Journal of the Mathematical Society of Japan Vol. 3, No. 1, May, 1951.

Zur Theorie der Klassenkörper im Kleinen[1)]

Mikao MORIYA

Von 1941 bis 1943 versuchte ich, teils mit Herrn NAKAYAMA zusammen, die Klassenkörpertheorie im Kleinen axiomatisch aufzubauen[2)]. Dort legten wir einen Körper k zugrunde, welcher in bezug auf einen diskreten Primdivisor $\mathfrak{p}$ perfekt ist und noch folgende Eigenschaft besitzt:

i) *der Restklassenkörper* $\mathfrak{k}$ *von* k *nach* $\mathfrak{p}$ *ist vollkommen,*

ii) *zu einer beliebigen natürlichen Zahl* n *existiert über* $\mathfrak{k}$ *genau eine Erweiterung vom Grade* n.

Daß die Eigenschaft ii) nicht notwendig aus der Eigenschaft i) folgt, ist wohlbekannt. In §1 der vorliegenden Note will ich aber durch ein Beispiel zeigen, daß die Eigenschaft i) auch keine Folge der Eigenschaft ii) ist.

Zum Beweis des Existenzsatzes der Klassenkörper hatten wir die multiplikative Gruppe A aller von Null verschiedenen Elemente aus k in Betracht gezogen, und dann führten wir in A eine Topologie ein[3)]. Zu einer Untergruppe H von einem endlichen Index aus A existiert *dann und nur dann* der H zugeordnete Klassenkörper über k, wenn H in bezug auf diese Topologie abgeschlossen ist. In §2 will ich zeigen, daß Untergruppen von einem endlichen Index aus A im allgemeinen nicht notwendig abgeschlossen ist.

§1. Es sei P ein algebraisch-abgeschlossener Körper von der Primzahlcharakteristik p, und x ein transzendentes Element über k. Ist dann π ein Element von der Form $x-a$ $(a \in P)$ oder $\frac{1}{x}$, so kann man im Potenzreihenkörper k von π mit P als Koeffizientenbereich eine diskrete Bewertung w derart definieren, daß π ein Primelement von w ist und P in bezug auf w trivial bewertet ist. Bezeichnet nun $\mathfrak{p}$ den zu w gehörigen

1) Die Skizze der vorliegenden Note wurde im Jahre 1943 bei der Jahresversammlung der Mathematischen und Physikalischen Gesellschaft von Japan vorgetragen. Aber die Publikation war von dem Krieg und den darauffolgenden sozialen Schwierigkeiten lange Zeit verhindert.

2) M. Moriya, Die Theorie der Klassenkörper im Kleinen über diskret perfeten Körpern. I. II., Proc. Imp. Acad. Tokyo, vol. 18 (1942). T. Nakayama und M. Moriya, Die Theorie der Klassenkörper im Kleinen über diskret perfekten Körpern. III., Proc. Imp. Acad. Tokyo, Vol. 19 (1943). Die letzte Note ist im folgenden mit T. K. bezeichnet.

3) Vgl. T. K.

Primdivisor, so ist k offenbar in bezug auf $\mathfrak{p}$ perfekt. Der Restklassenkörper von k nach $\mathfrak{p}$ ist ein zu P isomorpher Körper, welcher in üblicher Weise mit P identifiziert werden kann. Nun legen wir über k einen algebraisch-abgeschlossenen Körper fest, und wir verstehen im weiteren unter einer algebraischen Erweiterung über k stets einen Teilkörper dieses festgelegten Körpers. Ein algebraisches Element über k heiße über k *p-separabel*, wenn es über k separabel von einem Grade $p^\nu(\nu \geqq 0)$ ist; eine algebraische Erweiterung über k, welche aus lauter p-separablen Elementen über k besteht, ist eine *p-separable Erweiterung* genannt. Nach dem bekannten Zorn's Lemma existiert über k eine maximal p-separable Erweiterung K.

Es sei γ ein p-separables Element über K. Dann ist γ eine Nullstelle eines irreduziblen Polynomes $x^{p^\nu}+\alpha_1 x^{p^\nu-1}+\dots+\alpha_{p^\nu}$ aus $K[x]$. Ein Element ζ aus $K(\gamma)$ ist stets von der Form

$$\beta_0+\beta_1\gamma+\cdots\cdots\cdots+\beta_m\gamma^m,$$

wo die $\beta_0, \beta_1, \dots\dots, \beta_m$ Elemente aus K bezeichnen. Betrachtet man nun den Körper $k(\alpha_1, \dots\dots, \alpha_{p^\nu}, \beta_0, \dots\dots, \beta_m)=k'$, so ist $(k':k)=p^\varkappa(\varkappa \geqq 0)$, weil k' über k separabel einfach und in K enthalten ist. Da ersichtlich γ über k' vom Grade p^ν ist, so ist $(k'(\gamma):k)=p^{\nu+\varkappa}$, also ist ζ als Element aus $k'(\gamma)$ von einem Grade $p^\mu(\mu \geqq 0)$ über k. Somit ist gezeigt, daß $K(\gamma)$ über k p-separabel ist, und infolgedessen ist wegen der Maximaleigenschaft von K:

$$K(\gamma) \subseteqq K:$$

d. h. jedes p-separable Element über K ist bereits in K enthalten.

Hilfssatz 1. Ist k_1 eine endliche Erweiterung über k und n eine zu p prime natürliche Zahl, so eixistiert über k_1 genau eine Erweiterung vom Grade n.

Beweis. Weil k_1 über k endlich ist, so ist die Fortsetzung $\mathfrak{p}_1$ von $\mathfrak{p}$ in k_1 auch diskret. Für ein Primelement π_1 von $\mathfrak{p}_1$ aus k_1 ist die Erweiterung $k_1(\sqrt[n]{\pi_1})$ vom Grade n über k_1.

Nun sei $k_1^{(n)}$ eine algebraische Erweiterung vom Grade n über k_1. Dann gilt:

$$\pi_1=\varepsilon\Pi^n,$$

wo Π ein Primelement aus $k_1^{(n)}$ und ε eine Einheit aus $k_1^{(n)}$ bezeichnet.

Wegen $(n, p)=1$ kann man in $k_1^{(n)}$ eine Einheit η so bestimmen, daß $\eta^n=\varepsilon$ wird; d. h. $(\eta\Pi)^n-\pi_1=0$. Weil $x^n-\pi_1$ in $k_1[x]$ irreduzibel ist und alle n-ten Einheitswurzeln in k_1 enthalten sind, so ist offenbar $k_1^{(n)}=k_1(\eta\Pi)$ $=k_1(\sqrt[n]{\pi_1})$, w. z. b. w.

Satz 1. *Ist n eine zu p prime, natürliche Zahl, so existiert über K genau eine Erweiterung vom Grade n.*

Beweis. Für ein Primelement π aus k ist das Polynom $x^n-\pi$ in $K[x]$ irreduzibel. Denn sonst existierte ein endlicher Teilkörper k_1[1] von K/k derart, daß $x^n-\pi$ in $k_1[x]$ reduzibel sein würde. Dabei gälte:

$$\begin{aligned} n > (k_1(\sqrt[n]{\pi}) : k_1) &= (k(\sqrt[n]{\pi}) : k_1 \cap k(\sqrt[n]{\pi})) \\ &= (k(\sqrt[n]{\pi}) : k) = n, \end{aligned}$$

weil $(k_1 \cap k(\sqrt[n]{\pi}) : k)$ einerseits eine Potenz von p und anderseits ein Teiler von n ist; die obige Gradrelation ergibt einen Widerspruch. Es muß also $x^n-\pi$ in $K[x]$ irreduzibel sein. Hieraus folgt, daß $K(\sqrt[n]{\pi})$ über K vom Grade n ist.

Nun sei K_n eine algebraische Erweiterung vom Grade n über K. Wegen $(n, p)=1$ existiert dann eine primitives Element θ von K_n über K. Ferner gibt es einen endlichen Teilkörper k_1 von K/k derart, daß θ über k_1 vom Grade n ist. Die Erweiterung $k_1(\sqrt[n]{\pi})$ ist, wie oben gezeigt, vom Grade n über k_1. Nach Hilfssatz 1 muß $k_1(\theta)$ mit $k_1(\sqrt[n]{\pi})$ übereinstimmen. Also gilt:

$$K_n=k_1(\theta)K=k_1(\sqrt[n]{\pi})K=K(\sqrt[n]{\pi}), \text{ w. z. b. w.}$$

Da K primitive n-te Einheitswurzeln enthält, so ist $K(\sqrt[n]{\pi})$ über K zyklisch.

Zusatz. Ist n eine zu p prime, natürliche Zahl, so ist die Erweiterung vom Grade n über K separabel zyklisch.

Hilfssatz 2. Ist k_1 eine endliche Erweiterung über k, so existiert über k_1 genau eine rein-inseparable Erweiterung vom Grade $p^\nu (\nu \geqq 1)$.

Beweis. Wir bezeichnen mit π_1 ein Primelement aus k_1. Dann ist offenbar $k_1(\sqrt[p^\nu]{\pi_1})$ vom Grade p^ν über k_1. Nun wollen wir zeigen, daß ein rein-inseparables Element γ vom Grade $p^\mu (\nu \geqq \mu \geqq 0)$ über k_1 stets in $k_1(\sqrt[p^\nu]{\pi_1})$ enthalten sein muß. Zunächst ist γ^{p^ν} von der Form

1) D. h. k_1 ist ein Teilkörper von K und von einem endlichen Grade über k.

$$a_n\pi_1^n + a_{n+1}\pi_1^{n+1} + \cdots\cdots + a_m\pi_1^m + \cdots\cdots,$$

wo die a_n, a_{n+1}, ..., a_m, ... alle zu P gehören. Weil die Elemente $\sqrt[p^\mu]{a_n}$, $\sqrt[p^\mu]{a_{n+1}}$, ..., $\sqrt[p^\mu]{a_m}$, ... alle zu P gehören, so ist

$$\gamma = \sqrt[p^\mu]{a_n}\sqrt[p^\mu]{\pi_1^{\,n}} + \sqrt[p^\mu]{a_{n+1}}\sqrt[p^\mu]{\pi_1^{\,n+1}} + \cdots\cdots + \sqrt[p^\mu]{a_m}\sqrt[p^\mu]{\pi_1^{\,m}} + \cdots\cdots$$

sicher ein Klement aus $k_1(\sqrt[p^\nu]{\pi_1})$.

Es sei $k_1(\gamma_1, \ldots\ldots, \gamma_s)$ eine rein-inseparable Erweiterung vom Grade p^ν über k_1. Dann ist jedes γ_i $(1 \leqq i \leqq s)$ vom Grade p^{ν_i} über k_1, wo $\nu_i \leqq \nu$ ist. Weil nach dem eben Bewiesenen jedes γ_i zu $k_1(\sqrt[p^\nu]{\pi_1})$ gehört, so ist wegen der Gradrelation:

$$k_1(\gamma_1, \ldots\ldots, \gamma_s) = k_1(\sqrt[p^\nu]{\pi_1}), \text{ w. z. b. w.}$$

Satz 2. *Es existiert über K genau eine Erweiterung vom Grade p^ν $(\nu \geqq 1)$.*

Beweis. Da alle p-separablen Elemente über K zu K gehören, so muß eine Erweiterung vom Grade p^ν über K stets über K rein-inseparabel sein. Nun ist das Polynom $x^{p^\nu} - \pi$ in $K[x]$ irreduzibel. Denn sonst gäbe es in K ein Element δ mit $\delta^{p^\varkappa} = \pi (\varkappa \geqq 1)$, also wäre δ ein nicht zu k gehöriges, rein-inseparables Element über k. Anderseits müsste δ als Element aus K über k separabel sein. Dies führt aber zu einem Widerspruch. Mithin ist $x^{p^\nu} - \pi$ in $K[x]$ irreduzibel. Der Körper $K(\sqrt[p^\nu]{\pi})$ ist also vom Grade p^ν über K.

Nun sei K_{p^ν} eine rein-inseparable Erweiterung vom Grade p^ν über K. Dann gibt es endlich viele, über K rein-inseparable Elemente γ_1, ..., γ_s derart, daß $K_{p^\nu} = K(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s)$ ist. Offenbar existiert dann ein endlicher Teilkörper k_1 von K/k von der Art, daß der Körper $k_1(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_s)$ über k_1 rein-inseparabel vom Grade p^ν ist. Weil $k_1(\sqrt[p^\nu]{\pi})$ sicher über k_1 vom Grade p^ν ist und nach Hilfssatz 2 $k_1(\sqrt[p^\nu]{\pi}) = k_1(\gamma_1, \gamma_2, \ldots\ldots, \gamma)$ sein muß, so ist offenbar:

$$K_{p^\nu} = K(\gamma_1, \ldots\ldots, \gamma_s) = k_1(\gamma_1, \ldots\ldots, \gamma_s)K = K(\sqrt[p^\nu]{\pi}), \text{ w. z. b. w.}$$

Es sei K_n eine separable Erweiterung vom Grade n über K. Dann bezeichnen wir mit L die kleinste, K_n enthaltende galoissche Erweiterung über K, deren Galoisgruppe mit G bezeichnet ist. Ist nun S_p eine

p-Sylowgruppe[1] von G, so besitzt der S_p zugeordnete Teilkörper $L(S_p)$ von L/K einen zu p primen Grad m über K. Da nach Zusatz zu Satz 1 $L(S_p)$ über K zyklisch ist, so ist S_p ein Normalteiler von G, und die Faktorgruppe G/S_p ist zyklisch von der Ordnung m. Nun sei x ein Element aus G derart, daß xS_p ein erzeugendes Element von G/S_p bildet. Dann ist die Ordnung von x^m eine Potenz $p^a (a \geqq 0)$ von p, weil x^m ein Element aus S_p ist. Nun sieht man sofort ein, daß die Ordnung von x^{p^a} gleich m ist. Also ist die von x^{p^a} erzeugte Untergruppe H von G von der Ordnung m. Weil der H zugeordnete Teilkörper von L/k über K p-separabel ist, so muß wegen der Maximaleigenschaft über K $H=G$ sein; d. h. S_p ist die Einheitsgruppe. Daraus folgt ohne weiteres, daß n prim zu p ist. Somit ist folgender Satz bewiesen:

Satz 3. *Ist K_n eine separable Erweiterung vom Grade n über K, so ist n prim zu p.*

Satz 4. *Über K existiert zu einer beliebigen natürlichen Zahl n genau eine Erweiterung vom Grade n.*

Beweis. Wenn $(n, p)=1$ oder $n=p^\nu$ ist, so existiert nach Satz 1 oder Satz 2 über K genau eine Erweiterung vom Grade n. Wir betrachten also den Fall, wo n durch p teilbar, aber keine Potenz von p ist.

Es sei nun K_n eine Erweiterung vom Grade n und $K_n^{(0)}$ der maximal separable Teilkörper von K_n/K. Dann ist nach Satz 3 $(K_n^{(0)}:K)$ prim zu p, und $(K_n:K_n^{(0)})$ eine Potenz von p, weil K_n über $K_n^{(0)}$ rein-inseparabel ist. Nach Satz 1 ist $K_n^{(0)}=K(\sqrt[n_0]{\pi})$, wo n_0 den Grad $(K_n^{(0)}:K)$ und π ein Primelement aus k bezeichnet. Nun setzen wir $(K_n:K_n^{(0)})=p^\nu$. Dann kann man ohne Schwierigkeit einen Teilkörper k_1 von $K_n^{(0)}/k$ und über k_1 eine rein-inseparable Erweiterung k_2 vom Grade p^ν so bestimmen, daß $Kk_1=K_n^{(0)}$ und $Kk_2=K_n$ sind. Da k_1 über k separabel ist und $x^{p^\nu}-\pi$ ein rein-inseparables Polynom aus $k[x]$ ist, so ist dieses Polynom auch in $k_1[x]$ irreduzibel. Nach Hilfssatz 2 ist $k_1(\sqrt[p^\nu]{\pi})=k_2$; hieraus folgt sofort:

$$K_n=Kk_2=Kk_1(\sqrt[p^\nu]{\pi})=K_n^{(0)}(\sqrt[p^\nu]{\pi})=K(\sqrt[n_0]{\pi}, \sqrt[p^\nu]{\pi}).$$

Somit ist K_n eindeutig bestimmt.

Ist nun p^ν der p-Beitrag von n, und setzt man $n_0=\frac{n}{p^\nu}$, so bestätigt

---

1) Wenn die Ordnung von G nicht durch p teilbar ist, so setze man S_p gleich der Einheitsgruppe.

man leicht, daß $K(\sqrt[n_0]{\pi}, \sqrt[p^\nu]{\pi})$ über K vom Grade n ist.

Bemerkung. Da nach dem oben Bewiesenen $K_n = K(\sqrt[n_0]{\pi}, \sqrt[p^\nu]{\pi})$ ist, so schließt man ohne Schwierigkeit, daß K_n über k galoissch ist.

Satz 5. *Eine maximal p-separable Erweiterung K über k ist unvollkommen, und über K existiert zu einer beliebigen natürlichen Zahl n genau eine Erweiterung vom Grade n.*

§ **2.** Es sei p eine beliebige ungerade Primzahl. Dann gibt es unendlich viele Primzahlen $l_i (i=1, 2, \ldots\ldots)$, welche mod p zu 1 kongruent sind. Bezeichnet nun ρ_i den frühesten Exponenten von p mod l_i, für den die Kongruenz

$$p^{\rho_i} \equiv 1 \quad \mod l_i$$

gilt, so kann man aus der obigen Kongruenz eine natürliche Zahl ν_i so bestimmen, daß die Gleichung

$$p^{\rho_i l_i} = 1 + b_i l_i^{\nu_i+1} \quad (b_i, l_i) = 1$$

gilt. Im Kreiskörper R_{ν_i}, welcher aus dem rationalen Zahlkörper R durch Adjunktion einer primitiven $l_i^{\nu_i+1}$-ten Einhietswurzel entsteht, ist die Primzahl p unverzweigt, und jeder Primteiler von p ist vom Grade $\rho_i l_i$. Betrachtet man nun den zyklischen Teilkörper P_{ν_i} von R_{ν_i}/R, welcher über R vom Grade $l_i^{\nu_i}$ ist, so besitzt p in P_{ν_i} genau $l_i^{\nu_i-1}$ verschiedene Primteiler vom Grade l_i über R.

Bildet man nun das Kompositum P von den Körpern $P_{\nu_1}, P_{\nu_2}, \ldots\ldots$ und bezeichnet mit $\mathfrak{p}_0$ einen Primteiler von p aus P, so enthält der Restklassenkörper $\mathfrak{K}$ von P nach $\mathfrak{p}_0$ abzählbar unendlich viele Elemente, und zwar ist $\mathfrak{K}$ als die Vereinigung der Körperkette

$$\mathfrak{K}_0 \subset \mathfrak{K}_1 \subset \ldots\ldots \subset \mathfrak{K}_i \subset \ldots\ldots$$

definiert, wobei $\mathfrak{K}_0$ den Primkörper von $\mathfrak{K}$ bezeichnet und $(\mathfrak{K}_i : \mathfrak{K}_0) = l_1 l_2 \ldots l_i$ $(i \geqq 1)$ ist. Da $\mathfrak{K}$ absolut-algebraisch ist, so ist $\mathfrak{K}$ vollkommen. Nun gilt folgender

Hilfssatz 3. Zu einer beliebigen natürlichen Zahl n existiert über $\mathfrak{K}$ genau eine Erweiterung vom Grade n.

Beweis. Wir bestimmen zunächst einen Index i_0, so daß für jeden Index $j > i_0$ der Grad $(\mathfrak{K}_j : \mathfrak{K}_{i_0})$ prim zu n ist. Weil aber $\mathfrak{K}_{i_0}$ ein Galoisfeld ist, so existiert über $\mathfrak{K}_{i_0}$ genau eine Erweiterung $\mathfrak{K}_{i_0}^{(n)}$ vom Grade n[1]. Für einen beliebigen Index $j > i_0$ besitzt das Kompositum $\mathfrak{K}_{i_0}^{(n)}\mathfrak{K}_j$ von $\mathfrak{K}_{i_0}^{(n)}$ und $\mathfrak{K}_j$ den Grad n über $\mathfrak{K}_j$. Hieraus schließt man sofort, daß das Kompositum von $\mathfrak{K}_{i_0}^{(n)}$ und $\mathfrak{K}$ über $\mathfrak{K}$ vom Grade n ist.

Umgekehrt sei $\mathfrak{K}^{(n)}$ eine Erweiterung vom Grade n über $\mathfrak{K}$. Dann existiert ein Körper $\mathfrak{K}_i$ aus der obigen Körperkette und eine Erweiterung $\mathfrak{K}_i^{(n)}$ vom Grade n über $\mathfrak{K}_i$ derart, daß $\mathfrak{K}_i^{(n)}\mathfrak{K}$ über $\mathfrak{K}$ vom Grade n ist. Dabei kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $i \geqq i_0$ ist. Da über $\mathfrak{K}_i$ genau eine Erweiterung vom Grade n existiert, so ist $\mathfrak{K}_{i_0}^{(n)}\mathfrak{K}_i = \mathfrak{K}_i^{(n)}$, woraus $\mathfrak{K}_{i_0}^{(n)}\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_i^{(n)}\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^{(n)}$ folgt, w. z. b. w.

Nun adjungieren wir zum Körper P eine primitive p-te Einhietswurzel ζ. Dann ist $P(\zeta)$ über P vom Grade $p-1$, und der Primteiler $\mathfrak{p}_0$ von p aus P ist in $P(\zeta)$ vollverzweigt. Bezeichnet man nun mit $\mathfrak{p}$ den Primteiler von $\mathfrak{p}_0$ aus $P(\zeta)$ und mit k die perfekte Hülle von $P(\zeta)$ nach einer zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Bewertung w, so kann man wie üblich den Restklassenkörper von k nach $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{K}$ identifizieren. Ferner ist die Bewertung w diskret, und $1-\zeta$ ist ein Primelement von w. Wir bezeichnen mit π irgendein Primelement von w aus k. Dann existiert bekanntlich ein Exponent $e(\geqq p-1)$ von der Art, daß jede Einseinheit, welche mod π^{e+1} zu 1 kongruent ist, stets eine p-te Potenz einer Einheit aus k wird.

Nun greifen wir aus jeder Restklasse aus $\mathfrak{K}$ ein einziges Element —insbesondere aus der Null-und Einsklasse aus $\mathfrak{K}$ bzw. 0 und 1— als einen Repräsentanten heraus, und legen im weiteren das so entstandene Repräsentantensystem S von $\mathfrak{K}$ fest. Dann ist jedes von Null verschiedene Element aus k eindeutig als eine unendliche Reihe von der Form

$$\varepsilon_\alpha \pi^\alpha + \varepsilon^{\alpha+1}\pi^{\alpha+1} + \cdots, \quad (\alpha > -\infty, \ \varepsilon_\alpha \neq 0)$$

dargestellt, wo die Elemente ε_α, $\varepsilon_{\alpha+1}$, ... all aus S herausgenommen sind. Nun betrachten wir die multiplikative Gruppe A aller von Null verschiedenen Elemente aus k, und bezeichnen mit A_p diejenige Untergruppe von A, welche aus den p-ten Porenzen aller Elemente aus A besteht. Bekanntlich kann man aus jeder Klasse von A nach A_p ein Element α von der Form

$$\varepsilon_i \pi^i + \cdots\cdots + \varepsilon_n \pi^n + \cdots\cdots \quad (i \geqq 0, \ \varepsilon_i \neq 0)$$

---

1) Wir legen über $\mathfrak{K}_0$ einen algebraisch-abgeschlossenen Körper fest. Alle vorkommenden Erweiterungen sind als Teilkörper dieses festgelegten Körpers gemeint.

als einen Repräsentanten herausnehmen. Da aber $e \geqq p-1$ ist, so kann man ohne Einschränkung annehen, daß in der obigen unendlichen Reihe von vornherein $0 \leqq i \leqq e$ ist. Offenbar ist das Element $\alpha(\varepsilon_i\pi^i+\ldots\ldots+\varepsilon_{2e}\pi^{2e})^{-1} \bmod \pi^{e+1}$ zu 1 kongruent; es gibt also ein Element η aus k derart, daß $\alpha=(\varepsilon_i\pi^i+\ldots\ldots+\varepsilon_{2e}\pi^{2e})\eta^p$ ist. Weil die $\varepsilon_i, \ldots\ldots, \varepsilon_{2e}$ alle zu S gehören, so gibt es höchstens abzählbar unendlich viele Klassen von A nach A_p.

Nun seien $1+\varepsilon\pi$ und $1+\varepsilon'\pi$ Einheiten aus k, wo $\varepsilon, \varepsilon' \in S$ sind. Gehören dann diese Einheiten zu einer und derselben Klasse von A nach A_p, so gibt es eine Einheit η aus k derart, daß

$$1+\varepsilon\,\pi=(1+\varepsilon'\pi)\,\eta^p$$

ist. Setzt man dabei $\eta=\eta_0+\eta_1\pi+\ldots\ldots(\eta_0, \eta_1, \ldots\ldots$ sind Elemente aus $S)$, so ist η^p von der Form

$$\eta_0{}^p+\eta_p{}'\pi^p+\ldots\ldots, \qquad \eta_p', \ldots\ldots \in S,$$

weil p durch π^{p-1} teilbar ist. Dann gelten die Kongruenzen:

$$1\equiv\eta_0{}^p \quad \text{und} \quad \varepsilon\equiv\varepsilon'\eta_0{}^p \quad \bmod \pi,$$

woraus $\varepsilon=\varepsilon'$ folgt. Da es in S unedlich viele Elemente gibt, so gibt es unendlich viel verschiedene Elemente von der Form $1+\varepsilon\,\pi(\varepsilon \in S)$. Daher besitzt die Faktorgruppe A/A_p abzählbar unendlich viele Elemente.

Nun beweisen wir folgenden

Hilfssatz 4. Ist G eine abelsche Gruppe mit abzählbar unendlich viele Elementen und die Ordnung jedes Elementes aus G höchstens gleich einer Primzahl l, so existieren *nicht-abzählbar* unendlich viele Untergruppen vom Index l aus G.

Beweis[1]. Nach dem Zorn's Lemma kann man ein System S der Elemente $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n, \ldots\ldots$ aus G so bestimmen, daß sich jedes Element aus G als ein Potenzprodukt aus endlich vielen Elementen aus S darstellen läßt und aus der Relation $A_{i_1}^{x_{i_1}}\ldots\ldots A_{i_s}^{x_{i_s}}=E$(Einheitselement aus G) stets $x_{i_1}\equiv\ldots\ldots\equiv x_{i_s}\equiv 0 \bmod l$ folgt, wo $A_{i_1}, \ldots\ldots, A_{i_s}$ beliebig endlich viele Elemente aus S bezeichnen.

Nun betrachten wir in G eine Untergruppe vom Index l, welche von den Elementen $A_1A^{x_i}(i=2, 3, \ldots\ldots)$ erzeugt sind, wo die $x_i(i=2, 3, \ldots\ldots)$

1) Dieser Beweis verdanke ich Herrn E. Inaba.

alle zwischen 1, 2, ..., $l-1$ liegen, und wir bezeichen mit M die Gesamtheit aller obigen Untegruppen. Es seien H und H' Untergruppen aus M, welche bzw. von den Elementen $A_1A_i^{x_i}$ und $A_1A_i^{x'_i}$ $(i=2, 3, \ldots\ldots)$ erzeugt sind. Dann überzeugt man sich leicht davon, daß $H \neq H'$ ist, wenn für irgendeinen Index ν $x_\nu \neq x'_\nu$ ist.

Nun nehmen wir an, daß es in M abzählbar unendlich viele Untergruupen gibt. Die sämt'ichen Gruppen aus M seien mit $H_1, H_2, \ldots\ldots, H_n, \ldots\ldots$ bezeichnet, und jedes H_i sei durch die erzeugender Elemente $A_1A_2^{x_{i_2}}$, $A_1A_3^{x_{i_3}}, \ldots\ldots, A_1A_n^{x_{i_n}}, \ldots\ldots$ gekennzeichnet. Dann betrachten wir die Elemente $A_1A_2^{y_2}, A_1A_3^{y_3}, \ldots\ldots, A_1A_n^{y_n}, \ldots\ldots$, für die $y_i \neq x_{i_i}$ $(i=2, 3, \ldots\ldots, n, \ldots\ldots)$ sind. Die von den letzten Elementen erzeugten Untergruppe H vom Index l ist offenbar von den Gruppen $H_1, H_2, \ldots\ldots, H_n, \ldots\ldots$ verschieden; aber sie muß nach Definition zu M gehören, was ein Widerspruch ist. Das System M besteht also aus nicht-abzählbar unendlich vielen Untergruppen vom Index l, w. z. b. w.

Jedes Element der Faktorgruppe A/A_p ist höchstens von der Ordnung p, und weil A/A_p abzählbar unendlich viele Elemente enthält, so gibt es nicht-abzählbar unendlich viele Untergruppen vom Index p aus A/A_p. Hieraus folgt ohne weithres folgender

Hilfssatz 5. Es gibt nicht-abzählbar unendlich viele Untergruppen vom Index p aus A.

Nun führen wir in A wie bei T. K. eine allgemeine Topologie ein, und im folgenden sollen alle topologischen Begriffe im Sinne dieser allgemeinen Topologie verstanden werden.

Satz 6. *In A existiert eine nicht-abgeschlossene Untergruppe vom Index p.*

Beweis. Sind alle Untergruppen vom Index p aus A abgeschlossen, so existieren nach dem Existenzsatz nicht-abzählbar unendlich viele Klassenkörper vom Grade p über k. Da k primitive p-te Einheitswurzeln enthält, so müssen diese Klassenkörper alle Kummersche Körper vom Grade p über k sein. Bekanntlich entsteht aus allen Elementen einer Klasse von A nach A_p höchstens ein und derselbe Kummersche Körper vom Grade p über k. Weil aber A/A_p abzählbar unendlich viele Elemente enthält, so gibt es über k höchstens abzählbar unendlich viele Kummersche Körper; dies ergibt aber einen Widerspruch. Es muß also eine Untergruppe vom Index p aus A geben, welche nicht abgeschlossen ist.

Mathematisches Institut, Universität zu Okayama.