Journal of the Mathematical Society of Japan Vol. 3, No. 1, May, 1951.

Le Problème aux Limites d'un Système de Deux Équations Différentielles Ordinaires

Masuo HUKUHARA

Thoéorème. *Soit donné un système de deux équations différentielles ordinaires*

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y,z), \quad \frac{dz}{dx}=g(x,y,z). \tag{1}$$

Nous faisons les hypothèses suivantes:

(i) $S_i(y,z)$ $(i=1,2)$ *sont des fonctions S positives de* M. KAMKE;

(ii) $\omega_i(x)$ $(i=1,2)$ *sont des fonctions continues et positives dans l'intervalle* $a\leqq x\leqq b$ *et admettent des dérivées à droite et à gauche*;

(iii) *Les fonctions* $f(x,y,z)$ *et* $g(x,y,z)$ *sont continues dans l'ensemble*

$$E=\{(x,y,z)\ ;\ a\leqq x\leqq b,\ S(x,y,z)\leqq 1\},$$

où

$$S(x,y,z)=\max\{S_1(y,z)/\omega_1(x),\ S_2(y,z)/\omega_2(x)\}\ ;$$

(iv) *On a*

$$D^{\pm}\omega_1(x)>S_1(f(x,y,z),\ g(x,y,z))$$

pour $(x,y,z)\in A_1$, *et*

$$-D^{\pm}\omega_2(x)>S_2(-f(x,y,z),\ -g(x,y,z))$$

pour $(x,y,z)\in A_2$, *où*

$$A_i=\{(x,y,z)\ ;\ a\leqq x\leqq b,\ S_i(y,z)/\omega_i(x)=S(x,y,z)=1\}\ ;$$

(v) $\dfrac{S_1(0,z)}{\omega_1(a)}\leqq\dfrac{S_2(0,z)}{\omega_2(a)}, \quad \dfrac{S_1(y,0)}{\omega_1(b)}\geqq\dfrac{S_2(y,0)}{\omega_2(b)}.$

Dans ces hypothèses, il existe au moins une solution telle que

$$y(a)=0,\ z(b)=0.$$

Nous définissons deux fonctions $F(x,y,z)$, $G(x,y,z)$ continues et bornées pour

$$a \leqq x \leqq b, \quad -\infty < y < \infty, \quad -\infty < z < \infty$$

comme il suit :

$$F(x, y, z) = f(x, y, z), \quad G(x, y, z) = g(z, y, z)$$

pour $(x, y, z) \in E$ et

$$F(x, y, z) = f(x, y/S(x, y, z), \ z/S(x, y, z)),$$
$$G(x, y, z) = g(x, y/S(x, y, z), \ z/S(x, y, z))$$

pour $a \leqq x \leqq b$, $S(x, y, z) > 1$.

Lemme 1. *Supposons que $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$ représentent une solution du système différentiel*

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y, z), \quad \frac{dz}{dx} = G(x, y, z). \tag{2}$$

Si (x_0, y_0, z_0), où $y_0 = \varphi(x_0)$, $z_0 = \psi(x_0)$, est un point de $A_1 - A_1 A_2$, le point $(x, \varphi(x), \psi(x))$ appartient à l'intérieur de E pour $0 < x - x_0 < h$ et à l'extérieur de E pour $0 > x - x_0 > -h$, h désignant un nombre positif assez petit.

Puisque

$$D^{\pm} \frac{S_1(\varphi(x), \ \psi(x))}{\omega_1(x)}$$
$$= \frac{\omega_1(x) D^{\pm} S_1(\varphi(x), \psi(x)) - S_1(\varphi(x), \psi(x)) D^{\pm} \omega_1(x)}{\omega_1(x)^2}$$
$$\leqq \frac{\omega_1(x) S_1(F(x, \varphi(x), \psi(x)), \ G(\dots)) - S_1(\varphi(x), \psi(x)) D^{\pm} \omega_1(x)}{\omega_1(x)^2}$$

et que

$$\omega_1(x) = S_1(\varphi(x), \ \psi(x)),$$
$$F(x, \varphi(x), \psi(x)) = f(x, \varphi(x), \psi(x)),$$
$$G(x, \varphi(x), \psi(x)) = g(x, \varphi(x), \psi(x))$$

pour $x = x_0$, on a, d'après (iv),

$$D^{\pm} \frac{S_1(\varphi(x), \psi(x))}{\omega_1(x)} < 0 \tag{3}$$

pour $x = x_0$. Par suite

$$S_1(\varphi(x), \psi(x)) < \omega_1(x)$$

dans un intervalle assez petit $0 < x - x_0 < h_1$. (x_0, y_0, z_0) n'appartenant pas à A_2, on a

$$S_2(y_0, z_0) < \omega_2(x_0).$$

Par suite

$$S_2(\varphi(x), \psi(x)) < \omega_2(x)$$

dans un intervalle assez petit $0 < x - x_0 < h_2$. On a alors

$$S(x, \varphi(x), \psi(x)) < 1$$

pour $0 < x - x_0 < h = \min\{h_1, h_2\}$, ce qui montre que le point $(x, \varphi(x), \psi(x))$ appartient à l'intérieur de E pour $0 < x - x_0 < h$.

D'autre part, l'inégalité (3) montre que l'on a

$$S_1(\varphi(x), \psi(x)) > \omega_1(x) \tag{4}$$

dans un intervalle assez petit $0 > x - x_0 > -h$. Il s'ensuit que le point $(x, \varphi(x), \psi(x))$ est à l'extérieur de E pour $0 > x - x_0 > -h$.

Lemme 2. *Si $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$ représentent une courbe intégrale du système différentiel (2) passant par un point (x_0, y_0, z_0) de B_1B_2, où*

$$B_i = \{(x, y, z)\ ;\ a \leqq x \leqq b,\ S(x, y, z) > 1,\ (x, y/S(x, y, z), z/S(x, y, z)) \in A_i\},$$

le point $(x, \varphi(x), \psi(x))$ appartient à $B_2 - B_1B_2$ dans un intervalle assez petit $0 < x - x_0 < h$ (dans le cas de $a \leqq x_0 < b$), et à B_1 dans un intervalle assez petit $0 > x - x_0 > -h$ (dans le cas de $a < x_0 \leqq b$).

Posons

$$S_0 = S(x_0, y_0, z_0),\ \eta_0 = y_0/S_0,\ \zeta_0 = z_0/S_0,$$
$$\varphi_0(x) = \varphi(x)/S_0,\ \psi_0(x) = \psi(x)/S_0.$$

Il suffit de montrer que l'on a

$$D^+ \frac{S_1(\varphi_0(x), \psi_0(x))}{\omega_1(x)} < D^+ \frac{S_2(\varphi_0(x), \psi_0(x))}{\omega_2(x)} \tag{5}$$

pour $x = x_0$. Car cette inégalité entraîne

$$\frac{S_1(\varphi_0(x), \psi_0(x))}{\omega_1(x)} < \frac{S_2(\varphi_0(x), \psi_0(x))}{\omega_2(x)}$$

dans un intervalle assez petit $0<x-x_0<h$. On a

$$
\begin{aligned}
&D^+\frac{S_1(\varphi_0(x),\psi_0(x))}{\omega_1(x)}\\
&=\frac{\omega_1(x)D^+S_1(\varphi_0(x),\psi_0(x))-S_1(\varphi_0(x),\psi_0(x))D^+\omega_1(x)}{\omega_1(x)^2}\\
&\leqq\frac{1}{\omega_1(x)}S_1\Big(\frac{f(x,\varphi_0(x),\psi_0(x))}{S_0},\ \frac{g(x,\varphi_0(x),\psi_0(x))}{S_0}\Big)\\
&\qquad\qquad-\frac{S_1(\varphi_0(x),\psi_0(x))D^+\omega_1(x)}{\omega_1(x)^2}.
\end{aligned}
$$

Par suite, on a, en remarquant que $(x_0,\eta_0,\zeta_0)\in A_1A_2$,

$$
\begin{aligned}
\Big[D^+\frac{S_1(\varphi_0(x),\psi_0(x))}{\omega_1(x)}\Big]_{x_0}&\leqq\frac{S_1(f(x_0,\eta_0,\zeta_0),g(x_0,\eta_0,\zeta_0))}{S_0\omega_1(x_0)}-\frac{[D^+\omega_1(x)]_{x_0}}{\omega_1(x_0)}\\
&<\frac{1}{\omega_1(x_0)}\Big(\frac{1}{S_0}-1\Big)[D^+\omega_1(x)]_{x_0}\leqq 0.
\end{aligned}
$$

On verra de même

$$D^+\frac{S(\varphi_0(x),\psi_0(x))}{\omega_2(x)}>0.$$

L'inégalité (5) est donc démontrée.

On peut démontrer de même que le point $(x,\varphi(x),\psi(x))$ appartient à B_1 pour $0>x-x_0>-h$.

Lemme 3. *Si $y=\varphi(x), z=\psi(x)$ représentent une courbe intégrale du système différentiel* (2) *passant par un point (x_0,y_0,z_0) de A_1A_2 le point $(x,\varphi(x),\psi(x))$ appartient à $B_2-B_1B_2$ pour $0<x-x_0<h$ et à $B_1-B_1B_2$ pour $0>x-x_0>-h$, h désignant un nombre positif assez petit.*

La démonstration de l'inégalité (4) s'applique ici. Donc le point $(x,\varphi(x),\psi(x))$ est à l'extérieur de E pour $0<x-x_0<h$. La démonstration du lemme 2 s'applique ensuite sans aucunes modifications essentielles pour établir l'inégalité (5). Le point $(x,\varphi(x),\psi(x))$ appartient donc à $B_2-B_1B_2$.

Il est maintenant facile de démontrer le théorème. Le système différentiel (2) admet une solution $y=\varphi(x), z=\psi(x)$, telle que $y(a)=0$, $z(b)=0$. L'hypothèse (v) montre que le point $(a,\varphi(a),\psi(a))$ appartient à $E+B_2$. Les lemmes montrent que le point $(x,\varphi(x),\psi(x))$ n'appartient pas à A_1+B_1 pour $0<x-a<h$, h désignant toujours un nombre positif assez petit. A_1+B_1 étant un ensemble fermé, s'il existait une valeur x telle que $(x, \varphi(x), \psi(x))$ appartienne à A_1+B_1, on pourrait trouver une valeur $x_0(a<x_0 \leqq b)$ telle que $(x_0, \varphi(x_0), \psi(x_0))$ soit un point de A_1+B_1 mais le point $(x, \varphi(x), \psi(x))$ n'appartienne pas à A_1+B_1 pour $a<x<x_0$. Alors, d'après les lemmes, le point $(x, \varphi(x), \psi(z))$ appartiendrait à B_1 pour $0>x-x_0>-h$ contrairement à l'hypothèse. Le point $(x, \varphi(x), \psi(x))$ n'appartient donç pas à A_1+B_1 pour $a<x\leqq b$. On verra de même que le point $(x, \varphi(x), \psi(x))$ n'appartient pas à A_2+B_2 pour $a\leqq x<b$. Par suite le point $(x, \varphi(x), \psi(x))$ appartient à l'intérieur de E. Il s'ensuit que les points $(a, \varphi(a), \psi(a))$, $(b, \varphi(b), \psi(b))$ appartiennent à E. $y=\varphi(x)$, $z=\psi(x)$ représentent donc une solution de (1). C. Q. F. D.