ si J, $K\in\mathfrak{M}_2$. Si $n=2$ et I, $J\in\mathfrak{M}_2$, on a $I\cap J\neq\emptyset$ parce que $0<\lambda_\infty<1$; par suite $\sharp K=3$ avec $K=I\cup J$ et $\lambda_K<0$; donc on a $K\in\mathfrak{M}_1$ et $\hat{S}_{\mathfrak{M}_1,I}\cap\hat{S}_{\mathfrak{M}_1,J}=\emptyset$; ce qui montre que $\mathfrak{M}$ admet (SP).

Par Lemme 7, l'ensemble analytique $T=\hat{S}$ admet (GN) en tout point y de Y et w_i peut se considérer comme fonction multiforme sur $Y\setminus T$. Et puis l'ensemble analytique $T_0=\bigcup_{\lambda_I=0}\hat{S}_I$ consiste en nombre fini de sous-variétés régulières mutuellement disjointes, de codimension 1. En effet si $\lambda_I=\lambda_J=0$ et $I\cap J=\emptyset$, (resp. $I\subset J$), on aurait $\lambda_K=-1$ avec $K=I\cup J$ (resp. $\lambda_{J\setminus I}=1$). Donc, par Lemme 3′, on a $\hat{S}_I\cap\hat{S}_J=\emptyset$; ce que $\hat{S}_I$ est régulier est evident.

Ensuite pour chaque $y=\hat{x}\in Y$, posons

$$\{I_1,\cdots,I_{\gamma_1}\}=\{I\in\mathfrak{M}_1\setminus\mathfrak{M}_2\,|\,I\supset\{0,\,n+1\}\}\ ,$$

$$\{I_{\gamma_1+1},\cdots,I_{\gamma_2}\}=\{I\in\mathfrak{M}_1\setminus\mathfrak{M}_2\,|\,\lambda_I<0\}$$

et

$$f=\prod_{\alpha=1}^{\gamma_1}\hat{x}_\alpha^{-\lambda_\infty}\prod_{\alpha=\gamma_1+1}^{\gamma_2}\hat{x}_\alpha^{-c_\alpha}$$

où $\hat{S}_{I_\alpha}=\{\hat{x}_\alpha=0\}$ et $c_\alpha=\lambda_{I_\alpha}$. Avec cette fonction f, w_f admet la condition $B((\cdots,T_i,\cdots,T_{j\alpha},\cdots)(\cdots,e_i,\cdots,e_{j\alpha},\cdots)(\cdots,m_i,\cdots,m_{j\alpha},\cdots))$ en y, où $1\leqq i\leqq n_1$, $1\leqq j\leqq n_2$, $0\leqq\alpha\leqq 2$ et $m_i=m_{j\alpha}=1$ où T_i (resp. e_i) coïncide avec un $\hat{S}_I$ (resp. $|\lambda_I|$) tel que $I\in\mathfrak{M}_{\hat{x}}$ et où $T_{j\alpha}$ (resp. $e_{j\alpha}$) coïncide avec un $\hat{S}_{I_{j\alpha}}$ (resp. $|\lambda_{I_{j\alpha}}|$) tel que $\{I_{j0}, I_{j1}, I_{j2}\}=\mathfrak{M}_{\hat{x}}'''$ ou $\bigcup_{\alpha=0}^{2}I_{j\alpha}\in\mathfrak{M}_{\hat{x}}''$ (voir Lemme 3′); ce qui est une conséquence de Lemme 8. Et de plus $e_{j\alpha}$ ($\alpha=0,1,2$) remplissent la condition (a) ou (b) de Lemme 9, ce qui est montré par des calculs directs des λ_I. Z étant la variété étalée au-dessus de $Y\setminus T_0$ défini par les prolongements analytiques simultanés des w_i/w_{n+1} ($1\leqq i\leqq n$) et B étant la boule unité

$$B=\left\{\sum_{i=1}^{n}|w_i/w_{n+1}|^2<1\right\},$$

par Lemme 9, w donne une application localement biholomorphe: $Z\to B$ parce que $|f|^2F$ est définie et non-negative sur $V\setminus T_0$, V étant un voisinage de y, et que, B étant strictement pseudoconvexe, on a $|f|^2F>0$.

Ensuite soit $T_0^{(k)}=\hat{S}_I$ une composante de T_0, $a=(a_0\cdots a_{n+1})$ un point de

$\hat{U}_I \setminus T$ avec $\hat{U}_I = \phi(U_{\mathfrak{M}_1, I})$, w_a un élément de w en a et $G_0 = G_0^{(k)}$ le sous-groupe de G consistant en les transformations obtenues par les prolongements de w_a dans $\hat{U}_I$. Alors (w, G_0) remplit $L(f, s_0, F)$ en y où s_0 est la transformation ρ_I ou éventuellement un conjugé de ρ_I. En effet, par une transformation F_P, on peut supposer $I = \{0, 1, \cdots, p\}$ et $\{a_i\}$ croissant. Alors G_0 est engendré par les ρ_{ij} tels que $\{i, j\} \subset I$ ou bien $\{i, j\} \cap I = \emptyset$. Ce que $s_0 \leftrightarrow \rho_{ij}$ devient de Lemme 6 ou de Théorème 2 et sa conséquence ([**13**], Lemme 2).

Donc, par Lemme 12 et Lemme 13, w donne une application biholomorphe: $Z \to B$. Et en conséquence, $\pi \circ w^{-1}$ donne un corps de fonctions automorphes sur B, ou π est la projection naturelle: $Z \to Y$. Le groupe est induit par la représentation ρ et le domaine fondamental est isomorphe à Y_0. Comme Y_0 est birationnellement équivalent à $P_n(\boldsymbol{C}) \setminus (\bigcup_{\lambda_I = 0} \sigma_{\mathfrak{M}_1}(S_{\mathfrak{M}_1, I}))$, d'après la pseudoconvexité de domaine de méromorphie, le corps de fonctions est purement transcendantal. Nous sommes ainsi arrivés au

Théorème. *Pour chaque cas* (1)~(36), *on peut construire un corps de fonctions automorphes purement transcendantal sur un domaine B biholomorphiquement équivalent à la boule unité. Le groupe est donné par la représentation linéaire ρ et le domaine fondamental est biholomorphiquement équivalent a la variété Y_0 plus haut; par suite il est compact, pour* (2)~(5), (11)~(15), (17)~(25), (30) *et* (34), *et pour les autres, il est non-compact.*

§ 5. Domaine fondamental divisé.

Les fonctions automorphes ainsi obtenues correspondent à la fonction modulaire $\lambda(\tau)$ et pas à $j(\tau)$ qui est le module exact de courbes elliptiques. Donc, pour établir une relation avec une famille de courbes algébriques, nous nous occupons à diviser le domaine fondamental par un groupe fini.

1. Transformations de solutions de (F_1). On va examiner la transformation de ω_i que donne un automorphisme de $\mathcal{D}$. Pour cela, introduisons une nouvelle coordonnée x_∞ sur X et considérons $\dfrac{x_i - x_0}{x_i - x_\infty} \Big/ \dfrac{x_{n+1} - x_0}{x_{n+1} - x_\infty}$ $(i = 1, \cdots, n)$ comme étant un système de coordonnées inhomogènes; on a

$$\omega_i = \frac{1}{(1-\mu_i)(1-\mu_\infty)} \left(\frac{x_{n+1} - x_0}{x_\infty - x_{n+1}} \frac{1}{x_\infty - x_0} \right)^{\lambda_\infty} \prod_{\alpha=0}^{n+1} (x_\infty - x_\alpha)^{1-\lambda_\alpha}$$
$$\times \int_{\varphi(c_i)} (x_\infty - u)^{\lambda_\infty - 1} \prod_{\alpha=0}^{n+1} (u - x_\alpha)^{\lambda_\alpha - 1} du ,$$

où la branche est décidée comme plus haut. En utilisant cette expression, considérons le changement de ω_k qui correspond à la permutation de x_i et de x_j. Pour éviter les troubles données par la multiformité de ω_i, repartons de $a =$

$(a_0, \cdots, a_{n+1})$ avec $\{a_\alpha\}$ croissant et C_a, et considérons le prolongement analytique le long de la courbe: $x_\alpha = a_\alpha$ $(\alpha \neq i, j)$, $x_i = x_i(t)$, $x_j = x_j(t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ où $x_i(0) = x_j(1) = a_i$, $x_i(1) = x_j(0) = a_j$ et $\mathrm{Re}\, x_j(t) \geqq \mathrm{Re}\, x_i(t) \geqq 0$. Puisqu'on peut voir les changements de la fonction et du chemin de l'intégrale, on voit facilement ceux $\tau_{ij}\omega_k$ de ω_k: si $0 \leqq i < j \leqq n+1$, on a

$$\begin{aligned}\tau_{ij}\omega = {}^t(\tau_{ij}\omega_0, \cdots, \tau_{ij}\omega_{n+1}) = K_{ij}\Big[&\mathrm{diag}\,(1 \cdots 1\ \overset{i+1}{1-\mu_j}\ \mu_i^{-1}\mu_j \cdots \overset{j}{\mu_i^{-1}\mu_j}\ 0\ 1 \cdots 1)\\ &+ M_{i+1}(0 \cdots 0\ \overset{j+1}{\mu_j}\ 0 \cdots 0)\\ &+ \sum_{\alpha=i+2}^{j} M_\alpha(0 \cdots 0\ \overset{i+1}{1-\mu_j}\ 0 \cdots 0\ \overset{j+1}{\mu_j(1-\mu_i^{-1})}\ 0 \cdots 0)\\ &+ M_{j+1}(0 \cdots 0\ \overset{i+1}{1}\ 0 \cdots 0)\Big]\omega_{(ij)},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\tau_{i\infty}\omega = K_{i\infty}\Big[&\mathrm{diag}\,(1 \cdots\ \overset{i+1}{1-\mu_\infty}\ \mu_\infty\mu_i^{-1} \cdots \mu_\infty\mu_i^{-1}) + \sum_{\alpha=1}^{i} M_\alpha(0 \cdots 0\ \overset{i+1}{-1}\ 0 \cdots 0)\\ &+ \sum_{\alpha=i+2}^{n} M_\alpha(0 \cdots 0\ \overset{i+1}{-\mu_\infty}\ 0 \cdots 0)\Big]\omega_{(i\infty)}\end{aligned}$$

où $\omega_{(ij)} = {}^t(\omega_{(ij)0}, \cdots, \omega_{(ij)n+1})$ dont $\omega_{(ij)k}$ est la fonction qu'on obtient de ω_k en remplaçant λ_i par λ_j et λ_j par λ_i, et où

$$\begin{aligned}&K_{ij} = 1 \qquad (0 < i < j < n+1),\\ &K_{0j} = [(x_{n+1} - x_j)/(x_{n+1} - x_0)]^{\lambda_\infty} \qquad (j \neq n+1, \infty),\\ &K_{in+1} = [(x_i - x_0)/(x_{n+1} - x_0)]^{\lambda_\infty} \qquad (i \neq 0, \infty)\\ &K_{0n+1} = \exp \pi\sqrt{-1}\lambda_\infty,\\ &K_{i\infty} = -\mu_i^{-1} \exp(-\pi\sqrt{-1}\lambda_{i+1\, i+2 \cdots n+1}) \cdot (x_{n+1} - x_0)^{\lambda_\infty - \lambda_i}(x_{n+1} - x_i)^{-\lambda_\infty}(x_i - x_0)^{-\lambda_\infty}\\ &\qquad \times \prod_{0 \leqq \alpha \leqq i-1} (x_i - x_\alpha)^{1-\lambda_\alpha} \prod_{i+1 \leqq \alpha \leqq n+1} (x_\alpha - x_i)^{1-\lambda_\alpha} \qquad (i \neq 0, n+1),\\ &K_{n+1\infty} = -\mu_{n+1}^{-1}(x_{n+1} - x_0)^{-(\lambda_\infty + \lambda_{n+1})} \prod_{\alpha=0}^{n} (x_{n+1} - x_\alpha)^{1-\lambda_\alpha},\end{aligned}$$

et

$$K_{0\infty} = -\exp \pi\sqrt{-1}(-\lambda_\infty - \lambda_0) \cdot (x_{n+1} - x_0)^{\lambda_0 - \lambda_\infty} \prod_{\alpha=1}^{n+1} (x_\alpha - x_0)^{1-\lambda_\alpha}.$$

Si on choisit ω^0 comme étant les bases, en définissant $\omega^0_{(ij)}$ de la même manière que $\omega_{(ij)}$, on peut déterminer uniquement la matrice correspondant à τ_{ij}: si $0 < i < j \leqq n+1$, on l'a en enlevant le premier rang et la première colone de la matrice plus haut par rapport à ω et on a

$$\tau_{0i}\omega^0=K_{0i}\Big[\operatorname{diag}(\mu_i/\mu_0\cdots\mu_i/\mu_0\ \overset{i}{-\mu_i}\ 1\cdots 1)+\sum_{\alpha=1}^{i-1}M_\alpha(0\cdots 0-\mu_i/\mu_0\ 0\cdots 0)$$

$$+\sum_{\alpha=i+1}^{n+1}M_\alpha(0\cdots 0-\mu_i\,0\cdots 0)\Big]\omega^0_{(0i)}\qquad (i\neq\infty)\,,$$

$$\tau_{i\infty}\omega^0=K_{i\infty}\Big[\operatorname{diag}(\mu_i/\mu_\infty\cdots\mu_i/\mu_\infty\ \overset{i}{\mu_i(1-\mu_\infty)/\mu_\infty}\ 1\cdots 1)$$

$$-(\mu_i/(1-\mu_i))M_i(\tilde{\mu}_1\mu_i\cdots\tilde{\mu}_{i-1}\mu_i\,\mu_{01\cdots i}(1-\mu_\infty)\,\mu_\infty\tilde{\mu}_{i+1}\cdots\mu_\infty\tilde{\mu}_{n+1})$$

$$+\sum_{\alpha=i+1}^{n+1}M_\alpha(\tilde{\mu}_1\mu_i\cdots\tilde{\mu}_{i-1}\mu_i\ (1-\mu_\infty)(\mu_{01\cdots i}+\mu_i/\mu_\infty)\ \mu_\infty\tilde{\mu}_{i+1}\cdots\mu_\infty\tilde{\mu}_{n+1})\Big]\omega^0_{(i\infty)}$$

$$(i\neq 0)\,,$$

et

$$\tau_{0\infty}\omega^0=K_{0\infty}\Big[E_{n+1}+(\mu_\infty/(1-\mu_0))\sum_{\alpha=1}^{n+1}M_\alpha(\tilde{\mu}_1\cdots\tilde{\mu}_{n+1})\Big]\omega^0_{(0\infty)}\,.$$

De ce qu'on vient de voir, il est évident que, si $\lambda_i=\lambda_j$, τ_{ij} est une transformation linéaire de ω_i à un facteur près, et que τ_{ij} rend la forme hermitienne A invariante à un facteur près d'après l'intégrale plus haut sur la sphère de Riemann. Donc on a un nouveau corps de fonctions automorphes dont le groupe est engendré par tous les τ_{ij} avec $\lambda_i=\lambda_j$ et tous les ρ_{ij}, parce que ce groupe est l'image d'une représentation linéaire du groupe de tresses. Le domaine fondamental est le domaine obtenu en divisant Y_0 par le groupe engendré par tous les automorphismes de $\mathscr{D}$ qui correspondent aux permutations (ij) avec $\lambda_i=\lambda_j$.

Bibliographies

[1] P. Appell, Sur les fonctions hypergéométriques de deux variables, J. Math. Pures Appl., III, **8** (1882), 173-216.

[2] G. Lauricella, Sulle funzioni ipergeometriche a piu variabili, Rend. Circ. Mat. Palermo, **7** (1893), 111-158.

[3] R. Le Vavasseur, Sur le système d'équations aux dérivées partielles simultanées auxquelles satisfait la séries hypergéométrique à deux variables, Thèses, Fac. des Sci. Univ. de Paris, 1893.

[4] G. D. Mostow, Existence of nonarithmetic monodromy groups, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., **78** (1981), 5948-5950.

[5] E. Picard, Sur une extension aux fonctions de deux variables du problème de Riemann relatif aux fonctions hypergéométriques, Ann. Sci. École Norm. Sup., II, **10** (1881), 304-322.

[6] ———, Sur les fonctions de deux variables indépendantes analogues aux fonctions modulaire, Acta Math., **2** (1883), 114-126.

[7] ———, Sur les groupes de certaines équations différentielles linéaires, Bull. Sci. Math., II, **9**, 202-209.

[8] ———, Sur les fonctions hyperfuchsiennes provenant des séries hypergéométriques

de deux variables, Ann. Sci. École Norm. Sup., III, **2** (1885), 357-384.
[9] ———, Sur les fonctions hyperfuchsiennes provenant des séries hypergéométriques de deux variables, Bull. Soc. Math. France, **15** (1887), 148-152.
[10] H. A. Schwarz, Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Funktion ihres vierten Elementes darstellt, J. Reine Angew. Math. (J. de Crelle), **54** (1873), 292-335.
[11] G. Shimura, On purely transcendental fields of automorphic functions of several variables, Osaka J. Math., **1** (1964), 1-14.
[12] T. Terada, Problème de Riemann et fonctions automorphes provenant des fonctions hypergéométriques de plusieurs variables, J. Math. Kyoto Univ., **13** (1973), 557-578.
[13] ———, Quelques propriétés géométriques de domaine de F_1 et le groupe de tresses colorées, Publ. RIMS, **17** (1981), 95-111.

Toshiaki TERADA

University de la Science Medicale de Shiga
Seta, Otsu 520-21
Japon