Journal of the Mathematical Society of Japan Vol. 8, No. 4, October, 1956

Le problème de Cauchy pour les équations paraboliques

Par Sigeru MIZOHATA

(Received June 14, 1956)

Introduction. Les équations que nous allons envisager sont des équations que M. Petrowsky a nommées *p-paraboliques* dans un beau mémoire de 1938 [6]. Donnons la définition des équations *p-paraboliques*:

DÉFINITION. Nous dirons que l'équation

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m} u(x,t)=\sum_{\substack{(k_0k_1\cdots k_n)\\ k_0\leqq m-1}} a^{(k_1\cdots k_n)}(x,t)\frac{\partial^{k_0+k_1+\cdots+k_n}}{\partial t^{k_0}\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}}u(x,t)+f(x,t) \tag{0.1}$$

est *régulièrement p-parabolique* dans $0\leqq t\leqq T$, si les conditions suivantes sont remplies:

1) Il existe un nombre entier positif p tel que

$$k_0p+k_1+k_2+\cdots+k_n\leqq mp;$$

2) Les parties réelles de toutes les racines de l'équation en r

$$f(r)=r^m-\sum_{((k))_p} a^{(k_0k_1\cdots k_n)}(x,t)(i\xi_1)^{k_1}(i\xi_2)^{k_2}\cdots(i\xi_n)^{k_n}r^{k_0}=0\,, \tag{0.2}$$

où $\sum_{((k))_p}$ désigne la sommation des termes tels que $k_0p+k_1+\cdots+k_n=mp$, sont toujours inférieures à $-\delta, (\delta>0)$, quand ξ (réel) parcourt la sphère $|\xi|=1$, et que $x\in R^n$, $t\in[0,T]$.

Nous voulons traiter en même temps le cas où $T=+\infty$, c'est-à-dire, celui où l'équation est régulièrement parabolique dans $0\leqq t<+\infty$. En ce cas, on doit remplacer, dans la condition 2), δ et $t\in[0,T]$ par $\delta(b)$ et $t\in[0,b]$, b positif quelconque, respectivement.

Remarquons que p est *pair*.

Nous supposons désormais que *les coefficients* $a^{(k_0k_1\cdots k_n)}(x,t)$ *et leurs dérivées en* t: $\frac{\partial}{\partial t}a^{(k_0\cdots k_n)}(x,t)$ *appartiennent à* $(\mathscr{B})_x$ *et sont continus en* *t dans l'espace* $(\mathscr{B})_x$.

Considérons maintenant l'équation (0.1) comme l'équation d'évolution. En changeant la notation, elle devient:

$$(0.3)\qquad \left(\frac{d}{dt}\right)^m u(t) = -\alpha_{m-1}(x,t,p)\left(\frac{d}{dt}\right)^{m-1} u(t) - \alpha_{m-2}(x,t,p)\left(\frac{d}{dt}\right)^{m-2} u(t)$$
$$-\cdots-\alpha_0(x,t,p)u(t)+f(t),$$

où $-\alpha_i(x,t,p) = \sum_{(k_1k_2\cdots k_n)} a^{(ik_1\cdots k_n)}(x,t)p_1^{k_1}\cdots p_n^{k_n}$ $(i=0,1,2,\cdots,m-1)$; où nous avons écrit $p_1^{k_1}\cdots p_n^{k_n}$ au lieu de $\dfrac{\partial^{k_1+\cdots+k_n}}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}}$. Désormais, nous écrirons toujours les dérivations spatiales par p, ou en détaillant la notation, par $p_1^{k_1}\cdots p_n^{k_n}$. Mais, nous aurons besoin d'introduire l'opérateur $\tau_s(p) \equiv (1-p_1^2-\cdots-p_n^2)^s$. Par conséquent, si on écrit par exemple l'opérateur par le symbole $b(x,t,p)$, il exprime en général un opérateur composé (d'un nombre fini) d'opérateurs $p_1, p_2, \cdots, p_n$, $\tau_s(p)$, et $a(x,t)$, où $a(x,t) \in (\mathscr{B})_x$ sont continues en t.

Comme $\alpha_i(x,t,i\xi)$ $(i=0,1,2,\cdots,m-1)$ est un polynôme en ξ de degré $(m-i)p$, nous désignons la partie homogène de degré $(m-i)p$ par $\tilde{\alpha}_i(x,t,i\xi)$, alors la condition de p-parabolicité devient: Les parties réelles de toutes les racines de l'équation en r:

$$(0.4)\qquad r^m+\tilde{\alpha}_{m-1}(x,t,i\xi)r^{m-1}+\tilde{\alpha}_{m-2}(x,t,i\xi)r^{m-2}+\cdots+\tilde{\alpha}_0(x,t,i\xi)=0$$

sont toujours inférieures à $-\delta$ quand $|\xi|=1$, $\xi\in\Xi^n$, $x\in R^n$, $t\in[0,T]$.

Posons

$$(0.5)\qquad A(x,t,p)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ -\tilde{\alpha}_0(x,t,p) & -\tilde{\alpha}_1(x,t,p) & \cdots & & -\tilde{\alpha}_{m-1}(x,t,p) \end{pmatrix},$$

en prenant $u(t)$, $\left(\frac{d}{dt}\right)u(t),\cdots,\left(\frac{d}{dt}\right)^{m-1}u(t)$ comme un système d'inconnues, nous avons un système d'équation d'évolution

$$(0.6)\qquad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u_0(t) \\ u_1(t) \\ \vdots \\ u_{m-1}(t) \end{pmatrix} = A(x,t,\boldsymbol{p})\begin{pmatrix} u_0(t) \\ u_1(t) \\ \vdots \\ u_{m-1}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{pmatrix},$$

ou

$$(0.7)\qquad \frac{d}{dt}U(t) = A(x,t,\boldsymbol{p})U(t) + F(t).$$

Définissons l'espace hilbertien D_q (q entier quelconque): $F \equiv (f_1, f_2, \cdots, f_m) \in D_q$, si $f_i \in D^{q-(i-1)p}$ $(i=1,2,\cdots,m)$. Cet espace est muni du produit scalaire suivant:

$$(F,G)_{D_q} = (\tau_q(\boldsymbol{p})f_1, g_1) + (\tau_{q-p}(\boldsymbol{p})f_2, g_2) + \cdots + (\tau_{q-(m-1)p}(\boldsymbol{p})f_m, g_m)$$

Nous considérons l'équation (0.7) dans l'espace D_q. D'abord, nous allons construire une matrice hermitienne positive $B_q(x,t,\boldsymbol{p})$ qui définit une norme équivalente à celle de D_q (Prop. 1). Ensuite, en vertu des propriétés de la matrice $B_q(x,t,\boldsymbol{p})$, nous arriverons au point où il est facile d'appliquer la théorie des semi-groupes.

Dans cette introduction, il nous reste à expliciter la définition de $\tau_s(\boldsymbol{p})$ et les propriétés de cet opérateur qui sont une base de notre raisonnement (voir [5]).

Opérateur $\tau_q(\boldsymbol{p})$ $(-\infty < q < +\infty)$. Soit f tempérée, alors on définit $\tau_q(\boldsymbol{p})f = (1 - \boldsymbol{p}_1^2 - \cdots - \boldsymbol{p}_n^2)^q f$ comme l'image réciproque de Fourier de $(1 + 4\pi^2|\xi|^2)^q \varphi_\xi \in (\mathscr{S}')_\xi$, φ_ξ étant la transformée de f. (Voir [7], [3]).

Espace hilbertien D^s $(-\infty < s < +\infty)$. $f \in D^s$, si f est tempérée et $\tau_{s/2}(\boldsymbol{p})f \in L^2(R^n)$. On le munit du produit scalaire suivant:

$$(f,g)_{D^s} = (\tau_{s/2}(\boldsymbol{p})f, \tau_{s/2}(\boldsymbol{p})g) = (\tau_s(\boldsymbol{p})f, g)$$

Remarquons que, si $s' < s$, alors $D^{s'} \supset D^s$, c'est-à-dire que D^s est contenu dans $D^{s'}$ avec une topologie plus fine.

Par définition, a) *les applications*: $f \to \boldsymbol{p}_1^{\nu_1} \cdots \boldsymbol{p}_n^{\nu_n} f$ de D^s dans $D^{s-|\nu|}$; b) *les applications*: $f \to \tau_q(\boldsymbol{p})f$ de D^s dans D^{s-2q}, *sont des applications linéaires continues.*

Pour $\tau_{-q}(\boldsymbol{p})c(x)f$, où q est un entier positif quelconque, $c(x) \in (\mathscr{B})$,

$f \in (\mathscr{D}'_{L^2})$, nous avons la formule suivante qu'on peut vérifier aisément par induction mathématique,

$$(0.8) \qquad \tau_{-q}(p)c(x)f = c(x)\tau_{-q}(p)f + \sum_{\substack{|\nu| \leq k \\ k=1,2,\cdots,q}} p_1^{\nu_1} \cdots p_n^{\nu_n} \tau_{-k}(p) c'_{\nu,k}(x) \tau_{-q}(p) f,$$

où $c'_{\nu,k}(x)$ sont des combinaisons linéaires des dérivées de $c(x)$ jusqu'à l'ordre $2q$.

Alors nous avons le

LEMME. *Soit s entier (positif, 0, negatif) quelconque; $a(x) \in (\mathscr{B})$, $f \in D^s$, alors l'application $(a(x), f) \to a(x)f$ de $(\mathscr{B}) \times D^s$ dans D^s est continue.*

Finalement, sauf mention expresse, nous entendons par $\mathfrak{L}(E, F)$, E et F étant deux espaces de Banach, l'espace des applications linéaires continues de E dans F, muni de la norme canonique.

Commençons par la construction de la matrice $B_q(x, t, p)$. D'abord, nous partons de la matrice

$$(0.9) \qquad A(x, t, i\xi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ -\tilde{\alpha}_0(x, t, i\xi) & \cdots & & & -\tilde{\alpha}_{m-1}(x, t, i\xi) \end{pmatrix}$$

Désormais nons supprimerons $\sim$ pour la simplicité.

I. Construction de la matrice $B(x, t, p)$.

Nous savons que, si les parties réelles de toutes les racines de l'équation

$$(1.1) \qquad f(r) = r^m + \alpha_{m-1}(i\xi)r^{m-1} + \alpha_{m-2}(i\xi)r^{m-2} + \cdots + \alpha_0(i\xi) = 0$$

sont inférieures à 0, alors la forme bézoutienne:

$$(1.2) \qquad B(f(r), f(-r)) = \sum_{i,j=1}^{m} b_{ij} u_i u_j,$$[1)]

1) Par définition, $f(x)\bar{f}(-y) - f(y)\bar{f}(-x)/x - y$
$= \sum_{i,j=1}^{m} b_{ij} x^{i-1}(-y)^{j-1}$.

est positive définie.

LEMME 1. *Dans* (1.2), *on a*

$$b_{ij}=(\alpha_i\bar{\alpha}_{j-1}-\alpha_{i+1}\bar{\alpha}_{j-2}+\alpha_{i+2}\bar{\alpha}_{j-3}\cdots)+(-1)^{i-j}(\overline{\cdots\cdots}) \tag{1.3}$$

pour $i\geqq j$, *où* $\alpha_m=1$.

Démonstration. On a $f(\bar{x})f(-y)-f(\bar{y})f(-x)=\sum_{i,j=0}^{m}\alpha_i\bar{\alpha}_j(x^i(-y)^j-y^i(-x)^j)$, comme les termes $i=j$ sont égaux à zéro, nous calculons selon $i>j$, ou $i<j$,

$$=\sum_{i>j}{}'\alpha_i\bar{\alpha}_j(-1)^j x^j y^j(x^{i-j}-y^{i-j})+\sum_{i<j}{}''\alpha_i\bar{\alpha}_j(-1)^{j+1}x^i y^i(x^{j-i}-y^{j-i})$$

$$\sum_{i>j}{}'\,_{\prime\prime}=\alpha_i\bar{\alpha}_j(-1)^j x^j y^j(x^{i-j-1}+x^{i-j-2}y+\cdots+xy^{i-j-2}+y^{i-j-1})\,(x-y)$$

$$=\sum_{i>j}{}'\alpha_i\bar{\alpha}_j(-1)^j\sum_{p=0}^{i-j-1}x^{i-1-p}y^{j+p}\,(x-y)$$

$$=(x-y)\sum_{i>j}\alpha_i\bar{\alpha}_j\cdot\sum_{p=0}^{i-j-1}(-1)^p x^{i-1-p}(-y)^{j+p}\,.$$

De même

$$\sum{}''\,_{\prime\prime}=\sum_{i<j}\alpha_i\bar{\alpha}_j(-1)^{j+1}\sum_{p=0}^{j-i-1}x^{j-1-p}y^{i+p}\cdot(x-y)$$

$$=(x-y)\sum_{i<j}\alpha_i\bar{\alpha}_j\cdot\sum_{p=0}^{j-i-1}(-1)^{j-i+p+1}x^{j-1-p}(-y)^{i+p}\,.$$

Donc, $f(x)\bar{f}(-y)-f(y)\bar{f}(-x)/x-y$

$$=\sum_{i>j}{}'\alpha_i\bar{\alpha}_j\sum_{p=0}^{i-j-1}(-1)^p x^{i-1-p}(-y)^{j+p}+\sum_{i<j}{}''\alpha_i\bar{\alpha}_j\sum_{p=0}^{j-i-1}(-1)^{j-i+p+1}x^{j-1-p}(-y)^{i+p}\,.$$

Nous calculons $b_{i_0j_0}$, $(i_0\geqq j_0)$. Alors, dans la sommation $\sum'$, pour que le terme $\alpha_i\bar{\alpha}_j\sum(-1)^p\cdots$ contienne un terme $x^{i_0-1}(-y)^{j_0-1}$, il faut et il suffit qu'il existe un $p\geqq 0$ tel que

$$\begin{array}{ccc} i-1-p=i_0-1 & & i=i_0+p \\ & \text{donc} & \\ j+p=j_0-1\,, & & j=j_0-1-p\,. \end{array}$$

Donc, la somme des coefficients de $x^{i_0-1}(-y)^{j_0-1}$ est $\alpha_{i_0}\bar{\alpha}_{j_0-1}+(-1)\alpha_{i_0+1}\bar{\alpha}_{j_0-2}+\cdots$ De même, dans la sommation $\sum''$, la somme correspondante est

$$(-1)^{i_0-j_0}\bar{\alpha}_{i_0}\alpha_{j_0-1}+(-1)^{i_0-j_0+1}\bar{\alpha}_{i_0+1}\alpha_{j_0-2}\cdots. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Exemple

$$m=2 \quad \begin{pmatrix} 2\Re(\alpha_0\bar{\alpha}_1) & 2i\Im\alpha_0 \\ -2i\Im\alpha_0 & 2\Re\alpha_1 \end{pmatrix};$$

$$m=3 \quad \begin{pmatrix} 2\Re(\alpha_0\bar{\alpha}_1) & 2i\Im(\alpha_0\bar{\alpha}_2) & 2\Re\alpha_0 \\ -2i\Im(\alpha_0\bar{\alpha}_2) & 2\Re(\alpha_1\bar{\alpha}_2)-2\Re\alpha_0 & 2i\Im\alpha_1 \\ 2\Re\alpha_0 & -2i\Im\alpha_1 & 2\Re\alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Considérons la matrice $A(i\xi)$ à m lignes et m colonnes

$$A(i\xi)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ -\alpha_0(i\xi) & -\alpha_1(i\xi) & \cdots & & -\alpha_{m-1}(i\xi) \end{pmatrix}, \qquad \xi\in\Xi^n. \tag{1.4}$$

En désignant *la matrice transposée de* (b_{ij}) *par* $B(\xi)$, nous démontrons alors que

$$BA+(BA)^*\leqq 0 \tag{1.5}$$

Démonstration. Désignons

$$C=(c_{ij})=BA+(BA)^*,$$

$$BA=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21}\cdots b_{m1} \\ b_{12} & b_{22}\cdots b_{m2} \\ \vdots & \vdots \\ b_{1m} & b_{2m}\quad b_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ & 0 & 1 \quad 0\cdots 0 \\ & & \ddots \\ & & \quad 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1\cdots & -\alpha_{m-1} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -b_{m1}\alpha_0 & b_{11}-b_{m1}\alpha_1 & \cdots & b_{m-1,1}-b_{m1}\alpha_{m-1} \\ -b_{m2}\alpha_0 & b_{12}-b_{m2}\alpha_1 & & b_{m-1,2}-b_{m2}\alpha_{m-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ -b_{mm}\alpha_0 & b_{1m}-b_{mm}\alpha_1 & & b_{m-1,m}-b_{mm}\alpha_{m-1} \end{pmatrix}=(b_{j-1,i}-b_{mi}\alpha_{j-1}), \text{ où}$$

$$b_{0i}=0\ (i=1,2,\cdots,m).$$

Alors,

$$
(1.6)\qquad
\begin{aligned}
c_{ii} &= 2\Re(b_{i-1,i} - b_{mi}\alpha_{i-1})\,,\\
c_{ij} &= (b_{j-1,i} - b_{mi}\alpha_{j-1}) + (\bar{b}_{i-1,j} - \bar{b}_{mj}\bar{\alpha}_{i-1})\\
&= (b_{j-1,i} + \bar{b}_{i-1,j}) - (b_{mi}\alpha_{j-1} + \bar{b}_{mj}\bar{\alpha}_{i-1})\\
&= (\bar{b}_{i,j-1} + \bar{b}_{i-1,j}) - (b_{mi}\alpha_{j-1} + \bar{b}_{mj}\bar{\alpha}_{i-1})\,.
\end{aligned}
$$

De la formule (1.3), on a

$$
b_{mi} = \begin{cases} 1) \quad m-i \quad \text{pair}: & 2\Re\alpha_{i-1} \\ 2) \quad m-i \quad \text{impair}: & -2i\Im\alpha_{i-1} \end{cases} \qquad 0 \leqq i \leqq m-1\,.
$$

Comme $\Re(b_{i-1,i})=0$, on a

$$
(1.7)\qquad c_{ii} = -2\Re(b_{mi}\alpha_{i-1}) = \begin{cases} 1) \quad m-i \quad \text{pair}: & -4\Re^2\alpha_{i-1}\,, \\ 2) \quad m-i \quad \text{impair}: & -4\Im^2\alpha_{i-1}\,. \end{cases}
$$

Calculons c_{ij} pour $i>j$.

1) $i-j$ impair:

$$b_{i,j-1} \text{ réel} = 2\Re(\alpha_i\bar{\alpha}_{j-2} - \alpha_{i+1}\bar{\alpha}_{j-3} + \alpha_{i+2}\bar{\alpha}_{j-4}\cdots)\,,$$

$$b_{i-1,j} \text{ réel} = 2\Re(\alpha_{i-1}\bar{\alpha}_{j-1} - \alpha_i\bar{\alpha}_{j-2} + \alpha_{i+1}\bar{\alpha}_{j-3}\cdots)\,, \text{ donc}$$

$$b_{i,j-1} + b_{i-1,j} = 2\Re(\alpha_{i-1}\bar{\alpha}_{j-1})\,.$$

2) $i-j$ pair:

$$b_{i,j-1} = 2iI(\alpha_i\bar{\alpha}_{j-2} - \alpha_{i+1}\bar{\alpha}_{j-3} + \cdots)\,,$$

$$b_{i-1,j} = 2iI(\alpha_{i-1}\bar{\alpha}_{j-1} - \alpha_i\bar{\alpha}_{j-2} + \cdots)\,, \text{ donc}$$

$$\bar{b}_{i,j-1} + \bar{b}_{i-1,j} = -2i\Im(\alpha_{i-1}\bar{\alpha}_{j-1})\,.$$

Alors, en divisant en 4 cas, nous avons

i) $m-i$ pair, $m-j$ pair

$$c_{ij} = -2iI(\alpha_{i-1}\bar{\alpha}_{j-1}) - 2(\alpha_{j-1}\Re\alpha_{i-1} + \bar{\alpha}_{i-1}\Re\alpha_{j-1}) = -4\Re\alpha_{j-1}\cdot\Re\alpha_{i-1}\,.$$

ii) $m-i$ impair, $m-j$ impair

$$c_{ij} = -2iI(\alpha_{i-1}\bar{\alpha}_{j-1}) - (-2i\alpha_{j-1}\mathfrak{I}\alpha_{i-1} + 2i\bar{\alpha}_{i-1}\mathfrak{I}\alpha_{j-1}) \doteq -4\mathfrak{I}\alpha_{j-1}\mathfrak{I}\alpha_{i-1}\,.$$

iii) $m-i$ pair, $m-j$ impair

$$c_{ij} = 2\mathfrak{R}(\alpha_{i-1}\bar{\alpha}_{j-1}) - 2(\alpha_{j-1}\mathfrak{R}\alpha_{i-1} + i\bar{\alpha}_{i-1}\mathfrak{I}\alpha_{j-1}) = -4i\mathfrak{I}\alpha_{j-1}\mathfrak{R}\alpha_{i-1}\,.$$

iv) $m-i$ impair, $m-j$ pair

$$c_{ij} = 2\mathfrak{R}(\alpha_{i-1}\bar{\alpha}_{j-1}) - 2(-i\alpha_{j-1}\mathfrak{I}\alpha_{i-1} + \bar{\alpha}_{i-1}\mathfrak{R}\alpha_{j-1}) = 4i\mathfrak{I}\alpha_{i-1}\mathfrak{R}\alpha_{j-1}\,.$$

Donc, $C(u,u) = \sum_{i,j=1}^{m} c_{ij}u_iu_j =$

$$(1,9)\quad = \begin{cases} m \text{ impair}: \ -4(\mathfrak{R}\alpha_0\cdot u_1 - i\mathfrak{I}\alpha_1\cdot u_2 + \mathfrak{R}\alpha_2\cdot u_3 - \cdots + \mathfrak{R}\alpha_{m-1}\cdot u_m)(\overline{\cdots})\,, \\ m \text{ pair} \quad\ : \ -4(-i\mathfrak{I}\alpha_0\cdot u_1 + \mathfrak{R}\alpha_1\cdot u_2 - i\mathfrak{I}\alpha_2\cdot u_3 + \cdots + \mathfrak{R}\alpha_{m-1}\cdot u_m)(\overline{\cdots})\,. \end{cases}$$

c. q. f. d.

Exemple:

$$m=2\quad B(\xi) = \begin{pmatrix} 2\mathfrak{R}(\alpha_0\alpha_1) & -2i\mathfrak{I}\alpha_0 \\ 2i\mathfrak{I}\alpha_0 & 2\mathfrak{R}\alpha_1 \end{pmatrix},$$

$$C = BA + (BA)^* = \begin{pmatrix} -4\mathfrak{I}^2\alpha_0 & 4i\mathfrak{I}\alpha_0\mathfrak{R}\alpha_1 \\ -4i\mathfrak{I}\alpha_0\mathfrak{R}\alpha_1 & -4\mathfrak{R}^2\alpha_1 \end{pmatrix} \leqq 0\,.$$

Modification de $B(\xi)$.

Considérons maintenant une modification: $B(\xi) \to \bar{B}(\xi)$ telle que $\bar{C}(\xi)$ soit strictement positive définie.

Nous désignons désormais par $\to$ l'homomorphisme de X à $XA+(XA)^*$. Remarquons d'abord les faits suivants.

1) $O_{ii}(\alpha)$, α réel, $1 \leqq i \leqq m$.

$$\begin{array}{c} \\ i \end{array}\begin{array}{c} \quad\ \ i \\ \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & \alpha & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \\ i \end{array}\begin{array}{c} \quad\ \ i \\ \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & \alpha & \\ & & \alpha & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

2) $O_{ij}(\delta)$, $1 \leqq i < j \leqq m-1$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & & j \end{array} \\ i & \begin{pmatrix} & & \delta \\ & & \\ \bar\delta & & \end{pmatrix} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} & & & j \end{array} \\ i & \begin{pmatrix} & & & \delta \\ & & \delta & \\ & \bar\delta & & \\ \bar\delta & & & \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{cccc} i & & & \end{array} \end{array}.$$

En particulier

$$\begin{array}{c} O_{i-1,i}(\delta) \longrightarrow \\ i \leqq m-1 \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{c} i \end{array} \\ i & \begin{pmatrix} & \delta & \\ & 2\Re\delta & \\ \bar\delta & & \end{pmatrix} \end{array}.$$

3) $O_{im}(\delta)$, $i < m$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} i & & m \end{array} \\ i & \begin{pmatrix} & & \delta \\ & & \\ \bar\delta & & \end{pmatrix} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cc} & \begin{array}{c} i \end{array} \\ i & \begin{pmatrix} & & & -\overline{\delta\alpha_0} & & \\ & & & -\overline{\delta\alpha_1} & & \\ & & & \vdots & & \\ -\delta\alpha_0 & -\delta\alpha_1 & \cdots & -2\Re(\delta\alpha_{i-1}) & \cdots & -\delta\alpha_{m-1} \\ & & & \vdots & & \delta \\ & & & -\overline{\delta\alpha_{m-1}}\bar\delta & & \end{pmatrix} \end{array}.$$

4) $O_{mm}(\beta)$, β réel

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & & m \end{array} \\ m & \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \beta \end{pmatrix} \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} & & & -\beta\bar\alpha_0 \\ & & & -\beta\bar\alpha_1 \\ & & & \\ -\beta\alpha_0 & -\beta\alpha_1 & \cdots & -2\beta\Re\alpha_{m-1} \end{pmatrix}.$$

Remarquons que les éléments $b_{ij}(\xi)$ de la matrice $B(\xi)$ sont des polynômes homogènes de ξ de degré $(2m-i-j+1)p$, et que $c_{ij}(\xi)$ de $C(\xi)$ sont des polynômes homogènes de degré $(2m-i-j+2)p$.

DÉFINITION. $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{G}$. $H(\xi) \in \mathfrak{H}$ (resp. $G(\xi) \in \mathfrak{H}$), si $H(\xi)$ (resp. $G(\xi)$) est hermitienne et ses éléments $h_{ij}(\xi)$ $(i, j=1, 2, \cdots, m)$ (resp. $g_{ij}(\xi)$) sont des polynômes homogènes en ξ, $\xi \in \Xi^n$, de degré $(2m-i-j+1)p$ (resp. $(2m-i-j+2)p$).

Alors, l'application $\longrightarrow$ donne un homomorphisme de $\mathfrak{H}$ dans $\mathfrak{G}$. Désormais, nous considérerons toujours les éléments de $\mathfrak{H}$ en particulier, $O_{ij}(\delta(\xi))\in\mathfrak{H}$, $(i\leqq j)$.

Comme $B(\xi)\in\mathfrak{H}$ est positive définie, il existe $\sigma>0$ tel que

$$B(\xi)\geqq\sigma\begin{pmatrix}\chi(\xi)^{(2m-2+1)p} & & & \\ & \chi(\xi)^{(2m-4+1)p} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \chi(\xi)^{p}\end{pmatrix}\equiv\sigma E(\xi) \tag{1.9}$$

où $\chi(\xi)=(\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2)^{\frac{1}{2}}$.

Or, il existe un nombre ϵ tel que, pour toute matrice $\Gamma(\xi)\in\mathfrak{H}$ telle que

$$|\gamma_{ij}(\xi)|\leqq\epsilon\chi(\xi)^{(2m-i-j+1)p}, \tag{1.10}$$

on a

$$\Gamma(\xi)\geqq-\frac{\sigma}{2}E(\xi). \tag{1.11}$$

Désormais, nous ne considérerons que des matrices telles que $\Gamma(\xi)$.

Nous voulons maintenant construire une matrice $\in\mathfrak{H}$ telle que son image par l'homomorphisme $\longrightarrow$ soit une matrice négative définie. Pour cela, nous *élargissons l'espace* $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{G}$, *en remplaçant des polynômes par des fractions rationnlles homogènes* dont les degrés sont les mêmes que dans les précédents et dont les dénominateurs ne s'annulent pas lorsque $\xi\neq0$.

1) Soit $H(\xi)\longrightarrow G(\xi)=\{g_{ij}(\xi)\}$, $H(\xi)\in\mathfrak{H}$, $G(\xi)\in\mathfrak{G}$, alors, quand on ajoute $O_{i,j-1}(-g_{ij}(\xi))\in\mathfrak{H}$, $(j>i+2)$, à $H(\xi)$, l'élément (i,j) dans $G(\xi)$ s'annule et l'élément $(i+1,j-1)$ augmente de $-g_{ij}(\xi)$. C'est-à-dire que l'élément (i,j) se déplace anti-diagonalement ($\swarrow$) en changeant de signe:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} j-1 & j \end{array} \\ \begin{array}{c} i \\ i+1 \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} & & & \swarrow & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} \end{array}.$$

2) Si on ajoute $O_{i,i+1}(-g_{i,i+2}(\xi))$, $(i=1, 2,\cdots, m-2)$, à $H(\xi)$, alors l'élément $(i, i+2)$ dans $G(\xi)$ s'annule et l'élément $(i+1, i+1)$ augmente de $-2\Re g_{i,i+2}(\xi)$.

3) Supposons $g_{i,i+1}(\xi)$ réel $(i=1, 2,\cdots, m-1)$, alors si on ajoute $O_{ii}(-g_{i,i+1}(\xi))$ à $H(\xi)$, l'élément $(i, i+1)$ dans $G(\xi)$ s'annule.

Compte tenu de cela, considérons

$$\begin{pmatrix} & & \delta_1(\xi) \\ & & \delta_2(\xi) \\ & & \vdots \\ & & \delta_{m-1}(\xi) \\ \bar{\delta}_1(\xi) & \bar{\delta}_2(\xi)\cdots & \delta_m(\xi) \end{pmatrix} \in \mathfrak{H}.$$

Dans l'image (par l'homomorphisme $\rightarrow$), déplaçons les éléments (i, j) $(j>i)$ anti-diagonalement ($\swarrow$) en changeant de signe jusqu'à (ν, ν) ou à $(\nu, \nu+1)$ suivant la parité de $j-i$. Nous voulons disposer de $(\delta_1(\xi), \cdots, \delta_m(\xi))$ de manière que:

1) La partie réelle de la somme des termes tombés à (ν, ν), $(\nu=1, 2,\cdots, m)$, soit $\varepsilon_\nu(\xi)$ donné à l'avance, en entendant que l'élément (ν, ν) soit $-\alpha_{\nu-1}\delta_\nu$;

2) La partie imaginaire de la somme des termes tombés à $(\nu, \nu+1)$ $(\nu=1, 2,\cdots, m-1)$, s'annule.

Démontrons maintenant que cela est possible et que $(\delta_1(\xi),\cdots, \delta_m(\xi))$ est déterminé de manière unique par $(\varepsilon_1(\xi),\cdots, \varepsilon_m(\xi))$.

LEMME 2.

$$-(\nu, \nu)=\sum_{(q;\nu\geqq q\geqq 1)}(-1)^{\nu-q}\alpha_{2\nu-1-q}\delta_q+\sum_{(q;m\geqq q\geqq \nu+1)}(-1)^{\nu-q}\bar{\alpha}_{2\nu-1-q}\bar{\delta}_q, \quad (\nu=1, 2,\cdots, m), \tag{1.12}$$

$$(\nu, \nu+1)=\sum_{(q;\nu\geqq q\geqq 1)}(-1)^{\nu-q+1}\alpha_{2\nu-q}\delta_q+\sum_{(q;m\geqq q\geqq \nu+1)}(-1)^{\nu-q}\bar{\alpha}_{2\nu-q}\bar{\delta}_q, \quad (\nu=1, 2,\cdots, m-1) \tag{1.13}$$

où $\alpha_m=1$, $\alpha_{-1}=\alpha_{-2}=\cdots=\alpha_{m+1}=\alpha_{m+2}=\cdots=0$.

Démonstration. Dans la matrice que nous envisageons,

$$(i,\ j)=-\alpha_{j-1}\delta_i-\bar{\alpha}_{i-1}\bar{\delta}_j \qquad (j\geqq i, j\neq m),$$

$$(i, m)=-\alpha_{m-1}\delta_i-\bar{\alpha}_{i-1}\bar{\delta}_m+\delta_{i-1}.$$

Démontrons (1.12). Posons $j+i=2\nu$, $j-i=2q$, alors en convenant de mettre $-\alpha_{\nu-1}\delta_\nu$ dans (ν,ν), la somme des termes tombés à (ν,ν) par l'opération $(\swarrow)$ devient

$$-\sum_{\{q;\nu-1\geqq q\geqq 0\}}(-1)^q\alpha_{q+\nu-1}\delta_{\nu-q}-\sum_{\{q;m-\nu\geqq q\geqq 1\}}(-1)^q\bar{\alpha}_{\nu-q-1}\bar{\delta}_{\nu+q}\,.$$

Donc, on a (1.12). (1.13) est démontré de méme manière.

c. q. f. d.

Cela étant, prenons les parties réelles de (1.12), $(\nu=1,2,\cdots,m)$, et les parties imaginaires de (1.13) $(\nu=1,2,\cdots,m-1)$. Alors, en posant $\mathfrak{J}\delta_m(\xi)\equiv 0$, nous avons $(2m-1)$ équations linéaires en $(\mathfrak{R}\delta_1, \mathfrak{J}\delta_1, \mathfrak{R}\delta_2, \mathfrak{J}\delta_2,\cdots, \mathfrak{J}\delta_{m-1}, \mathfrak{R}\delta_m)$. En mettant ces équations en ordre: $-\mathfrak{R}(1,1)$, $\mathfrak{J}(1,2)$, $-\mathfrak{R}(2,2),\cdots$, $-\mathfrak{R}(\nu,\nu)$, $\mathfrak{J}(\nu,\nu+1),\cdots$, $-\mathfrak{R}(m,m)$, nous considérons la matrice des coefficients.

Compte tenu de ce que $\mathfrak{R}(\bar{\gamma})=\mathfrak{R}(\gamma)$, $\mathfrak{J}(\bar{\gamma})=-\mathfrak{J}(\gamma)$, les coefficients de $\mathfrak{R}\delta_q$, $\mathfrak{J}\delta_q$ sont,

1) dans la partie telle que $-\mathfrak{R}(\nu,\nu)$ $(\nu=1,2,\cdots,m)$

$$\begin{pmatrix} (-1)^{q-1}\mathfrak{R}(\alpha_{1-q}\delta_q) \\ (-1)^{q-2}\mathfrak{R}(\alpha_{3-q}\delta_q) \\ \vdots \\ (-1)^{q-\nu}\mathfrak{R}(\alpha_{2\nu-1-q}\delta_q) \\ \vdots \\ (-1)^{q-m}\mathfrak{R}(\alpha_{2m-1-q}\delta_q) \end{pmatrix}$$

2) dans la partie telle que $\mathfrak{J}(\nu,\nu+1)$ $(\nu=1,2,\cdots,m-1)$

$$\begin{pmatrix} (-1)^{q-2}\mathfrak{J}(\alpha_{2-q}\delta_q) \\ (-1)^{q-3}\mathfrak{J}(\alpha_{4-q}\delta_q) \\ \vdots \\ (-1)^{q-\nu-1}\mathfrak{J}(\alpha_{2\nu-q}\delta_q) \\ \vdots \\ (-1)^{q-m}\mathfrak{J}(\alpha_{2m-2-q}\delta_q) \end{pmatrix}$$

Donc, les coefficients qui correspondent à $\mathfrak{R}\delta_q$, $\mathfrak{J}\delta_q$ sont

$$
(1.14) \qquad \begin{array}{c} \Re\delta_q \\ (q=1,2,\cdots,m) \end{array} \left(\begin{array}{l} (-1)^{q-1}\Re\alpha_{1-q} \\ (-1)^{q-2}\Im\alpha_{2-q} \\ (-1)^{q-2}\Re\alpha_{3-q} \\ \quad\vdots \\ (-1)^{q-\nu}\Re\alpha_{2\nu-1-q} \\ (-1)^{q-\nu-1}\Im\alpha_{2\nu-q} \\ \quad\vdots \\ (-1)^{q-m}\Re\alpha_{2m-1-q} \end{array} \right)
$$

$$
(1,15) \qquad \begin{array}{c} \Im\delta_q \\ (q=1,2,\cdots,m-1) \end{array} \left(\begin{array}{l} (-1)^{q-2}\Im\alpha_{1-q} \\ (-1)^{q-2}\Re\alpha_{2-q} \\ (-1)^{q-3}\Im\alpha_{3-q} \\ (-1)^{q-3}\Re\alpha_{4-q} \\ \quad\vdots \\ (-1)^{q-m-1}\Im\alpha_{2m-1-q} \end{array} \right)
$$

D'autre part, considérons le polynôme (1.1)

$$
\begin{aligned} f(r) = r^m &+ (\Re\alpha_{m-1} + i\Im\alpha_{m-1})r^{m-1} + \cdots + (\Re\alpha_{m-\nu} + i\Im\alpha_{m-\nu})r^{m-\nu} \\ &+ \cdots + (\Re\alpha_0 + i\Im\alpha_0)\,. \end{aligned}
$$

En remplaçant r par ix, décomposons le polynôme en deux polynômes réels:

$$
f(ix) = (g_1(x) - ig_2(x))\,(i)^m\,.
$$

En remarquant que $r^{m-\nu} = x^{m-\nu}(-i)^\nu i^m$, on a

$$
\begin{aligned} g_1(x) - ig_2(x) = x^m &+ (-i)\,(\Re\alpha_{m-1} + i\Im\alpha_{m-1})x^{m-1} + \cdots + (-1)^\nu(\Re\alpha_{m-\nu} \\ &+ i\Im\alpha_{m-\nu})x^{m-\nu} + \cdots + (\Re\alpha_1 + i\Im\alpha_1)\,(-i)^{m-1}x + (-i)^m(\Re\alpha_0 + i\Im\alpha_0)\,. \end{aligned}
$$

Divisons en deux cas:

1) m pair

$$
g_1(x) = x^m + \Im\alpha_{m-1}x^{m-1} - \Re\alpha_{m-2}x^{m-2} - \Im\alpha_{m-3}x^{m-3} + \cdots + (-1)^{\frac{m}{2}}\Re\alpha_0\,.
$$

$$
g_2(x) = \Re\alpha_{m-1}x^{m-1} + \Im\alpha_{m-2}x^{m-2} - \cdots + (-1)^{\frac{m}{2}-1}(\Re\alpha_1 \cdot x + \Im\alpha_0)\,.
$$

En prenant,

$$
\begin{array}{lcl} \text{dans (1.14), } q = 1, 3, \cdots, m-1 & & \text{dans (1.14), } q = 2, 4, \cdots, m \\ \qquad\qquad\quad \downarrow\nearrow\downarrow & \text{ensuite} & \qquad\qquad\quad \uparrow\searrow\uparrow\ \ \searrow\uparrow \\ \text{dans (1.15), } q = 2, 4, \cdots, m-2 & & \text{dans (1.15), } q = 1, 3, \cdots, m-1 \end{array}
$$

et en rangeant q de la même manière que plus haut, on voit facilement que ce tableau n'est que le tableau du résultant par rapport à $g_1(x), g_2(x)$, au signe près. Ici la première partie correspond à $g_1(x)$, la seconde à $g_2(x)$.

2) m impair

$$g_1(x)=x^m+\Im\alpha_{m-1}x^{m-1}-\cdots+(-1)^{\frac{m-1}{2}}[\Re\alpha_1 x+\Im\alpha_0]$$

$$g_2(x)=\Re\alpha_{m-1}x^{m-1}+\Im\alpha_{m-2}x^{m-2}-\cdots+(-1)^{\frac{m+1}{2}}[\Re\alpha_2\cdot x^2+\Im\alpha_1\cdot x]$$
$$+(-1)^{\frac{m-1}{2}}\Re\alpha_0\,,$$

en prenant

$$\left.\begin{array}{l}\text{dans (1.14), } q=2,4,\cdots,m-1\\ \qquad\qquad\quad\ \uparrow\nwarrow\uparrow\quad\nwarrow\ \uparrow\\ \text{dans (1.15), } q=1,3,\cdots,m-2\end{array}\right\}g_1(x),\qquad \left.\begin{array}{l}\text{dans (1.14) } q=1,3,\cdots,m-2,m\\ \qquad\qquad\quad\ \downarrow\swarrow\downarrow\quad\searrow\ \swarrow\\ \text{dans (1.15) } q=2,4,\cdots,\ m-1\end{array}\right\}g_2(x)$$

Or, $g_1(x)$, et $g_2(x)$ n'ont pas de facteur commun. En effet, si α réel est une racine commune, alors $f(r)=0$ admettrait une racine $i\alpha$, ce qui est impossible. Si $\alpha+i\beta$ $(\beta\neq 0)$ est une racine commune, alors, comme $g_1(x)$ et $g_2(x)$ sont des polynômes réels, $\alpha-i\beta$ serait également une racine commune, alors $f(r)=0$ admettrait 2 racines $r=i(\alpha\pm i\beta)$ $=\mp\beta+i\alpha$, ce qui est contradictoire avec la condition de parabolicité.

Donc, *le déterminant de la matrice, qui est égal, au signe près, au résultant par rapport à $(g_1(x), g_2(x))$, ne s'annule pas.* Nous désignons ce déterminant par $R(\xi)$. On voit facilement que ce polynôme est homogène de degré m^2p.

Si on prend comme $\varepsilon_i(\xi)$ $(i=1,2,\cdots,m)$ un polynôme réel homogène de degré $(2m-2i+2)p$, alors $\Re\delta_i(\xi), \Im\delta_i(\xi)$ $=\dfrac{\text{polynôme homogène de degré } m^2p+(m-i+1)p}{R(\xi)}$, donc, $\delta_i(\xi)$ est de degré $(m-i+1)p$. Comme

$$\begin{pmatrix} \delta_1(\xi)\\ \delta_2(\xi)\\ \vdots\\ \delta_{m-1}(\xi)\\ \bar\delta_1(\xi)\bar\delta_2(\xi)\cdots\delta_m(\xi)\end{pmatrix}\in\mathfrak{H}\ \text{(au sens élargi)},$$

nous définissons, de proche en proche, les autres éléments, et finalement nous avons une matrice $\Gamma(\xi)$ appartenant à $\mathfrak{H}$ telle que son image par $\rightarrow$ soit

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1(\xi) & & & \\ & \varepsilon_2(\xi) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varepsilon_m(\xi) \end{pmatrix}$$

Prenons $\varepsilon_i(\xi) = -(\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2)^{(m-i+1)p}$, $(i=1, 2, \cdots, m)$. Comme $R(\xi)$ est homogène de degré m^2p, on a

$$|R(\xi)| > \sigma' |\xi|^{m^2p}, \quad \sigma' > 0. \tag{1.16}$$

Or, si on choisit ε', $0 < \varepsilon' < \varepsilon_0'$ $(\sigma, \sigma'$, max. des coefficients des $\alpha_i(i\xi)$ $(i=0, \cdots, m-1))$, alors $\varepsilon'\Gamma(\xi) \in \mathfrak{H}$ satisfait à (1.10), donc à (1.11). Alors, $B(\xi) + \varepsilon'\Gamma(\xi)$ satisfait à

$$B(\xi) + \varepsilon'\Gamma(\xi) \geqq \sigma/2\, E(\xi), \text{ et également à} \tag{1.17}$$

$$B(\xi) + \varepsilon'\Gamma(\xi) \rightarrow \text{une matrice} \leqq -\varepsilon' \tag{1.18}$$

$$\times \begin{pmatrix} (\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2)^{mp} & & & \\ & (\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2)^{(m-1)p} & & \\ & & \ddots & \\ & & & (\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2)^{p} \end{pmatrix}$$

REMARQUE. Nous avons considéré les coefficients de $\alpha_i(i\xi)$ comme constants. Mais, en réalité, les coefficients sont des fonctions de (x, t):

$$\alpha_i(x, t, i\xi) = \sum_{|\nu| = (m-i)p} \alpha_{i,\nu}(x, t)\, (i\xi)^\nu .$$

Par hypothèse, $\alpha_{i,\nu}(x, t) \in (\mathscr{B})_x$, et ces fonctions sont continues en t pour la topologie de $(\mathscr{B})_x$. Donc, quand on fixe $b > 0$, alors pour $0 \leqq t \leqq b$, ces fonctions sont uniformément bornées: $|\alpha_{i,\nu}(x, t)| \leqq M(b)$. Ensuite, comme les parties réelles de toutes les racines de (0.4) sont inférieures à $-\delta(b)$, $(\delta > 0)$, quand $|\xi| = 1$, (par la continuité des racines par rapport aux coefficients), on peut donc minorer $B(x, t, \xi)$ par une constante positive $\sigma(b)$ dans (1.9).

De même on peut minorer $R(x, t, \xi)$ par $\sigma'(b)$ dans (1.16). Donc, on peut prendre $\varepsilon'(b)$ tel qu'on ait (1.17). *Désormais, nous fixons b,* *par conséquent également* ε'.

Remarquons que les dénominateurs des éléments de $\Gamma(\xi)$ ont $R(\xi)\bar{R}(\xi)$ comme multiple commun.

DÉFINITION H_l (l entier, $l \geqq (m-1)p$). $H(x, i\xi) \in H_l$, si $H(x, i\xi) = \{h_{ij}(x, i\xi)\}$ est hermitienne, et $h_{ij}(x, i\xi)$ sont des polynômes homogènes en $i\xi, \xi \in \Xi^n$, de degré $2l-(i+j-2)p$ et dont les coefficients sont des fonctions appartenant à $(\mathscr{B})$.

A_l $A(x, \boldsymbol{p}) \in A_l$, si $A(x, \boldsymbol{p}) = \{a_{ij}(x, \boldsymbol{p})\}$ est hermitienne, et $a_{ij}(x, \boldsymbol{p})$ sont des polynômes en $\boldsymbol{p}$ de degré $2l-(i+j-2)p$ et dont les coefficients sont des fonctions appartenant à $(\mathscr{B})$.

$$E_l(i\xi) = \begin{pmatrix} (\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2)^l & & & & \\ & (\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2)^{l-p} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & (\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2)^{l-(i-1)p} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & (\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2)^{l-(m-1)p} \end{pmatrix};$$

$$E_l(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} \tau_l(\boldsymbol{p}) & & & & \\ & \tau_{l-p}(\boldsymbol{p}) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \tau_{l-(i-1)p}(\boldsymbol{p}) & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \tau_{l-(m-1)p}(\boldsymbol{p}) \end{pmatrix}.$$

Si on multiplie (1.17) par $R(x, t, \xi)\bar{R}(x, t, \xi)$, alors en désignant cette matrice par $B(x, t, i\xi)$[2], on a

$$B(x, t, i\xi) \in H_{(2m^2+2m-1)p'}, \text{ où } p' = \frac{p}{2}, \tag{1.19}$$

$$B(x, t, i\xi) \geqq \frac{\sigma}{2} \sigma'^2 E_{(2m^2+2m-1)p'}(i\xi), \tag{1.20}$$

2) Le sens serait évident. Désignons d'abord cette matrice par $B(x, t, \xi)$ et en posant $\xi = (-i)(i\xi)$, $B(x, t, \xi)$ est considerée comme une matrice dont les éléments sont des polynômes en $i\xi$.

$$(1.21)\qquad B(x,t,i\xi)A(x,t,i\xi)+[B(x,t,i\xi)A(x,t,i\xi)]^*=C(x,t,i\xi)$$
$$\in H_{(2m^2+2m-1)p'+p'},$$
$$C(x,t,i\xi)\leqq -\varepsilon'\sigma'^2 E_{(2m^2+2m-1)p'+p'}(i\xi).$$

Remarquons que les coefficients des éléments $b_{ij}(x,t,i\xi)$ $(i,j=1,2,\cdots,m)$ (quand on regarde ces formes comme polynômes en ξ) sont des polynômes des coefficients de $\Re\alpha_i(x,t,i\xi)$, $\Im\alpha_i(x,t,i\xi)$ $(i=0,1,\cdots,m-1)$.

De même, si on multiplie (1.17) par $(\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2)R\bar{R}$, alors on aura une matrice $B'(x,t,i\xi)$ telle que, en posant $l=(2m^2+2m-1)p'$,

$$(1.19')\qquad B'(x,t,i\xi)\in H_{l+1}$$

$$(1.20')\qquad B'(x,t,i\xi)\geqq \frac{\sigma}{2}\cdot\sigma'^2 E_{l+1}(i\xi),$$

$$(1.21')\qquad B'(x,t,i\xi)\rightarrow C'(x,t,i\xi)\in H_{l+1+p'},$$
$$C'(x,t,i\xi)\leqq -\varepsilon'\sigma'^2 E_{l+1+p'}(i\xi).$$

Nous empruntons maintenant les raisonnements et les notations de M. Leray ([3], p. 123-127). Alors il existe une matrice $B(x,t,\boldsymbol{p})\in A_l$, où $l=(2m^2+2m-1)p'$, telle que

$$(1.22)\qquad B(x,t,\boldsymbol{p})\longrightarrow B(x,t,i\xi),$$
$$A_l\xrightarrow{\Phi} H_l$$

$$(1.23)\qquad B(x,t,\boldsymbol{p})\geqq\frac{\sigma\sigma'^2}{3}E_l(\boldsymbol{p}),$$

$$(1.24)\qquad B(x,t,\boldsymbol{p})A(x,t,\boldsymbol{p})+[B(x,t,\boldsymbol{p})A(x,t,\boldsymbol{p})]^*$$
$$\leqq -\frac{\varepsilon'\sigma'^2}{2}E_{l+p'}(\boldsymbol{p})+\beta E_l(\boldsymbol{p})$$

ou encore en désignant $\frac{\varepsilon'\sigma'^2}{2}=\varepsilon$,

$$(1.24')\qquad BA+(BA)^*\leqq -\varepsilon E_{l+p'}(\boldsymbol{p})+\beta E_l(\boldsymbol{p}),$$

où β est une constante convenablement choisie.

Remarquons que, soit $B(x, t, \boldsymbol{p})=\{b_{ij}(x, t, \boldsymbol{p})\}$, alors les coefficients (par rapport à $\boldsymbol{p}$) de $b_{ij}(x, t, \boldsymbol{p})$ sont des polynômes des coefficients de $\Re\tilde{\alpha}_i(x, t, i\xi)$, $\Im\tilde{\alpha}_i(x, t, i\xi)$, ξ réel, de (0.4).

Nous imposons encore une condition à $B(x, t, \boldsymbol{p})$. Désignons $p''=\left[\frac{p'}{2}\right]+1$. Alors la formule (0.8)

$$\tau_{-s}(\boldsymbol{p})c(x)f=c(x)\tau_{-s}(\boldsymbol{p})f+\sum_{\substack{|\nu|\leqq k \\ k=1,2,\cdots,s}} \boldsymbol{p}_1^{\nu_1}\cdots\boldsymbol{p}_n^{\nu_n}\tau_{-k}(\boldsymbol{p})c'_{\nu,k}(x)\tau_{-s}(\boldsymbol{p})f$$

montre que nous aurons

$$\tau_{-p''}(\boldsymbol{p})B(x, t, \boldsymbol{p})=[B(x, t, \boldsymbol{p})+R(x, t, \boldsymbol{p})]\tau_{-p''}(\boldsymbol{p})\,.$$

Alors, s'il est nécessaire, en ajoutant à $B(x, t, \boldsymbol{p})$ $\lambda E_{l-1}(\boldsymbol{p})$, de λ assez grand, nous pouvons supposer

$$R(x, t, \boldsymbol{p})+R^*(x, t, \boldsymbol{p})\geqq -B(x, t, \boldsymbol{p})\,. \tag{1.25}$$

Pour la démonstration, voir la note de bas 3). Remarquons que dans (0.8) $k\geqq 1$, $|\nu|\leqq k$, et si $|\lambda|\leqq 2k$, on a $\|\boldsymbol{p}_1^{\lambda_1}\cdots\boldsymbol{p}_n^{\lambda_n}\tau_{-k}(\boldsymbol{p})\|_{\mathfrak{L}(L^2,L^2)}\leqq 1$.

Comme $B(x, t, \boldsymbol{p})\in A_l$, il existe une constante α telle que

$$B(x, t, \boldsymbol{p})\leqq \alpha E_l(\boldsymbol{p})\,. \tag{1.26}$$

II. Matrices $B_q(x, t, \boldsymbol{p})$.

DÉFINITION. *Espace hilbertien* D^s, $(-\infty<s<+\infty)$. $f\in D^s$, si $\tau_{s/2}(p)f\in L^2$.

Alors on le munit du produit scalaire: $(f, g)_{D^s}=(\tau_s(\boldsymbol{p})f, g)$.

Espace hilbertien D_s, $(-\infty<s<+\infty)$. Soit $F=(f_1, f_2,\cdots, f_m)$, alors $F\in D_s$ si $f_i\in D^{s-(i-1)p}$ $(i=1, 2,\cdots, m)$. Nous le munirons du produit scalaire suivant:

$$\begin{aligned}(F, G)_{D_s}&=(\tau_s(\boldsymbol{p})f_1, g_1)+(\tau_{s-p}(\boldsymbol{p})f_2, g_2)+\cdots+(\tau_{s-(m-1)p}f_m, g_m)\\ &\equiv(E_s(\boldsymbol{p})F, G)\,.\end{aligned}$$

Espace hilbertien $\tilde{D}_s$, $(-\infty<s<+\infty)$. Soit $F=(f_1,\cdots, f_m)$, alors $F\in\tilde{D}_s$ si $f_i\in D^{s+(i-1)p}$ $(i=1,\cdots, m)$. Nous le munirons du produit scalaire suivant:

$$(F, G)_{\widetilde{D}_s} = \sum_{i=1}^{m} (\tau_{s+(i-1)p}(\boldsymbol{p})f_i, g_i) \equiv (E_{-s}^{-1}(\boldsymbol{p})F, G).$$

Remarquons que, $\widetilde{D}_{-s}$ *est identique à l'espace dual de* D_s *avec les normes.*

D'après (1.23), (1.26), l'opérateur $B(x, t, \boldsymbol{p})$ définit dans D_l une norme équivalente.

Pour considérer le problème dans l'espace D_q de q entier positif ou négatif quelconque, il nous faut le

LEMME 3. *Si on remplace* $B(x, t, \boldsymbol{p})$ *par* $\tau_{-s}(\boldsymbol{p})B(x, t, \boldsymbol{p})\tau_{-s}(\boldsymbol{p})$ (s, *entier positif*) *dans* (1.24′), *alors on a*

$$\text{(2.1)} \qquad {}'' \leqq -\frac{\varepsilon}{2} E_{(l-2s)+p'}(\boldsymbol{p}) + \gamma_s E_{l-2s}(\boldsymbol{p}).$$

Démonstration. Admettons sans démonstration (0.8), alors nous aurons

$$\text{(2,2)} \qquad \tau_{-s}(\boldsymbol{p})A(x, t, \boldsymbol{p}) = (A(x, t, \boldsymbol{p}) + R(x, t, \boldsymbol{p}))\tau_{-s}(\boldsymbol{p}),$$

où $R(x, t, \boldsymbol{p}) = (r_{ij}(x, t, \boldsymbol{p}))$ est de la forme suivante:

$$r_{ij}(x, t, \boldsymbol{p}) = \sum_{\substack{k=1,2,\cdots,s \\ |\nu| \leqq k \\ |\lambda| \leqq (j-i+1)p}} \boldsymbol{p}_1^{\nu_1} \cdots \boldsymbol{p}_n^{\nu_n} \tau_{-k}(\boldsymbol{p}) \alpha'_{\nu,k,\lambda}(x, t) \boldsymbol{p}_1^{\lambda_1} \cdots \boldsymbol{p}_n^{\lambda_n},$$

ce qui montre qu'il existe une constante γ' telle que[3]

$$BR + (BR)^* \leqq \frac{\varepsilon}{2} E_{l+p'}(\boldsymbol{p}) + \gamma' E_l(\boldsymbol{p}).$$

Compte tenu de (2.2), (1.24′) on a (2.1). c. q. f. d.

Naturellement, compte tenu de (1.23), (1.26), on a

$$\text{(2.3)} \qquad \overline{\alpha} E_{l-2s}(\boldsymbol{p}) \leqq \tau_{-s}(\boldsymbol{p})B(x, t, \boldsymbol{p})\tau_{-s}(\boldsymbol{p}) \leqq \alpha E_{l-2s}(\boldsymbol{p}), \text{ où } \overline{\alpha} = \frac{\sigma\sigma'^2}{3} > 0.$$

Or, si on part des formules (1.19′), (1.20′), (1.21′), alors que nous sommes partis de (1.19), (1.20), (1.21), on aura les mêmes résultats;

3) On doit recourir au Lemme de Gårding: voir [3], Lemme 67.1. p. 124. Nous n'avons qu'à formuler de la manière suivante: Soit $u(x, \boldsymbol{p}) = a(\boldsymbol{p})c(x, \boldsymbol{p})b(\boldsymbol{p})$; $a(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}_1^{\mu_1} \cdots \boldsymbol{p}_n^{\mu_n}$, $b(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}_1^{\nu_1} \cdots \boldsymbol{p}_n^{\nu_n}$, $c(x, \boldsymbol{p}) = c_1(x)\boldsymbol{p}_1^{\lambda_1} \cdots \boldsymbol{p}_n^{\lambda_n} \tau_{-k}(\boldsymbol{p})c_2(x)$, $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n \leqq 2k$. Alors en considérant $c(x, \boldsymbol{p}) \in \mathfrak{L}(L^2(R^n), L^2(R^n))$, on voit $\|\boldsymbol{p}_1^{\lambda_1} \cdots \boldsymbol{p}_n^{\lambda_n} \tau_{-k}(\boldsymbol{p})\| \leqq 1$ d'où $\|c(x, \boldsymbol{p})\| \leqq \sup|c_1(x)| \cdot \sup|c_2(x)|$, où $\|\ \|$ étant la norme canonique.

c'est-à-dire qu'on aura les formules (2.1) et (2.3), où, bien entendu, on doit remplacer l par $(l+1)$.

Remarquons également que, dans (1.17), si on multiplie $(\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2)^s\times\overline{R}(\xi)R(\xi)$, alors que nous avons multiplié $R(\xi)\overline{R}(\xi)$, on aura les formules correspondant à (2.1), (2.3). Nous avons donc la

Proposition 1. *b étant fixé, alors quel que soit q (nombre entier positif ou négatif ou zéro), il existe une matrice hermitienne $B_q(x,t,\boldsymbol{p})$, $0\leqq t\leqq b$, telle que, pour $0\leqq t\leqq b$*

$$\bar{\alpha}E_q(\boldsymbol{p})\leqq B_q(x,t,\boldsymbol{p})\leqq \alpha_q E_q(\boldsymbol{p})\,, \tag{2.4}$$

où $\bar{\alpha}$ et α_q sont des constantes positives,

$$\begin{aligned}&B_q(x,t,\boldsymbol{p})A(x,t,\boldsymbol{p})+[B_q(x,t,\boldsymbol{p})A(x,t,\boldsymbol{p})]^*\\ &\leqq -\frac{\varepsilon}{2}E_{q+p'}(\boldsymbol{p})+\gamma_q B_q(x,t,\boldsymbol{p}),\ \varepsilon>0,\ \gamma_q \text{ constante},\ p'=\frac{p}{2}\,.\end{aligned} \tag{2.5}$$

En désignant $\tau_{-p''}(\boldsymbol{p})B_q(x,t,\boldsymbol{p})=[B_q(x,t,\boldsymbol{p})+R_q(x,t,\boldsymbol{p})]\tau_{-p''}(\boldsymbol{p})$, $p''=\left[\frac{p'}{2}\right]+1$,

$$R_q(x,t,\boldsymbol{p})+R_q^*(x,t,\boldsymbol{p})\geqq -B_q(x,t,\boldsymbol{p})\,, \tag{2.6}$$

de plus, $R_q(x,t,\boldsymbol{p})$ a la propriété (2.7).

$$B_q(x,t,\boldsymbol{p})\equiv B_q(t) \tag{2.7}$$

est un opérateur continu de D_s dans $\tilde{D}_{s-2q}$: $B_q(t)\in\mathfrak{L}(D_s,\tilde{D}_{s-2q})$ (s entier quelconque) et il est continûment différentiable en t. En détaillant, soit $B_q(t)\equiv(b_{ij}(t))$, alors $b_{ij}(t)\in\mathfrak{L}(D^{s-(j-1)p},D^{s-2q+(i-1)p})$, $(i,j=1,2,\cdots,m)$; ils sont continûment différentiables en t.

Remarque. $\bar{\alpha}$ et ε sont indépendantes de q.

III. Problème de Cauchy.

Considérons l'équation homogène,

$$\frac{d}{dt}U(t)=A(x,t,\boldsymbol{p})U(t)\equiv A(t)U(t)\,. \tag{3.1}$$

Nous nous appuyons sur la théorie des semi-groupes. Remarquons d'abord le

LEMME 4. *Soit s entier quelconque, l'opérateur* $A(x, t, \boldsymbol{p}) \in \mathfrak{L}(D_s, D_{s-p})$*; il est continûment différentiable en t.*

Fixons q une fois pour toutes. Nous considérons les solutions de (3.1) dans l'espace D_q. Faisons, dans (3.1), le changement d'inconnue $U \to \bar{U}$,

$$U(t) = e^{\beta t}\bar{U}(t). \tag{3.2}$$

$$\frac{d}{dt}\bar{U}(t) = (A(x, t, \boldsymbol{p}) - \beta I)\bar{U}(t). \tag{3.3}$$

Prenons β tel que $\beta > \frac{1}{2}\max(\gamma_{q-p'}, \gamma_q, \gamma_{q+p'})$. Alors, en posant

$$A(x, t, \boldsymbol{p}) - \beta I = \bar{A}(x, t, \boldsymbol{p}) \equiv \bar{A}(t), \tag{3.4}$$

nous voyons que, compte tenu de (2,5)

$$B_q\bar{A} + (B_q\bar{A})^* \leqq -\frac{\varepsilon}{2}E_{q+p'}(\boldsymbol{p}), \tag{3.5}$$

et les formules analogues qu'on obtient en remplaçant, 1) $q \to q + p'$, 2) $q \to q - p'$.

Remarquons que le lemme 4 est également valable pour $\bar{A}(x, t, \boldsymbol{p})$, car l'identification de D_s dans D_{s-p} est continue.

LEMME 5. *Prenons* D_{q+p} *comme le domaine de définition de* $\bar{A}(x, t, \boldsymbol{p})$*, alors l'opérateur* $\bar{A}(t)$ *est fermé.*

REMARQUE. Il est évident que D_{q+p} est dense dans D_q.

Démonstration du lemme 5.

Ce que nous devons démontrer, c'est que

$$\bar{A}(x, t, \boldsymbol{p})U = V;\ U, V \in D_q \text{ entraîne } U \in D_{q+p},$$

(remarquons que, d'après le lemme 4, $\bar{A}(x, t, \boldsymbol{p})$ est une application continue de D_q dans D_{q-p}).

Nous allons le démontrer, en divisant notre démarche en 3 étapes.

1). $\bar{A}U = 0$, $U \in D_q \to U = 0$.

En effet, $B_{q-p'}\bar{A}U = 0$, donc $(B_{q-p'}\bar{A}U, U) = 0$. D'autre part, $(B_{q-p'}U, \bar{A}U) = 0$, donc $([B_{q-p'}\bar{A} + (B_{q-p'}\bar{A})^*]U, U) = 0$. Or, $B_{q-p'}\bar{A} + (B_{q-p'}\bar{A})^* \leqq -\frac{\varepsilon}{2}E_q(\boldsymbol{p})$, ((3.5)), donc $U \in D_q$ entraîne $U = 0$.

2) $B_{q+p'}U=0,\ U\in D_q \to U=0$.
En effet, opérons $\tau_{-p''}(p)$ à gauche, alors $(B_{q+p'}+R_{q+p'})\tau_{-p''}(p)U=0$, donc en considérant la partie réelle, $\left(\left\{B_{q+p'}+\frac{1}{2}(R_{q+p'}+R^*_{q+p'})\right\}\tau_{-p''}U,\ \tau_{-p''}U\right)=0$; (2.6) entraîne $\tau_{-p''}U=0$, donc $U=0$.

3) Considérons l'équation

$$\bar{A}(x,t,p)U=V\,. \tag{3.6}$$

Opérons $B_{q+p'}(x,t,p)$ à gauche,

$$B_{q+p'}\bar{A}U=B_{q+p'}V\,,\quad \text{c'est-à-dire} \tag{3.7}$$

$$\left[\frac{1}{2}\left(B_{q+p'}\bar{A}+(B_{q+p'}\bar{A})^*\right)+i\,\frac{1}{2i}\,(B_{q+p'}\bar{A}-(B_{q+p'}\bar{A})^*)\right]\cdot U=B_{q+p'}V\,.$$

D'abord, remarquons que $B_{q+p'}\bar{A}$ et $(B_{q+p'}\bar{A})^*$ sont des applications continues de D_{q+p} dans $\tilde{D}_{-q-p}$ (d'après (2.7), le lemme 4). Par hypothèse,

$$-\gamma' E_{q+p}(p)\leqq B_{q+p'}\bar{A}+(B_{q+p'}\bar{A})^*\leqq -\frac{\varepsilon}{2}\,E_{q+p}(p)\,,$$

et comme $\frac{1}{2i}\,(B_{q+p'}\bar{A}-(B_{q+p'}\bar{A})^*)$ est hermitien, l'équation se résout uniquement pour $V\in D_q$ quelconque[4]. De plus, l'application: $B_{q+p'}V$

4) Voir, par exemple, [1], p. 66-67 surtout Remark 1. Nous expliquons le principe. Soient

$$H_1=\frac{1}{2}\left[B_{q+p'}\bar{A}+(B_{q+p'}\bar{A})^*\right],\ H_2=\frac{1}{2i}\left[B_{q+p'}\bar{A}-(B_{q+p'}\bar{A})^*\right],$$

alors, si on munit D_{q+p} du produit scalaire: (1) $(U,V)_{H_1}=(H_1U,V)$, il définit la même topologie que nous avons donnée à priori. D'autre part, pour $U\in D_{q+p}$ quelconque, il existe un et un seul élément $AU\in D_{q+p}$ tel qu'on ait (2) $(H_2U,V)=(H_1AU,V)$ pour tout $V\in D_{q+p}$. En effet, $H_2U\in\tilde{D}_{-q-p}$ (espace dual de D_{q+p}), donc (V,H_2U) définit une forme linéaire continue sur $V\in D_{q+p}$, donc il existe (d'après Riesz) un et un seul élément AU tel que $(V,H_2U)=(V,AU)_{H_1}=(H_1V,AU)=(V,H_1AU)$. Comme H_2 est hermitien, pour $U,V\in D_{q+p}$, (3) $(H_2U,V)=(U,H_2V)$. (3) et (2) entraînent (4) $(AU,V)_{H_1}=(U,AV)_{H_1}$. Finalement, A est borné. En effet, si U parcourt un ensemble borné de D_{H_1} de sorte qu'un borné de D_{q+p}, alors $(AU,U)_{H_1}$ est borné, parce que $(AU,U)_{H_1}=(H_2U,U)$.

Considérons l'équation $(H_1+iH_2)U=V$, où $V\in\tilde{D}_{-q-p}$, alors il existe un élément $V'\in D_{q+p}$ tel que $V=H_1V'$. Alors, $((H_1+iH_2)U,W)=(H_1V',W)$ pour tout $W\in D_{q+p}$, c'est-à-dire $((I+iA)U,W)_{H_1}=(V',W)_{H_1}$. Comme l'équation $(I+iA)U=V'$ est dans D_{H_1} réversible, c'est-à-dire que l'application $(I+iA)^{-1}$: $V'\to U$ est continue, et que $V\to V'$ de $\tilde{D}_{-q-p}$ sur D_{q+p} est continue, on voit la propriété demandée.

$\to U$ de $\tilde{D}_{-q-p}$ sur D_{q+p} est continue. Par conséquent, *$V \to U$ de D_q dans D_{q+p} est continue.* Or, 2) montre que U est solution de (3.6). Or, 1) montre que la solution U de $\bar{A}U = V$ est unique dans $U \in D_q$, donc $U \in D_q$ entraîne $U \in D_{q+p}$. c. q. f. d.

Le raisonnement que nous venons de faire nous montre, en remplaçant $\bar{A}(t)$ par $\lambda \bar{A}(t) - I$, $\lambda > 0$, que l'équation

(3.8) $\qquad (I - \lambda \bar{A}(t))U = V,\quad$ définit une application continue:

$V \to U$ de D_q sur D_{q+p} et que cette application $(I - \lambda \bar{A}(t))^{-1}$ est unique comme application de $V \to U$ de D_q dans D_q. Alors, pour $U \in D_{q+p}$

$$(B_q(x, t, \boldsymbol{p})\,(I - \lambda \bar{A}(t))U,\ (I - \lambda \bar{A}(t))U) \geqq (B_q(x, t, \boldsymbol{p})U, U). \tag{3.9}$$

Nous nous appuyons désormais sur les résultats de M. T. Kato ([2]). Mais nous allons considérer le cas où les normes, qui sont équivalentes les unes aux autres, varient avec t. Désignons ces normes par $\|\ \ \|_{L(t)}$, et fixons une norme une fois pour toutes: $\|\ \ \|_L$. Alors, (3.9) devient

$$\|(I - \lambda A(t))^{-1}\|_{L(t)} \leqq 1, \text{ pour } \lambda > 0, \tag{3.10}$$

où nous avons écrit $A(t)$ au lieu de $\bar{A}(t)$.

Explicitons les conditions.

L: espace de Banach, on désigne sa norme par $\|\ \ \|_L$.

$L(t)$, $0 \leqq t \leqq b$: on donne une famille de normes équivalentes à celle de L.

On le désigne par $\|\ \ \|_{L(t)}$. $L(t)$ est l'espace de L muni de la norme $\|\ \ \|_{L(t)}$.

Montrons que les résultats de [2] *sont valables quand on ajoute et modifie les conditions de manière suivante:*

Il existe une famille d'applications continues: $T(t) \in \mathfrak{L}(L, L)$ telle que

1) $T(t)$ est un isomorphisme de L sur L; $T(t)^{-1} \in \mathfrak{L}(L, L)$.
2) pour $u \in L$ quelconque,

$$\|u\|_{L(t)} = \|T(t)u\|_L. \tag{3.11}$$

3) $\|T(t)^{-1}\|_L$ est borné pour $0 \leqq t \leqq b$,
4) $T(t)$ est à variation bornée: pour $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$,

$$\sum_{i=1}^{n} \| T(t_i) - T(t_{i-1}) \|_L < N' .$$

D'autre part, la condition $\|(I-\lambda A(t))^{-1}\|_L \leqq 1$ pour $\lambda > 0$ doit être remplacée par (3.10). Alors les conditions C_1, C_2, C_3, C_4 de [2] donneront les théorèmes, mais naturellement on ne peut pas dire que $\| U(t, s) \|_L \leqq 1$. Nous énonçons les théorèmes de manière suivante:

PROPOSITION 2. *Hypothèse:*

C_1) *Pour chaque* $t \in [0, b]$, *l'opérateur* $A(t)$ *est fermé avec le domaine de définition* D *dense et indépendant de* t, *et on a* $\|(I-\lambda A(t))^{-1}\|_{L(t)} \leqq 1$, *pour* $\lambda > 0$ *quelconque.*

C_2) $B(t, s) = [I - A(t)][I - A(s)]^{-1}$ *est borné (dans le cas où* $B(t, s)$ *est continu en* t *pour* $\mathfrak{L}(L, L)$, *il suffit de constater cette propriété pour un* s):

$$\| B(t, s) \|_L < M \qquad \text{pour } s, t \in [0, b];$$

$B(t, s)$ *est à variation bornée par rapport à* t *au moins pour un* s: *Il existe* $N > 0$ *tel que, pour toutes partitions,*

$$\sum_{j=1}^{n} \| B(t_j, s) - B(t_{j-1}, s) \|_L < N,$$

C_3) $B(t, s)$ *est continu en* t *pour un* s, *pour la topologie de* $\mathfrak{L}(L, L)$.

C_4) $B(t, s)$ *est différentiable en* t *pour un* s *dans* $\mathfrak{L}(L, L)$ *muni de la topologie simple, et de plus,* $B'_t(t, s)$ *est continu en* t *pour la topologie de* $\mathfrak{L}(L, L)$,

C_5) *il existe une famille d'applications*: $T(t)$ *jouissant des propriétés* 1), 2), 3), 4).

Conclusion:

Il existe un opérateur continu $U(t, s)$, $0 \leqq s \leqq t \leqq b$, *tel que*

1) $U(t, s)$ *est continu en* s *et* t *pour la topologie simple.*
2) $\| U(t, s) \| \leqq K$.
3) $U(t, r) = U(t, s)U(s, r)$, $r \leqq s \leqq t$; $U(t, t) = I$.
4) $U(t, s)D \subset D$.
5) $x(t) = U(t, s)x$, *avec* $x \in D$, *donne une solution de l'équation*

$$\frac{d}{dt} x(t) = A(t)x(t) \quad \text{pour } t \geqq s .$$

6) *Si* $f(t) \in D$ *pour* $t \in [0, b]$, *et* $[A(r) - I] f(t)$ *est continue en* t *pour*

un $r \in [0, b]$, *alors*

$$x(t) = U(t, s)x + \int_s^t U(t, \sigma) f(\sigma) d\sigma$$

donne une solution ($t \geqq s$) *de l'équation*:

$$\frac{d}{dt} x(t) = A(t)x(t) + f(t),$$

qui prend la valeur $x \in D$ *pour* $t = s$.

Nous ne répétons pas la démonstration. Signalons quelques faits qui nous mènent à la proposition 2 en consultant [2].

1) Prenons $t_j \in [0, b]$. Soient $A_j = A(t_j)$, $X_j(t) = \exp((t-s)A_j)$, $t \geqq s$, $T_j = T(t_j)$. Alors

$$\| T_j X_j(t) T_j^{-1} \|_L \leqq 1 .$$

Démonstration. D'après une propriété de $X_j(t)$,

$$\| X_j(t) u \|_{L(t_j)} \leqq \| u \|_{L(t_j)}, \text{ pour tout } u \in L .$$

D'après la propriété 2) de $T(t)$,

$$\| T_j X_j(t) u \|_L \leqq \| T_j u \|_L ;$$

quand u parcourt dans L, $T_j u$ parcourt dans L, on a donc

$$\| T_j X_j(t) T_j^{-1} \|_L \leqq 1 .$$

2) Δ: $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$; $X_j = \exp(t_j - t_{j-1}) A_j$; $U_{jk} = X_j X_{j-1} \cdots X_k$; $W_j = A_j X_j X_{j-1} \cdots X_1 A_0^{-1}$. Alors

$$\| U_{jk} \|_L \leqq M'^2 \exp(M'N') ; \ \| W_j \|_L \leqq M'^2 \exp[M'^3 M(M'N + MN')] ,$$
$$\text{où } M' \geqq \| T(t) \|_L, \ \| T(t)^{-1} \|_L .$$

Démonstration. Démontrons la deuxième formule, parce que la première est plus simple. La démarche de p. 217 de [2] donne

$$W_j = A_j X_j X_{j-1} \cdots X_1 A_0^{-1} = T_j^{-1} (T_j X_j T_j^{-1}) (T_j A_j) (T_{j-1} A_{j-1})^{-1} (T_{j-1} X_{j-1} T_{j-1}^{-1}) \cdots$$
$$\cdots (T_1 X_1 T_1^{-1}) (T_1 A_1) (T_0 A_0)^{-1} T_0 .$$

Donc

$$\| W_j \|_L \leqq \| T_j^{-1} \|_L \, \| (T_j A_j) (T_{j-1} A_{j-1})^{-1} \|_L \, \| (T_{j-1} A_{j-1}) (T_{j-2} A_{j-2})^{-1} \|_L \cdots$$
$$\cdots \| (T_1 A_1) (T_0 A_0)^{-1} \|_L \, \| T_0 \|_L .$$

En tenant compte de {Variation totale de $(T(t)A(t))\,(T_0A_0)^{-1}$ $(\equiv T(t)A(t)A_0{}^{1}T_0^{-1})\}\leqq M'(M'N+MN')$ et de $\|(T_0A_0)\,[T(t)A(t)]^{-1}\|_L\leqq M'^2M$, on a la deuxième inégalité.

Revenons maintenant à l'espace hilbertien D_q que nous envisageons. *Nous voulons démontrer l'existence de $T(t)$ jouissant des propriétés énumérées :*

$$(B_q(t)U, U)=(E_q(p)T(t)U, T(t)U) \text{ pour tout } U\in D_q.$$

Commençons par deux remarques:

1) Remarque. H: espace hilbertien; $X\in \mathfrak{L}(H, H)$, hermitien positif, alors 2 opérateurs $X^{-1}, X^{\frac{1}{2}}$ sont également positifs hermitiens, de plus les applications $X\to X^{-1}, X\to X^{\frac{1}{2}}$ sont des applications continues de $\mathfrak{L}(H, H)$ dans $\mathfrak{L}(H, H)$.

Cette remarque donne

2) Remarque. $A(t)\in \mathfrak{L}(H, H)$ continu en t; $A(t)$ positif hermitien. Alors, $A(t)^{\frac{1}{2}}$ et $A(t)^{-1}$ sont également continus dans $\mathfrak{L}(H, H)$. Si on suppose de plus que $\frac{d}{dt}A(t)$ est continu, alors $\frac{d}{dt}[A(t)^{\frac{1}{2}}]$ est continu.

Définition.

$$E_q^{\frac{1}{2}}(p)=\begin{pmatrix} \tau_{q/2} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \tau_{q/2-(i-1)\cdot p/2} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \tau_{q/2-(m-1)p/2}\end{pmatrix};\quad E_q^{-\frac{1}{2}}(p)=\begin{pmatrix} \tau_{-q/2} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \tau_{-q/2+(i-1)p/2} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \tau_{-q/2+(m-1)p/2}\end{pmatrix}.$$

Lemme 6. *Hypothèse: Quel que soit s entier,*

$B_q(t)\in \mathfrak{L}(D_s, \tilde{D}_{s-2q})$ est continûment différentiable en t. Conclusion: L'opérateur $A(t)=E_q^{-\frac{1}{2}}(p)B_q(t)E_q^{-\frac{1}{2}}(p)\in \mathfrak{L}(\otimes D^s, \otimes D^s)$ est continûment différentiable en t, ou $\otimes D^s=(D^s, D^s,\cdots, D^s)$.

Démonstration. Remarquons d'abord que $\tau_{s'}(p)\in \mathfrak{L}(D^s, D^{s-2s'})$. Cette remarque donne, compte tenu de (2.7),

$$\otimes D^s \xrightarrow[E_q^{-\frac{1}{2}}]{} D_{s+q} \xrightarrow[B_q(t)]{} \tilde{D}_{s-q} \xrightarrow[E_q^{-\frac{1}{2}}]{} \otimes D^s,$$

où 3 opérateurs sont des applications continues, et de plus $B_q(t)$ est continûment différentiable en t. c. q. f. d.

PROPOSITION 3.

Hypothèse: *Hypothèse du lemme* 6; $B_q(t)$ *hermitien*; *il existe* $\alpha, \alpha' > 0$ *tel que*

$$\alpha E_q(p) \geqq B_q(t) \geqq \alpha' E_q(p), \text{ pour } t \in [0, b].$$

Conclusion: *Il existe* $T(t)$, $t \in [0, b]$, *tel que* $T(t) \in \mathfrak{L}(D_q, D_q)$ *est continûment différentiable en* t; $T(t)$ *est un isomorphisme de* D_q *sur* D_q; $T(t)^{-1} \in \mathfrak{L}(D_q, D_q)$ *est continu en* t; *pour tout* $U \in D_q$,

$$(B_q(t)U, U) = (E_q(p)T(t)U, T(t)U).$$

Démonstration. En vertu du lemme 6 et de l'hypothèse, $A(t) \equiv E_q^{-\frac{1}{2}}(p)B_q(t)E_q^{-\frac{1}{2}}(p) \in \mathfrak{L}(\otimes D^s, \otimes D^s)$ (s, entier quelconque); $A(t)$, qui est continu en t avec $\frac{d}{dt}A(t)$, est positif hermitien. Posons $S(t) = A(t)^{\frac{1}{2}}$, alors en vertu de la remarque 2, $S(t) \in \mathfrak{L}(\otimes D^s, \otimes D^s)$ est continûment différentiable en t, de sorte que $S(t)^{-1} \in \mathfrak{L}(\otimes D^s, \otimes D^s)$ est continu en t.

$$\text{En posant} \qquad T(t) = E_q^{-\frac{1}{2}}(p)S(t)E_q^{\frac{1}{2}}(p),$$

on voit que $T(t) \in \mathfrak{L}(D_s, D_s)$ (s, entier quelconque); $T(t)$ est continûment différentiable en t; $T(t)^{-1}$ est continu pour $\mathfrak{L}(D_s, D_s)$. En effet,

$$D_s \xrightarrow[E_q^{\frac{1}{2}}]{} \otimes D^{s-q} \xrightarrow[S(t)]{} \otimes D^{s-q} \xrightarrow[E_q^{-\frac{1}{2}}]{} D_s.$$

Il en est de même de $T(t)^{-1} \equiv E_q^{-\frac{1}{2}}S(t)^{-1}E_q^{\frac{1}{2}}$. Finalement,

$$T^*(t)E_q(p)T(t) = E_q^{\frac{1}{2}}SE_q^{-\frac{1}{2}}E_qE_q^{-\frac{1}{2}}SE_q^{\frac{1}{2}} = E_q^{\frac{1}{2}}S^2E_q^{\frac{1}{2}} = E_q^{\frac{1}{2}}A(t)E_q^{\frac{1}{2}} = B_q(t).$$

c. q. f. d.

En vertu de la prop. 3, la condition C_5) de la prop. 2 est donc remplie. Examinons maintenant les autres conditions C_2), C_3), C_4). Le lemme 4 montre que $A(t) \in \mathfrak{L}(D_{q+p}, D_q)$ est continûment différentiable en t; comme nous avons montré, $(I - A(t))^{-1} \in \mathfrak{L}(D_q, D_{q+p})$, donc $B(t, s) = (I - A(t))(I - A(s))^{-1}$ remplit C_2), C_3), C_4). En effet, $B(t, s) \in$

$\mathfrak{L}(D_q, D_q)$ est continûment différentiable en t.

Revenons à l'équation

$$\frac{d}{dt} U(t) = A(t)U(t) + F(t), \tag{0.7}$$

nous considérons dans l'espace D_q (q entier quelconque); fixons $b>0$, et considérons le problème de Cauchy dans $t\in[0, b]$ en donnant la valeur initiale $U(0)\in D_{q+p}$. Alors la prop. 3 donne la

PROPOSITION 4. *Etant donnés $U_0\in D_{q+p}$, $F(t)\in D_{q+p}$ continue en t (pour la topologie de D_{q+p}), alors il existe une et une seule solution $U(t)$, $t\in[0, b]$, de l'équation* (0.7) *telle que*

i) $U(t)\in D_{q+p}$;

ii) *$U(t)$ est continûment différentiable pour la topologie de D_q et $U(0)$ $=U_0$*

Démonstration. Pour appliquer la prop. 2, il suffit de remarquer que $A(t)$ (t étant fixé), et I sont des applications continues de D_{q+p} dans D_q (lemme 4). Il ne reste qu'à démontrer

UNICITÉ: Soit $U(t)$ une solution de (0.7) avec $F(t)\equiv 0$ telle que i) et ii) soient remplies. Alors

$$\frac{d}{dt}(B_q(t)U(t), U(t)) = \left(\frac{d}{dt}B_q(t)\cdot U(t), U(t)\right) + (B_q(t)U'(t), U(t))$$
$$+ (B_q(t)U(t), U'(t)),$$

en remplaçant $U'(t)$ par $A(t)U(t)$, et compte tenu de $\frac{d}{dt}B(t) \leqq \gamma_q' B_q(t)$ et de (2.5), nous avons

$$\frac{d}{dt}(B_q(t)U(t), U(t)) \leqq (\gamma_q + \gamma_q')\,(B_q(t)U(t), U(t)).$$

Donc $(B_q(t)U(t), U(t)) \leqq (B_qU(0), U(0)) \exp(\gamma_q'' t)$, $t\geqq 0$, où $\gamma_q'' = \gamma_q + \gamma_q'$.

c. q. f. d.

REMARQUE. Cette proposition est naturellement vraie quand on remplace $U(0)=U_0$ par $U(s)=U_0$; $U(t)$ pour $b\geqq t\geqq s$. Alors, nous remarquons que l'application: $(s, t, U_0, F(t))\to U(t)$, où $0\leqq s\leqq t\leqq b$, $U_0\in D_{q\ p}$, $F(t)\in D_{q+p}[0, b]$, est continue comme application de $[0, b]\times$

$[0, b]\times D_q \times D_q[0, b]$ dans D_q, où $D_q[0, b]$ est l'espace des fonctions continues $F(t), 0 \leqq t \leqq b$, dans D_q, muni de la topologie uniforme en t.

Revenons enfin à l'équation

$$(0.3) \qquad \left(\frac{d}{dt}\right)^m u(t) = -\alpha_{m-1}(x, t, p)\left(\frac{d}{dt}\right)^{m-1} u(t) - \cdots - \alpha_0(x, t, p)u(t) + f(t)\,,$$

et considérons dans l'espace D^q (q, entier quelconque), alors la prop. 4 se traduit de la manière suivante:

PROPOSITION 5. *Etant données la condition initiale et* $f(t)$: $(u_0, u_1, \cdots, u_{m-1}) \in (D^{q+mp}, D^{q+(m-1)p}, \cdots, D^{q+2p}, D^{q+p})$, *et* $f(t) \in D^{q+p}$ *est continue en* t (*pour la topologie de* D^{q+p}), *alors il existe une et une seule solution* $u(t)$, $0 \leqq t \leqq b$, *telle que*

i) *elle soit m fois continûment différentiable dans l'espace* D^q;

ii) $\left(\frac{d}{dt}\right)^i u(0) = u_i \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, m-1)$.

REMARQUE. Sous les hypothèses de la prop. 5,

1) $\left(\frac{d}{dt}\right)^i u(t) \in D^{q+(m-i)p} \quad (i = 0, 1, \cdots, m-1)$;

2) $\left(\frac{d}{dt}\right)^i u(t)$ $(i = 0, 1, \cdots, m-1)$ est continûment différentiable dans l'espace $D^{q+(m-i-1)p}$.

3) *Continuité.* La Proposition est vraie quand on remplace la condition initiale par $\left(\frac{d}{dt}\right)^i u(t_0, t_0) = u_i$ $(i = 0, 1, \cdots, m-1)$, où $u(t, t_0)$ est définie pour $t \in [t_0, b]$.

Alors l'application: $(t_0, t, (u_0, u_1, \cdots, u_{m-1}), f(t)) \to \left(\frac{d}{dt}\right)^i u(t, t)$ de $[0, b] \times [0, b] \times D_{q+(m-1)p} \times D^q[0, b] \to D^{q+(m-i-1)p}$ est continue.

IV. Extension à des espaces des distributions tempérées.

Nous allons montrer qu'une extension de nos résultats (les prop. 4 et 5) à des espaces des distributions tempérées est immédiate.

LEMME 7. *Soit k un entier positif. Alors*

$$(4.1) \qquad \frac{1}{(1+r^2)^k} A(x, t, p) = [A(x, t, p) + R_1(x, t, p)] \frac{1}{(1+r^2)^k}$$

où $R_1(x, t, p) = (r_{ij}(x, t, p))$, $r_{ij}(x, t, p) = 0$ *pour* $i \neq m$, $r_{mj}(x, t, p) =$ *un polynôme en* p *de degré* $\leqq (m-j+1)p-1$, *avec des coefficients continûment différentiables à valeurs dans* $(\mathscr{B})_x$.

Démonstration. Pour $|\lambda| > 0$, on aura la formule suivante qui est facile à vérifier:

$$\frac{1}{(1+r^2)^k} p_1^{\lambda_1} \cdots p_n^{\lambda_n} f = p_1^{\lambda_1} \cdots p_n^{\lambda_n} \cdot \frac{1}{(1+r^2)^k} f$$

$$+ \sum_{|\mu| \geqq 1} c_{\lambda,\mu}(x) p_1^{\lambda_1-\mu_1} \cdots p_n^{\lambda_n-\mu_n} \cdot \frac{1}{(1+r^2)^k} f.$$

où $c_{\lambda,\mu}(x) \in (\mathscr{B})$. c. q. f. d.

Considérons l'équation

$$\frac{d}{dt} U(t) = A(x, t, p) U(t) + F(t). \tag{0.7}$$

Appliquons $\frac{1}{(1+r^2)^k}$ ($k > 0$ entier) à gauche. Alors, en vertu du lemme précédent,

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{(1+r^2)^k} U(t) = [A(x, t, p) + R_1(x, t, p)] \frac{1}{(1+r^2)^k} U(t) + \frac{1}{(1+r^2)^k} F(t).$$

Le lemme 7 montre que $A + R_1$ est également parabolique, car l'opérateur R_1 n'influence pas la condition de parabolicité. On peut donc appliquer à cet opérateur les prop. 4, 5. Nous nous bornons à énoncer la proposition suivante, q étant un entier (positif ou négatif ou zéro).

Proposition 6. *Etant donnés* U_0 *et* $F(t)$ *tels que* $\frac{1}{(1+r^2)^k} U_0 \in D_{q+p}$, $\frac{1}{(1+r^2)^k} F(t) \in D_{q+p}[0, b]$, *alors il existe une et une seule solution* $U(t)$, $t \in [0, b]$, *de l'équation* (0.7) *telle que*

i) $\frac{1}{(1+r^2)^k} U(t) \in D_{q+p}$,

ii) $\frac{1}{(1+r^2)^k} U(t)$ *est continûment différentiable pour la topologie de* D_q *et* $U(0) = U_0$.

Bibliographie

[1] L. Gårding, Dirichlet problem for linear elliptic partial differential equations, Math. Scand., 1 (1953), p. 55–72.

[2] T. Kato, Integration of the equation of evolution in a Banach space, Journal of Math. Soc. of Japan, 5 (1953), p. 208–234.

[3] J. Leray, Hyperbolic differential equations, Cours de Princeton, 1954.

[4] J. L. Lions, Sur certains problèmes mixtes, C. R. Ac. des Sc., 240 (1955), p. 390–392.

[5] S. Mizohata, Hypoellipticité des équations paraboliques, (à paraître au Bull. Soc. Math. France).

[6] I. Petrowsky, Über das Cauchysche Problem der nichtanalytischen Funktionen für ein System linear partieller Differentialgleichungen im Gebiete der nichtanalytischen Funktionen, Bulletin de l'Université d'État de Moscou, 7 (1938), p. 1–74.

[7] L. Schwartz, Théorie des distributions II, Hermann, Paris, 1951.