Journal of the Mathematical Society of Japan Vol. 1, No. 1, Sept., 1948.

Zur Klassischen Theorie der Algebraischen Funktionen.

Jun-ichi IGUSA.

(Received Nov. 14, 1947.)

In der 'mathématique abélienne', wie André WEIL in seiner bedeutungsvollen Arbeit[1] scharfsinnig genannt hat, gilt das Pontrjaginsche Dualitätstheorem als zentraler Grundsatz. Im folgenden möchte ich zeigen, dass auch die klassische Theorie der algebraischen Funktionen zu diesem Teil der Mathematik gehört. In der Tat lassen sich die Rollen der bekannten Sätze dieser Theorie, wie die von Abel und von Jacobi, von diesem Standpunkt aus überaus klar erleuchten, wie im § II dieser Arbeit ausführlich dargelegt werden soll. Im § I zeigen wir, wie man mit dem Riemann-Rochschen Satz die Existenz der normalen Differentiale nachweist, und aus der Relation zwischen den Elementen der Poincaréschen Gruppe der Riemannschen Fläche die zwischen der Abelschen Integralen herleitet. Am Schluss machen wir auf eine Analogie mit der Klassenkörpertheorie aufmerksam.

Diese Arbeit entsteht aus einem Vortrag—gehalten im August 1945; der Krieg hat mich gestört, dies aufzuschreiben—im Seminar von Prof. Iyanaga. Ich möchte auch an dieser Stelle Herrn Iyanaga für seine ständige Interesse für diese Arbeit, und Herrn Dr. K. Iwasawa für seine viele wertvolle Ratschläge meinen besten Dank aussprechen.

I. Existenz der Normalen Differentiale. Relation zwischen zwei Abelschen Integralen.

1) Es sei k ein Körper der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen im klassischen Sinne; der Konstantenkörper Γ sei also der algebraisch abgeschlossene Körper aller komplexen Zahlen; k kann als der Körper der meromorphen Funktionen auf einer geschlossenen Riemannschen Fläche $\mathfrak{r}$ aufgefasst werden. $\mathfrak{r}$ ist von k bis auf birationale Transformation eindeutig bestimmt und das Geschlecht p von $\mathfrak{r}$ ist eine birationale Invariante, also eine Invariante von k. Wir bedienen uns der folgenden Bezeichnungen:

$\mathfrak{G}_p$: Poincarésche Gruppe von $\mathfrak{r}$,
$\mathfrak{H}_p$: Bettische Gruppe von $\mathfrak{r}$,

Δ_k: Divisorengruppe nullten Grades von k,
P_k: Hauptdivisorengruppe von k,
$\boldsymbol{D}_k$: Divisorenklassengruppe nullten Grades von k.

Die Zuordnung:
(Überlagerungsfläche von $\mathfrak{r}$) $\to$ (ihre Poincarésche Gruppe)
gibt bekanntlich eine ein-eindeutige Korrespondenz zwischen der Überlagerungsflächen von $\mathfrak{r}$ und den Untergruppen von $\mathfrak{G}_p$. Wir bezeichnen die zur Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}_p$ entsprechende Überlagerungsfläche von $\mathfrak{r}$ mit $\mathfrak{R}$. Dann ist $\mathfrak{H}_p$ zur Faktorgruppe von $\mathfrak{G}_p$ nach ihrer Kommutatorgruppe und daher zur Decktransformationsgruppe[2] von $\mathfrak{R}/\mathfrak{r}$ isomorph.

Die folgende Theorie wird nun auf die Arbeiten von Hasse und Weil[3] gestützt. Der Riemann-Rochsche Satz

$$\dim(\mathfrak{a}) = n(\mathfrak{a}) + 1 - g + \dim(\mathfrak{w}/\mathfrak{a})$$

wobei
$\mathfrak{a}$: Divisor von k,
$n(\mathfrak{a})$: Grad von $\mathfrak{a}$,
$\mathfrak{w}$: Differentialdivisor von k,

$$g = \operatorname*{Max.}_{\mathfrak{a}:\,\text{ganz.}} \left(n(\mathfrak{a}) - \dim(\mathfrak{a}) + 1\right),$$

spielt dabei eine grundlegende Rolle. Die Zahl g hat eine geometrische Bedeutung; es gilt nämlich $g=p$; das beweisen wir folgendermassen:

Aus dem obigen Satz erhalten wir zunächst

$$n(dx) = 2g - 2,$$

und dann aus der Riemannschen Relation[4]

$$n(dx) = 2p - 2,$$

da

$$(dx) = D_x/\infty_x^2,$$

D_x: Differentendivisor von $k/\Gamma(x)$,
∞_x: Nennerdivisor von (x).

Also haben wir tatsächlich $g=p$.

2) Nun definieren wir die Differentiale erster, zweiter, bzw. dritter Gattung, wie üblich, folgendermassen:

ydx ist dann und nur dann ein Differential erster Gattnng, wenn der zugehörige Divisor (ydx) ganz ist; zweiter Gattung, wenn für einen geeigneten Primdivisor $\mathfrak{p}$ und eine natürliche Zahl $m\,(\geqq 2)$, $(ydx)\,\mathfrak{p}^m$ ganz ist und schliesslich dritter Gattung, wenn für zwei verschiedenen geeigneten Primdivisoren $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $(ydx)\,\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ ganz ist.

Sind nun $\mathfrak{p}$, m im zweiten Falle und $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ im dritten Falle festgesetzt, so haben wir bekanntlich als Dimension der Differentiale erster, zweiter, bzw. dritter Gattung

$$p,\ p+m-1 \quad \text{bzw.} \quad p+1$$

aus dem Riemann-Rochschen Satz. Die erzeugende Wegepaare der Gruppe $\mathfrak{G}_p$ seien nun (a_{2h-1}, a_{2h}) $(h=1, \ldots\ldots, p)$. Dann kann man die Existenz der folgenden, über dem reelen Körper unabhängigen, normalen Differentiale erweisen. Das Integral von einem Differential ydx längs irgendeinem Wege ω auf der Riemannschen Fläche $\mathfrak{r}$ definiert man dabei als

$$\int_\omega ydx = \int_\omega y(dx/dt)\,dt:$$

erster Gattung $\quad dw_h(h=1, \ldots\ldots, 2p)$

$$\Re\int_{a2h} dw_{2h-1}=1, \quad \Re\int_{a_{s(\neq 2h)}} dw_{2h-1}=0,$$

$$\Re\int_{a2h-1} dw_{2h}=-1, \quad \Re\int_{a_{s(\neq 2h-1)}} dw_{2h}=0.$$

zwiter Gattung $\quad d\tau_{\mathfrak{p}}{}^m \quad d\bar{\tau}_{\mathfrak{p}}{}^m \ (m\geqq 1)$

Hauptteile $\quad -m\,!\ d\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^{m+1} \quad im\,!\ d\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^{m+1}$

$$\Re\int_{a_h} d\tau_{\mathfrak{p}}{}^m=0 \qquad \Re\int_{a_h} d\bar{\tau}_{\mathfrak{p}}{}^m=0.$$

dritter Gattung $\quad dw_{\mathfrak{pq}} \quad d\bar{w}_{\mathfrak{pq}}$

Hauptteile $\quad (d\mathfrak{p}/\mathfrak{p},\ -d\mathfrak{q}/\mathfrak{q}) \quad (-id\mathfrak{p}/\mathfrak{p},\ id\mathfrak{q}/\mathfrak{q})$

$$\Re\int_{a_h} dw_{\mathfrak{pq}}=0 \qquad \Re\int_{a_h} d\bar{w}_{\mathfrak{pq}}=0 \quad (h=1, \ldots\ldots, 2p).$$

Das allgemeine Differential setzt sich aus diesen Differentialen zusammen; also dessen Integral, d.h. das Abelsche Integral lässt sich in fundamentalen Integralen von drei Arten zerlegen. Die Singularitäten eines Abelschen Integrals müssen also die Pole, die logarithmische Windungspunkte oder die gemischte der beiden sein. Nun sind wir imstande, die allgemeine Relation zwischen zwei Abelschen Integralen zu gewinnen. Es seien also V, W zwei Abelsche Integrale, $\mathfrak{p}_l$, $\mathfrak{q}_\lambda$ ($\mathfrak{p}_l \neq \mathfrak{q}_\lambda$) deren Singuläre-punkte und

$$V \sim C_l^V \log t_l + \sum_i D_{il}^V t_l^{-i} \text{ bzw.}$$
$$W \sim C_\lambda^W \log \tau_\lambda + \sum_j D_{j\lambda}^W \tau_\lambda^{-j}$$

deren Hauptteile an $\mathfrak{p}_l$ bzw. $\mathfrak{q}_\lambda$. Die Perioden u.a. seien

$$\int_h^a dV = \Omega_h^V, \qquad \int_h^a dW = \Omega_h^W \qquad (h=1, \ldots\ldots, 2p)$$

β_l: Weg um $\mathfrak{p}_l$, γ_λ: Weg um $\mathfrak{q}_\lambda$.

Nun lautet die einzige Relation der Poincaréschen Gruppe der in $\mathfrak{p}_l$, $\mathfrak{q}_\lambda$ punktierten Fläche $\mathfrak{r}'$:

$$\Pi_{h=1}^p a_{2h-1} a_{2h} a_{2h-1}^{-1} a_{2h}^{-1} \cdot \Pi \beta_l \cdot \Pi \gamma_\lambda = 1.$$

Dementsprechend erhalten wir

$$\oint V dW = 0, \text{ d.h.}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{h=1}^p (\Omega_{2h-1}^V \Omega_{2h}^W - \Omega_{2h-1}^W \Omega_{2h}^V)$$
$$+ \sum_l \Big(C_l^V \int_{\mathfrak{o}}^{\mathfrak{p}_l} dW - \sum_i \frac{1}{(i-1)!} D_{il}^V \frac{d^i W}{d\mathfrak{p}_l^i} \Big)$$
$$- \sum_\lambda \Big(C_\lambda^W \int_{\mathfrak{o}}^{\mathfrak{q}_\lambda} dV - \sum_j \frac{1}{(j-1)!} D_{j\lambda}^W \frac{d^j V}{d\mathfrak{q}_\lambda^j} \Big) = 0$$

($\mathfrak{o}$: ein fester Punkt auf $\mathfrak{r}'$).

Dies ist die berühmte 'Herumintegrierensmethode' von Riemann. Aus dieser Relation folgen durch Spezialisierung die bekannten Relationen in der klassischen Theorie:

(I, I) $$\Im \int_\alpha dw_\beta = \Im \int_\beta dw_\alpha, \quad dw_\alpha = \sum n_h dw_h \quad (\alpha \infty \Pi a_h^{n_h}),$$

(I, II) $$\int_\alpha d\tau_{\mathfrak{p}}^m = 2\pi i \cdot \Re \frac{d^m w_\alpha}{d\mathfrak{p}^m}, \quad \int_\alpha d\bar{\tau}_{\mathfrak{p}}^m = 2\pi i \cdot \Im \frac{d^m w_\alpha}{d\mathfrak{p}^m},$$

(I, III) $$\int_\alpha dw_{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2} = 2\pi i \cdot \Re \int_{\mathfrak{p}_1}^{\mathfrak{p}_2} dw_\alpha, \quad \Im \int_\alpha d\bar{w}_{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2} = 2\pi \cdot \Im \int_{\mathfrak{p}_1}^{\mathfrak{p}_2} d\varphi_\alpha,$$

$$(\mathrm{II},\ \mathrm{II})\qquad \mathfrak{R}\frac{d\tau_{\mathfrak{q}}^{m}}{d\mathfrak{p}}=\mathfrak{R}\frac{d^{m}\tau_{\mathfrak{p}}}{d\mathfrak{q}^{m}},\quad \mathfrak{R}\frac{d\bar{\tau}_{\mathfrak{q}}^{m}}{d\mathfrak{p}}=\mathfrak{J}\frac{d^{m}\tau_{\mathfrak{p}}}{d\mathfrak{q}^{m}},$$

$$\mathfrak{J}\frac{d\tau_{\mathfrak{q}}^{m}}{d\mathfrak{p}}=\mathfrak{R}\frac{d^{m}\bar{\tau}_{\mathfrak{p}}}{d\mathfrak{q}^{m}},\quad \mathfrak{J}\frac{d\bar{\tau}_{\mathfrak{q}}^{m}}{d\mathfrak{p}}=\mathfrak{J}\frac{d^{m}\bar{\tau}_{\mathfrak{p}}}{d\mathfrak{q}^{m}},$$

$$(\mathrm{II},\ \mathrm{III})\qquad \mathfrak{R}\int_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2}d\tau_{\mathfrak{q}}^{m}=\mathfrak{R}\frac{d^{m}w_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}}{d\mathfrak{p}^{m}},\quad \mathfrak{J}\int_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2}d\tau_{\mathfrak{p}}^{m}=\mathfrak{R}\frac{d^{m}\bar{w}_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}}{d\mathfrak{p}^{m}},$$

$$\mathfrak{R}\int_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2}d\bar{\tau}_{\mathfrak{p}}^{m}=\mathfrak{J}\frac{d^{m}w_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}}{d\mathfrak{p}^{m}},\quad \mathfrak{J}\int_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2}d\bar{\tau}_{\mathfrak{p}}^{m}=\mathfrak{J}\frac{d^{m}\bar{w}_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}}{d\mathfrak{p}^{m}},$$

$$(\mathrm{III},\ \mathrm{III})\qquad \mathfrak{R}\int_{\mathfrak{p}_1}^{\mathfrak{p}_2}dw_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}=\mathfrak{R}\int_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2}dw_{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2},\quad \mathfrak{J}\int_{\mathfrak{p}_1}^{\mathfrak{p}_2}dw_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}=\mathfrak{R}\int_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2}d\bar{w}_{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2},$$

$$\mathfrak{R}\int_{\mathfrak{p}_1}^{\mathfrak{p}_2}d\bar{w}_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}=\mathfrak{J}\int_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2}dw_{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2},\quad \mathfrak{J}\int_{\mathfrak{p}_1}^{\mathfrak{p}_2}d\bar{w}_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}=\mathfrak{J}\int_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2}d\bar{w}_{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2}$$

(Vertauschung von Parameter und Argument).

Am Schluss möchte ich noch folgendes bemerken. Bisher hatten wir, wie der Leser wohl bemerkt hat, von keinem transzendenten Existenzsatz Gebrauch zu machen. Dies ist nicht verwunderlich, sondern eine Folge davon, dass wir vom Körper k ausgegangen sind. Es wäre anders, wenn man von der abstrakten Riemannschen Fläche ausgeht.

II. Sätze von Abel und Jacobi als Dualitätsatz.

3) Multiplikative Funktionen.

Wie üblich wird eine Funktion $\theta(\hat{\mathfrak{p}})$ auf $\mathfrak{R}$, das sich bei der Decktransformation S von $\mathfrak{R}/\mathfrak{r}$ multiplikativ verhält:

$$\theta(\hat{\mathfrak{p}})^{S}=\mu_S\cdot\theta(\hat{\mathfrak{p}})\qquad(|\mu_S|=1),$$

eine multiplikative Funktion mit dem Multiplikatorensystem (μ_S) genannt. Das Multiplikatorensystem bildet offenbar eine unitäre Darstellung ersten Grades von $\mathfrak{H}_p$. Nun bestimmt jede multiplikative Funktion $\theta(\hat{\mathfrak{p}})$ wegen der Unverzweigtheit von $\mathfrak{R}/\mathfrak{r}$ eindeutig einen 'reduzierten Divisor' θ des Grundkörpers k, und zwar den vom Grad 0:

$$n(\theta)=\frac{1}{2\pi i}\sum\nolimits_{\mathfrak{p}}\operatorname{Res}_{\mathfrak{p}}\frac{d\theta(\hat{\mathfrak{p}})}{\theta(\hat{\mathfrak{p}})}=0,$$

also ein Element von Δ_k. Umgekehrt kann jedes Element θ in Δ_k, als reduzierter Divisor der nach dem nächsten Absatz bis auf Konstanten eindeutig bestimmten multiplikativen Funktion aufgefasst werden :

$$\theta = \Pi \frac{\mathfrak{p}_h}{\mathfrak{q}_h} \rightarrow \theta(\hat{\mathfrak{p}}) = \Pi \theta_{\mathfrak{p}_h \mathfrak{q}_h}(\hat{\mathfrak{p}})$$

$$\left(\theta_{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}(\hat{\mathfrak{p}}) = \text{Exp.} \left\{ \int dw_{\mathfrak{p}\mathfrak{q}} \right\}\right).$$

4) Integralcharaktere.

Wir definieren für $\theta = \Pi \mathfrak{p}_h \mathfrak{q}_h^{-1}$ in Δ_k und S in $\mathfrak{H}_p$ den sog. Integralcharakter mit

$$\chi_S(\theta) = \Pi \frac{\chi_S(\mathfrak{p}_h)}{\chi_S(\mathfrak{q}_h)}.$$

$$\left(\chi_S(\mathfrak{p}) = \text{Exp.} \ \{-2\pi i \cdot \Re \int_{\mathfrak{o}}^{\mathfrak{p}} dw_\alpha\}, \ S \longleftrightarrow a\right).$$

Dann ist

$$\chi_S(\theta) = \Pi \ \text{Exp.} \ \{-2\pi i \cdot \Re \int_{\mathfrak{q}_h}^{\mathfrak{p}_h} dw_\alpha\} = \Pi \ \text{Exp.} \ \{\int_\alpha dw_{\mathfrak{p}_h \mathfrak{q}_h}\}$$

$$= \text{Multiplikator } \mu_S \text{ der } \theta(\hat{\mathfrak{p}}) \text{ von } \theta.$$

Also, wenn wir die Pontrjaginsche Schreibweise[5] benutzen,

$$P_k = (\Delta_k, \mathfrak{H}_p).$$

Dies ist der Inhalt des klassischen Abelschen Satzes. Nachträglich bestehen die folgenden Relationen :

$$|\chi_S(\theta)| = 1, \quad \chi_S(\theta \cdot A) = \chi_S(\theta) \cdot \chi_S(A), \quad \chi_{ST}(\theta) = \chi_S(\theta) \cdot \chi_T(\theta).$$

5) Topologisierung der $\boldsymbol{D}_k$.

Wir führen in Δ_k mit der Integralcharaktere die sog. 'schwache Topologie' ein, so wird Δ_k eine allgemein topologische Gruppe. Der Abelshe Satz lehrt, dass $\boldsymbol{D}_k$ eine topologische Gruppe ist, und zwar dass sie 'maximally almost periodic' im Sinne von Neumann[6] ist. $\boldsymbol{D}_k$ wird sogar eine kompakte Gruppe ; dies beweisen wir folgendermassen :

Jedes Element $\bar{\theta}$ in $\boldsymbol{D}_k$ besitzt mindestens einen speziellen Repräsentant der Form

$$\frac{\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \cdots\cdots \mathfrak{p}_p}{\mathfrak{o}^p}$$

Denn es gilt $\dim(\theta\cdot\mathfrak{o}^p)=1+\dim(\mathfrak{w}/\theta\cdot\mathfrak{o}^p)\geqq 1$. Also die eindeutig Zuordnung

$$(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_p)\to\left(\overline{\frac{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\ldots\ldots\mathfrak{p}_p}{\mathfrak{o}^p}}\right)$$

ist eine stetige Abbildung aus dem kompakten Raum $\Pi^p\mathfrak{r}$ auf die ganze Gruppe $\boldsymbol{D}_k$. Hiermit ist die Kompaktheit von $\boldsymbol{D}_k$ nachgewiesen.

6) Dualität zwischen $\boldsymbol{D}_k$ und $\mathfrak{H}_p$.

HAUPTSATZ. *Die so topologisierte Gruppe $\boldsymbol{D}_k$ und die Bettische Gruppe $\mathfrak{H}_p$ (mit diskreter Topologie) bilden ein Paar von orthogonalen topologischen Gruppen*[8] *mit folgender Multiplikationsregel:*

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{D}_k\ni\bar{\theta}\\ \mathfrak{H}_p\ni S\end{array}\right\}\quad \bar{\theta}S=S\bar{\theta}=\chi_S(\theta).$$

(Beweis) Wir führen nur den Beweis von $(\mathfrak{H}_p, \boldsymbol{D}_k)=1$. Wäre $S\epsilon(\mathfrak{H}_p, \boldsymbol{D}_k)$, dann würde insbesondere

$$\left(\frac{\bar{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{o}}\right)\cdot S=\chi_S(\mathfrak{p})=\text{Exp.}\left\{-2\pi i\cdot\Re\int_{\mathfrak{o}}^{\mathfrak{p}}dw_\alpha\right\}=1\quad(S\longleftrightarrow a)$$

für einen beweglichen Punkt $\mathfrak{p}$ sein. Also

$$\Re\int_{\mathfrak{o}}^{\mathfrak{p}}dw_\alpha=\text{Konst.}$$

und diese Konstant müsste gleich Null sein. Ist hierbei

$$a\sim\Pi a_h^{n_h}$$

und etwa $n_{2h-1}\neq 0$ oder $n_{2h}\neq 0$, dann hätten wir

$$\Re\int_{a_{2h}}dw_\alpha=n_{2h-1}\neq 0\quad\text{oder}\quad\Re\int_{a_{2h-1}}dw_\alpha=-n_{2h}\neq 0$$

entgegen dem obigen Resultate. Also muss

$$a\sim 0\quad\text{d.h.}\quad S=1\quad\text{sein,}\quad\text{w. z. z. w.}$$

7) Umkehrsatz von Jacobi.

Es sei $\boldsymbol{J}_p$ die toroidische Gruppe von Dimension $2p$; $\boldsymbol{J}_p$ kann als Charaktergruppe von freien Abelschen Gruppe mit $2p$ Erzeugenden also als Charaktergruppe von $\mathfrak{H}_p$ aufgefasst werden. Aus dem Hauptsatz folgt, dass

$\boldsymbol{J}_p$ und $\boldsymbol{D}_k$ isomorph sein müssen. Dieser Isomorphismus kann folgendermassen explizit gegeben werden:

Ist (χ_S) ein Punkt von $\boldsymbol{J}_p$, dann gibt es stets ein Element $\bar{\theta}$ von $\boldsymbol{D}_k$ derart dass

$$\chi_S(\theta)=\chi_S$$

für alle S aus $\mathfrak{H}_v$ gilt. Die Zuordnung $(\chi)\to\bar{\theta}$ ergibt den gesuchten Isomorphismus.

Nun enthält $\bar{\theta}$ mindestens einen Repräsentant der Form $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\ldots\ldots\mathfrak{p}_p/\mathfrak{o}^p$, womit eine Zuordnung

$$(\chi_S)\to\{\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \ldots\ldots,\ \mathfrak{p}_p\}$$

zwischen den Punkten auf der Mannigfaltigkeit $\boldsymbol{J}_p$ und den Systeme von p Punkten auf $\mathfrak{r}$ hergestellt wird. Dies ist der berühmte Umkehrsatz von Jacobi. Jene Zuordnung ist aber mehrdeutig dann und nur dann, wenn dim $(\mathfrak{w}/\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\ldots\ldots\mathfrak{p}_p)\geqq 1$, d.h. wenn es ein ganzes Differential $\mathfrak{w}$ gibt, das an Punkten $\mathfrak{p}_h$ $(h=1,\ \ldots\ldots p)$ verschwindet:

$$\mathfrak{w}=(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\ldots\ldots\mathfrak{p}_p)\ \ (\mathfrak{q}_1\ldots\ldots\mathfrak{q}_{p-2}),$$
$$\chi_S(\mathfrak{w})=\text{bestimmter Wert } \chi_S^0.$$

Nun ist

$$\chi_S=\chi_S^0:\chi_S\ (\mathfrak{q}_1\ldots\ldots\mathfrak{q}_{p-2})$$

sozusagen ein singulärer Punkt von $\boldsymbol{J}_p$ und die Gesamtheit aller singulären Punkten bildet das sog. singuläre Gebilde $\mathfrak{X}$. Das Gebilde $\mathfrak{X}$ ist ein kompaktes zusammenhängende Gebilde von Dimension $2p-4$ in der Mannigfaltigkeit $\boldsymbol{J}_p$.

8) Abelsche Funktionen.

Die Gesamtheit der symmetrischen Funktionen von $x\ (\mathfrak{p}_h)$ $(h=1,\ \ldots\ldots,\ p)$ für alle Elemente x aus k bilden einen Funktionenkörper mit der Dimension p auf Γ. Dies ist der bekannte Körper der "Abelschen Funktionen". Wie leicht ersichtlich, die Abelsche Funktionen genügen den algebraischen Additionssatz und zeigen die Periodizitätseigenschaft, wenn man zur universelle Überlagerungsgruppe von $\boldsymbol{J}_p$ übergeht.

Schlussbemerkungen.

Die Elemente in $\boldsymbol{D}_k$ mit endlichen Ordnungen bilden ihre charakteristische Untergruppe $\mathfrak{D}_k$, welche zur direkten Summe $2p$ additiver Gruppe der rationalen Zahlen mod. 1 isomorph ausfällt. Wir bezeichnen die komplettierte Gruppe von $\mathfrak{H}_p$ (als Decktransformationsgruppe von $\mathfrak{R}/\mathfrak{r}$) nach ihren Untergruppen mit endlichen Indizen als Umgebungssystem um 0 mit $\boldsymbol{H}_p$. $\boldsymbol{H}_p$ ist eine kompakte Gruppe, welche zur direkten Summe $2p$ additiver Gruppe der 'universellen Zahlen' isomorph ausfällt. Ferner sei L die unverzweigte maximale Abelsche Erweiterung von k, d.h. das Kompositzum aller unverzweigten Abelschen Körper über k. Die Galoisgruppe von L/k mit Krullschen Topologie ist dann zu $\boldsymbol{H}_p$ topologisch isomorph und es gilt der folgende *algebraische Dualitätssatz:*

Die kompakte Galoisgruppe $\boldsymbol{H}_p$ von L/k und die im Grundkörper k eindeutig bestimmte Divisorenklassengruppe $\mathfrak{D}_k$ (mit diskreter Topologie) bilden ein Paar von orthogonalen topologischen Gruppen mit folgender Multiplikationsregel:

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{H}_p \ni S \\ \mathfrak{D}_k \ni \bar{\theta}\end{array}\right\} \bar{\theta} S = S\bar{\theta} = \chi_S(\theta).$$

Diesen Satz und seine Verallgemeinerungen habe ich rein algebraisch beweisen, doch möge die Ausführung hiervon für eine andere Gelegenheit vorbehalten sein.

Literaturverzeichnis.

W. Weyl (1), Die Idee der Riemannschen Fläche (1923).

J. v. Neumann (1), Almost periodic functions in a group, Trans. Amer. Math. Soc. (1934).

H. Hasse (1), Theorie der Differentiale im algebraischen Funktionenkörper mit vollkommenem Konstantenkörper, J. reine u. angew. Math., 172 (1935).

A. Weil (1), Généralisation des functions abéliennes. J. Math. pures et appliquées-, 17 (1938).

A. Weil (2), Zur algebraischen Theorie der algebraischen Funktionen, J. reine u. angew. Math., 175 (1938).

L. Pontrjagin (1), Topological groups (1939).

Mathematisches Institut,
Universität zu Tokyo.

References.

1) A. Weil (1).

2) H. Weyl (1).

3) H. Hasse (1), A. Weil (2).

4) $2p-2=w_x-2n_x$; w_x bzw. n_x bedeuten die Verzweigungszahl bzw. Überdeckungszahl von $\mathfrak{r}$ als verzweigte Überlagerungsfläche auf der x-Kugel; sie sind also gleich $n(D_x)$ bzw. $n(\infty_x)$.

5) L. Pontrjagin (1), S. 136.

6) J. v. Neumann (1).

7) L. Pontrjagin (1), S. 147.