Journal of the Mathematical Society of Japan Vol. 7, No. 2, April, 1955

Sur les fonctions qui sont définies par l'induction transfinie

Par Tosiyuki TUGUÉ

(Reçu le 15 febrier, 1954)

Nous disons, avec H. Lebesgue, qu'une fonction de variables réelles est repésentable analytiquement lorsqu'on peut la construire en effectuant un nombre fini ou bien dénombrable infini d'additions $+$, de multiplications $\times$ et de passages à la limite, à partir de variables et de constantes suivant une loi déterminée. La famille des fonctions appartenant à la classification de Baire ne diffère pas de celle des fonctions représentables analytiquement[1]. H. Lebesgue a démontré dans son Mémoire renommé ([12]) l'existence des fonctions de toute classe et celle d'une fonction qui ne peut pas être représentable analytiquement. Il est un important et intéressant problème que de reconnaitre si la fonction non représentable analytiquement définie par H. Lebesgue est projective ou non et, si oui, quelle est la classe de projectivité qui contient cette fonction.[2]

Cette fonction ne peut pas être définie sans faire appel au transfini, c'est-à-dire à un nombre transfini des passages à la limite. Néanmoins, M. N. Lusin a nommé d'un seul coup une fonction universelle pour les fonctions de Baire dont l'image géométrique est projective de classe $\leqq 2$ sans faire appel au transfini[3]. D'autre part, M. W. Sierpinski ([15]) a démontré qu'il n'existe aucun ensemble analytique qui soit une image géométrique d'une fonction universelle pour les fonctions de Baire, tandis que M. K. Kunugui ([5]) a montré qu'il existe une surface qui est un complémentaire analytique, et est une image géométrique d'une telle fonction.

M. C. Kuratowski[4] qui a introduit le premier l'induction transfinie

1) Voir R. Baire [1] et H. Lebesgue [12].
2) Cf. N. Lusin [13], p. 202.
3) Ibid., p. 314.
4) C. Kuratowski [8], [9].

dans la théorie des ensembles projectifs, a démontré, par une méthode très générale, que l'application de l'induction transfinie dans le domaine des ensembles projectifs ne conduit pas au delà de ce domaine, et, en particulier, que la surface $\mathfrak{Z}$ de Lebesgue—en modifiant légèrement sa définition—est projective de classe au plus 3. Puis, MM. Kuratowski et von Neumann ([10]) ont vérifié que $\mathfrak{Z}$ est un ensemble A_ρ.

Je me propose d'envisager dans cet article l'induction transfinie sur les fonctions à valeurs réelles par une méthode analogue à celle de MM. Kuratowski et von Neumann.

Une fonction Φ définie par l'induction transfinie se détermine d'une fonction initiale Q, d'une opération O_p pour les fonctions qui est effectuée itérativement à Q et de quelques fonctions auxiliaires qui se rattachent à la géometrisation des nombres ordinaux. Si Q et les fonctions auxiliaires sont toutes de Baire et O_p est une opération de Hausdorff dont la base est un ensemble analytique, Φ est une fonction projective de la classe A[5] définie sur un ensemble complémentaire analytique. De plus, si la base conjuguée à la base de O_p est aussi un ensemble analytique, Φ est une fonction projective de la classe CA et en même temps celle de la classe A définie sur un ensemble complémentaire analytique.

Nous donnerons l'énoncé exact de ce résultat à la fin du § 2, après les préparations nécessaires au § 1. Nous le démontrerons au § 3, et l'appliquerons au dernier § 4 pour construire une ' fonction de Lebesgue ' non représentable analytiquement, et en déterminer la classe.

Je tiens à remercier, en terminant, Professeur M. Motokiti Kondô des précieux conseils, qu'il a bien voulu me donner au cours de ce travail.

§ 1. L'opération de Hausdorff pour les fonctions

Nous commençons par la considération sur l'opération de Hausdorff pour les fonctions à valeurs réelles. Voici la définition de cette opération donnée par M. M. Kondô ([3]), en analogie avec l'opération

5) Nous appelons une fonction $f(x)$ à valeurs réelles définie sur un espace métrique complet et séparable *fonction projective de la classe* A (ou bien CA), lorsque l'ensemble $\underset{x}{\mathrm{Ens}}\,[f(x) > c]$ est un ensemble analytique (ou bien complémentaire analytique), quelque soit c. Voir p. ex. C. Kuratowski [7], M. Kondô [4]. *Cf.* N. Lusin [13].

Hausdorff pour les ensembles (Cf. C. Kuratowski [7], p. 246).

Etant donnés une suite $\{f_n(x)\}$ *de fonctions à valeurs réelles et un ensemble* N *de nombres irrationnels* $\nu=(n_1, n_2, \cdots)$ *contenus dans l'intervalle* $(0, 1)$, *nous appelons l'opération* H_N *définie par*[6]

$$H_N(f_n(x))=\underset{\nu\in N}{\text{b. s.}}(\underset{k}{\text{b. i.}} f_{n_k}(x))$$

une opération de Hausdorff (*ou, simplement, opération* H) *pour les fonctions et* N *sa base.*

On a beaucoup d'exemples des opérations H pour les fonctions. En voici quelques-uns:

i) La *borne inférieure* effectuée sur une suite $\{f_n(x)\}$ est une opération H dont la base N ne contient qu'un seul nombre $\nu=(1, 2, \cdots)$.

ii) La *borne supérieure* effectuée sur une suite $\{f_n(x)\}$ est une opération H dont la base N est l'ensemble $\mathfrak{N}$ de tous les nombres irrationnels de $(0, 1)$.

iii) La *limite inférieure* effectuée sur une suite $\{f_n(x)\}$ est une opération H dont la base N est évidemment l'ensemble $\{\nu^{(k)}\}$ $(k=1, 2, \cdots)$ des nombres irrationnels tels que $\nu^{(k)}=(k, k+1, \cdots)$.

iv) La *limite supérieure* effectuée sur une suite $\{f_n(x)\}$ est une opération H dont la base N est l'ensemble G_δ dans l'espace $\mathfrak{N}$ de tous les nombres irratiounels contenus dans $(0, 1)$ défini par

$$\nu=(n_1, n_2, \cdots)\in N .\equiv. \prod_{i,j}[(i<j)\rightarrow(n_i<n_j)]. \tag{1.1}$$

En effet, posons $f(x)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n(x)=\underset{n}{\text{b.i.}}(\underset{m}{\text{b.s.}} f_{n+m}(x))$, nous aurons alors $f(x)=\underset{\nu\in N}{\text{b.s.}}(\underset{k}{\text{b.i}}\ f_{n_k}(x))$. Pour un nombre arbitraire $\nu=(n_1, n_2, \cdots)$ de N, on voit sans peine par (1.1) que $\underset{k}{\text{b.i.}} f_{n_k}(x)\leqq\underset{m}{\text{b.s.}} f_{n+m}(x)$ quelque soit un nombre naturel n, ce qui entraîne $\underset{k}{\text{b.i.}} f_{n_k}(x)\leqq\underset{n}{\text{b.i.}}(\underset{m}{\text{b.s.}} f_{n+m}(x))=f(x)$; et ainsi, on a $\underset{\nu\in N}{\text{b.s.}}(\underset{k}{\text{b.i.}} f_{n_k}(x)\leqq f(x)$.

D'autre part, supposons que $z<f(x)$.

6) b.s, b.i. signifient la borne supérieure et la borne inférieure respectivement.

$$z < f(x) . \equiv . z < \underset{n}{\text{b.i.}} (\underset{m}{\text{b.s.}} f_{n+m}(x))$$
$$\Rightarrow \prod_n (z < \underset{m}{\text{b.s.}} f_{n+m}(x)) . \equiv . \prod_n \sum_m (z < f_{n+m}(x)) .$$

Il existe alors au moins un nombre naturel m tel que $z < f_{n+m}(x)$ pour tout nombre naturel n.

D'où, pour tout nombre naturel k, on peut choisir un nombre naturel $m(k)$ de façon que

1) $m(1)$ est le plus petit nombre parmi m satisfaisant à $z < f_{1+m}(x)$,
2) $m(k+1)$ est le plus petit nombre parmi m qui remplit $k+m(k) < (k+1)+m$ et $z < f_{k+1+m}(x)$ en même temps.

Alors, si nous posons $n_k^o = k + m(k)$, et $\nu^o = \frac{1|}{|n_1^o} + \frac{1|}{|n_2^o} + \cdots$, nous avons évidemment $\nu^o \in N$. Or, quelque soit k, on a $z < f_{n_k^o}(x)$ par la définition de n_k^o, cet inégalité donne $z \leqq \underset{k}{\text{b.i.}} f_{n_k^o}(x)$. Par suite, nous avons $z \leqq \underset{\nu \in N}{\text{b.s.}} (\underset{k}{\text{b.i.}} f_{n_k}(x))$. Comme nous avons, pour deux nombres réels a, b,

$$a \leqq b . \equiv . \prod_z (z < a \rightarrow z \leqq b) , \tag{1.2}$$

nous en concluons $f(x) \leqq \underset{\nu \in N}{\text{b.s.}} (\underset{k}{\text{b.i.}} f_{n_k}(x))$. Par conséquent, nous avons $f(x) = \underset{\nu \in N}{\text{b.s.}} (\underset{k}{\text{b.i.}} f_{n_k}(x))$.

De plus, comme M. Kondô ([3]) a déjà fait remarquer, beaucoup de résultats sur l'opération H pour les ensembles ont leurs pendants sur l'opération H pour les fonctions. Deux propositions suivantes (I), (II), qui correspondent aux résultats connus sur l'opérations H pour les ensembles[7], nous seront utiles ultérieurement.

Soient donnés une famille $\mathfrak{F}$ de fonctions à valeurs réelles et un ensemble N de nombres irrationnels de (0, 1). Nous désignerons par $H_N(\mathfrak{F})$ la famille de toutes les fonctions f définies par

$$f = \underset{\nu \in N}{\text{b.s.}} (\underset{k}{\text{b.i.}} f_{n_k}) , \tag{1.3}$$

où $f_n \in \mathfrak{F}$ $(n = 1, 2 \cdots)$.

7) Voir W. Sierpinski [14], L. Kantrovitch et E. Livenson [2].

(I) *Etant données deux opérations H pour les fonctions ayant respectivement les bases M et N, il existe une base L d'opération H pour les fonctions telle qu'on ait*

$$H_L(\mathfrak{F})=H_M(H_N(\mathfrak{F})) \tag{1.4}$$

pour toute famille $\mathfrak{F}$ de fonctions à valeurs réelles.

Pour le voir, désignons par L l'ensemble de tous les nombres irrationnels $\lambda=(l_1, l_2,\cdots)$ de $(0, 1)$ satisfaisant aux conditions suivantes:

Il existe un nombre $\mu=(m_1, m_2, \cdots) \in M$ et une suite infinies des nombres $\nu^{(k)}=(n_1^{(k)}, n_2^{(k)}, \cdots) \in N\,(k=1, 2, \cdots)$ tels qu'on ait

$$l_i=2^{m_{s_1(i)}-1}\cdot(2n_{s_2(i)}^{(s_1(i))}-1) \text{ pour } i=1, 2,\cdots \tag{1.5}$$

où $s_1(p)$ et $s_2(p)$ sont les fonctions définies pour tout nombre naturel p ayant comme valeurs les nombres naturels tels que $p=2^{s_1(p)-1}(2s_2(p)-1)$[8].

Soient $\mathfrak{F}$ une famille de fonctions donnée et L l'ensemble ainsi défini, et nous prouverons (1.4).

En effect, soit f une fonction de $H_M(H_N(\mathfrak{F}))$. Il résulte de la définition qu'il existe une suite double $\{f_n^m\}$ des fonctions de la famille $\mathfrak{F}$ telle qu'on ait

$$f=\underset{\mu\in M}{\text{b.s.}}\,(\underset{k}{\text{b.i.}}\,(\underset{\nu\in N}{\text{b.s.}}\,(\underset{j}{\text{b.i.}}\,f_{n_j}^{m_k}))) . \tag{1.6}$$

Si nous posons

$$g_l=f_{s_2(l)}^{s_1(l)} \text{ pour } l=1, 2, \cdots , \tag{1.7}$$

la suite donnée est rangée en une suite $\{g_l\}$ simplement infinie. Alors, une fonction g définie par

$$g_l=\underset{\lambda\in L}{\text{b.s.}}\,(\underset{i}{\text{b.i.}}\,g_{l_i}) , \tag{1.8}$$

appartient à $H_L(\mathfrak{F})$. Or, nous avons

8) p étant un nombre naturel donné, on a toujours un seul système $(s_1(p), s_2(p))$ de deux nombres naturels tel qu'on ait $p=2^{s_1(p)-1}(2s_2(p)-1)$.

$$(1.9)\qquad z<f.\equiv z<\underset{\mu\in M}{\text{b.s.}}\,(\underset{k}{\text{b.i.}}\,(\underset{\nu\in N}{\text{b.s.}}\,(\underset{j}{\text{b.i.}}\,f^{m_k}_{n_j})))$$

$$.\equiv.\sum_{\mu}\{(\mu\in M).\,(z<\underset{k}{\text{b.i.}}\,(\underset{\nu\in N}{\text{b.s.}}\,(\underset{j}{\text{b.i.}}\,f^{m_k}_{n_j})))\}$$

$$.\Rightarrow.\sum_{\mu}\{(\mu\in M).\,\prod_{k}(z<\underset{\nu\in N}{\text{b.s.}}\,(\underset{j}{\text{b.i.}}\,f^{m_k}_{n_j}))\}$$

$$.\equiv.\sum_{\mu}\{(\mu\in M).\,\prod_{k}\sum_{\nu^{(k)}}[(\nu^{(k)}\in N).\,(z<\underset{j}{\text{b.i.}}\,f^{m_k}_{n_j^{(k)}})]\}$$

$$.\Rightarrow.\sum_{\mu}\{(\mu\in M).\,\prod_{k}\sum_{\nu^{(k)}}[(\nu^{(k)}\in N).\,\prod_{j}(z<f^{m_k}_{n_j^{(k)}})]\},$$

et donc, $z<f$ entraine qu'il existe un nombre $\mu=(m_1, m_2,\cdots)$ de M et un nombre $\nu_1^{(k)}=(n_1^{(k)}, n_2^{(k)},\cdots)$ de N pour tout nombre naturel k tels qu'on ait

$$(1.10)\qquad z<f^{m_k}_{n_j^{(k)}},\ \text{pour } j=1, 2,\cdots.$$

Ici, si l'on pose $l_i^{(o)}=2^{m_k-1}(2n_j^{(k)}-1)$ où $i=2^{k-1}(2j-1)$, d'après la définition de L, le nombre $\lambda^{(o)}=(l_1^{(o)}, l_2^{(o)},\cdots)$ appartiendra à L. Or, par la définition des fonctions s_1 et s_2, nous aurons

$$(1.11)\qquad s_1(l_i^{(o)})=m_{s_1(i)}\ \text{et}\ s_2(l_i^{(o)})=n^{(s_1(i))}_{s_2(i)}\ \text{pour } i=1,2,\cdots,$$

et par suite

$$(1.12)\qquad z<f^{s_1(l_i^{(o)})}_{s_2(l_i^{(o)})}\ \text{pour } i=1,2,\cdots,$$

par (1.10) (pour $k=s_1(i), j=s_2(i), i=1, 2,\cdots$). (1.7) et (1.12) nous donnent

$$(1.13)\qquad z<g_{l_i^{(o)}}\ \text{pour } i=1, 2,\cdots,$$

et d'où, $z\leqq \underset{i}{\text{b.i.}}\, g_{l_i^{(o)}}$. Nous avons alors, $z\leqq\underset{\lambda\in L}{\text{b.s.}}\,(\underset{i}{\text{b.i.}}\,g_{l_i})=g$. Par conséquent, nous concluons $f\leqq g$ d'après (1.2).

D'autre part, nous voyons

$$z<g.\equiv.z<\underset{\lambda\in L}{\text{b.s.}}\,(\underset{i}{\text{b.i.}}\,g_{l_i})$$

$$.\Rightarrow.\sum_{\lambda}\{(\lambda=(l_1, l_2,\cdots)\in L)\cdot\prod_{i}(z<g_{l_i})\}$$

$$.\equiv.\sum_{\lambda}\{\sum_{\mu}\{(\mu=(m_1,m_2,\cdots)\in M)\cdot\prod_{k}\sum_{\nu^{(k)}}[(\nu^{(k)}=(n_1^{(k)},\ n_2^{(k)},\cdots)$$

$$\in N)\cdot\prod_{i}(l_i=2^{m_{s_1(i)}-1}\cdot(2n_{s_2(i)}^{(s_1(i))}-1))]\}\cdot\prod_{i}(z<g_{l_i})\}$$ (d'après

la définition de L)

$$.\equiv.\sum_{\lambda}\{\sum_{\mu}\{(\mu=(m_1,m_2,\cdots)\in M)\cdot\prod_{k}\sum_{\nu^{(k)}}\{(\nu^{(k)}=(n_1^{(k)},\ n_2^{(k)},\cdots)\in N)\cdot$$

$$\cdot\prod_{i}[(l_i=2^{m_{s_1(i)}-1}\cdot(2n_{s_2(i)}^{(s_1(i))}-1))\cdot(z<f_{s_2(l_i)}^{s_1(l_i)})]\}\}\}$$ (d'après (1.7))

$$.\equiv.\sum_{\lambda}\{\sum_{\mu}\{(\mu=(m_1,m_2,\cdots)\in M)\cdot\prod_{k}\sum_{\nu^{(k)}}\{(\nu^{(k)}=(n_1^{(k)},\ n_2^{(k)},\cdots)\in N)$$

$$\cdot\prod_{i}(z<f^{m_{s_1(i)}}_{n^{(s_1(i))}_{s_2(i)}})\}\}\}$$ (d'après la définition des fonctions s_1 et s_2 et (1.5))

$$.\equiv.\sum_{\mu}\{(\mu\in M)\cdot\prod_{k}\sum_{\nu^{(k)}}[(\nu^{(k)}\in N)\cdot\prod_{j}(z<f^{m_k}_{n_j^{(k)}})]\}$$ (pour $i=2^{k-1}(2j-1),\ k,j=1,2,\cdots$)

$$.\Rightarrow.\sum_{\mu}\{(\mu\in M)\cdot\prod_{k}\sum_{\nu^{(k)}}[(\nu^{(k)}\in N)\ (z\leqq \underset{j}{\text{b.i.}}\,f^{m_k}_{n_j^{(k)}})]\}$$

$$.\Rightarrow.\sum_{\mu}\{(\mu\in M)\cdot\prod_{k}(z\leqq \underset{\nu\in N}{\text{b.s.}}\,(\underset{j}{\text{b.i.}}\,f^{m_k}_{n_j^{(k)}}))\}$$

$$.\equiv.\sum_{\mu}\{(\mu\in M)\cdot(z\leqq \underset{k}{\text{b.i.}}\,(\underset{\nu\in N}{\text{b.s.}}\,(\underset{j}{\text{b.i.}}\,f^{m_k}_{n_j^{(k)}}))\}$$

$$.\Rightarrow.Z\leqq \underset{\mu\in M}{\text{b.s.}}\,(\underset{k}{\text{b.i.}}\,(\underset{\nu\in N}{\text{b.s.}}\,(\underset{j}{\text{b.i.}}\,f^{m_k}_{n_j^{(k)}})))=f.$$

Alors, l'inégalité $z<g$ implique $z\leqq f$, et donc, par (1.2), il résulte $g\leqq f$. Par conséquent, nous avons $f=g$. Or, comme g appartient à $H_L(\mathfrak{F})$, nous avons alors $H_M(H_N(\mathfrak{F}))\subseteqq H_L(\mathfrak{F})$.

Inversement, soit g une fonction de la famille $H_L(\mathfrak{F})$. Il existe alors une suite infinie $\{g_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$ des fonctions de la famille $\mathfrak{F}$ qui remplit (1.8).

Posons

$$f_n^m = g_{2^{m-1}(2n-1)} \text{ pour } m, n = 1, 2, \cdots, \tag{1.15}$$

et définissons f par (1.6). f est évidemment une fonction de la famille $H_M(H_N(\mathfrak{F}))$. Or, nous aurons $g=f$ de même que précédemment et, ainsi que $H_L(\mathfrak{F}) \leq H_M(H_N(\mathfrak{F}))$. Par conséquent, nous avons (1.4).

c. q. f. d.

Désignons par $K_N(\mathfrak{F})$ la famille de toutes les fonctions telles qu'on ait

$$f = -\underset{\nu \in N}{\text{b.s.}} (\underset{k}{\text{b.i.}} (-f_{n_k})), \tag{1.16}$$

où $f_n \in \mathfrak{F}$ $(n=1, 2, \cdots)$.

(II) *Etant donnée une opération H pour les fonctions ayant la base N, il existe toujours une base N^c, appelée la base conjuguée à la base N, d'opération H pour les fonctions telle qu'on ait*

$$H_{H^c}(\mathfrak{F}) = K_N(\mathfrak{F}) \tag{1.15}$$

pour toute famille $\mathfrak{F}$ de fonctions à valeurs réelles.

D'abord, désignons par N^c l'ensemble de tous les nombres irrationnels $\mu = (m_1, m_2, \cdots)$ de $(0, 1)$ qui satisfont aux conditions suivantes:

1° *quelque soient deux nombres i et j, on a*

$$i < j \rightarrow m_i \leqq m_j,$$

2° *quelque soit le nombre $\nu = (n_1, n_2, \cdots) \in N$, il existe deux indices i et j tels qu'on ait $m_i = n_j$.*

Pour toute famille $\mathfrak{F}$ de fonctions à valeurs réelles, nous avons alors la formule (1.15). En effet, pour une fonction f de la famille $K_N(\mathfrak{F})$, il existe une suite $\{f_n\}$ $(n=1, 2, \cdots)$ des fonctions de $\mathfrak{F}$ telle qu'on ait

$$f = -\underset{\nu \in N}{\text{b.s.}} (\underset{k}{\text{b.i.}} (-f_{n_k})) = \underset{\nu \in N}{\text{b.i.}} (\underset{k}{\text{b.s.}} f_{n_k}). \tag{1.16}$$

Maintenant, nous posons

$$g = \underset{\mu \in N^c}{\text{b.s.}} (\underset{j}{\text{b.i.}} f_{m_j}). \tag{1.17}$$

Quelque soit un nombre $\mu \in N^c$, il existe, d'après 2° de la définition d'ensemble N^c, deux indices i et i' tels qu'on ait $m_i = n_{i'}$ pour tout $\nu = (n_1, n_2, \cdots) \in N$; on a donc

$$\underset{j}{\text{b.i.}}\, f_{m_j} \leqq f_{m_i} = f_{n_{i'}} \leqq \underset{k}{\text{b.s.}}\, f_{n_k} \quad \text{pour tout } \nu \in N,$$

ce qui entraîne $\underset{j}{\text{b.i.}}\, f_{m_j} \leqq \underset{\nu \in N}{\text{b.i.}} (\underset{k}{\text{b.s.}}\, f_{n_k}) = f$. Il en résulte que $\underset{\mu \in N^c}{\text{b.s.}} (\underset{j}{\text{b.i.}}\, f_{m_j}) \leqq f$, à savoir $g \leqq f$.

D'autre part, quelque soit un nombre réel z, nous avons

$$\begin{aligned} z < f . \equiv . \, & z < \underset{\nu \in N}{\text{b.i.}} (\underset{k}{\text{b.s.}}\, f_{n_k}) \\ . \Rightarrow . \, & \prod_{\nu} [(\nu \in N) \rightarrow (z < \underset{k}{\text{b.s.}}\, f_{n_k})] \\ . \equiv . \, & \prod_{\nu} [(\nu \in N) \rightarrow \sum_{k} (z < f_{n_k})] , \end{aligned}$$

et il existe donc au moins un indice $n_{k(\nu)}$ de sorte qu'on ait $z < f_{n_{k(\nu)}}$ pour tout $\nu \in N$. Nous prenons tous les nombres naturels m pour lesquels il existe au moins un nombre ν de N tel qu'on ait $m = n_{k(\nu)}$, et les rangeons selon l'ordre naturel en une suite infinie $(m_1, m_2, \cdots)$ (si elle est finie, on pourra la rendre infinie, en répétant une infinité de fois le terme final).

Soit $$\mu = \frac{1|}{|m_1} + \frac{1|}{|m_2} + \cdots .$$

On voit sans peine que le nombre μ appartient à N^c. Or, d'après la définition de μ, on a $z < f_{m_j}$ pour tout nombre naturel j ce qui prouve $z \leqq$ b.i. f_{m_j}, et il en resulte que $z \leqq \underset{\mu \in N^c}{\text{b.s.}} (\underset{j}{\text{b.i.}}\, f_{m_j}) = g$. D'après (1.2), nous avons $f \leqq g$, par conséquent, $f = g$.

Or, comme g est une fonction de $H_{N^c}(\mathfrak{F})$, f appartient à $H_{N^c}(\mathfrak{F})$. Ainsi, nous avons

$$K_N(\mathfrak{F}) \subseteqq H_{N^c}(\mathfrak{F}) . \tag{1.18}$$

Inversement, soit g une fonction de $H_{N^c}(\mathfrak{F})$. Il existe une suite $\{f_n\}$ $(n=1, 2, \cdots)$ des fonctions de la famille $\mathfrak{F}$ telle qu'on ait (1.17). D'où, si nous posons

$$f = \underset{\nu \in N}{\text{b.i.}} (\underset{k}{\text{b.s.}}\, f_{n_k}) , \tag{1.19}$$

nous avons $f=g$ comme précédemment. Or, nous voyons

$$f=\underset{\nu\in N}{\text{b.i.}}(\underset{k}{\text{b.s.}} f_{n_k})=-\underset{\nu\in N}{\text{b.s.}}(\underset{k}{\text{b.i.}}(-f_{n_k}))\in K_N(\mathfrak{F}),$$

ainsi nous avons

$$H_{N^c}(\mathfrak{F})\subseteqq K_N(\mathfrak{F}). \tag{1.20}$$

(1.19) et (1.20) nous donnent (1.15).

c. q. f. d.

§ 2. Expose du théorème et un exemple

Maintenant, considérons le crible binaire de H. Lebesgue. Supposons à ce but tous les nombres rationnels compris entre 0 et 1 rangés en une suite bien déterminée, soit:

$$r_1, r_2, \cdots, r_i, \cdots. \tag{2.1}$$

Nous prenons un nombre t de l'interval [0, 1] et nous ecrivons un développement de t en fraction binaire de façon qu'il ne contient qu'un nombre fini de fois le chiffre 1 lorsque cela est possible:

$$t=\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{2^2}+\cdots+\frac{c_i}{2^i}+\cdots, \text{ où } c_i=0 \text{ ou } 1.$$

Ce développement se détermine alors d'une seule manière. Envisageons l'ensemble M_t composé des nombres r_i tels qu'on ait $c_i=1$. Evidemment l'application M_t établit une correspondance biunivoque entre les nombres de [0, 1] et les sous-ensembles de la suite (2.1). Soit $\bar{t}$ le type d'ordre de l'ensemble M_t (ordonné selon la grandeur croissante de ces éléments). $\bar{t}$ est nommé le type d'ordre du nombre t.[9] Désignons par $\mathcal{E}$ la totalité de tous les nombres t tels que M_t soit un ensemble bien ordonné, c'est-à-dire $\bar{t}$ soit un nombre ordinal de deuxième classe au plus. Cet ensemble $\mathcal{E}$ est *l'ensemble complémentaire analytique de H. Lebesgue.* Nous pouvons nous servir de celui-ci pour la définition par

9) Voir H. Lebesgue [12], C. Kuratowski. [8].

l'induction transfinie. Pour cela, nous commençons par quelques définitions.

Soient S et X deux espaces métriques complets et séparables donnés. $Q(s, x)$ désignera une fonction à valeurs réelles de Baire donnée et définie sur le produit cartésien $S\times X$ de S et de X. Soient $\{f_n(t)\}$ $(n=1, 2,\cdots)$ une suite des fonctions de Baire définies sur $\mathcal{E}$ telles qu'on ait $f_n(t)\in\mathcal{E}$ pour tout t de $\mathcal{E}$, et

$$(2.2)\qquad f_n(0)=0 \quad \text{et} \quad \overline{\overline{f_n(t)}}<\overline{\overline{t}} \quad \text{pour } t\neq 0,$$

et $\{g_n(s)\}$ $(n=1, 2,\cdots)$ une suite des applications de Baire dont les domaines et les contre-domaines sont tous S. Etant donnée une opération H pour les fonctions à la base N, nous pouvons définir par l'induction transfinie la fonction $\Phi(t, s, x)$ sur l'espace $\mathcal{E}\times S\times X$ comme il suit :

$$(2.3)\qquad \begin{cases} \Phi(0, s, x)=Q(s, x), \\ \Phi(t, s, x)=\underset{\nu\subset N}{b.s.}\,(\underset{k}{b.i.}\,\Phi(f_{n_k}(t), g_{n_k}(s), x)) \quad \text{pour } t\neq 0. \end{cases}$$

Nous considérerons les espaces S, X, une fonction $Q(s, x)$, des suites $\{f_n(t)\}$, $\{g_n(s)\}$, une opération H à la base N, donnés une fois pour tous dans ce qui suit.

Nous aurons le théorème suivant :

THÉORÈM. *Si la base N de l'opération H est un ensemble analytique, la fonction $\Phi(t, s, x)$ définie par* (2. 3) *est une fonction projective de la classe A définie sur un ensemble complémentaire analytique, et par conséquent, son image géométrique est un ensemble A_ρ.*

De plus, si la base N^c conjuguée à N est aussi un ensemble analytique, la fonction $\Phi(t, s, x)$ est une fonction projective de la classe CA, et en même temps celle de la classe A définie sur un ensemble complémentaire analytique, par conséquent, l'image géométrique de $\Phi(t, s, x)$ est un ensemble élémentaire[10].

A l'aide de ce théorème, nous pourrons résoudre des problèmes du type suivant :

Soient $\mathfrak{F}_0$ une famille donnée des fonctions, H_N une opération H

---

10) Voir C. Kuratowski [11].

donnée à la base N, et $\mathfrak{F}_\alpha$ des familles des fonctions définies par

$$\mathfrak{F}_\alpha = H_N(\sum_{\beta<\alpha} \mathfrak{F}_\alpha) \text{ pour } \alpha < \Omega .$$

Supposons de plus que $\mathfrak{F}_\beta \subsetneqq \mathfrak{F}_\alpha$ pour $\beta<\alpha$. Connaissant une fonction universelle de $\mathfrak{F}_0$, construire par l'induction transfinie une fonction universelle de la famille $\sum_{\alpha<\Omega} \mathfrak{F}_\alpha$, et évaluer la classe de cette fonction universelle. Nous en donnerons un exemple avant de prouver le théorème.

Soient s une variable parcourant l'ensemble des nombres irrationnels entre 0 et 1, x une autre variable parcourant l'ensemble des nombres réels, et $\mathscr{V}$ la famille des fonctions $f(x)$ continues supérieurement à valeurs réelles. Soit $\mathfrak{S}(s, x)$ une fonction universelle[11] pour la famille $\mathscr{V}$; c'est-à-dire nous supposons que la fonction $\mathfrak{S}(s, x)$ satisfait aux conditions suivantes:

1° $\mathfrak{S}(s, x) \in \mathscr{V}$ pour toute valeur de s irrationnel de $(0, 1)$,

2° quelque soit $f(x) \in \mathscr{V}$, il existe au moins une valeur s_0 de s telle qu'on ait $f(x)=\mathfrak{S}(s_0, x)$.

Pour tout nombre t de $\mathcal{E}$, désignons par $t^{(n)}$ le nombre de $\mathcal{E}$ défini comme il suit:

(2.4) s'il existe dans M_t un $r_k \geqq r_n$, l'ensemble $M_{t^{(n)}}$ se compose des r_i tels que $r_i<r_n$ et $r_i \in M_t$; dans le cas contraire $t^{(n)}=0$.

On voit sans peine que $t^{(n)}$ est une fonction de Baire de t qui satisfait à la condition (2.2) pour $f_n(t)$. Puis, pour tout nombre irrationnel $s=\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{2^2}+\cdots+\frac{c_i}{2^i}+\cdots$ ($c_i=0$ ou 1) entre 0 et 1, posons

$$s_{(n)}=\frac{c_{2^{n-1}.1}}{2}+\frac{c_{2^{n-1}.3}}{2^2}+\cdots+\frac{c_{2^{n-1}.(2i-1)}}{2^i}+\cdots \quad (n=1, 2, \cdots).$$

Alors, $s_{(n)}$ est une fonction continue de s. Nous posons

$$\Phi(0, s, x)=\mathfrak{S}(s, x)$$

$$\Phi(t, s, x)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \Phi(t^{(n)}, s_{(n)}, x) \quad \text{pour } 0<t<\Omega .$$

Evidemment, la fonction $\Phi(t, s, x)$ ainsi définie satisfait à toute supposition du théorème.

---

11) Il existe une fonction universelle pour la famille $\mathscr{V}$; p. ex. voir M. Kondô [3].

§ 3. Démonstration du théorème

Pour démontrer notre théorème, citons d'abord quelques notations introduites par Kuratowski-von Neumann[12].

Faisons correspondre à tout système fini des entiers positifs $k_1, k_2, \cdots, k_n (n \geqq 0)$ un entier non négatif $p_{k_1 k_2 \cdots k_n}$, et désignons par P le système infini $(p, p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots, p_{k_1 k_2 \cdots k_n}, \cdots)$. Evidemment l'ensemble $\mathfrak{P}$ de tous les systèmes P est équivalent topologiquement à l'espace de toutes les suites infinies des entiers non négatifs, ainsi à l'espace de tous les nombres irrationnels (par rapport à la topologie faible définie sur le produit cartésien d'un nombre infini dénombrable des ensembles discret). Nous pouvons alors appliquer les théorèmes de Kuratowski-Tarski[13] dans l'espace $\mathcal{E} \times S \times X \times \mathfrak{P}$.

Désignerons par $S_{k_1 k_2 \cdots k_n}(P)$ la suite $(p_{k_1 k_2 \cdots k_n 1}, p_{k_1 k_2 \cdots k_n 2}, \cdots)$, et on posera $S(P) = (p_1, p_2, \cdots)$. Quelque soit le système $(k_1, k_2, \cdots k_n)$, il est évident que $p_{k_1 k_2 \cdots k_n}$ et $S_{k_1 k_2 \cdots k_n}(P)$ sont continues de P. Puis, comme dans le mémoire [10], poserons $t^n = f_n(t)$, $t^{k_1 k_2 \cdots k_n} = f_{kn}(\cdots(f_{k_2}(f_{k_1}(t)))\cdots)$, $s_n = g_n(s)$ et $s_{k_1 k_2 \cdots k_n} = g_{kn}(\cdots(g_{k_2}(g_{k_1}(s)))\cdots)$. Alors, si les fonctions $f_n(t)$ et $g_n(s)$ sont de Baire, il en est de même des fonctions $t^{k_1 k_2 \cdots k_n}$ et $s_{k_1 k_2 \cdots k_n}$.

Pour simplifier les descriptions, on désignera par H un système fini quelconque d'entiers positifs $k_1, k_2, \cdots, k_n (n \geqq 0)$ et on posera $|P, H| = (p_{k_1}, p_{k_1 k_2}, \cdots, p_{k_1 k_2 \cdots k_n})$. Particulièrement, pour $n=0$, nous poserons $|P, H| = \theta$ (nul), $p_H = p$, $t^{|P, H|} = t$ et $s_{|P, H|} = s$.

Maintenant, nous définissons les sous-ensembles E_H, F_H et T dans $\mathcal{E} \times \mathfrak{P}$ comme il suit :

(3.1) $$E_H = \underset{(t, P)}{\mathrm{Ens}} [(p_H \neq 0) \cdot (t^{|P, H|} = 0)],$$

(3.2) $$F_H = \underset{(t, P)}{\mathrm{Ens}} [(p_H \neq 0) \cdot (t^{|P, H|} \neq 0)],$$

et

(3.3) $$T = \underset{(t, P)}{\mathrm{Ens}} [\prod_H \{(t, P) \in F_H \rightarrow S_H(P) \in N\}].$$

---

12) Voir C. Kuratowski et J. von Neumann, [10].

13) Voir C. Kuratowski et A. Tarski, [6].

Posons

$$T^{(t)}=\mathrm{Proj}_P[T\cap(\{t\}\times\mathfrak{P})]. \tag{3.4}$$

Les ensembles E_H et F_H sont alors mesurables (B) relativement à $\mathcal{E}\times\mathfrak{P}$, et l'ensemble T est analytique relativement à $\mathcal{E}\times\mathfrak{P}$.

LEMME 1. *Pour tout point t de $\mathcal{E}$, il existe au moins un point P de $T^{(t)}$ tel qu'on ait $p\neq 0$.*

En effet, nous pouvons le vérifier par l'induction transfinie par rapport à $\bar{t}$. Si d'abord $t=0$, soit P^0 un système défini par:

$$\begin{cases} p_0=\text{entier positif quelconque,} \\ p_H=0 \quad \text{pour tout } H\neq\theta. \end{cases} \tag{3.5}$$

Evidemment, on a $(0, P^0)\in F_H$ pour tout H, et donc, d'après la définition (3.3), $(0, P^0)$ appartient à l'ensemble T. D'après (3.4), on a $P^0\in T^{(0)}$.

Ensuite, soit $\bar{t}=\alpha>0$ et supposons qu'il existe au moins un point P où $p\neq 0$ de $T^{(t)}$ pour tout nombre $\bar{t}<\alpha$. Choisissons un nombre $\nu=(n_1, n_2,\cdots)$ pasmi l'ensemble N, et considérons le nombre t^{n_k} pour $k=1, 2,\cdots$. Nous avons $\overline{t^{n_k}}<\bar{t}=\alpha$ par la définition. D'où, nous pouvons prendre un à un point $P^k=(p^k, p^k_1, p^k_2,\cdots, p^k_n,\cdots, p^k_{k_1 k_2\cdots k_n},\cdots)$ où $p^k=n_k$ parmi $T^{(t^{n_k})}$ pour tout k. Nous définissons de nouveau un point P comme il suit:

$$\begin{cases} p=\text{entier positif quelconque,} \\ p_k=n_k, \\ p_{k_1 k_2\cdots k_n}=p^{k_1}_{k_2\cdots k_n} \quad \text{pour } n\geqq 2. \end{cases} \tag{3.6}$$

Nous avons alors

$$S(P)=(p_1, p_2,\cdots)=(n_1, n_2,\cdots)\in N. \tag{3.7}$$

Maintenant, pour un système $H=(k_1, k_2,\cdots, k_n)\ (n\geqq 1)$ quelconque, supposons

$$(t, P)\in F_H, \quad \text{c'est-à-dire } p_H\neq 0 \text{ et } t^{|P,H|}\neq 0. \tag{3.8}$$

Par (3.6), on a $p_H = p^{k_1}_{H'}$ et $t^{|P,H|} = t^{p_{k_1} p_{k_1 k_2} \cdots p_{k_1 l_2 \cdots k_n}} = t^{n_{k_1} p^{k_1}_{k_2} \cdots p^{k_1}_{k_2 \cdots k_n}}$ $= t^{n_{k_1}{}^{|P^{k_1}, H'|}}$ où H' est le système tel qu'on ait $H = (k_1, H')$. Ainsi, il résulte $(t^{n_{k_1}}, P^{k_1}) \in F_{H'}$ par les définitions ; ce qui entraîne, d'après notre supposition, $S_{H'}(P^{k_1}) \in N$. Or, on a $S_{H'}(P^{k_1}) = (p^{k_1}_{H'1}, p^{k_1}_{H'2}, \cdots) = (p_{k_1 H'1}, p_{k_1 H'2}, \cdots) = (p_{H1}, p_{H2}, \cdots) = S_H(P)$. Alors, la formule (3.8) implique

$$S_H(P) \in N. \tag{3.9}$$

Ce fait et (3.7) nous indiquent $(t, P) \in T$ par la définition (3.3). Par conséquent, nous avons $P \in T^{(t)}$.

c. q. f. d.

Ceci établi, nous allons définir une fonction $\Psi(t, s, x)$ sur l'espace $\varepsilon \times S \times X$. Posons d'abord

$$\psi_H(t, P, s, x) = \begin{cases} Q(s_{|P,H|}, x) & \text{lorsque } (t, P) \in E_H, \\ +\infty & \text{lorsque } (t, P) \bar{\in} E_H, \end{cases} \tag{3.10}$$

Alors, la fonction $\psi_H(t, P, s, x)$ ainsi définie est une fonction de Baire par rapport aux variables t, P, s et x. Pour le voir, il suffit de montrer que l'ensemble $\underset{(t,P,s,x)}{\mathrm{Ens}} [\psi_H(t, P, s, x) > r]$ est mesurable (B) relativement à $\mathcal{E} \times \mathfrak{P} \times S \times X$ pour tout nombre rationnel r. En effet, on voit sans peine

$$\underset{(t,P,s,x)}{\mathrm{Ens}} [\psi_H(t, P, s, x) > r] = \{(E_H \times S \times X) \cap (\mathcal{E} \times \underset{(P,s,x)}{\mathrm{Ens}} (Q(s_{|P,H|}, x) > r))\}$$
$$\cup (CE_H \times S \times X),^{14)}$$

et l'ensemble écrit au membre droit de cette égalité est mesurable (B) relativement à $\mathcal{E} \times \mathfrak{P} \times S \times X$. Ensuite, nous posons

$$\Psi(t, P, s, x) = \begin{cases} \underset{H}{\text{b.i.}}\ \psi_H(t, P, s, x) & \text{lorsque } p \neq 0, \\ -\infty & \text{lorsque } p = 0. \end{cases} \tag{3.11}$$

Alors, la fonction $\Psi(t, P, s, x)$ est une fonction de Baire par rapport aux variables t, P, s et x, puisque la borne inférieure d'une infinité

14) Désignons par CE_H l'ensemble complémentaire de E_H par rapport a $\mathcal{E} \times \mathfrak{P}$.

dénombrable au plus des fonctions de Baire est une fonction de même classe. Soit, finalement,

$$\Psi(t, s, x) = \underset{P \in T^{(t)}}{\mathrm{b.s.}}\, \psi(t, P, s, x). \tag{3.12}$$

LEMME 2. *La fonction $\Psi(t, s, x)$ est une fonction projective de la classe A définie sur l'espace $\mathcal{E} \times S \times X$.*

Pour le démontrer, il suffit de voir que l'ensemble $\underset{(t,s,x)}{\mathrm{Ens}}[\Psi(t, s, x) > r]$ est analytique relativement à $\mathcal{E} \times S \times X$ pour tout nombre rationnel r. En effet, soit r un nombre rationnel quelconque et considérons $D_r = \underset{(t,s,x)}{\mathrm{Ens}}[\Psi(t, s, x) > r]$. Or, nous avons

$$\begin{aligned} \Psi(t, s, x) &> r \\ .\equiv.\ &\sum_P [(P \in T^{(t)}) \cdot (\psi(t, P, s, x) > r)] \\ .\equiv.\ &\sum_P [((t, P) \in T) \cdot (\psi(t, P, s, x) > r)]. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Nous avons vu précédemment que l'ensemble T est analytique relativement à $\mathcal{E} \times \mathfrak{P}$ et $\psi(t, P, s, x)$ est de Baire sur $\mathcal{E} \times \mathfrak{P} \times S \times X$, et donc, les ensembles $\underset{(t,P,s,x)}{\mathrm{Ens}}[(t, P) \in T]$, $\underset{(t,P,s,x)}{\mathrm{Ens}}[\psi(t, P, s, x) > r]$ sont respectivement analytique et mesurable (B) relativement à $\mathcal{E} \times \mathfrak{P} \times S \times X$. D'où, l'ensemble D_r est analytique relativement à celui-ci.

c. q. f. d.

Or, nous avons le lemme suivant:

LEMME 3. *La fonction $\Phi(t, s, x)$ définie par* (2.3) *coïncide parfaitement avec la fonction $\Psi(t, s, x)$, c'est-à-dire, on a*

$$\Phi(t, s, x) = \Psi(t, s, x) \tag{3.14}$$

sur l'espace $\mathcal{E} \times S \times X$.

DÉMONSTRATION. Soit $t \in \mathcal{E}$. Nous prouvons notre lemme par l'induction transfinie par rapport à $\bar{t}$. En premier lieu, on a

$$\Phi(t, s, x) \leqq \Psi(t, s, x). \tag{3.15}$$

D'abord, soit $t=0$. On a $\Phi(0, s, x) = Q(s, x)$ par la définition (2.3).

D'autre part, prenons un point P^0 de $\mathfrak{P}$ défini par (3.5). Pour $H=\theta$, comme on a évidemment $(0, P^0) \in E$, on a

$$\psi(0, P^0, s, x)=Q(s, x)\,, \tag{3.16}$$

or, pour $H \neq \theta$, comme on a $(0, P^0) \bar{\in} E_H$ par la définition de P^0, on a

$$\psi_H(0, P^0, s, x)=+\infty\,. \tag{3.17}$$

D'après (3.16) et (3.17), nous avons

$$Q(s, x)=\underset{H}{\text{b.i.}}\ \psi_H(0, P^0, s, x)=\Psi(0, P^0, s, x)\,.$$

Or, d'après le lemme 1, P^0 appartient à $T^{(0)}$, nous avons donc

$$Q(s, x) \leqq \underset{P \in T^{(0)}}{\text{b.s.}}\ \Psi(0, P, s, x)=\Psi(0, s, x)\,.$$

Par suite, nous avons $\Phi(0, s, x) \leqq \Psi(0, s, x)$.

Ceci établi, soit $\bar{t}=\alpha>0$ et supposons que la formule (3.15) est valable pour $t=t'$, si $\bar{t}'<\alpha$.

Si $\Phi(t, s, x)=-\infty$, il est évident que $\Phi(t, s, x) \leqq \Psi(t, s, x)$. Donc, nous supposons que $\Phi(t, s, x) \neq -\infty$.

Soit z un nombre réel arbitraire tel qu'on ait

$$z<\Phi(t, s, x)\,. \tag{3.18}$$

D'après la définition (2.3), nous avons:

$$\begin{aligned} z<\Phi(t, s, x)\,. \equiv .\, z &< \underset{\nu \in N}{\text{b.s.}}\,(\underset{k}{\text{b.i.}}\ \Phi(t^{n_k}, s_{n_k}, x)) \\ . \equiv .\, &\sum_{\nu}[(\nu \in N)\cdot(z<\underset{k}{\text{b.i.}}\ \Phi(t^{n_k}, s_{n_k}, x))] \\ . \Rightarrow .\, &\sum_{\nu}[(\nu \in N)\cdot\prod_{k}(z<\Phi(t^{n_k}, s_{n_k}, x))]\,. \end{aligned}$$

Comme on a $\overline{t^{n_k}}<\bar{t}=\alpha$, il est $\Phi(t^{n_k}, s_{n_k}, x) \leqq \Psi(t^{n_k}, s_{n_k}, x)$ par la supposition. Donc, il existe un nombre ν de N tel qu'on ait

$$(3.18)\qquad z<\Psi(t^{n_k}, s_{n_k}, x)$$

pour tout k. Or, d'après les définitions (3.12), (3.11) et (3.10), nous avons:

$$z<\Psi(t^{n_k}, s_{n_k}, x) . \equiv . z<\underset{P\in T^{(t^{n_k})}}{\text{b.s.}}\Psi(t^{n_k}, P, s_{n_k}, x)$$

$$. \equiv . \sum_{P^k}[(P^k\in T^{(t^{n_k})})\cdot(z<\Psi(t^{n_k}, P^k, s_{n_k}, x))]$$

$$. \equiv . \sum_{P^k}[(P^k\in T^{(t^{n_k})})\cdot(p^k\neq 0)\cdot(z<\underset{H}{\text{b.i.}}\,\psi_H(t^{n_k}, P^k, s_{n_k}, x))]$$

$$. \Rightarrow . \sum_{P^k}[(P^k\in T^{(t^{n_k})})\cdot(p^k=n_k)\cdot\prod(z<\psi_H(t^{n_k}, P^k, s_{n_k}, x))] .$$

Donc, il existe un nombre ν de N et une suite infinie $\{P^k\}$ $(k=1, 2, \cdots)$ des points de $\mathfrak{P}$ tels qu'on ait

$$(3.20)\qquad p^k=n_k,\quad P^k\in T^{(t^{n_k})}$$

et

$$(3.21)\qquad z<\psi_H(t^{n_k}, P^k, s_{n_k}, x)\quad \text{pour tout } H\ (\theta \text{ ou non}).$$

Puis, désignons par P un point de $\mathfrak{P}$ défini par (3.6) du lemme 1. D'après le lemme 1 et (3.20), nous avons évidemment $P\in T^{(t)}$. Maintenant, considérons le cas où $H\neq\theta$. Si l'on a

$$(3.22)\qquad (t, P)\in E_H\quad \text{pour } H=(k_1, k_2,\cdots, k_n),$$

nous avons par $|P, H|=n_{k_1}|P^{k_1}, H'|$ et la définition de ψ_H

$$(3.23)\qquad \psi_H(t, P, s, x)=Q(s_{|P,H|}, x)=Q(s_{n_{k_1}|P^{k_1}, H'|}, x),$$

où H' est le système tel qu'on ait $H=(k'H')$. D'autre part, en vertu de (3.22) et (3.1), il résulte que $(t^{n_{k_1}}, P^{k_1}) \in E_{H'}$. Nous avons alors par (3.10)

$$\psi_{H'}(t^{n_{k_1}}, P^{k_1}, s_{n_k}, x) = Q(s_{n_{k_1}|P^{k_1}, H'|}, x).$$

Cette égalité et (3.23) nous donne

$$\psi_H(t, P, s, x) = \psi_{H'}(t^{n_{k_1}}, P^{k_1}, s_{n_{k_1}}, x). \tag{3.24}$$

Si l'on a

$$(t, P) \bar{\in} E_H, \quad \text{c'est-à-dire } p_H = 0 \text{ ou } t^{|P, H|} \neq 0, \tag{3.25}$$

nous avons, d'après (3.10),

$$\psi_H(t, P, s, x) = +\infty. \tag{3.26}$$

D'autre part, en vertu de (3.25), il résulte qu'on a $p^{k_1}_{H'} = p_H = 0$ ou $t^{n_{k_1}|P^{k_1}, H'|} = t^{|P, H|} \neq 0$, c'est-à-dire $(t^{n_{k_1}}, P^{k_1}) \bar{\in} E_{H'}$, et donc, d'après (3.10), nous voyons

$$\psi_{H'}(t^{n_{k_1}}, P^{k_1}, s_{n_{k_1}}, x) = +\infty.$$

Ce fait et (3.26) nous donnent (3.24). Par suite, si H n'est pas vide, nous avons toujours la formule (3.24). Ainsi, d'après (3.21), nous avons $z < \psi_H(t, P, s, x)$.

Si $H = \theta$ (c'est-à-dire $n = 0$), nous avons $(t, P) \bar{\in} E$ par notre supposition et la définition (3.1), et donc $\psi(t, P, s, x) = +\infty$ par (3.10). Par conséquent, nous avons

$$z < \psi_H(t, P, s, x) \quad \text{pour tout } H(\theta \text{ ou non}), \tag{3.27}$$

ce qui entraîne $z \leqq \underset{H}{\text{b.i.}}\, \psi_H(t, P, s, x)$. Or, d'après la définition de P, nous avons $p \neq 0$, et donc $z \leqq \Psi(t, P, s, x)$ par la définition (3.11). De plus, la formule $P \in T^{(t)}$ nous donne $z \leqq \underset{P \in T^{(t)}}{\text{b.s.}}\, \Psi(t, P, s, x)$, et d'où,

$$z \leqq \Psi(t, s, x) \tag{3.28}$$

d'après la définition (3.12).

Ainsi, l'inégalité (3.18) implique l'inégalité (3.28), et il en résulte que $\Phi(t, s, x) \leqq \Psi(t, s, x)$ par (1.2).

Par conséquent, l'inégalité (3.15) a été compètement démontrée.

D'autre part, on a

$$\Psi(t, s, x) \leqq \Phi(t, s, x). \tag{3.29}$$

Pour le voir, supposons d'abord $t=0$. Soit P un point quelconque de $T^{(0)}$. Si $p \neq 0$, nous avons évidemment $(0, P) \in E$ pour $H=\theta$, et d'où, d'après la définition (3.10), $\psi(0, P, s, x)=Q(s, x)$. Nous avons alors $\underset{H}{\text{b.i.}}\ \psi_H(0, P, s, x) \leqq Q(s, x)$, et donc, d'après (3.11), $\Psi(0, P, s, x) \leqq Q(s, x)$. Puis, si $p=0$, d'après (3.11) nous avons $\Psi(0, P, s, x)=-\infty$. Ainsi, nous avons toujours $\Psi(0, P, s, x) \leqq Q(s, x)$ pour tout P de $T^{(0)}$, et il en résulte que

$$\underset{P \in T^{(0)}}{\text{b.s.}}\ \Psi(0, P, s, x) \leqq Q(s, x).$$

Nous avons alors $\Psi(0, s, x) \leqq Q(s, x)$ par la définition (3.12). Or, d'après la définition (2.3) de la fonction Φ nous avons $\Phi(0, s, x)=Q(s, x)$, et ainsi,

$$\Psi(0, s, x) \leqq \Phi(0, s, x)$$

est vérifiée.

Ceci établi, soit $\bar{t}=\alpha>0$ et supposons que la formule (3.29) est valable pour $t=t'$, si $t'<\alpha$.

Si $\Psi(t, s, x)=-\infty$, il est évident que $\Psi(t, s, x) \leqq \Phi(t, s, x)$. Nous supposons donc $\Psi(t, s, x) \neq -\infty$.

Soit z un nombre réel arbitraire tel qu'on ait

$$z<\Psi(t, s, x). \tag{3.30}$$

D'après les définitions (3.12), (3.11) et (3.10), nous avons:

$$z < \Psi(t, s, x) . \equiv . z < \underset{P \in T^{(t)}}{\text{b.s.}} \Psi(t, P, s, x)$$

$$. \equiv . \sum_P [(P \in T^{(t)}) \cdot (z < \Psi(t, P, s, x))]$$

$$. \equiv . \sum_P [(P \in T^{(t)}) \cdot (p \neq 0) (z < \underset{H}{\text{b.i.}} \psi_H(t, P, s, x))]$$

$$. \Rightarrow . \sum_P [(P \in T^{(t)}) \cdot (p \neq 0) \cdot \prod_H (z < \psi_H(t, P, s, x))] .$$

Alors, il existe un point P de $\mathfrak{P}$ tel qu'on ait

$$p \neq 0, \quad P \in T^{(t)}, \tag{3.31}$$

et

$$z < \psi_H(t, P, s, x) \quad \text{pour tout } H \ (\theta \text{ ou non}). \tag{3.32}$$

(3.31) entraîne, quelque soit le système H,

$$(t, P) \in F_H \rightarrow S_H(P) \in N \tag{3.33}$$

par les définitions (3.4) et (3.3). Soit en particulier $H=\theta$. En vertu de $p \neq 0$ et $t^{|P, H|}=t \neq 0$, on a $(t, P) \in F$ par la définition (3.2). D'où, puisque la prémisse de l'implication logique (3.33) est remplie, nous avons

$$S(P)=(p_1, p_2, \cdots) \in N, \tag{3.34}$$

et donc

$$p_n \neq 0 \ (n=1, 2, \cdots) . \tag{3.35}$$

Ensuite, définissons P^n $(n=1, 2, \cdots)$ comme il suit :

$$\begin{cases} p^n = p_n \\ p_H^n = p_{nH} , \end{cases} \tag{3.36}$$

et considérons t^{p^n} pour $P^n (n=1, 2, \cdots)$. Soit H (θ ou non) un système arbtraire, et supposons

$$(3.37) \qquad (t^{p^n}, P^n) \in F_H \quad \text{c'est-à-dire} \quad p_H^n \neq 0, t^{p^n | P^n, H|} \neq 0 .$$

Evidemment, comme on a $p_H^n = p_{nH}$ et $t^{p^n|P^n, H|} = t^{|P, nH|}$, il résulte que $(t, P) \in F_{nH}$ par (3.2), ce qui donne $S_{nH}(P) \in N$ parce que $(t, P) \in T$. Par suite, la supposition (3.37) entraîne

$$(3.38) \qquad S_H(P^n) \in N,$$

parce que $S_{nH}(P) = S_H(P^n)$.

Ici, comme H est donné arbitrairement, nous avons $(t^{p^n}, P^n) \in T$ $(n=1, 2, \cdots)$, à savoir

$$(3.39) \qquad P^n \in T^{(t^{p^n})} \text{ pour } n=1, 2, \cdots.$$

De plus, nous avons

$$(3.40) \qquad \psi_H(t^{p^n}, P^n, s_{p^n}, x) = \psi_{nH}(t, P, s, x)$$

pour tout H et $n=1, 2, \cdots$. En effet, si l'on a

$$(3.41) \qquad (t^{p^n}, P^n) \in E_H,$$

nous voyons

$$(3.42) \qquad \psi_H(t^{p^n}, P^n, s_{p^n}, x) = Q(s_{p^n | P^n, H|}, x) = Q(s_{|P, nH|}, x)$$

par la définition de ψ_H. D'autre part, puisqu'on a $(t, P) \in E_{nH}$ en vertu de (3.41) et (3.36), nous avons

$$\psi_{nH}(t, P, s, x) = Q(s_{|P, nH|}, x) .$$

Par conséquent, cette égalité et (3.42) nous donnent (3.40). Si l'on a

$$(3.43) \qquad (t^{p^n}, P^n) \bar{\in} E_H \quad \text{c'est-à-dire} \quad p_H^n = 0 \text{ ou } t^{p^n | P^n, H|} \neq 0,$$

nous voyons

$$\psi_H(t^{p^n}, P^n, s_{p^n}, x) = +\infty \tag{3.44}$$

par la définition de ψ_H. D'autre part, en vertu de (3.43) et (3.36), il résulte que $p_{nH}=0$ ou $t^{|P, nH|} \neq 0$ c'est-à-dire $(t, P) \bar{\in} E_{nH}$, donc, nous avons aussi $\psi_{nH}(t, P, s, x) = +\infty$. Ce fait et (3.44) implique (3.40). Ainsi, l'égalité (3.40) a été complètement établie.

Or, en vertu de (3.32), nous avons

$z < \psi_{nH}(t, P, s, x)$ pour tout H (θ ou non) et $n=1, 2, \cdots$.

Donc, d'après (3.40), il résulte que

$$z < \psi_H(t^{p^n}, P^n, s_{p^n}, x) \quad \text{pour tout } H (\theta \text{ ou non}) \text{ et } n=1, 2, \cdots,$$

d'où, $z \leqq \underset{H}{\text{b.i.}}\, \psi_H t^{p^n}, P^n, s_{p^n}, x)$ pour $n=1, 2, \cdots$.

Or, puisque p^n est positif d'après (3.36) et (3.35), on a

$$z \leqq \Psi(t^{p^n}, P^n, s_{p^n}, x) \quad \text{pour } n=1, 2, \cdots,$$

par la définition (3.11). Alors, (3.39) nous donne

$$z \leqq \underset{P^n \in T(t^{p^n})}{\text{b.s.}} \Psi(t^{p^n}, P^n, s_{p^n}, x) \quad \text{pour } n=1, 2, \cdots,$$

ce qui entraîne

$$z \leqq \varPsi(t^{p^n}, s_{p^n}, x) \text{ pour } n=1, 2, \cdots \tag{3.45}$$

par la définition (3.12). De plus, puisqu'on a $\overline{t^{p^n}} < \bar{t} = \alpha$ $(n=1, 2, \cdots)$, d'après les définitions nous avons

$$\Psi(t^{p^n}, s_{p^n}, x) \leqq \Phi(t^{p^n}, s_{p^n}, x) \text{ pour } n=1, 2, \cdots$$

par notre supposition.

Donc, d'après (3.45), nous avons $z \leqq \Phi(t^{p^n}, s_{p^n}, z)$ pour $n=1, 2, \cdots$, et il en résulte que $z \leqq \text{b.i.}_{i}\, \Phi(t^{p^n}, s_{p^n}, x)$. Alors, d'après (3.34) et les définitions (3.36) et (2.3), nous avons

$$z \leqq \text{b.s.}_{\nu \in N} (\text{b.i.}_{i}\, \Phi(t^{p^n}, s_{p^n}, x)) = \Phi(t, s, x) . \tag{3.46}$$

Ainsi, l'inégalité (3.30) implique (3.46), il en résulte que $\Psi(t, s, x) \leqq \Phi(t, s, x)$.

Par conséquent, l'inégalité (3.29) a été complètement établie, et nous avons l'égalité (3.14) sur l'espace $\mathcal{E} \times S \times X$ par (3.15) et (3.29).

c. q. f. d.

L'ensemble $\mathcal{E}$ (c'est-à-dire $\text{Ens}_{t} [t < \Omega]$) étant complémentaire analytique, il résulte des lemmes 2 et 3 que la fonction $\Phi(t, s, x)$ définie par (2.3) est une fonction projective de la classe A définie sur un ensemble complémentaire analytique. Pour compléter la démonstration de la première partie de notre théorème, il suffit de prouver le lemme suivant :

LEMME 4. *L'image géométrique d'une fonction projective de la classe A définie sur un ensemble complémentaire analytique D est un ensemble A_ρ.*

Soit f une fonction projective de la classe A définie sur D, et pour simplifier notre démonstration, considérons le cas où f est une fonction d'une seule variable x.

Définissons D_r et D_r^*, pour tout nombre rationnel r, comme suit :

$$D_r = \text{Ens}_{x} [f(x) > r] , \tag{3.47}$$

$$D_r^* = \text{Ens}_{x} [f(x) \geqq r] . \tag{3.48}$$

D'après la supposition sur f, l'ensemble D_r est un ensemble analytique relativement à D quelque soit le nombre rationnel r. Donc, il en est de même pour l'ensemble D_r^*, parce que nous avons

$$D_r^* = \text{Ens}_{x} [f(x) \geqq r] = \text{Ens}_{x} \left[\prod_{n} \left(f(x) > r - \frac{1}{n} \right) \right]$$
$$= \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \text{Ens}_{x} \left[f(x) > r - \frac{1}{n} \right] \right\} = \prod_{n=1}^{\infty} D_{r-\frac{1}{n}} .$$

Maintenant, désignons par I l'image géométrique de f:

(3.49) $$I = \underset{(x,y)}{\mathrm{Ens}}[y = f(x)],$$

et posons

(3.50) $$J_r = \underset{(x,y)}{\mathrm{Ens}}[y < r],$$

(3.51) $$\varDelta = \sum_{r \in R} [(D_r \times Y) \cap J_r],$$

et

(3.52) $$\varDelta^* = \prod_{r \in R} [(D_r^* \times Y) \cup J_r]$$

où R est l'ensemble de tous les nombres rationnels r et Y est celui de tous les nombres réels y. Les ensembles $\varDelta$ et $\varDelta^*$ sont alors analytiques relativement à D. Or, nous avons

(3.53) $$I = \varDelta^* \cap C\varDelta,$$

où $C\varDelta$ est l'ensemble complémentaire de $\varDelta$ par rapport à $D \times Y$.

En effet, prenons un élément (x, y) appartenant à I et soit r un nombre rationnel arbitraire. D'après (3.49), on a $y = f(x)$, d'où nous pouvons distinguer les deux cas suivants: $y \geqq r$ et $y < r$. Si $y \geqq r$, il s'en suit $f(x) \geqq r$, donc, x appartient à D_r^*, et ainsi

(3.54) $$(x, y) \in (D_r^* \times Y) \cup J_r.$$

D'autre part, si $y < r$, il s'en suit $(x, y) \in J_r$, donc, nous avons (3.54). Ainsi, nous avons toujours (3.54) pour tout nombre rationnel r. D'après (3.52), il en résulte que $(x, y) \in \varDelta^*$. Pour ce cas, supposons que $(x, y) \in \varDelta$. D'après (3.51), il existe un nombre rationnel r tel qu'on ait

$$(x, y) \in (D_r \times Y) \cap J_r.$$

Nous avons alors en même temps $f(x) > r$ et $y < r$, et donc $y < f(x)$, ce qui est contradictoire à $y = f(x)$. Donc, l'élément (x, y) ne peut pas appartenir à l'ensemble $\varDelta$; par conséqent, il résulte que $(x, y) \in \varDelta^* \cap C\varDelta$. Nous avons donc $I \subseteqq \varDelta^* \cap C\varDelta$.

Inversement, soit, $(x,y)\in \varDelta^* \cap C\varDelta$, et supposons que $y \neq f(x)$. Or, si l'on a l'inégalité $y > f(x)$, nous pouvons prendre un nombre rationnel r tel qu'on ait $y > r > f(x)$. Pour ce nombre r, nous avons en même temps $x \bar{\in} D_r^*$ et $(x,y) \bar{\in} J_r$ par les définitions (3.48) et (3.50), il en résulte que $(x,y) \bar{\in} (D_r^* \times Y) \cup J_r$: c'est-à-dire, nous avons vu qu'il existe un nombre rationnel r tel que (x,y) n'appartienne pas à $(D_r^* \times Y) \cup J_r$. Pour ce cas, nous avons $(x,y) \bar{\in} \varDelta^*$, ce qui est contradictoire à $(x,y)\in \varDelta^* \cap C\varDelta$. D'autre part, si l'on a l'inégalité $f(x) > y$, il existe un nombre rationnel r tel qu'on ait $f(x) > r > y$. Pour ce nombre r, nous avons en même temps $x \in D_r$ et $(x,y)\in J_r$, il en résulte que $(x,y) \in (D_r \times Y) \cap J_r$. Ainsi, pour ce cas, nous avons $(x,y)\in\varDelta$, ce qui est contradictoire à $(x,y)\in\varDelta^*\cap C\varDelta$. Donc, on ne peut pas avoir $y\neq f(x)$, c'est-à-dire (x,y) appartient nécessairement à I. Alors, nous avons $\varDelta^* \cap C\varDelta \subseteqq I$, et ainsi, (3 53) est vérifiée.

L'ensemble $\varDelta^* \cap C\varDelta$ étant un ensemble A_ρ, nous avons le lemme 4.

c. q. f. d.

La première partie de notre théorème est donc parfaitement prouvée.

Maintenant, en supposant que la base N et sa base conjuguée N^c soient en même temps analytiques, considérons la fonction $-\Phi(t,s,x)$. En vertu de (2.3), nous avons

$$-\Phi(0,s,x) = -Q(s,x)$$

$$\begin{aligned} -\Phi(t,s,x) &= -\underset{\nu\in N}{\text{b.s.}}\,(\underset{k}{\text{b.i.}}\,\Phi(f_{n_k}(t), g_{n_k}(s), x)) \\ &= \underset{\nu\in N}{\text{b.i.}}\,(\underset{k}{\text{b.s.}}-\Phi(f_{n_k}(t), g_{n_k}(s), x)) \\ &= \underset{\mu\in N^c}{\text{b.s.}}\,(\underset{j}{\text{b.i.}}-\Phi(f_{m_j}(t), g_{m_j}(s), x)) \quad \text{pour } t \neq 0. \end{aligned}$$

L'ensemble N^c étant analytique et la fonction $-Q(s,x)$ étant de Baire par rapport à deux variables s et x, la fonction $-\Phi(t,s,x)$ remplit les conditions de la définition (2.3) et de la première partie de notre théorème, donc la fonction $-\Phi(t,s,x)$ est une fonction projective de la classe A définie sur un complémentaire analytique. Or, il est clair que, quand f est une fonction projective de la classe A, $-f$ est celle de la classe CA, il en résulte que $\Phi(t, s, x)$ est une fonction projective de la classe CA.

D'autre part, $\Phi(t, s, x)$ était une fonction projective de la classe A définie sur un ensemble complémentaire analytique. $\Phi(t, s, x)$ est donc une fonction projective de la classe CA, et en même temps, celle de la classe A définie sur un ensemble complémentaire analytique.

Pour démontrer complètement notre théorème, il nous suffira donc de prouver le lemme suivant:

LEMME. 5. *L'image géométrique de la fonction f projective de la classe CA et, en même temps de la classe A définie sur un ensemble complémentaire analytique D est un ensemble élémentaire.*

Pour simplifier notre démonstration, nous considérerons le cas où f est une fonction d'une seule variable x. D'abord, l'ensemble D_r^* défini par (3.48) étant complémentaire analytique pour tout nombre rationnel r, l'ensemble Δ^* défini par (3.53) est de même classe. Puis, L'ensemble D_r défini par (3.47) étant analytque relativement à D, l'ensemble Δ défini par (3.51) est aussi analytique relativement à $D \times Y$, et alors, l'ensemble complémentaire $C\Delta$ de Δ par rapport à $D \times Y$ est complémentaire analytique. Or, pour l'ensemble I défini par (3.49), nous avons $I = \Delta^* \cap C\Delta$, et donc, l'ensemble I est complémentaire anlytique. D'autre part, D_r et aussi Δ étant complémentaire analytique, l'ensemble $C\Delta$ est analytique relativement à $D \times Y$, et donc, $I = \Delta^* \cap C\Delta$ est un ensemble analytique relativement à un ensemble complémentaire analytique, parce que l'ensemble Δ^* est aussi analytique relativement à $D \times Y$.

Par conséquent, I—l'image géométrique de f—est élémentaire.

§ 4. Application du théorème

Nous allons construire un exemple $F(t, x)$ de fonction non représentable analytiquement, et en appliquant notre théorème, déterminer la classe de cette fonction $F(t, x)$. Pour la construire nous suivrons l'idée de H. Lebesgue; celle du "cortèges d'indices"[15] sera aussi essentielle pour nous; mais nous nous en écarterons en quelques détails, pour éviter la considération peu commode du "domaine convergent"[16].

---

15) H. Lebesgue [12], p. 209.

16) Ibid. pp. 211–212.

Soient $I=(p_1, p_2, \cdots, p_k)$ où $k=1, 2, \cdots$ un système fini d'entiers positifs et $\tau(I)$ le dernier chiffre p_k. Nous rangeons, d'abord, tous les systèmes I en une suite simplement infinie:

$$I_1, I_2, \cdots, I_m, \cdots,$$

et désignons par $\nu(I)$ l'indice de I dans cette suite.

Supposons que s, compris entre 0 et 1, peut être écrit sous la forme

$$s=\frac{\theta_1}{3}+\frac{\theta_2}{3^2}+\cdots+\frac{\theta_i}{3^i}+\cdots,$$

où les θ_i sont égaux à 0 ou 2. Alors s fait partie d'un ensemble parfait cantorien C. Nous prenons les fonctions

$$\varphi_m(s)=\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_{2^{m-1}\cdot 1}}{2}+\frac{\theta_{2^{m-1}\cdot 3}}{2^2}+\cdots+\frac{\theta_{2^{m-1}\cdot(2i-1)}}{2^i}+\cdots\right),$$

pour $m=1, 2, \cdots$. Pour une valeur de s ne faisant pas partie du C, on définit $\varphi_m(s)$ comme suit. Puisque C est parfait, s fait alors partie d'un intervalle (s_0, s_1) dont les extrémités appartiennent à C et aucun autre point ne fait partie du C. Nous posons

$$\varphi_m(s)=\varphi_m(s_0)+\frac{s-s_0}{s_1-s_0}\cdot(\varphi_m(s_1)-\varphi_m(s_0))$$

dans (s_0, s_1). Les $\varphi_m(s)$ ainsi définies sont évidemment des fonctions continues de s.

Soient $J=J_0, J_m (m=1, 2, \cdots)$ les intervalles ouverts $(0, 1)$, $(m, m+1)$ respectivement, et posons $S=\sum_{m=0}^{\infty} J_m$. Désignons par $\Theta(s)=(\Theta_N(s), \Theta_J(s))$ l'application biunivoque dont le domaine est l'ensemble S et le contre-domaine est l'ensemble $\sum_{m=0}^{\infty}(\{m\}\times J)$ et définie par:

$$\Theta_N(s)=m \text{ et } \Theta_J(s)=s-m \quad \text{lorsque } s\in J_m\,(m=0, 1, 2, \cdots).$$

De plus, posons $I(s)=\nu^{-1}(\Theta_N(s))$ si $\Theta_N(s)\neq 0$, sinon soit $I(s)=\theta$

(nul) ; et prenons les fonctions $\{g_n(s)\}$ $(n=1, 2, \cdots)$ telles qu'on ait

$$g_n(s)=\Theta^{-1}(\nu(I(s)\, n)\,,\ \Theta_J(s))\,.$$

Comme on voit sans peine, $g_n(s)$ sont des fonctions continues relativement à $S=\sum_{m=0}^{\infty} J_m$.

Soit t un nombre de $\mathcal{E}$ et t^* un autre nombre de $\mathcal{E}$ tel que M_{t^*} s'obtienne de M_t en supprimant le dernier élément s'il existe, sinon soit $t^*=t$, et posons :

$$f_n(t)=\begin{cases} t^* & \text{lorsque } \bar{t} \text{ est de la première espèce,} \\ t^{(n)} & \text{lorsque } \bar{t} \text{ est de la deuxième espèce,} \end{cases}$$

pour $t \in \mathcal{E}$, $n=1, 2, \cdots$, où $t^{(n)}$ est la fonction définie par (2.4). On voit sans peine que les fonctions $f_n(t)$ sont de Baire de t.

Puis, désignons par $\psi_I(s, x)$ la fonction de deux variables s $(0<s<1)$ et $x\,(-\infty<x<+\infty)$, continue par rapport à ces variables (comme on le verra facilement) telle qu'on ait

$$\psi_I(s, x)=2^{\tau(I)}(\varphi_{\nu(I,1)}(s)+\varphi_{\nu(I,2)}(s)\cdot x+\cdots+$$
$$+\varphi_{\nu(I,k)}(s)\cdot x^{k-1}+\cdots+\varphi_{\nu(I,\tau(I)+1)}(s)\cdot x^{\tau(I)})\,,$$

alors $\psi_I(s_0, x)$ coïncide évidemment avec un polynome en x de degré $\tau(I)$ donné à l'avance, quand on choisit convenablement une valeur s_0 de s. De plus, posons $\psi(s, x)\equiv s$. Ainsi, nous pouvons définir par l'induction transfinie la fonction $\Phi(t, s, x)$ sur $\mathcal{E}\times(\sum_{m=0}^{\infty} J_m)\times(-\infty, +\infty)$ comme il suit :

$$\begin{cases} \Phi(0, s, x)=\psi_{I(s)}(\Theta_J(s), x) \\ \Phi(t, s, x)=\varlimsup_{n\to\infty} \Phi(f_n(t), g_n(s), x) \quad \text{pour } t \neq 0. \end{cases}$$

Nous pouvons appliquer notre théorème par (iii) et (iv) de § 1. Restreignant la fonction $\Phi(t, s, x)$ sur $\mathcal{E}\times J\times(-\infty, +\infty)$, posons $F(t, x)=\Phi(t, x, x)$. Cette fonction $F(t, x)$ est evidemment non représentable analytiquement, et d'après notre théorème $F(t, x)$ est une fonction projective de la classe CA, et de plus celle de la classe A définie sur un ensemble complémentaire analytique, son image géometrique est donc élémentaire.

Les Bibliographies

[1] R. BAIRE, *Thèse*, Ann. di Math., (3) **3** (1899).

[2] L. KANTOROVITCH and E. LIVENSON, *Memoir on the analytical operations and projective sets* I, Fund. Math. **18** (1932).

[3] M. KONDÔ, *Sur les opérations analytiques dans la théorie des ensembles et quelques problèmes qui s'y rattachent* II, Jour. of the Fac. of Sci. Hokkaido Imp. Uni., Ser. 1, **10**, No. 1 (1941).

[4] M. KONDÔ, *La structure des fonctions projectives* I, Proc. Imp. Acad. Tokyo, **20** (1944).

[5] K. KUNUGUI, *Sur une surface universelle pour les fonctions de Baire, dont l'ensemble de points est un complémentaire analytique*, Proc. Imp. Acad. Tokyo, **12** (1936).

[6] C. KURATOWSKI et A. TARSKI, *Les opérations logiques et les ensembles projectifs*, Fund. Math. **17** (1931).

[7] C. KURATOWSKI, *Topologie* I, Warszawa-Lwôw (1933).

[8] C. KURATOWSKI, *Sur un problème concernant l'induction transfinie*, C.R. Paris, t. 202 (1936).

[9] C. KURATOWSKI, *Les ensembles projectifs et l'induction transfinie*, Fund. Math **27** (1936).

[10] C. KURATOWSKI and J. von NEUMANN, *On some analytic sets defined by transfinite induction*, Ann. of Math. **38**, No. 2 (1937).

[11] C. KURATOWSKI, *Les suites transfinies d'ensembles et les ensembles projectifs*, Fund. Math. **28** (1937).

[12] H. LEBESGUE, *Sur les fonctions représentables analytiquement*,: Jour. de Math., **1** (1905).

[13] N. LUSIN, *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications*, Paris, (1930).

[14] W. SIERPIŃSKI, *Sur les opérations de M. Hausdorff.* Fund. Math. **15** (1930).

[15] W. SIERPIŃSKI, *Sur une surface universelle pour les fonctions de Baire*, Bull. Math. de la Soc. Roumaine des Sci. **35**. (1933).