Journal of the Mathematical Society of Japan Vol. 11, No. 3, July, 1959

Systèmes hyperboliques.

Par Sigeru MIZOHATA

(Reçu le 23 fév. 1959)

1. Introduction. Le problème de Cauchy pour les systèmes hyperboliques est déjà classique, en ce qui concerne les résultats exposés par exemple par M. Petrowsky ([**9**]). Depuis le travail de M. Leray, plusieurs savants ont proposé leurs méthodes, en visant à la simplification. Nous en citerons en particulier MM. Yosida ([**14**]) et Gårding ([**3**]). Nous allons traiter ici le problème au point de vue de la théorie des semi-groupes. Un traitement analogue a été fait par M. Yosida [**14**] pour les équations des ondes.

Nous utiliserons l'outil puissant d'opérateur d'intégrale singulière,[1] qui nous permettra de réduire considérablement les difficultés du problème. Nous devrions admettre qu'on puisse signaler toutefois que la difficulté d'ordre technique soit camouflée, en grande partie, dans des propriétés assez fines des opérateurs d'intégrale singulère, dont les démonstrations ne seront pas toujours faciles. De plus, nous sommes obligés d'exclure le cas $n=2$, où n est la dimension de l'espace. En effet, notre méthode s'appuie sur l'existence d'une matrice $\sigma(\mathfrak{N})$, définie au début de n°3, et dans le cas $n=2$, il y a des systèmes hyperboliques pour lesquels une telle matrice n'existe pas (voir la fin de l'appendice). Nous utiliserous les définitions et les notations, exposées dans des travaux de M. Calderón ([**1**], [**2**]).

Considérons un système régulièrement hyperbolique (au sens de Petrowsky[2]), écrit sous la forme d'équation d'évolution:

---

1) Cette méthode est suggérée dans l'article [**2**]. Il y a déjà un article de M. M. Yamaguti [**12**], dans le même ordre d'idée que le nôtre. Nous devrions ajouter que M. T. Shirota a signalé dans une conférence l'utilité de cet opérateur aux systèmes hyperboliques, mais sans préciser le sens.

2) Voici la définition (voir [**9**], [**10**]) :

1° $k_0+\dots+k_n \leqq n_j\,;\ k_0<n_j\,;\ n_j>0$.

2° La matrice

$$(C)\qquad \begin{pmatrix} \lambda^{n_1} & & & \\ & \lambda^{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda^{n_N} \end{pmatrix} - \Big(\sum_{((k))} a_{ij}^{(k_0k_1\cdots k_n)}(x,t)\lambda^{k_0}\xi_1^{k_1}\dots\xi_n^{k_n}\Big),$$

où $\sum_{((k))}$ désigne la sommation de tous les termes tels que $k_0+k_1+\dots+k_n=n_j$, est de la forme

$$(1.1)\qquad \left(\frac{d}{dt}\right)^{n_i} u_i(x,t)=\sum_{j=1}^{N}\Big(\sum_{(k)} a_{ij}^{(k_0k_1\cdots k_n)}(x,t)\left(\frac{d}{dt}\right)^{k_0}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{k_n}u_j(x,t)\Big)$$
$$+f_i(x,t)\,,\qquad (i=1,2,\cdots,N)\,,$$

pour $x\in R^n$, $-h\leqq t\leqq h$. On suppose que tous les coefficients $a_{ij}^{(k_0\cdots k_n)}(x,t)$ sont des fonctions une fois continuement différentiables en t à valeurs dans $\mathcal{B}$.[3]

On va remplacer le système (1.1) par un autre système équivalent, écrit au moyen des opérateurs d'intégrale singulière. Posons

$$u_{j,0}=i^{n_j-1}(\Lambda+1)^{n_j-1}u_j\,,$$
$$u_{j,1}=i^{n_j-2}(\Lambda+1)^{n_j-2}\left(\frac{d}{dt}\right)u_j\,,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_{j,n_j-1}=\left(\frac{d}{dt}\right)^{n_j-1}u_j\,,$$

on a alors

$$(1.3)\qquad \frac{d}{dt}u_{j,p}=i(\Lambda+1)u_{j,p+1},\quad \text{pour}\quad p=0,1,\cdots,n_j-2\,.$$
$$=i\Lambda u_{j,p+1}+iu_{j,p+1},\qquad (j=1,\cdots,N)\,.$$

D'autre part,

$$(1.4)\qquad a_{ij}^{(k_0k_1\cdots k_n)}(x,t)\left(\frac{d}{dt}\right)^{k_0}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{k}u_j,\quad \text{où}\quad k=(k_1,\cdots,k_n)\,,$$
$$=a_{ij}^{(k_0\cdots k_n)}(x,t)\Big\{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{k}\Lambda^{-|k|}\Big\}^{4)}\Lambda^{|k|}\left(\frac{d}{dt}\right)^{k_0}u_j\,.$$

---

2) suite

$$\begin{pmatrix} \boxed{M_1} & & & \\ & \boxed{M_2} & & \\ & & \boxed{} & \\ & & & \boxed{M_l} \end{pmatrix}$$

où tous les éléments qui ne figurent dans aucune carrée M_i $(i=1,2,\cdots,l)$ sont nuls.

3° Pour $t\in[-h,h]$, et pour tout $x\in R^n$, et pour tout ξ réel tel que $|\xi|=1$, le déterminant de chaque M_i $(i=1,\cdots,l)$ admet des racines réelles et distinctes, et de plus la différence de deux racines est toujours supérieure à une constante positive fixée.

3) $\mathcal{B}$ est l'espace des fonctions continues bornées avec toutes les dérivées, muni des semi-normes: $p_m(f)=\sum_{|\alpha|\leqq m}\sup_x|D^\alpha f(x)|$, $m=1,2,\cdots$ (voir [**11**]).

4) Il vaut mieux définir, comme M. Calderón fait dans [**1**], de la manière suivante: $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k\Lambda^{-|k|}$ est l'opérateur de convolution tel que

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k\Lambda^{-|k|}u\xrightarrow[\mathcal{F}]{}(2\pi i\xi)^k|\xi|^{-|k|}\hat{u}(\xi),\ \hat{u}(\xi)\ \text{étant l'image de Fourier.}$$

Notons $a_{ij}^{(k_0\cdots k_n)}(x,t)\left(\frac{1}{i}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right)^k \Lambda^{-|k|}=A_{ij}^{(k_0\cdots k_n)}(t)$, (où t intervient comme paramètre), où $A_{ij}^{(k_0\cdots k_n)}(t)$ est un opérateur d'intégrale singulière dont le symbole soit

$$a_{ij}^{(k_0\cdots k_n)}(x,t)\frac{(2\pi\xi)^k}{|\xi|^{|k|}}.$$

(1.4) s'écrit alors

$$A_{ij}^{(k_0\cdots k_n)}(t)i\Lambda(i\Lambda)^{|k|-1}\{i(\Lambda+1)\}^{k_0-(n_j-1)}u_{j,k_0}. \tag{1.5}$$

Examinons de près cette expression en divisant en deux cas:

1° cas où $|k|+k_0=n_j$.

$$(i\Lambda)^{|k|-1}\{i(\Lambda+1)\}^{k_0-(n_j-1)}=\Lambda^{|k|-1}(\Lambda+1)^{-|k|+1}.^{5)}$$

Or, $\{\Lambda^{|k|-1}(\Lambda+1)^{-|k|+1}-1\}i\Lambda$ est un opérateur borné de $\mathcal{D}^s$ dans lui-même, vu que son image de Fourier est égale à

$$\left\{\left(\frac{|\xi|}{1+|\xi|}\right)^{|k|-1}-1\right\}i|\xi|\equiv\hat{\Psi}_{|k|}(\xi).$$

D'où (1.5) s'écrit

$$iA_{ij}^{(k_0\cdots k_n)}(t)\Lambda u_{j,k_0}+A_{ij}^{(k_0\cdots k_n)}(t)\Psi_{|k|}u_{j,k_0}. \tag{1.6}$$

2° cas où $|k|+k_0\leqq n_j-1$. Dans ce cas l'opérateur $i\Lambda(i\Lambda)^{|k|-1}\{i(\Lambda+1)\}^{k_0-(n_j-1)}=\Psi_j^{(k_0\cdots k_n)}$ est borné de $\mathcal{D}^s$ dans lui-même, d'où, (1.5) s'écrit

$$A_{ij}^{(k_0\cdots k_n)}(t)\Psi_j^{(k_0\cdots k_n)}u_{j,k_0}. \tag{1.7}$$

Alors, en numérotant tous les $u_{j,p}$ $(j=1,\cdots,N;\ k_0=0,1,\cdots,n_j-1)$, de nouveau u_i, $(i=1,\cdots,N')$, $N'=\sum n_j$, on a un nouveau système d'équation d'évolution, qui est équivalent à (1.1):

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_{N'}\end{pmatrix}=i(H_{ij}(t))\Lambda\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_{N'}\end{pmatrix}+(B_{ij}(t))\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_{N'}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}f_1\\ \vdots\\ f_{N'}\end{pmatrix}, \tag{1.8}$$

où $H_{ij}(t)$ $(i,j=1,\cdots,N')$ découlent exactement des termes suivis de l'opérateur Λ dans (1.3) et (1.6).

Ecrivons cette équation sous la forme matricielle, en écrivant N' de nouveau N, en notant $u(t)=(u(t),\cdots,u_N(t))$, et $f(t)=(f_1,\cdots,f_N)$:

$$\frac{d}{dt}u(t)=i\mathcal{H}(t)\Lambda u+\mathcal{B}(t)u+f(t). \tag{1.9}$$

---

5) $(\Lambda+1)^s$ est l'opérateur de convolution tel que $(\Lambda+1)^s u \xrightarrow[\mathcal{F}]{} (|\xi|+1)^s\hat{u}(\xi)$.

Donnons la définition de l'espace hilbertien $\mathcal{D}^m$;

Espace $\mathcal{D}^m$ (m, entier positif, 0, ou négatif). Soit $m \geqq 0, f \in \mathcal{D}^m$ si f et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre m appartiennent à L^2. On munit $\mathcal{D}^m$ du produit scalaire:

$$(f, g)_{\mathcal{D}^m} = ((\Lambda+1)^m f,\ (\Lambda+1)^m g)_{L^2}.$$

$\mathcal{D}^{-m}$ (m, positif) est par définition l'espace dual de $\mathcal{D}^m$. On voit que $(f, g)_{\mathcal{D}^{-m}} = ((\Lambda+1)^{-m} f,\ (\Lambda+1)^{-m} g)_{L^2}$.

Remarque. $\mathcal{D}^m$ est noté $\mathcal{D}^m_{L^2}$ dans "Théorie des distributions" de Schwartz.

Nous indiquerons notre plan de la démonstration. Admettons pour le moment l'existence de la matrice $\sigma(\mathcal{N}(t))$ vérifiant la condition (3.1). Malheureusement $\mathcal{N}(t)$ n'est pas en général inversible, mais supposons provisoirement qu'elle soit inversible. L'équation (1.9)

$$\frac{d}{dt} u(t) = i\mathcal{H}\Lambda u + \mathcal{B}u + f \qquad \text{entraîne}$$

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{N}(t) u(t)) = i\mathcal{N}\mathcal{H}\Lambda u + \mathcal{N}\mathcal{B}u - \mathcal{N}_t' u + \mathcal{N}f.$$

Comme $\mathcal{N}\mathcal{H}\Lambda = \mathcal{D}\mathcal{N}\Lambda + \mathcal{K}$, où $\mathcal{K}$ est un opérateur borné, on a

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{N}u(t)) = i\mathcal{D}\mathcal{N}\Lambda u + \mathcal{B}_1 \mathcal{N}u + \mathcal{N}f, \text{ où } \mathcal{B}_1 \text{ est borné.}$$

D'où, l'inégalité cherchée, car en posant $\mathcal{N}u(t) = v(t)$, on a

$$\frac{d}{dt} (v(t), v(t)) = (v_t', v) + (v, v_t')$$

(remarquons $\mathcal{N}\Lambda u = \Lambda\mathcal{N}u + (\mathcal{N}\Lambda - \Lambda\mathcal{N})u$), et $(i\mathcal{D}\Lambda v, v) + (v, i\mathcal{D}\Lambda v) = i\,((\mathcal{D}\Lambda - \Lambda\mathcal{D}^*)v, v)$. Comme $\mathcal{D}$ est du type diagonal et à symbole réel, $\mathcal{D}\Lambda - \Lambda\mathcal{D}^* = (\mathcal{D}\Lambda - \Lambda\mathcal{D}) + \Lambda(\mathcal{D}^\# - \mathcal{D}^*)$ est borné, d'après le théorème 3 de [2]. D'où, l'inégalité cherchée:

$$\| v \|_t^2 \leqq C(t) \Big[\| v \|_{t=0}^2 + \int_0^{|t|} \| f \|_\tau^2 \, d\tau \Big].$$

Nous allons utiliser une variante de cette méthode, en nous inspirant de la méthode de M. Leray développée pour les équations hyperboliques dans [5]. Cette variante nous montre l'inégalité d'énergie et en même temps l'existence des solutions.

2. Quelques lemmes sur les opérateurs d'intégrale singulière.

On utilisera dans ce qui suit, outre les propriétés des opérateurs exposées dans [1], [2], les propriétés suivantes, qu'on va donner sous la forme des lemmes.

LEMME 2.1. *Soit P un opérateur d'intégrale singulière de classe $\sigma(P)=F(x,\xi)\in C_\beta^\infty$, avec $\beta>0$. On fait l'hypothèse:*

$$|F(x,\xi)|\geqq\delta>0 \text{ pour tout } x\in R^n, \text{ et tout } \xi, \tag{2.1}$$

δ étant une constante positive. On a alors

$$\|PAu\|^2\geqq\frac{\delta^2}{8}\|Au\|^2-\gamma\|u\|^2, \text{ pour toute } u\in\mathscr{D}^1, \tag{2.2}$$

γ étant une constante positive.

Comme la démonstration est assez longue, nous la donnerons dans l'appendice.

Du lemme 2.1, on montre facilement le lemme suivant qui jouera le même rôle que le lemme de Gårding au cas de l'opérateur différentiel.

LEMME 2.2. *Soit $\mathscr{P}$ une matrice carrée dont les éléments P_{ij}, opérateurs d'intégrale singulière, appartiennent à C_β^∞, avec $\beta>0$: $\sigma(P_{ij})\in C_\beta^\infty$ $(i,j=1,\cdots,N)$. On fait l'hypothèse: soit $\sigma(\mathscr{P})$ la matrice $(\sigma(P_{ij})(x,\xi))$, on a pour tout $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_N)$, vecteur complexe,*

$$|\sigma(\mathscr{P})\alpha|\geqq\delta|\alpha|, \text{ où } |\alpha|=\sqrt{|\alpha_1|^2+\cdots+|\alpha_N|^2}, \text{ quelque soient } x\in R^n, \text{ et } \xi. \tag{2.3}$$

On a alors pour toute $u=(u_1,\cdots,u_N)\in\prod_{i=1}^N\mathscr{D}^1$, l'inégalité:

$$\|\mathscr{P}Au\|^2\geqq\frac{\delta^2}{8}\|Au\|^2-\gamma_1\|u\|^2, \tag{2.4}$$

γ_1 étant une constante positive.

REMARQUE. On entend par $\|u\|^2$: $\|u\|^2=\sum_{i=1}^N\|u_i\|^2$.

D'où on déduit facilement

COROLLAIRE. *Dans la même hypothèse qu'au lemme 2.2, on a l'inégalité:*

$$\|\mathscr{P}A^mu\|^2\geqq\sigma\|A^mu\|^2-\gamma_m\|u\|^2, \ \sigma>0, \tag{2.5}$$

pour toute $u\in\prod\mathscr{D}^m$, m étant entier positif.

LEMME 2.3. *Tout opérateur d'intégrale singulière de classe C_β^∞, $\beta=+\infty$, H, (avec son conjugué H^*) définit une application continue de $\mathscr{D}^s$, dans lui-même, s étant un entier quelconque positif, 0, ou négatif.*

Comme la vérification est très facile, nous n'en donnons pas la démonstration.

Nous utiliserons le lemme suivant, qui a été énoncé dans [**6**].

LEMME 2.4. *Soit H un opérateur d'intégrale singulière tel que $\sigma(H)=h(x,\xi)\in C_\beta^\infty$, avec $\beta=+\infty$, on peut alors exprimer*

1) $A^pH=HA^p+H_1A^{p-1}+H_0$,

2) $A^pH^*=H^*A^p+H_1'A^{p-1}+H_0'$,

où H_1, H_0, H_1', H_0' sont des opérateurs continus de $\mathscr{D}^s$ dans lui-même, s étant un *entier quelconque* (*positif*, 0, *ou négatif*).

DÉMONSTRATION. Limitons-nous à démontrer 1), car 2) se démontre de la même manière. Dans le cas où p est pair, la démonstration est très simple. Notre démonstration est donc essentiellement consacrée au cas où p est impair.

On décompose d'abord, $\hat{\Lambda}(\xi)^p \equiv |\xi|^p = \alpha(\xi)|\xi|^p + [1-\alpha(\xi)]|\xi|^p = \hat{\Lambda}_1{}^p(\xi) + \hat{\Lambda}_2{}^p(\xi)$, où $\alpha(\xi)$ est une fonction indéfiniment différentiable, qui vaut 1 au voisinage de l'origine et zéro pour $|\xi| \geqq 1$. Notons que, dans la notation $\hat{\Lambda}_i{}^p(\xi)$, p ne signie plus la p-ième puissance. Notons la distribution $\Lambda_i{}^p \xrightarrow[\mathcal{F}]{} \hat{\Lambda}_i{}^p(\xi)$. En décomposant alors l'opérateur $(\Lambda^p H - H\Lambda^p) = (\Lambda_1{}^p H - H\Lambda_1{}^p) + (\Lambda_2{}^p H - H\Lambda_2{}^p)$, on voit facilement que l'opérateur $(\Lambda_1{}^p H - H\Lambda_1{}^p)$ est borné de $\mathcal{D}^s$ dans lui-même, vu que $\Lambda_1{}^p$ l'est (s étant un entier quelconque positif, 0, ou négatif). Il suffit donc de voir que $(\Lambda_2{}^p H - H\Lambda_2{}^p)$ a l'expression de la forme 1).

Soit

$$\sigma(H) = a_0(x) + \sum_{n\geqq 1} a_{nm}(x) Y_{nm}(\xi) .$$

Occupons-nous du cas simple: $\sigma(H) = a(x)Y(\xi)$, où $Y(\xi)$ est l'un des $Y_{nm}(\xi)$. Dans ce cas, $(\Lambda_2{}^p H - H\Lambda_2{}^p)f = (\Lambda_2{}^p a(x) Y - a(x) Y \Lambda_2{}^p)f = (\Lambda_2{}^p a(x) - a(x)\Lambda_2{}^p) Yf$. *Nous avons désigné par* Yf *—et nous utiliserons désormais cette convention— l'opérateur suivant*:

$$Y(x) \text{ désigne la distribution telle que } Y(x) \xrightarrow[\mathcal{F}]{} Y(\xi);$$

$$(Yf)(x) = Y(x) \underset{(x)}{*} f(x) .$$

Posons $Yf = \varphi(x)$, alors l'expression plus haut s'écrit:

$$(\Lambda_2{}^p a(x) - a(x)\Lambda_2{}^p)\varphi(x) = \int \Lambda_2{}^p(x-y)[a(y)-a(x)]\varphi(y)dy , \tag{2.6}$$

où l'intégrale est à prendre au sens de distribution. Développons $a(y)-a(x)$ autour du point x:

$$a(y)-a(x) = \sum_{|\nu|\leqq q-1} \frac{D^\nu a(x)}{\nu !}(y-x)^\nu + \sum_{|\nu|=q} \frac{a_\nu(x,y)}{\nu !}(y-x)^\nu ,$$

où q est un entier que nous allons déterminer (pour ce développement, voir [7, pp. 224–225]). On a

$$\sup_{x,y} |D_x{}^\alpha D_y{}^\beta a_\nu(x,y)| \leqq C_{q+|\alpha|+|\beta|} \sum_{\{\gamma;|\gamma|=q+|\alpha|+|\beta|\}} \sup |D^\gamma a(x)| .$$

(2.6) s'écrit alors

$$\sum_{|\nu|\leqq q-1} \frac{D^\nu a(x)}{\nu !} \int (y-x)^\nu \Lambda_2{}^p(x-y)\varphi(y)dy + \sum_{|\nu|=q} \frac{1}{\nu !} \int a_\nu(x,y)(y-x)^\nu \Lambda_2{}^p(x-y)\varphi(y)dy .$$

Envisageons d'abord la première partie.

$$x^\nu \Lambda_2^p(x) \underset{\mathcal{F}}{\longrightarrow} \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^{|\nu|}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\nu([1-\alpha(\xi)]\,|\xi|^p) = \hat{\psi}_\nu(\xi)\,|\xi|^{p-1},$$

d'où la première partie s'écrit:

$$\sum_{|\nu|\leqq q-1} (-1)^{|\nu|}\frac{D^\nu a(x)}{\nu!}\psi_\nu \Lambda^{p-1}\varphi.$$

Passons à la deuxième:

$$\varphi_\nu(x) = \int a_\nu(x, y)(x-y)^\nu \Lambda_2^p(x-y)\varphi(y)dy.$$

Envisageons la fonction $x^\nu \Lambda_2^p(x)$, $|\nu| = q$. On voit que

i) elle est une fonction continuement dérivable, si l'on prend $|\nu| = q = p+[n/2]+2$;

ii) elle est indéfiniment différentiable en dehors de l'origine et de plus elle décroit rapidement par rapport aux polynômes avec toutes ses dérivées (et cela est vrai quel que soit ν).

En effet, $x^\nu \Lambda_2^p(x) \underset{\mathcal{F}}{\longrightarrow} \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{|\nu|}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\nu \hat{\Lambda}_2^p(\xi) \in \mathcal{D}^{[n/2]+2}(R_\xi^n)$, ce qui montre i) en vertu du théorème de Sobolev. Ensuite $x^\nu \Lambda_2^p(x) = \frac{1}{|x|^{2k}}(|x|^{2k}x^\nu \Lambda_2^p(x))$, et $\sup_x |\,|x|^{2k}x^\nu \Lambda_2^p(x)| \leqq c\int |\Delta_\xi^k D_\xi^\nu \hat{\Lambda}_2^p(\xi)|\,d\xi$ montre ii). D'où

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi_\nu(x) = \int\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)[(x-y)^\nu \Lambda_2^p(x-y)]a_\nu(x, y)\varphi(y)dy$$
$$+\int (x-y)^\nu \Lambda_2^p(x-y)\frac{\partial}{\partial x_i}a_\nu(x, y)\varphi(y)dy.$$

Or, le premier terme s'écrit $\int (x-y)^\nu \Lambda_2^p(x-y)\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)[a_\nu(x, y)\varphi(y)]dy$, d'où

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi_\nu(x) = \int (x-y)^\nu \Lambda_2^p(x-y)\left[\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial y_i}\right][(a_\nu(x, y)\varphi(y)]dy,$$

et de proche en proche

$$D_x^\alpha \varphi_\nu(x) = \int (x-y)^\nu \Lambda_2^p(x-y)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)^\alpha [a_\nu(x, y)\varphi(y)]dy.$$

D'où on a

$$\| D_x^\alpha \varphi_\nu(x)\| \leqq d(q+|\alpha|)\Big(\sum_{\beta:|\beta|\leqq q+|\alpha|}\sup|D^\beta a(x)|\Big)\|\varphi\|_{\mathcal{D}^{|\alpha|}},$$

ou bien

$$\|\varphi_\nu\|_{\mathcal{D}^s} \leqq d(q+s)\left(\int |x^\nu \Lambda_2^p(x)|\,dx\right)\Big(\sum_{|\beta|\leqq q+s}\sup|D^\beta a(x)|\Big)\cdot\|\varphi\|_{\mathcal{D}^s}.$$

Ceci fait, revenons à l'opérateur H. Chaque opérateur

$$(D^\nu a_0(x)+\sum_{n\leqq 1} D^\nu a_{nm}(x)Y_{nm})\psi_\nu,\ |\nu| \leqq q-1$$

définit une application continue de $\mathcal{D}^s$ dans lui-même (s étant un entier quelconque, positif, 0, ou négatif). H_1, qui est par définition la somme des termes plus haut, est donc une application continue de $\mathcal{D}^s$ dans lui-même. L'opérateur H_0, qui est par définition la somme de $(\Lambda_1^p H - H\Lambda_1^p)$ et des termes correspondant à $\varphi_\nu(x)$ est aussi une application continue de $\mathcal{D}^s$ dans lui-même.

c. q. f. d.

3. Problème de Cauchy.

Revenons à l'équation d'évolution:

$$\frac{d}{dt} u(t) = i\mathcal{H}(t)\Lambda u(t) + \mathcal{B}(t)u(t) + f(t) = A(t)u(t) + f(t). \tag{1.9}$$

Il est facile de voir qu'on peut trouver une matrice $\sigma(\mathcal{N})$ jouissant des propriétés suivantes[6] (excepté le cas où, dans le cas $n=2$, $\mathcal{H}$ dérive d'un système: $i \geqq 2$):

(3.1)

i) $\sigma(\mathcal{N}(t))\sigma(\mathcal{H}(t)) = \sigma(\mathcal{D}(t))\sigma(\mathcal{N}(t))$;

ii) Soit $\sigma(\mathcal{N}(t)) = (F_{ij}(x, t, \xi))$, alors $F_{ij}(x, t, \xi) \in C_\beta^\infty$, $\beta = +\infty$, où t intervient comme paramètre. Les $F_{ij}(x, t, \xi)$ sont à valeurs réelles. De plus

$$|\text{déterminant de } (F_{ij}(x, t, \xi))| \geqq \delta' > 0 \text{ pour tout } \xi, x \in R^n, -h \leqq t \leqq h;$$

iii) L'application: $t \to F_{ij}(x, t, \xi) \in C_\beta^\infty$, $\beta = +\infty$, $(i, j = 1, \cdots, N)$, est une fois continuement différentiable;

iv)

$$\sigma(\mathcal{D}(t)) = \begin{pmatrix} \lambda_1(x, t, \xi) & & & \\ & \lambda_2(x, t, \xi) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_N(x, t, \xi) \end{pmatrix}$$

où $\lambda_1(x, t, \xi), \cdots, \lambda_N(x, t, \xi)$ sont les racines de l'équation caractéristique.

1° *Inégalité d'énergie.* Nous allons établir l'inégalité d'énergie pour des solutions de (1.9) dans l'espace $\mathcal{D}^m$.

Nous écrirons désormais simplement $\mathcal{D}^m$ *au lieu de* $\prod\mathcal{D}^m$. $f(t)$ est une fonction continue en t à valeurs dans $\mathcal{D}^m$; soit $u(t)$ une fonction continuement différentiable à valeurs dans $\mathcal{D}^{m+1}$ vérifiant l'équation (1.9).

D'après le corollaire du lemme 2.2,

$$B_m(t) = \Lambda^m \mathcal{N}^*(t)\mathcal{N}(t)\Lambda^m + \beta_m{}^2 I \tag{3.2}$$

définit dans $\mathcal{D}^m$ une norme équivalente pour $-h \leqq t \leqq h$, si β_m est assez grand.

6) Comme l'existence de telle matrice $\sigma(\mathcal{N})$ est un point essentiel, nous montrerons dans l'appendice notre raisonnement.

En effet, pour chaque $t=t_0$, on a

$$(B_m(t_0)u, u)=\|\mathcal{N}(t_0)\Lambda^m u\|^2+\beta_m{}^2\|u\|^2.$$

D'après la condition ii) de (3.1) et le corollaire du lemme 2.2, on a

$$(B_m(t_0)u, u)\geqq \frac{\delta'^2}{8}\|\Lambda^m u\|^2-\gamma_m(t_0)\|u\|^2+\beta_m{}^2\|u\|^2.$$

D'autre part, d'après la condition iii) de (3.1) (continuité en t), il existe un $\eta>0$ tel que $\|[\mathcal{N}(t)-\mathcal{N}(t_0)]u\|<\frac{\delta'^2}{16}\|u\|^2$, si $|t-t_0|<\eta$, η étant indépendant de t_0. Comme h est fini, nous aurons pour tout $t\in[-h, h]$,

$$(B_m(t)u, u)\geqq \frac{\delta'^2}{16}\|\Lambda^m u\|^2-\gamma_m\|u\|^2+\beta_m{}^2\|u\|^2. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Nous allons donc mesurer la variation de l'énergie dans $\mathcal{D}^m$ par $B_m(t)$.

$$\frac{d}{dt}(B_m(t)u(t), u(t))=(B_m u_t', u)+(B_m u, u_t')+(B_m'(t)u, u) \tag{3.3}$$

$$=((B_mA+A^*B_m)u, u)+(B_mf, u)+(B_mu, f)+(B_m'u, u).$$

Evidemment,

$$|(B_mf, u)|\leqq\|B_mf\|\,\|B_mu\|, \quad \text{où} \quad \|B_mf\|^2=(B_mf, f),$$

$$|(B_m'u, u)|\leqq C\|B_mu\|^2.$$

Ce qui est essentiel, est l'évaluation du premier terme.

$$B_mA+A^*B_m=(\Lambda^m\mathcal{N}^*\mathcal{N}\Lambda^m+\beta_m{}^2I)(i\mathcal{H}\Lambda+\mathcal{B}) \tag{3.4}$$

$$+(-i\Lambda\mathcal{H}^*+\mathcal{B}^*)(\Lambda^m\mathcal{N}^*\mathcal{N}\Lambda+\beta_m{}^2I).$$

On développe cette parenthèse, et néglige des applications continues de $\mathcal{D}^s$ dans $\mathcal{D}^{s-2m}$. On désigne cette classe d'applications par (Λ^{2m}). Compte tenu de ce que $\mathcal{N}, \mathcal{N}^*, \mathcal{H}, \mathcal{H}^*, \mathcal{B}, \mathcal{B}^*$ sont des applications continues de $\mathcal{D}^s$ dans lui-même, et que Λ est une application continue de $\mathcal{D}^s$ dans $\mathcal{D}^{s-1}$, on a

$$B_mA+A^*B_m\equiv i(\Lambda^m\mathcal{N}^*\mathcal{N}\Lambda^m\mathcal{H}\Lambda-\Lambda\mathcal{H}^*\Lambda^m\mathcal{N}^*\mathcal{N}\Lambda^m). \qquad \mathrm{mod}\,(\Lambda^{2m}).$$

Or, $\Lambda^m\mathcal{H}=\mathcal{H}\Lambda^m+\mathcal{H}_1\Lambda^{m-1}+\mathcal{H}_0$[7], d'après le lemme 2.4. D'où

$$\Lambda^m\mathcal{N}^*\mathcal{N}\Lambda^m\mathcal{H}\Lambda=\Lambda^m\mathcal{N}^*\mathcal{N}\mathcal{H}\Lambda\Lambda^m+\Lambda^m\mathcal{N}^*\mathcal{N}(\mathcal{H}_1\Lambda^{m-1}+\mathcal{H}_0)\Lambda$$

$$\equiv\Lambda^m(\mathcal{N}^*\mathcal{N}\mathcal{H}\Lambda)\Lambda^m \qquad \mathrm{mod}\,(\Lambda^{2m}).$$

Comme $\mathcal{N}\circ\mathcal{H}=\mathcal{D}\circ\mathcal{N}$, on a

$\mathcal{N}\mathcal{H}\Lambda=(\mathcal{N}\circ\mathcal{H})\Lambda-(\mathcal{N}\circ\mathcal{H}-\mathcal{N}\mathcal{H})\Lambda\equiv(\mathcal{N}\circ\mathcal{H})\Lambda^0\ \mathrm{mod}(\Lambda^0)$, d'après le théorème 3 de [2],
$=\mathcal{D}\mathcal{N}\Lambda-(\mathcal{D}\mathcal{N}-\mathcal{D}\circ\mathcal{N})\Lambda\equiv\mathcal{D}\mathcal{N}\Lambda\ \mathrm{mod}(\Lambda^0)$, $=\mathcal{D}\Lambda\mathcal{N}-\mathcal{D}(\Lambda\mathcal{N}-\mathcal{N}\Lambda)\equiv\mathcal{D}\Lambda\mathcal{N}$ $\mathrm{mod}(\Lambda^0)$. D'où

7) Comme on voit facilement dans la démonstration du lemme 2.4, $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_0$ sont des fonctions continues en t à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{D}^s, \mathcal{D}^s)$.

(3.5) $\Lambda^m\mathcal{N}^*\mathcal{N}\Lambda^m\mathcal{H}\Lambda-\Lambda\mathcal{H}^*\Lambda^m\mathcal{N}^*\mathcal{N}\Lambda^m\equiv\Lambda^m(\mathcal{N}^*\mathcal{D}\Lambda\mathcal{N}-\mathcal{N}^*\Lambda\mathcal{D}^*\mathcal{N})\Lambda^m \mod (\Lambda^{2m})$

Or, $\mathcal{N}^*(\mathcal{D}\Lambda-\Lambda\mathcal{D}^*)\mathcal{N}$ est borné (de $\mathcal{D}^s$ dans lui-même, du fait que $\mathcal{D}\Lambda-\Lambda\mathcal{D}^*=(\mathcal{D}\Lambda-\Lambda\mathcal{D})+\Lambda(\mathcal{D}^\#-\mathcal{D}^*)$) (voir, la fin de l'Introduction).

Compte tenu de ce que $B_m(t)$ définit dans $\mathcal{D}^m$ une norme équivalente, on a

(3.6) $$-\gamma B_m(t)\leqq B_m(t)A(t)+A^*(t)B_m(t)\leqq\gamma B_m(t)\,.$$

D'où

$$\left|\frac{d}{dt}(B_mu,u)\right|\leqq\gamma(B_mu,u)+C\|B_mu\|^2+2\|B_mu\|\,\|B_mf\|$$
$$\leqq\gamma'\|B_mu\|^2+\|B_mf\|^2\,.$$

On arrive donc à l'inégalité cherchée:

(3.7) $$\|B_mu\|_t^2\leqq\|B_mu\|_{t=0}^2\cdot\exp(\gamma'|t|)+\int_0^{|t|}\exp(\gamma'|t-\tau|)\|B_mf\|_\tau^2\,d\tau\,.$$

Remarque. L'inégalité d'énergie de la forme (3.7) subsiste même dans l'espace $\mathcal{D}^{-m}(m=0$, ou positif). En effet,

(3.8) $$B_{-m}(t)=(\Lambda+1)^{-m}\mathcal{N}^*(t)\mathcal{N}(t)(\Lambda+1)^{-m}+\beta^2I(\Lambda+1)^{-2(m+1)}$$

définit dans $\mathcal{D}^{-m}$ une norme équivalente, si β est assez grand. En effet, $(B_{-m}u,u)=\|\mathcal{N}(\Lambda+1)^{-m}u\|^2+\beta^2\|(\Lambda+1)^{-(m+1)}u\|^2$. Or,

$$\mathcal{N}(\Lambda+1)^{-m}u=\mathcal{N}(\Lambda+1)(\Lambda+1)^{-m-1}u=\mathcal{N}\Lambda(\Lambda+1)^{-m-1}u-\mathcal{N}(\Lambda+1)^{-m-1}u\,,$$

d'où, en appliquant le lemme 2.2 à $u=(\Lambda+1)^{-m-1}u$,

$$\|\mathcal{N}(\Lambda+1)^{-m}u\|^2\geqq\frac{\delta^2}{16}\|\Lambda(\Lambda+1)^{-m-1}u\|^2-C\|(\Lambda+1)^{-m-1}u\|^2,\quad \text{d'où}$$

$$(B_{-m}u,u)\geqq\frac{\delta^2}{16}\|\Lambda(\Lambda+1)^{-m-1}u\|^2+(\beta^2-C)\|(\Lambda+1)^{-m-1}u\|^2\geqq\sigma\|(\Lambda+1)^{-m}u\|^2,\ \sigma>0\,.$$

Il ne reste qu'à constater

(3.9) $$-\gamma_{-m}'B_{-m}\leqq B_{-m}A+A^*B_{-m}\leqq\gamma_{-m}'B_{-m}\,.$$

$B_{-m}A+A^*B_{-m}\equiv(\Lambda+1)^{-m}\mathcal{N}^*\mathcal{N}(\Lambda+1)^{-m}\mathcal{H}\Lambda-(\cdots\cdots)^* \mod (\Lambda^{-2m})$. Or, $(\Lambda+1)^{-m}\mathcal{H}=\mathcal{H}(\Lambda+1)^{-m}+\mathcal{B}'(\Lambda+1)^{-m}$, où $\mathcal{B}'$ est une application continue de $\mathcal{D}^s$ dans $\mathcal{D}^{s+1}$. En effet, $\mathcal{H}(\Lambda+1)^m=(\Lambda+1)^m(\mathcal{H}+\mathcal{B}')$, entraîne, d'après le lemme 2.4,

$$\mathcal{B}'=(\Lambda+1)^{-m}(\mathcal{H}_{m-1}\Lambda^{m-1}+\cdots+\mathcal{H}_0)\,,$$

où $\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1,\cdots,\mathcal{H}_{m-1}$ sont des applications continues de $\mathcal{D}^s$ dans lui-même. On aura donc $\mathcal{N}^*\mathcal{N}(\mathcal{H}+\mathcal{B}')\Lambda\equiv\mathcal{N}^*\mathcal{N}\mathcal{H}\Lambda \mod (\Lambda^\circ)$, comme nous avons montré, $\equiv\mathcal{N}^*\mathcal{D}\Lambda\mathcal{N} \mod (\Lambda^\circ)$, d'où l'inégalité (3.9).

2° *Existence des solutions dans le cas où A est indépendant de t.* Soit t_0 un point quelconque dans $[-h,h]$. On pose $A=A(t_0)$. Désormais, on considère l'espace $\mathcal{D}^m$ $(m\geqq 1)$.

1) Si l'on prend comme le domaine de définition $\mathcal{D}_A$: $u\in\mathcal{D}^m$, $Au\in\mathcal{D}^m$,

alors A est *fermé*.[8] Remarquons que $\mathcal{D}^{m+1} \subset \mathcal{D}_A$, par suite, $\mathcal{D}_A$ est dense dans $\mathcal{D}^m$.

2) $(I-\lambda A)$ définit un isomorphisme de $\mathcal{D}_A$ dans $\mathcal{D}^m$, où λ est paramètre réel voisin de zéro.

En effet, comme B_m $(=B_m(t_0))$ définit une norme équivalente dans $\mathcal{D}^m$, on munit $\mathcal{D}^m$ de cette norme.

$$(B_m(I-\lambda A)u,\,(I-\lambda A)u)=(B_m u,u)+\lambda^2(B_m Au,Au)-\lambda((B_m A+A^*B_m)u,u)\,,$$

d'après (3.6) on a, $\geqq (B_m u,u)-|\lambda|\gamma_m(B_m u,u)=(1-|\lambda|\gamma_m)(B_m u,u)$. Autrement dit,

$$\|B_m(I-\lambda A)u\|^2 \geqq (1-|\lambda|\gamma_m)\|B_m u\|^2\,. \tag{3.10}$$

3) L'image $(I-\lambda A)\mathcal{D}_A$ est fermée dans $\mathcal{D}^m$.

En effet, $(I-\lambda A)u_n \to v_0$, implique, comme l'application est isomorphisme, que $\{u_n\}$ forment une suite de Cauchy: $u_n \to u_0 \in \mathcal{D}^m$, d'où $-\lambda Au_n \to v_0-u_0$ Comme A est fermé, $u_0 \in \mathcal{D}_A$ et $(I-\lambda A)u_0=v_0$.

4) L'image $(I-\lambda A)\mathcal{D}_A$ est dense dans $\mathcal{D}^m$.

Démonstration. On va le montrer par absurde. Si l'énoncé n'était pas vrai, comme l'image est fermée d'après 3), il existerait un élément $\psi \in \mathcal{D}^m$ non nul tel que $((I-\lambda A)u,\psi)_{\mathcal{D}^m}=0$ pour tout $u \in \mathcal{D}^{m+1}$, c'est-à-dire

$$(u,(I-\lambda A^*)(\Lambda+1)^{2m}\psi)=0\,,\quad \text{d'où}$$

$$(I-\lambda A^*)(\Lambda+1)^{2m}\psi=0,\ \psi \in \mathcal{D}^m\,.$$

Comme $A^*=-i\Lambda\mathcal{H}^*+\mathcal{B}^*$, le premier membre s'écrit $(\Lambda+1)^{2m}(I-\lambda(A^*+K))\psi=0$, où K est un opérateur borné de $\mathcal{D}^s$ (s entier quelconque) dans lui-même, d'après le lemme 2.4. En d'autre terme,

$$[I-\lambda(-i\Lambda\mathcal{H}^*+\mathcal{B}_1)]\psi=0\,, \tag{3.11}$$

où $\mathcal{B}_1=\mathcal{B}^*+K$ est une application continue de $\mathcal{D}^s$ dans lui-même.

On considère la matrice $\mathcal{M}$ d'opérateurs d'intégrale singulière définie par

$$\sigma(\mathcal{M})=\sigma(\mathcal{N})^{-1}\,. \tag{3.12}$$

La relation $\sigma(\mathcal{N})\sigma(\mathcal{H})=\sigma(\mathcal{D})\sigma(\mathcal{N})$ implique $\sigma(\mathcal{H})\sigma(\mathcal{M})=\sigma(\mathcal{M})\sigma(\mathcal{D})$ Cela équivaut à dire que

$$\mathcal{H}\circ\mathcal{M}=\mathcal{M}\circ\mathcal{D}\,. \tag{3.13}$$

Considérons

$$C_1=\Lambda\mathcal{M}\mathcal{M}^*\Lambda+\gamma I\,. \tag{3.14}$$

---

8) En effet, soient $u_n \to u_0$, $Au_n \to v_0$ dans $\mathcal{D}^m$. Comme A est un opérateur continu de $\mathcal{D}^m$ dans $\mathcal{D}^{m-1}$, on a $Au_0=v_0$ dans $\mathcal{D}^{m-1}$, et comme l'injection de $\mathcal{D}^m$ dans $\mathcal{D}^{m-1}$ est biunivoque, $Au_0=v_0$ dans $\mathcal{D}^m$.

C_1 définit dans $\mathcal{D}^1$ une norme équivalente, si γ est assez grand. En effet, $\|\mathcal{M}^*\Lambda u\|^2 \geqq \frac{1}{2}\|\mathcal{M}^{\#}\Lambda u\|^2 - \|(\mathcal{M}^* - \mathcal{M}^{\#})\Lambda u\|^2$, où $\mathcal{M}^{\#}$ est défini comme suit : Soit $\mathcal{M} = (M_{ij})$, alors $\mathcal{M}^{\#} = (M_{ji}^{\#})$. Comme $\mathcal{M}^{\#}\,(={}^t\mathcal{M})$ vérifie la condition du lemme 2.2, on voit la propriété.

Ceci fait, en posant

$$A_1 = -i\Lambda\mathcal{H}^* + \mathcal{B}_1\,, \tag{3.15}$$

on considère

$$(C_1(I-\lambda A_1)\psi,\ (I-\lambda A_1)\psi)\,, \tag{3.16}$$

qui est égal à 0, mais d'autre part ce nombre est égal à

$$(C_1\psi, \psi) + \lambda^2(C_1A_1\psi, A_1\psi) - \lambda((C_1A_1 + A_1^*C_1)\psi, \psi)\,.$$

Considérons le dernier terme :

$$\begin{aligned} C_1A_1 + A_1^*C_1 &= (\Lambda\mathcal{M}\mathcal{M}^*\Lambda + \gamma I)(-i\Lambda\mathcal{H}^* + \mathcal{B}_1) + (i\mathcal{H}\Lambda + \mathcal{B}_1^*)(\cdots) \\ &\equiv -i\Lambda\mathcal{M}\mathcal{M}^*\Lambda(\Lambda\mathcal{H}^*) + i(\mathcal{H}\Lambda)\Lambda\mathcal{M}\mathcal{M}^*\Lambda \qquad \mathrm{mod}\,(\Lambda^2)\,. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}\Lambda)\Lambda\mathcal{M}\mathcal{M}^*\Lambda &\equiv \Lambda(\Lambda\mathcal{H})\mathcal{M}\mathcal{M}^*\Lambda \qquad \mathrm{mod}\,(\Lambda^2)\,, \\ &\equiv \Lambda(\Lambda\mathcal{M}\mathcal{D}\mathcal{M}^*)\Lambda \qquad \mathrm{mod}\,(\Lambda^2),\ \equiv \Lambda(\mathcal{M}\Lambda\mathcal{D}\mathcal{M}^*)\Lambda \qquad \mathrm{mod}(\Lambda^2)\,. \end{aligned}$$

Comme $\Lambda\mathcal{D} - \mathcal{D}^*\Lambda$ est borné, on aura

$$-\gamma_1'C_1 \leqq C_1A_1 + A_1^*C_1 \leqq \gamma_1'C_1\,, \tag{3.17}$$

Ceci entraînerait que le nombre (3.16) ne serait pas nul, si $\psi \neq 0$, (en supposant, bien entendu, λ petit), contrairement à l'hypothèse. c. q. f. d.

5) D'après ce qui précède, $(I-\lambda A)$ définit un isomorphisme de $\mathcal{D}_A$ *sur* $\mathcal{D}^m$, à savoir $(I-\lambda A)^{-1}$ définit un isomorphisme de $\mathcal{D}^m$ sur $\mathcal{D}_A$. On aura alors, d'après (3.10),

$$\|(I-\lambda A)^{-1}\| \leqq (1+\gamma_m|\lambda|)\,, \tag{3.18}$$

où $\|\ \|$ exprime la norme canonique des applications continues de $\mathcal{D}^m$ dans lui-même, et $\mathcal{D}^m$ *étant muni de la norme* $\|B_m u\|$[9].

Avant de traiter le cas où A dépend de t, nous déduirons des faits obtenus quelques conséquences immédiates.

Soit $A = A(t_0)$; $I_\lambda = (I-\lambda A)^{-1}$; D'après le théorème de Yosida-Hille,[10] il existe un groupe $X_m(t) = \exp(tA)$, $-\infty < t < +\infty$, $\in \mathcal{L}(\mathcal{D}^m, \mathcal{D}^m)$ $(m \geqq 1)$ ayant A $(=A(t_0))$ comme générateur infinitésimal, vérifiant

a) pour tout $u \in \mathcal{D}^m$, $X_m(t)u$ est une fonction continue en t à valeurs dans $\mathcal{D}^m$;

b) $$\|X_m(t)\| \leqq \exp(\gamma_m|t|)\,,$$

9) On désigne cette norme par $\|u\|_{B_m}$.
10) Voir, [13].

où $\|\ \|$ signifie la norme canonique des applications de $\mathcal{D}^m$ dans lui-même, $\mathcal{D}^m$ *étant muni de la norme induite par* $B_m(t_0)$. Ou encore

$$\| X_m(t) \|_{\mathcal{L}(\mathcal{D}^m, \mathcal{D}^m)} \leqq C_m \exp(\gamma_m |t|).$$

Remarquons ici que les constantes C_m et γ_m peuvent être prises indépendamment de t_0.

On va supprimer l'indice m de $X_m(t)$, en remarquant que *la restriction de* $X_m(t)$ *à* $\mathcal{D}^{m+1}$ *est identique à* $X_{m+1}(t)$. En effet, $X_m(t)u$ est par définition $\lim\limits_{\lambda\to 0} \exp(tA(I_\lambda)_{\mathcal{D}^m})u$, la convergence est à prendre pour la topologie de $\mathcal{D}^m$. D'autre part, on voit que la restriction de $(I_\lambda)_{\mathcal{D}^m}$ à $\mathcal{D}^{m+1}$ est identique à $(I_\lambda)_{\mathcal{D}^{m+1}}$. En effet, l'image $(I_\lambda)_{\mathcal{D}^m}u$, pour $u\in\mathcal{D}^{m+1}$ est une solution de l'équation $(I-\lambda A)v=u$ *dans la condition* $v\in\mathcal{D}^m$, $Av\in\mathcal{D}^m$, et on sait que u est unique. D'autre part, on sait qu'il existe une solution v telle que $v\in\mathcal{D}^{m+1}, Av\in\mathcal{D}^{m+1}$: application surjective de $(I-\lambda A)$ de $\mathcal{D}_A$ (considéré dans $\mathcal{D}^{m+1}$) sur $\mathcal{D}^{m+1}$. D'où on voit que par la définition même (passage à la limite), restriction de $X_m(t)$ à $\mathcal{D}_{m+1}$ est $X_{m+1}(t)$. *Il n'y aura donc aucune ambiguïté de noter* $X_m(t), m=1,2,\cdots$, *simplement* par $X(t)$. Nous énonçons encore une fois nos résultats:

i) Pour tout $u\in\mathcal{D}^m$, $X(t)u$ est une fonction continue en t à valeurs dans $\mathcal{D}^m$. De plus

$$\| X(t)u \|_{B_m(t_0)} \leqq \exp(\gamma_m |t|) \| u \|_{B_m(t_0)} \text{ ou encore} \tag{3.19}$$

$$\| X(t)u \|_{\mathcal{D}^m} \leqq C_m \exp(\gamma_m |t|) \| u \|_{\mathcal{D}^m}.$$

ii) Pour tout $u\in\mathcal{D}^{m+1}$, $X(t)u$ est une fonction une fois continuement différentiable en t à valeurs dans $\mathcal{D}^m$, et on a

$$\frac{d}{dt}(X(t)u) = A\cdot X(t)u = X(t)Au,$$

où la différentiation en t est à prendre pour la topologie de $\mathcal{D}^m$.

3° *Existence des solutions.* On va considérer le cas où A dépend de t. Il faut remarquer d'abord que dans notre cas le domaine de définition $\mathcal{D}_{A(t_0)}$ n'est pas toujours invariant avec t_0 (il arrivera que $A(t')(I-\lambda A(t))^{-1}$ n'est pas borné). Notre cas n'appartient pas donc au cas de M. T. Kato ([**4**]). Pour obtenir des résultats précis purement au point de vue de la théorie des semi-groupes, il faudrait une analyse minutieuse. Nous ne la faisons pas ici, car nous avons déjà obtenu l'inégalité d'énergie (3.7), qui est valable pour tous les espaces $\mathcal{D}^s$ (s entier, positif, 0, ou négatif quelconque), et grâce à cette inégalité une analyse grossière nous suffit.

On va construire un opérateur $X(t,s)$, t et s étant donnés dans $[-h,h]$. Pour simplifier, on prend $s=0, t\geqq 0$, et on considère une subdivision Δ: $0=t_0\leqq t_1\leqq\cdots\leqq t_n=h$; on considère l'opérateur $X_\Delta(t), t\geqq 0$ défini par

$$X_\Delta(t)=X_j(t)X_{j-1}X_{j-2}\cdots X_0, \quad \text{pour } t_j\leqq t<t_{j+1}, \quad \text{où}$$

$$(3.20) \qquad X_i=\exp[(t_{i+1}-t_i)A(t_i)] \qquad (i=0,1,\cdots,n-1),$$

$$X_j(t)=\exp[(t-t_j)A(t_j)].$$

On va montrer que, pour tout $u\in\mathcal{D}^{m+1}$ fixé, des $X_\Delta(t)u$ convergent vers $X(t)u$ bien déterminé *pour la topologie de* $\mathcal{D}^m$, et uniformément en t, lorsque des subdivisions Δ deviennent indéfiniment petites. De plus, on a i) $X(t)u$ est une fonction continue en t à valeurs dans $\mathcal{D}^m$, ii) $\|X(t)u\|_{\mathcal{D}^m}\leqq C_1\|u\|_{\mathcal{D}^{m+1}}$ pour tout $t\in[0,h]$.

Pour le montrer, il suffit de montrer le fait suivant: Soit $\Delta: 0=t_0\leqq t_1\leqq t_2\leqq\cdots\leqq t_n=h$ une subdivision; soient $0\leqq\tau_0\leqq\tau_1\leqq\cdots\leqq\tau_n\leqq h$, $0\leqq\tau_0'\leqq\tau_1'\leqq\cdots\leqq\tau_n'\leqq h$ deux suites de τ vérifiant la condition:

$$\|A(\tau_i)-A(\tau_i')\|_{\mathcal{L}(\mathcal{D}^{m+1},\,\mathcal{D}^m)}\leqq\varepsilon,\ i=1,2,\cdots,n;$$

soient $X_i=\exp(t_i-t_{i-1})A(\tau_i)$; $X_i'=\exp(t_i-t_{i-1})A(\tau_i')$, on a alors

LEMME 3.1.

$$\|(X_nX_{n-1}\cdots X_1-X_n'X_{n-1}'\cdots X_1')u\|_{\mathcal{D}^m}\leqq\varepsilon\cdot C\|u\|_{\mathcal{D}^{m+1}},$$

où la constante C ne dépend que de $B_m(t)$ *et de* $B_{m-1}(t)$, *à savoir, elle ne dépend ni de la subdivision* Δ, *ni des suites* $\{\tau_i\}$, $\{\tau_i'\}$.

Pour démontrer ce lemme, on prépare encore deux lemmes, l'un d'eux est

LEMME 3.2. *Soient* $X_i=\exp[(t_{i+1}-t_i)A(\tau_i)]$, $X_i'=\exp[(t_{i+1}-t_i)A(\tau_i')]$, *on a alors, pour* $u\in\mathcal{D}^{m+1}$

$$\|(X_i-X_i')u\|_{\mathcal{D}^m}$$
$$\leqq C_mC_{m+1}\exp(\gamma|t_{i+1}-t_i|)|t_{i+1}-t_i|\,\|A(\tau_i)-A(\tau_i')\|_{\mathcal{L}(\mathcal{D}^{m+1},\,\mathcal{D}^m)}\cdot\|u\|_{\mathcal{D}^{m+1}},$$

où C_m *et* C_{m+1} *sont données dans* (3.19), *et* $\gamma=\max(\gamma_m,\gamma_{m+1})$.

DÉMONSTRATION. On suppose $t_{i+1}\geqq t_i$ (dans le cas contraire, la démonstration est même).

$$(X_i'-X_i)u=\int_{t_i}^{t_{i+1}}\frac{d}{ds}\{\exp[(t_{i+1}-s)A(\tau_i)]\exp[(s-t_i)A(\tau_i')]u\}ds$$
$$=\int_{t_i}^{t_{i+1}}\exp[(t_{i+1}-s)A(\tau_i)][A(\tau_i')-A(\tau_i)]\exp[(s-t_i)A(\tau_i')]u\,ds$$

d'où

$$\|(X_i'-X_i)u\|_{\mathcal{D}^m}\leqq\int_{t_i}^{t_{i+1}}\|\exp(t_{i+1}-s)A(\tau_i)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{D}^m,\,\mathcal{D}^m)}\|A(\tau_i')-A(\tau_i)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{D}^{m+1},\,\mathcal{D}^m)}$$
$$\times\|\exp(s-t_i)A(\tau_i')\|_{\mathcal{L}(\mathcal{D}^{m+1},\,\mathcal{D}^{m+1})}\|u\|_{\mathcal{D}^{m+1}}ds,$$

d'où le lemme, compte tenu de (3.19). c. q. f. d.

On sait que $B_m(t)$, $B_{m+1}(t)$ définissent des normes équivalentes dans $\mathcal{D}^m$ et $\mathcal{D}^{m+1}$ respectivement. Soit $S_m(t)=(\Lambda+1)^{-m}B_m(t)(\Lambda+1)^{-m}$, il est un opérateur hermitien strictement positif: $S_m(t)\geqq s_m I$ pour $t\in[-h, h]$, s_m constante positive; il est continuement différentiable en t à valeurs dans $\mathcal{L}(L^2, L^2)$, on a alors pour tout $u\in\mathcal{D}^m$,

Lemme 3.3.

$$\frac{\| B_m(\tau)u \|}{\| B_m(\tau')u \|}\leqq\left(1+\frac{1}{s_m}\| S_m(\tau)-S_m(\tau') \|\right)^{1/2}.$$

Démonstration. Considérons le rapport $\| B_m(\tau)\|^2/\| B_m(\tau')u\|^2$, qui est égal à

$$\frac{(S_m(\tau)(\Lambda+1)^m u, (\Lambda+1)^m u)}{(S_m(\tau')(\Lambda+1)^m u, (\Lambda+1)^m u)}, \quad \text{d'où}$$

$$\left|\frac{\|B_m(\tau)u\|^2}{\|B_m(\tau')u\|^2}-1\right|\leqq\frac{1}{s_m}\cdot\frac{\| S_m(\tau)-S_m(\tau')\| \; \| u \|^2_{\mathcal{D}^m}}{\| u \|^2_{\mathcal{D}^m}}=\frac{1}{s_m}\| S_m(\tau)-S_m(\tau') \|.$$

c. q. f. d.

Démonstration du Lemme 3.1. Par les lemmes préparatoires, on verra notre ligne de la démonstration. Nous nous limitons donc à montrer des points essentiels. On part de l'expression:

$$X_nX_{n-1}\cdots X_1-X_n'X_{n-1}'\cdots X_1'=\sum_{i=1}^{n}X_n'X_{n-1}'\cdots X_{i+1}'(X_i-X_i')X_{i-1}\cdots X_1.$$

On va évaluer $\| (X_n'\cdots X_{i+1}'(X_i'-X_i)X_{i-1}\cdots X_1)u \|_{\mathcal{D}^m}$. On le pose $=\| X_n'v_n \|_{\mathcal{D}^m}$ ici on change de normes, on a visiblement $\leqq\frac{1}{s_m}\| X_n'v_n \|_{B_m(\tau_n')}$, d'après (3.19)

$$\leqq\frac{1}{s_m}\exp(\gamma_m(t_n-t_{n-1}))\| v_n \|_{B_n(\tau_n')}.$$

On pose ensuite $v_n=X_{n-1}'v_{n-1}$, on aura d'après le lemme 3.3,

$$\| v_n \|_{B_m(\tau_n')}\leqq\left(1+\frac{1}{s_m}\| S_m(\tau_n')-S_m(\tau_{n-1}') \|\right)^{1/2}\| v_n \|_{B_m(\tau_{n-1}')}.$$

Or,

$$\| v_n \|_{B_m(\tau_{n-1}')}=\| X_{n-1}'v_{n-1} \|_{B_m(\tau_{n-1}')}\leqq\exp(\gamma_m(t_{n-1}-t_{n-2}))\| v_{n-1} \|_{B_m(\tau_{n-1}')}.$$

On continue cette évaluation, et applique le lemme 3.2 au terme $(X_i'-X_i)$, et fait l'évaluation par $B_{m+1}(\tau_j)$ au terme X_j $(j\leqq i-1)$. On n'a qu'à remarquer ceci:

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{s_m}\| S_m(\tau_i')-S_m(\tau_{i-1}') \|\right)^{1/2}\leqq\left(1+\frac{1}{ns_m}\sum\| S_m(\tau_i')-S_m(\tau_{i-1}') \|\right)^{n/2},$$

$$\left(1+\frac{\text{variation totale de } S_m(t)}{ns_m}\right)^{n/2} \leqq \exp\left(\frac{V_m}{2s_m}\right)$$

où V_m est la variation totale de S_m: $V_m = \sup_{\{\tau\}} \sum \| S_m(\tau_i) - S_m(\tau_{i-1}) \|$. c. q. f. d.

On voit facilement que $X(t, s)$, $t, s, s_1 \in [-h, h]$, a les propriétés:

(3.21)

i) $X(t, s_1)X(s_1, s) = X(t, s)$,

ii) pour tout $u \in \mathcal{D}^{m+1}$, $X(t, s)u$ est une fonction continue en (t, s) à valeurs dans $\mathcal{D}^m$,

iii) $X(t, t) = I$.

Revenons à $X_\Delta(t)$ défini par (3.20). Il vérifie l'équation $\frac{d}{dt}(X_\Delta(t)u) = A'(t)X_\Delta(t)u$, pour tout $u \in \mathcal{D}^{m+1}$, sauf $t = t_0, t_1, \cdots, t_n$, où $A'(t) = A(t_{i-1})$ pour $t_{i-1} \leqq t < t_i$. D'où

$$X_\Delta(t)u - u = \int_0^t A'(s)X_\Delta(s)u ds\,.$$

Par passage à la limite, la topologie étant $\mathcal{D}^{m-1}$,

$$X(t)u - u = \int_0^t A(s)X(s)u ds$$

où l'intégration est à prendre pour la topologie de $\mathcal{D}^{m-1}$. D'où

$$\frac{d}{dt}(X(t)u) = A(t)X(t)u$$

où la différentiation est à prendre pour la topologie de $\mathcal{D}^{m-1}$. En général,

(3.22) $$\frac{d}{dt}(X(t, s)u) = A(t)X(t, s)u\,.$$

En résumé, *pour tout* $u \in \mathcal{D}^{m+1}$, $X(t, s)u$ *est une fonction continuement différentiable en* t *à valeurs dans* $\mathcal{D}^{m-1}$, *et vérifie* (3.22), $(m \geqq 2)$.

Considérons ensuite, pour $f(t)$, fonction continue en t à valeurs dans $\mathcal{D}^{m+2}$,

$$u(t; s) = \int_s^t X(t, \sigma)f(\sigma)d\sigma\,.$$

On montre facilement, d'après (3.21) et (3.22), qu'elle est une fonction continue en (t, s) à valeurs dans $\mathcal{D}^{m+1}$, de plus elle vérifie

(3.23) $$\frac{d}{dt}u(t; s) = A(t)u(t; s) + f(t)\,,$$

où la différentiation est à prendre pour la topologie de $\mathcal{D}^{m-1}$.

Résumons notre résultat sous la forme:

PROPOSITION 3.1. *Etant donnés* $s \in [-h, h]$, $u^0 \in \mathcal{D}^\infty$,[11] *et* $f(t)$, *fonction con-*

---

11) $\mathcal{D}^\infty$ est l'espace $\mathcal{D}_{L^2}$ dans [**11**]: $\mathcal{D}^\infty$ est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables, dont toutes les dérivées appartenant à L^2.

tinue en t à valeurs dans $\mathcal{D}^\infty$, il existe alors une et une seule solution $u(t)$ de l'équation (1.9), *continuement différentiable en t à valeurs dans $\mathcal{D}^\infty$ vérifiant $u(s)=u^0$.*

REMARQUE. L'uncité découle de l'inégalité d'énergie (3.7).

On va obtenir des résultats plus précis. On sait que l'inégalité d'énergie (3.7) subsiste dans n'importe quel espace $\mathcal{D}^m$ (m positif, 0, ou négatif, quelconque). Etant données la valeur initiale $u^0 \in \mathcal{D}^{m+1}$, et $f(t) \in \mathcal{D}^{m+1}$, fonction continue en t, on peut alors trouver deux suites: $u_j^0 \to u^0$ dans $\mathcal{D}^{m+1}$, et $f_j(t)$, fonctions continues en t, $\to f(t)$ dans $\mathcal{D}^{m+1}$, uniformément en t; $u_j^0, f_j(t) \in \mathcal{D}^\infty$.[12] D'après la proposition 3.1, il existe une et une seule solution $u_j(t) \in \mathcal{D}^\infty$, vérifiant

$$u_j(t)-u_j^0=\int_s^t A(\sigma)u_j(\sigma)d\sigma+\int_s^t f_j(\sigma)d\sigma\,.$$

Comme $A(t)$ est une application continue de $\mathcal{D}^{m+1}$ dans $\mathcal{D}^m$, et d'après l'inégalité d'énergie, par passage à la limite pour la topologie de $\mathcal{D}^m$,

$$u_\infty(t)-u^0=\int_s^t A(\sigma)u_\infty(\sigma)d\sigma+\int_s^t f(\sigma)d\sigma\,,$$

d'où

THÉORÈME 3.1. *Etant donnés $s \in [-h, h]$, $u^0 \in \mathcal{D}^{m+1}$, et $f(t)$, fonction continue en t a valeurs dans $\mathcal{D}^{m+1}$, il existe alors une et une seule solution $u(t)$ de l'équation* (1.9), *continuement différentiable en t à valeurs dans $\mathcal{D}^m$ vérifiant $u(s)=u^0$.*

Continuité par rapport à la valeur initiale u^0 et au second membre $f(t)$: L'application $(u^0, f(t)) \to u(t)$ est continue de $\mathcal{D}^m \times \mathcal{D}^m[-h, h]$[13] dans $\mathcal{D}^m[-h, h]$, et cette continuité est uniforme par rapport à s (d'après (3.7)).

Revenons finalement à l'équation initiale (1.1).

THÉORÈME 3.2. *Etant donnés $s \in [-h, h]$, et la donnée initiale*

$$(u_j^0, u_j^1, \cdots, u_j^{n_j-1}) \in (\mathcal{D}^{m+n_j-1}, \cdots, \mathcal{D}^{m+1}) \qquad (j=1, \cdots, N)\,,$$

et le second membre $f_i(t) \in \mathcal{D}^{m+1}[-h, h]$, m étant un entier quelconque positif, 0, *ou négatif, il existe une et une seule solution de l'équation* (1.1), $u_i(t)$ $(i=1, \cdots, N)$, *$u_j(t)$ étant une fonction n_j-fois continuement différentiable en t à valeurs dans $\mathcal{D}^m$, telle que*

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^i u_j(s)=u_j^i \qquad (i=0, 1, \cdots, n_j-1\,;\, j=1, \cdots, N)\,.$$

REMARQUE. On a exclu le cas $n=2$, $i \geqq 2$, c'est-à-dire les systèmes définis dans l'espace (x_1, x_2, t). (Voir le début de ce numéro ou bien l'Introduction).

---

12) Par exemple, la convolution avec $(2\pi\delta)^{-n/2}\exp\left(-\frac{|x|^2}{2\delta}\right)$, où δ est un paramètre tendant vers 0. Voir, par exemple [**8**].

13) $\mathcal{D}^m[a, b]$ est l'espace des fonctions continues en t à valeurs dans $\mathcal{D}^m$, muni de la topologie de convergence uniforme en t dans $[a, b]$.

Appendice

Démonstration du Lemme 2.1.

On utilise une partition de l'unité: $\alpha_i(x) \geqq 0$ $(i=0,1,\cdots)$ indéfiniment dérivables; $\sum_i \alpha_i(x)^2 \equiv 1$; nous adoptons ici, pour simplifier le raisonnement, une partition vérifiant en outre les conditions (voir [**5**, p. 126]): Soit $\{x^{(i)}\}_{i=0,1,2,\cdots}$ la suite des points dont les coordonnées soient des multiples de $\frac{\eta}{\sqrt{n}}$, η étant un nombre petit déterminé par P; $\alpha_i(x)=\alpha_0(x-x^{(i)})$ $(i=0,1,\cdots)$, $x^{(0)}=(0)$. Le support de $\alpha_0(x)$ est contenu dans la boule du centre 0 avec rayon η; on désigne

$$\alpha(p)=\sum_{|\nu|\leqq p}\sup_x |D^\nu \alpha_0(x)|. \tag{3}$$

Ceci fait, on a

$$\begin{aligned}\|\alpha_i(x)P\Lambda u\|^2 &\geqq \frac{1}{2}\|P\alpha_i\Lambda u\|^2-\|(P\alpha_i-\alpha_iP)\Lambda u\|^2 \\ &\geqq \frac{1}{2}\|P\alpha_i\Lambda u\|^2-2\|P(\Lambda\alpha_i-\alpha_i\Lambda)u\|^2-2\|[(P\Lambda)\alpha_i-\alpha_i(P\Lambda)]u\|^2.\end{aligned} \tag{4}$$

On va montrer trois inégalités:

i) $$\sum_i \|P\alpha_i\Lambda u\|^2 \geqq \frac{\delta^2}{4}\|\Lambda u\|^2 - C_1\|u\|^2,$$

ii) $$\sum_i \|(\Lambda\alpha_i-\alpha_i\Lambda)u\|^2 \leqq C_2\|u\|^2,$$

iii) $$\sum_i \|(P\Lambda)\alpha_i-\alpha_i(P\Lambda)u\|^2 \leqq C_3\|u\|^2.$$

L'inégalité ii) est un cas particulier de iii), où $P=1$. Mais, nous en donnons la démonstration détaillée, pour éclaircir le principe. Après ceci, nous démontrerons iii) brièvement. Comme on verra dans la suite, la propriété iii) est valable pour tous les opérateurs d'intégrale singulière; pour cela la condition (2.1) n'est pas nécessaire.

Vérification de 1).

On sait que, H étant un opérateur d'intégrale singulière, $\|Hu\| \leqq AM\|u\|$, où A est une constante ne dépendant que de n (dimension de l'espace);

$$M=\sum_{|\nu|\leqq 2n}\sup_{x\in R^n,\xi\geqq 1}\left|\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\nu \sigma(H)(x,\xi)\right|, \qquad \text{(voir [1], formule (39))}.$$

On voit alors ceci:

Il existe un nombre $\eta>0$ tel que, pour tout point $x_0\in R^n$, et pour tout $u\in L^2$,

$$\|(P-P(x_0))u\|^2_{B_{2\eta}(x_0)} \leqq \frac{\delta^2}{4}\|u\|^2,^{14)}$$

où $P(x_0)$ désigne l'opérateur de *convolution* tel que $\sigma(P(x_0))=\sigma P(x_0,\xi)$ (c'est-à-dire l'opérateur tangentiel au point $x=x_0$). $B_{2\eta}(x_0)$ est la boule du centre x_0 avec le rayon 2η. Il serait inutile de remarquer que η peut être choisi indépendamment de la position de x_0.

Occupons-nous de l'opérateur $P\alpha_i\Lambda = P(x^{(i)})\alpha_i\Lambda + [P-P(x^{(i)})]\alpha_i\Lambda$. On a alors

$$\|P\alpha_i\Lambda u\|^2 \geqq \frac{1}{2}\|P(x^{(i)})\alpha_i\Lambda u\|^2 - \|[P-P(x^{(i)})]\alpha_i\Lambda u\|^2. \tag{5}$$

D'après la condition (2.1) du lemme 2.1, on a

$$\text{Premier terme} \geqq \frac{\delta^2}{2}\|\alpha_i\Lambda u\|^2.$$

Partageons le second terme en deux parties:

$$\|[P-P(x^{(i)})]\alpha_i\Lambda u\|^2_{\Omega_i} + \|\cdots\|^2_{\complement\Omega_i},$$

où Ω_i *est la boule de centre* $x^{(i)}$ *avec le rayon* 2η. D'après ce qui précède,

$$\text{Premier terme} \leqq \frac{\delta^2}{4}\|\alpha_i\Lambda u\|^2, \quad \text{d'où}$$

$$\|P\alpha_i\Lambda u\|^2 \geqq \frac{\delta^2}{4}\|\alpha_i\Lambda u\|^2 - \|[P-P(x^{(i)})]\alpha_i\Lambda u\|^2_{\complement\Omega_i}. \tag{6}$$

On va évaluer le second terme en posant $\alpha_i u = v_i$.

Compte tenu de

$$\|[P-P(x^{(i)})]\alpha_i\Lambda u\|^2_{\complement\Omega_i} \leqq 2\|[P-P(x^{(i)})]\Lambda\alpha_i u\|^2_{\complement\Omega_i}$$
$$+2\|[P-P(x^{(i)})](\alpha_i\Lambda-\Lambda\alpha_i)u\|^2,$$

et de ce que $\|P\|$, $\|P(x^{(i)})\|\leqq C$, en supposant ii) vrai, il suffit d'envisager $\|[P-P(x^{(i)})]\Lambda\alpha_i u\|_{\complement\Omega_i}$.

Prenons $\beta(\xi)$, $0\leqq\beta(\xi)\leqq 1$, indéfiniment dérivable, qui vaut 1 au voisinage de l'origine et $\beta(\xi)\equiv 0$ pour $|\xi|\geqq 1$. On décompose Λ en deux parties $\Lambda=\Lambda_1+\Lambda_2$: $\hat{\Lambda}(\xi)=\beta(\xi)|\xi|+[1-\beta(\xi)]|\xi|\equiv\hat{\Lambda}_1(\xi)+\hat{\Lambda}_2(\xi)$. Comme l'opérateur Λ_1 est borné, on a

$$\|[P-P(x^{(i)})]\Lambda_1 v_i\| \leqq 2C\|\Lambda_1\|\cdot\|v_i\|, \quad v_i \text{ étant } \alpha_i u, \quad \leqq 2C\|v_i\|.$$

Il suffit donc d'envisager, $[P-P(x^{(i)})]\Lambda_2 v_i$. Revenons à l'expression:

---

14) On modifie $\sigma(P)$, s'il est nécessaire, en dehors de $B_{2\eta}(x_0)$ de telle manière qu'on ait $\|(\tilde{P}-P(x_0))u\|^2 \leqq \frac{\delta^2}{4}\|u\|^2$ pour tout $u\in L^2$, et ensuite restricte $(P-P(x_0))u$ à $B_{2\eta}(x_0)$.

Soit $\sigma(P)=a_0(x)+\sum a_{nm}(x)Y_{nm}(\xi)$, on a alors

$$[P-P(x^{(i)})]\Lambda_2=[a_0(x)-a_0(x^{(i)})]\Lambda_2+\sum_{n\geqq 1}[a_{nm}(x)-a_{nm}(x^{(i)})]Y_{nm}\Lambda_2\,.$$

On désigne $Y_{nm}'=Y_{nm}\Lambda_2$. On a alors, pour $x\in\complement\Omega_i$, en désignant le support de $\alpha_i(x)$ par ω_i,

$$(Y_{nm}'v_i)(x)=\int_{\omega_i}Y_{nm}'(x-y)v_i(y)dy\,.$$

Evaluons $Y_{nm}'(x)=\dfrac{1}{|x|^{2p}}(|x|^{2p}Y_{nm}'(x))$. Or la transformation de Fourier

$$|x|^{2p}Y_{nm}'(x)\xrightarrow[\mathcal{F}]{}\left(\frac{-1}{2\pi i}\right)^{2p}(\Delta_\xi{}^p([1-\beta(\xi)]Y_{nm}(\xi)|\xi|),\ \text{d'où}$$

$$|Y_{nm}'(x)|\leqq\frac{1}{|x|^{2p}}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2p}\int|\Delta_\xi{}^p\{[1-\beta(\xi)]Y_{nm}(\xi)|\xi|\}|d\xi\equiv\frac{1}{|x|^{2p}}C_{nm}(p)\,, \tag{7}$$

d'où

$$\|[P-P(x^{(i)})]\Lambda_2v_i\|_{\complement\Omega_i}$$

$$\leqq\{\sum_{n\geqq 0}(\sup_x|a_{nm}(x)-a_{nm}(x^{(i)})|C_{nm}(p)\}\mathrm{vol}(\omega_i)^{1/2}\left(\int_{|x|\geqq 2\eta}\frac{dx}{(|x|-\eta)^{4p}}\right)\|v_i\|\,.$$

Evidemment, si p est assez grand, les $C_{nm}(p)$ sont finis, et de plus, le nombre entre { } est fini et cette somme est uniformément bornée par rapport à i. En résumé, il existe une constante C, qui ne dépend pas de i, telle que

$$\|[P-P(x^{(i)})]\Lambda_2v_i\|_{\complement\Omega_i}\leqq C\|v_i\|\,. \tag{8}$$

En combinant (6) et (8) et l'inégalité pour $[P-P(x^{(i)})]\Lambda_1v_i$, on a

$$\|P\alpha_i\Lambda u\|^2\geqq\frac{\delta^2}{4}\|\alpha_i\Lambda u\|^2-C_1\|\alpha_iu\|^2\,,$$

d'où

$$\sum\|P\alpha_i\Lambda u\|^2\geqq\frac{\delta^2}{4}\|\Lambda u\|^2-C_1\|u\|^2\,. \tag{9}$$

c. q. f. d.

Vérification de ii).

On décompose $\Lambda=\Lambda_1+\Lambda_2$. Evidemment,

$$\|\Lambda_1\alpha_iu\|\leqq\|\alpha_iu\|\,,$$

$$\|\alpha_i\Lambda_1u\|\leqq\sup_x|\alpha_i(x)|\,\|\Lambda_1u\|_{\omega_i}\leqq\alpha(0)\|\Lambda_1u\|_{\omega_i}\,,$$

d'où

$$\sum_i\{\|\Lambda_1\alpha_iu\|^2+\|\alpha_i\Lambda_1u\|^2\}\leqq\|u\|^2+\alpha(0)^2\sum_i\|\Lambda_1u\|^2_{\omega_i}\,,$$

comme chaque point de R^n est recouvert par les ω_i au plus k fois, on a

$$\sum_i\|\Lambda_1u\|^2_{\omega_i}\leqq k\|\Lambda_1u\|^2\leqq k\|u\|^2,\quad\text{car}\quad\|\Lambda_1u\|\leqq\|u\|\,.$$

Envisageons maintenant

(10) $\varphi_i(x)=(\Lambda_2\alpha_i-\alpha_i\Lambda_2)u(x)$. Evaluons d'abord $\|\varphi_i(x)\|_{\Omega_i}$.

Dans l'expression

$$\varphi(x)=\int\Lambda_2(x-y)[\alpha_i(y)-\alpha_i(x)]u(y)dy,$$

on développe

$$\alpha_i(y)-\alpha_i(x)=\sum_{|\nu|\leqq m-1}\frac{D^\nu\alpha_i(x)}{\nu!}(y-x)^\nu+\sum_{|\nu|=m}\frac{\alpha_{i,\nu}(x,y)}{\nu!}(y-x)^\nu,$$ [15] d'où

(11)
$$\varphi_i(x)=\sum_{|\nu|\leqq m-1}\frac{(-1)^{|\nu|}}{\nu!}D^\nu\alpha_i(x)(x^\nu\Lambda_2)u$$
$$+\sum_{|\nu|=m}\frac{(-1)^{|\nu|}}{\nu!}\int\alpha_i(x,y)(x-y)^\nu\Lambda_2(x-y)u(y)dy.$$

On prend m de manière que $x^\nu\Lambda_2(x)$ ($|\nu|=m$) sont des fonctions bornées c'est-à-dire $\leqq M_m$. Ceci est toujours possible, car

$$|x^\nu\Lambda_2(x)|\leqq\left(\frac{1}{2\pi}\right)^m\int\left|\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\nu\{[1-\beta(\xi)]|\xi|\}\right|d\xi.$$

D'autre part, remarquons qu'on a toujours

(12)
$$|x^\nu\Lambda_2(x)|\leqq\frac{1}{|x|^{2p}}M_m(p),$$

voir (7) en posant là-dedans $Y_{nm}(\xi)\equiv 1$.

On décompose maintenant la dernière integrale dans (11) en deux intégrales: Premièrement,

$$\psi_{i,\nu}^{(1)}(x)=\int_{3\Omega_i}\alpha_{i,\nu}(x,y)(x-y)^\nu\Lambda_2(x-y)u(y)dy,$$

où $3\Omega_i$ est l'homothétie triple de Ω_i, c'est-à-dire la boule du centre $x^{(i)}$ avec rayon 6η. D'où

$$|\psi_{i,\nu}^{(1)}(x)|\leqq\sup|\alpha_{i,\nu}(x,y)|\cdot M_m\int_{3\Omega_i}|u(y)|dy$$
$$\leqq\alpha(m)M_m\,\mathrm{vol}(3\Omega_i)^{1/2}\|u\|_{3\Omega_i},$$

d'où

(13)
$$\|\psi_{i,\nu}^{(1)}(x)\|_{\Omega_i}\leqq\alpha(m)M_m\,\mathrm{vol}(3\Omega_0)^{1/2}\,\mathrm{vol}(\Omega_0)^{1/2}\|u\|_{3\Omega_i}.$$

Deuxièmement,

$$\psi_{i,\nu}^{(2)}(x)=\int_{\complement 3\Omega_i}\alpha_{i,\nu}(x,y)(x-y)^\nu\Lambda_2(x-y)u(y)dy.$$

15) Voir, à propos de ce développement, la démonstration du lemme 2.4.

En vertu de (12), on a

$$|\psi_{i,\nu}^{(2)}(x)| \leqq \alpha(m)\int_{\complement 3\Omega_i} \frac{M_m(p)}{|x-y|^{2p}}\,|u(y)|\,dy$$

$$\leqq \alpha(m)M_m(p)\sum_j \int_{\omega_j} \frac{1}{|x-y|^{2p}}\,|u(y)|\,dy\,,$$

où *figurent sous les signes de l'intégrale tous les* ω_j *vérifiant la condition*:

$$\mathrm{dis}(\omega_i, \omega_j) \geqq 3\eta\,.$$

D'où

$$|\psi_{i,\nu}^{(2)}(x)| \leqq \alpha(m)M_m(p)\Big(\sum_j \frac{1}{\mathrm{dis}(\Omega_i, \omega_j)^{2p}}\,\|u\|_{\omega_j}\,\mathrm{vol}(\omega_j)^{1/2}\Big)\,,$$

compte tenu de $\mathrm{dis}(\Omega_i, \omega_j) \geqq \frac{1}{2}\,\mathrm{dis}(\omega_i, \omega_j)$,

$$\leqq \alpha(m)M_m(p)\,\mathrm{vol}(\omega_0)^{1/2}\Big(\sum_j \frac{2^{2p}}{\mathrm{dis}(\omega_i, \omega_j)^{2p}}\,\|u\|_{\omega_j}\Big)\,,$$

d'où

$$\|\psi_{i,\nu}^{(2)}(x)\|_{\Omega_i} \leqq 2^{2p}\alpha(m)M_m(p)\,\mathrm{vol}(\omega_0)^{1/2}\,\mathrm{vol}(\Omega_0)^{1/2}\Big(\sum_j \frac{1}{\mathrm{dis}(\omega_i, \omega_j)^{2p}}\,\|u\|_{\omega_j}\Big)\,.$$

Par Schwarz

$$\sum_j \frac{1}{\mathrm{dis}(\omega_i, \omega_j)^{2p}}\,\|u\|_{\omega_j} \leqq \Big(\sum_j \frac{1}{\mathrm{dis}(\omega_i, \omega_j)^{2p}}\Big)^{1/2}\Big(\sum_j \frac{1}{\mathrm{dis}(\omega_i, \omega_j)^{2p}}\,\|u\|_{\omega_j}^2\Big)^{1/2}\,,$$

et

$$\Big(\sum_j \frac{1}{\mathrm{dis}(\omega_i, \omega_j)^{2p}}\Big) < K_p\,,$$

pour p assez grand, on a finalement

$$\|\psi_{i,\nu}^{(2)}(x)\|_{\Omega_i}^2 \leqq 2^{4p}\alpha(m)^2M_m(p)^2\,\mathrm{vol}(\omega_0)\,\mathrm{vol}(\Omega_0)K_p\Big(\sum_j \frac{1}{\mathrm{dis}(\omega_i, \omega_j)^{2p}}\,\|u\|_{\omega_j}^2\Big)\,. \tag{14}$$

Finalement, on a l'inégalité de la forme:

$$\|\varphi_i(x)\|_{\Omega_i}^2 \leqq C(m, p)\Big\{\|u\|_{3\Omega_i}^2 + \Big(\sum_j \frac{1}{\mathrm{dis}(\omega_i, \omega_j)^{2p}}\,\|u\|_{\omega_j}^2\Big)\Big\}\,. \tag{15}$$

Or,

$$\sum_{i,j} \frac{1}{\mathrm{dis}(\omega_i, \omega_j)^{2p}}\,\|u\|_{\omega_j}^2 = \sum_j \|u\|_{\omega_j}^2\Big(\sum_i \frac{1}{\mathrm{dis}(\omega_i, \omega_j)^{2p}}\Big) \leqq K_p \sum_j \|u\|_{\omega_j}^2 \leqq K_p k\,\|u\|^2\,,$$

d'où

$$\sum_i \|\varphi_i(x)\|_{\Omega_i}^2 \leqq C\,\|u\|^2\,. \tag{16}$$

Il reste à envisager $\| \varphi_i(x) \|^2_{\complement \Omega_i}$. Pour $x \in \complement \Omega_i$, on a l'expression

$$\varphi_i(x) = \int_{\omega_i} \Lambda_2(x-y)\alpha_i(y)u(y)dy.$$

L'inégalité (12) entraîne

$$|\varphi_i(x)| \leqq M_m(p)\int_{\omega_i} \frac{|u(y)|}{|x-y|^{2p}} dy \leqq M_m(p) \frac{1}{\mathrm{dis}(x, \omega_i)^{2p}} \| u \|_{\omega_i} \mathrm{vol}(\omega_i)^{1/2},$$

d'où

$$(17) \qquad \| \varphi_i(x) \|^2_{\complement \Omega_i} \leqq M_m(p)^2 \mathrm{vol}(\omega_0) \| u \|^2_{\omega_i} \Big(\int_{x \in \complement \Omega_i} \frac{dx}{\mathrm{dis}(x, \omega_i)^{4p}} \Big)$$

$$\leqq M_m(p)^2 \mathrm{vol}(\omega_0) \| u \|^2_{\omega_i} \Big(\int_{|x| \geqq 2\eta} \frac{dx}{(|x|-\eta)^{4p}} \Big).$$

Nous avons donc

$$(18) \qquad \sum_i \| \varphi_i(x) \|^2_{\complement \Omega_i} \leqq C'(m, p) \sum_i \| u \|^2_{\omega_i} \leqq C'(m, p) k \| u \|^2. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Vérification de iii):

$$\sum_i \| (P\Lambda\alpha_i - \alpha_i P\Lambda)u \|^2 \leqq C_3 \| u \|^2.$$

On décompose Λ: $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$. En remarquant $\| \Lambda_1 \| \leqq 1$, on a

$$\| P\Lambda_1 \alpha_i u \| \leqq \| P \| \cdot \sup_x |\alpha_i(x)| \, \| u \|_{\omega_i}; \; \| \alpha_i P \Lambda_1 u \| \leqq \sup_x |\alpha_i(x)| \, \| P\Lambda_1 u \|_{\omega_i},$$

d'où

$$(19) \qquad \begin{aligned} &\sum_i \| P\Lambda_1 \alpha_i u \|^2 \leqq \alpha(0)^2 \| P \|^2 \sum_i \| u \|^2_{\omega_i}, \\ &\sum_i \| \alpha_i P\Lambda_1 u \|^2 \leqq \alpha(0)^2 \sum_i \| P\Lambda_1 u \|^2_{\omega_i} \leqq \alpha(0)^2 k \| P\Lambda_1 u \|^2 \leqq \alpha(0)^2 k \| P \|^2 \| u \|^2. \end{aligned}$$

Il suffit donc d'envisager

$$\| (P\Lambda_2)\alpha_i - \alpha_i(P\Lambda_2)u \|.$$

Posons

$$\varphi_i(x) = [(P\Lambda_2)\alpha_i - \alpha_i(P\Lambda_2)]u(x);$$

désignons comme auparavant

$$(20) \qquad Y_{nm}\Lambda_2 = Y_{nm}';$$

considérons d'abord $\| \varphi_i(x) \|_{\Omega_i}$. On revient à l'expression, Y' étant l'un des Y_{nm}',

$$(Y'\alpha_i - \alpha_i Y')u = \sum_{|\nu| \leqq q-1} \frac{(-1)^{|\nu|} D^\nu \alpha_i(x)}{\nu!} (x^\nu Y')u$$

$$+ \sum_{|\nu| = q} \frac{(-1)^{|\nu|}}{\nu!} \int \alpha_{i,\nu}(x, y)(x-y)^\nu Y'(x-y)u(y)dy,$$

q étant un entier à déterminer. D'où, en décomposant $\varphi_i(x)$ en deux parties, l'une $\varphi_i^{(1)}(x)$, qui correspond aux termes $\sum_{|\nu|\leqq q-1}$, l'autre, $\varphi_i^{(2)}(x)$, qui correspond aux termes exprimés par des intégrales, on a d'abord

$$\varphi_i^{(1)}(x)=\sum_{|\nu|\leqq q-1}\frac{(-1)^{|\nu|}D^\nu\alpha_i(x)}{\nu!}\,(\sum_{n\geqq 0}a_{nm}(x)(x^\nu Y_{nm}'))u\,,$$

Or,

$$H_\nu=\sum_{n\geqq 0}a_{nm}(x)(x^\nu Y_{nm}')\,,\qquad 1\leqq|\nu|\leqq q-1\,, \tag{21}$$

sont visiblement des opérateurs continus de L^2 dans lui-même.[16] D'où

$$\varphi_i^{(1)}(x)=\sum_{|\nu|\leqq q-1}\frac{(-1)^{|\nu|}D^\nu\alpha_i(x)}{\nu!}H_\nu u\,;\ \ \|\varphi_i^{(1)}(x)\|_{\Omega_i}\leqq\alpha(q-1)\sum_{|\nu|\leqq q-1}\|H_\nu u\|_{\Omega_i}\,.$$

Ou encore

$$\|\varphi_i^{(1)}(x)\|^2_{\Omega_i}\leqq\alpha(q-1)^2C(q)\sum_{|\nu|\leqq q-1}\|H_\nu u\|^2_{\Omega_i}\,. \tag{22}$$

Passons à $\varphi_i^{(2)}(x)$. D'abord

$$\int|(x-y)^\nu Y'(x-y)|\,|u(y)|\,dy=\int_{3\Omega_i}|(x-y)^\nu Y'(x-y)|\,|u(y)|\,dy+\int_{\complement 3\Omega_i}\cdots dy\,.$$

Première intégrale se majore par

$$(\sup_x|x^\nu Y'(x)|)\,\|u\|_{3\Omega_i}\,\mathrm{vol}(3\Omega_0)^{1/2}\,.$$

Deuxième intégrale se majore par, (comme dans la démonstration de ii))

$$(\sup_x||x|^{2p}x^\nu Y'(x)|)2^{2p}\,\mathrm{vol}(\omega_0)^{1/2}\Big(\sum_j\frac{1}{\mathrm{dis}(\omega_i,\omega_j)^{2p}}\|u\|_{\omega_j}\Big)\,,$$

où ω_j, qui se figurent dans $\sum_j$ sont à prendre à tous les ω_j vérifiant $\mathrm{dis}(\omega_i,\omega_j)\geqq 3\eta$. Il est facile de voir que[16]

$$K(\nu)=\sum_{n\geqq 0}\sup_x|a_{nm}(x)|\cdot(\sup_x|x^\nu Y_{nm}'(x)|)<+\infty\,, \tag{23}$$

si q ($|\nu|=q$) est assez grand;

$$K(\nu,p)=\sum_{n\leqq 0}\sup_x|a_{nm}(x)|\cdot(\sup_x||x|^{2p}x^\nu Y_{nm}'(x)|)<+\infty\,, \tag{24}$$

si p est assez grand.

Il suffira de montrer que

$$\sum_i\|\varphi_i^{(2)}(x)\|^2_{\Omega_i}\leqq C\|u\|^2\,.$$

16) Compte tenu de l'évaluation (4) de [1], et de ce que $\sup_x|a_{nm}(x)|$ est une suite de décroissance rapide, à savoir que, quel que soit σ entier positif, on a

$$\sum_{n\geqq 0}n^\sigma\sup_x|a_{nm}(x)|<+\infty\,.$$

Passons finalement à $\| \varphi_i(x) \|_{\complement \Omega_i}$, D'abord, considérons

$$\psi(x) = \int_{\omega_i} Y'(x-y)\alpha(y)u(y)dy,$$

où $Y'(x)$ est l'un des $Y_{nm}'(x)$. On a

$$|\psi(x)| \leqq (\sup_x | |x|^{2p} x^\nu Y'(x)|) \int_{\omega_i} \frac{|u(y)|}{|x-y|^{2p}} dy,$$

où l'intégrale se majore par

$$\frac{1}{\mathrm{dis}(x, \omega_i)^{2p}} \| u \|_{\omega_i} \mathrm{vol}(\omega_0)^{1/2},$$

d'où

$$\| \psi(x) \|_{\complement \Omega_i} \leqq (\sup | |x|^{2p} x^\nu Y'(x)|) \, \mathrm{vol}(\omega_0)^{1/2} \| u \|_{\omega_i} \left(\int_{|x| \geqq 2\eta} \frac{dx}{(|x|-\eta)^{4p}} \right).$$

Comme $K(\nu, p)$ est fini, on en déduit que

$$\sum_i \| \varphi_i(x) \|^2_{\complement \Omega_i} \leqq C' \| u \|^2. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Nous énonçons encore un lemme, qui est une conséquence immédiate du lemme 2.1.

LEMME. *Soit H un opérateur d'intégrale singulière de classe $C_\beta^\infty, \beta > 0$: $\sigma(H)(x, \xi) \in C_\beta^\infty$, vérifiant la condition:*

Partie réelle $\sigma(H)(x, \xi) \leqq -\delta$, $\delta > 0$, pour tout $\xi \in R_\xi^n$, et tout $x \in R^n$. On a alors l'inégalité de la forme suivante

$$((H+H^*)\Lambda u, \Lambda u) \leqq -\delta' \| \Lambda u \|^2 + \gamma \| u \|^2,$$

où γ est une constante, où δ' $(< \delta)$ peut être pris aussi voisin de δ qu'on le veut.

DÉMONSTRATION. Comme $H^*\Lambda = H^\# \Lambda + (H^* - H^\#)\Lambda$, il suffit de montrer que, en posant

(25) $$P = H + H^\#,$$

$(P\Lambda u, \Lambda u)$ satisfait à l'inégalité dans le lemme. Remarquons que P est un opérateur d'intégrale singulière à symbole réel dont les valeurs $\leqq -\delta$. Utilisons une partition de l'unité qu'on vient de faire. On prend ici η de manière que: ε étant donné, on a

(26) $$\| (P - P(x_0))u \|_{B_\eta(x_0)} \leqq \varepsilon \| u \|,$$

pour toute $u \in L^2$, et pour tout $x_0 \in R^n$. Envisageons alors

(27) $$(P\Lambda u, \Lambda u) = \sum_i (\alpha_i P \Lambda u, \alpha_i \Lambda u) = \sum_i (P\alpha_i \Lambda u, \alpha_i \Lambda u) - \sum_i ((P\alpha_i - \alpha_i P)\Lambda u, \alpha_i \Lambda u).$$

Envisageons le second terme:

$$|((P\alpha_i - \alpha_i P)\Lambda u, \alpha_i \Lambda u)| \leqq \| (P\alpha_i - \alpha_i P)\Lambda u \| \, \| \alpha_i \Lambda u \|$$
$$\leqq \varepsilon' \| \alpha_i \Lambda u \|^2 + \frac{1}{\varepsilon'} \| (P\alpha_i - \alpha_i P)\Lambda u \|^2.$$

En vertu des propriétés ii) et iii), on a

$$\sum_i \|(P\alpha_i-\alpha_iP)\Lambda u\|^2 \leqq C'\|u\|^2, \quad \text{car}$$

$$\|(P\alpha_i-\alpha_iP)\Lambda u\|^2 \leqq 2\|P(\alpha_i\Lambda-\Lambda\alpha_i)u\|^2+2\|(P\Lambda\alpha_i-\alpha_iP\Lambda)u\|^2.$$

Envisageons le premier terme du second membre de (27). D'abord, comme on vient de faire dans la vérification de i), on décompose

$$P=P(x^{(i)})+[P-P(x^{(i)})].$$

En posant $\alpha_i\Lambda u=v_i$, on a

$$(P(x^{(i)})v_i, v_i) \leqq -\delta\|v_i\|^2.$$

En suite,

$$|([P-P(x^{(i)})]v_i, v_i)| \leqq \|[P-P(x^{(i)})]v_i\|\cdot\|v_i\| \leqq \varepsilon\|v_i\|^2,$$

d'après (26). D'où

$$\sum_i (Pv_i, v_i)=\sum_i (P(x^{(i)})v_i, v_i)+\sum([P-P(x^{(i)})]v_i, v_i),$$

ici le premier terme du second membre $\geqq \sum -\delta\|v_i\|^2=\sum -\delta\|\alpha_i\Lambda u\|^2 = -\delta\|\Lambda u\|^2$; le second terme se majore en valeur absolue par

$$\sum \varepsilon\|v_i\|^2=\varepsilon\|\Lambda u\|^2, \quad \text{d'où le lemme.} \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Construction de la matrice $\sigma(\mathcal{H})$.

Nous allons reproduire ici le procédé de M. Petrowsky exposé dans [**9**, p. 821], car il est délicat. Nous nous limitons au cas où la matrice (C) (dans le note en bas 2)) consiste en une seule carrée. Le cas général est traité de la même manière. On sait que, l'équation caractéristique de (C) et celle de la matrice $\lambda I-\sigma(\mathcal{H})$ sont identiques (à des multiples de 2π près) (voir, [**10**, p. 27]). On va montrer que

1°) $t\to\lambda_i(x,t)\in C_\beta^\infty$, $\beta=\infty$, sont des fonctions continuement différentiables en t $(i=1,\cdots,N)$.

a) Comme des racines sont toujours distinctes et réelles, $\lambda_i(x,t,\xi)$ sont des fonctions uniformes sur la sphère: $|\xi|=1$, x et t étant fixés. En effet, dans le cas $n>2$, le principe de monodromie affirme cette propriété. Dans le cas $n=2$, cela est vrai en vertu de l'hyperbolicité.

b) $\lambda_i(x,t,\xi)\in C_\beta^\infty$, $\beta=\infty$.

On sait d'abord que λ_j $(j=1,\cdots,N)$ sont toujours distinctes. De là par le théorème des fonctions implicites, on a par exemple, en désignant par $P(\lambda; x,t,\xi)=0$ l'équation caractéristique,

$$\frac{\partial\lambda_i}{\partial x_j}=-\left(\frac{\partial P}{\partial x_j}\Big/\frac{\partial P}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_i}$$

et $\left|\left(\frac{\partial P}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_i}\right| \geqq d^{N-1}$, où d est la borne inférieure des distances entre des racines, pour tout x, et tout $t \in [-h, h]$.

2°) Construction de $\sigma(\mathfrak{N})$. Nous suivons la construction de M. Petrowsky ([**9**, p. 821, note 2)]). On suppose $n \geqq 3$. Trouver $\sigma(\mathfrak{N})$ telle que $\sigma(\mathfrak{N})\sigma(\mathcal{H}) = \sigma(\mathcal{D})\sigma(\mathfrak{N})$ signifie que, en désignant $\sigma(\mathfrak{N}) = (n_{ij})$, $\sigma(\mathcal{H}) = (a_{ij})$,

$$\lambda_i n_{ij} = \sum_{s=1}^{N} n_{is} a_{sj}\,.$$

Nous fixons maintenant i. Alors $(n_{i1}, n_{i2}, \cdots, n_{iN})$ est une solution de l'équation, dont la matrice des coefficients est

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{21} & \cdots & a_{N1} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{1N} & & & \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, en désignant $A = (a_{ji})$, $(n_{i1}, \cdots, n_{iN})$ est un eigen-vecteur de A correspondant à la valeur caractéristique $\lambda = \lambda_i$. Prenons le cas $\lambda_i = \lambda_1$. On dit que l'espace des eigen-vecteurs au point (x, t, ξ) est donné par des expressions explicites (notons que l'espace est à une dimension), et que ce champ est continu en (x, t, ξ), (notons $|\xi| = 1$), et indéfiniment différentiable en (x, ξ), et une fois continuement différentiable en t. En effet, en désignant par M_{ij} le (i, j)-cofacteur de la matrice $\lambda_1 I - A$, $(M_{1j}, M_{2j}, \cdots, M_{Nj})$ $(j = 1, \cdots, N)$ forment des expressions de l'espace des eigenvecteurs. Vu que le rang de la matrice $\lambda_1 I - A$ est $(N-1)$ partout (l'hyperbolicité), l'un d'eux n'est pas trivial. c. q. f. d.

On va déterminer, x et t étant fixés, sur la sphère tout entière un champ d'eigen-vecteurs de *longeur unité*: fixons un point ξ_0 sur la sphère, et déterminons l'orientation, et prolongeons ce vecteur suivant des chemins issus du point ξ_0, ainsi nous obtenons un champ voulu sur la sphère tout entière, en vertu du principe de monodromie (dans le cas $n = 2$, ce procédé ne marche pas, comme nous montrons dans un exemple; dans le cas d'une seule équation, la construction de $\sigma(\mathfrak{N})$ explicite est possible, voir [**2**, p. 29]). Correspondant aux valeurs λ_i, on construit de même des champs d'eigen-vecteurs (de longeur unité) $e_i(\xi)$ $(i = 1, \cdots, N)$. Il est manifeste que, grâce à notre hypothèse (*régulièrement* hyperbolique), le déterminant formé par $e_1(\xi), e_2(\xi), \cdots, e_N(\xi)$ est minoré en valeur absolu par une constante positive lorsque ξ parcourt la sphère, et cela reste vrai lorsque x parcourt R^n, et $t \in [-h, h]$. Ceci remarqué, en fixant d'abord ξ_0, on construit un champ de vecteurs continu $(e_1(x, t, \xi), \cdots, e_N(x, t, \xi))$ pour tout $x \in R^n$, et $t \in [-h, h]$. Ceci est toujours possible en vertu du principe de monodromie, et puis par ce qui précède, sur la sphère tout entière en partant de $(e_1(x, t, \xi_0), \cdots, e_N(x, t, \xi_0))$. Dans le cas $n = 1$, on voit facilement que la construction de $\sigma(\mathfrak{N})$ est possible.

3°) On donne ici un exemple de système hyperbolique qui n'a pas de $\sigma(\mathfrak{N})$ telle que son symbole $\sigma(\mathfrak{N})(\xi)$ soit continu sur la circonférence: $|\xi|^2+|\eta|^2=1$. On prend

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Alors la matrice caractéristique est

$$\begin{pmatrix} \xi-\lambda & \frac{1}{2}\eta \\ \frac{1}{2}\eta & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Les racines de l'équation caractéristique sont

$$\lambda=\frac{1}{2}(\xi\pm\sqrt{\xi^2+\eta^2}), \text{ compte tenu de } |\xi|^2+|\eta|=1, \text{ sur } C,$$
$$=\frac{1}{2}(\xi\pm1)$$

Prenons $\lambda_1=\frac{1}{2}(\xi+1)$, alors l'espace des eigen-vecteurs correspondant à la valeur λ_1 au point (ξ,η) sur C est donné par

$$\frac{\eta}{2}: \lambda_1=\eta:(\xi+1), \text{ ou bien } (\xi-\lambda_1): -\frac{1}{2}\eta=(\xi-1): -\eta\,.$$

Comme on constate facilement, ce champ d'espaces d'eigen-vecteurs ne définit jamais un champ *continu* d'eigen-vecteurs sur la circonférence tout entière.

Plus généralement dans le cas $n=2$, pour tous les systèmes hyperboliques du premier ordre, à coefficients réels, à deux inconnus, la situation est même que la précédente. Voici la raison: On exprime les points sur C par θ: $0\leqq\theta\leqq2\pi$, compté de (1,0). On voit visiblement que $\lambda_1(\pi)=-\lambda_2(0)$, $\lambda_2(\pi)=-\lambda_1(0)$. Plus généralement, $\lambda_1(\pi+\theta)=-\lambda_2(\theta)$, $\lambda_2(\pi+\theta)=-\lambda_1(\theta)$, $0\leqq\theta\leqq\pi$, par suite deux espaces d'eigen-vecteurs correspondant respectivement à λ_1 et à λ_2 au point $\pi+\theta$ se permutent avec ceux de (θ). Or, quand on prolonge $(e_1(0), e_2(0))$ continument suivant la demi-circonférence: $0\leqq\theta\leqq\pi$, il n'arrive que deux cas suivants au point (π):

i) $\begin{array}{l} e_1(0)\longrightarrow -e_2(0) \\ e_2(0)\longrightarrow \ \ e_1(0), \end{array}$ ii) $\begin{array}{l} e_1(0)\longrightarrow \ \ e_2(0) \\ e_2(0)\longrightarrow -e_1(0). \end{array}$

En tout cas, quand on continue le prolongement suivant la demi-circonférence inférieure, on a $e_i(2\pi)=-e_i(0)$ $(i=1,2)$. c. q. f. d.

Université de Kyoto.

Bibliographie

[1] A. P. Calderón and A. Zygmund, Singular integral operators and differential equations, Amer. J. Math., **79** (1957), 901-921.

[2] A. P. Calderón, Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations, Amer. J. Math., **80** (1958), 16-36.

[3] L. Gårding, Solution directe du problème de Cauchy pour les équations hyperboliques, Colloques internationaux du C. N. R. S., **71** (1956), La théorie des équations aux dérivées partialles, 71-85.

[4] T. Kato, Integration of the equation of evolution in a Banach space, J. Math. Soc. Japan, **5** (1953), 208-234.

[5] J. Leray, Hyperbolic differential equations, Cours de Princeton, 1954.

[6] S. Mizohata, Le problème de Cauchy pour le passé pour quelques équations paraboliques, Proc. Japan Acad., **34** (1958), 693-696.

[7] S. Mizohata, Unicité du prolongement des solutions pour quelques opérateurs differentiels paraboliques, Mem. Coll. Sci. Kyoto Univ., ser. A, **31** (1958), 219-239.

[8] S. Mizohata, Problème de Cauchy pour les équations hyperboliques, Ibid., **30** (1957), 83-90.

[9] I. G. Petrowsky, Über das Cauchysche Problem für Systeme von partiellen Differentialgleichungen, Math. Sbornik, **2** (1937), 815-866.

[10] I. G. Petrowsky, Über das Cauchysche Problem für ein System linearer partieller Differentialgleichungen im Gebiete der nichtanalytischen Funktionen, Bull. de l'Université d'Etat de Moscou, fasc. **7** (1938), 1-74.

[11] L. Schwartz, Théorie des distributions, t. **2**, 1951, Paris.

[12] M. Yamaguti, Sur l'inégalité d'énergie pour le système hyperbolique, Proc. Japan Acad., **35** (1959), 37-41.

[13] K. Yosida, On the differntiability and the representation of one-parameter semi-group of linear operators, J. Math. Soc. Japan, **1** (1948), 15-21.

[14] K. Yosida, An operator-theoretical integration of the wave equation, Ibid., **8** (1956), 79-92.

[15] E. Hille, Functional analysis and semi-groups, Providence, 1957.

[16] J. L. Lions, Une remarque sur les applications du Théorème de Hille-Yosida, J. Math. Soc. Japan, **9** (1957), 62-70.