

L'UNIFORMISATION ET LA SÉPARABILITÉ DES ENSEMBLES PLANS II, APPLICATIONS AUX PROBLEMES DE L'UNIFORMISATION ET DE LA SÉPARABILITÉ

HIDEAKI WATANABE

(Received July 4, 1952)

Dans la note sous le même titre¹⁾ nous avons établi le tableau 1. Maintenant nous allons faire quelques applications de ce tableau. Nous emploierons les notations et les définitions de la note précédente.

1. Applications du tableau 1 aux ensembles plans uniformes. Soit U un ensemble plan uniforme, et posons

$$X = \gamma U, \quad Y = \gamma' U.$$

Par la représentation paramétrique d'ensembles (Voir [5]²⁾), on sait bien que :

$$U \in (A_n) \rightarrow X \text{ et } Y \in (A_n),$$

$$U \in (A_n^*) \rightarrow U, \quad X \text{ et } Y \in (B_n);$$

en particulier si U est une courbe (A_n) il est (B_n) .

Il est à remarquer que ces résultats s'obtiennent par le tableau 1. En effet, comme

$$(1) \quad X = \gamma U = \beta U, \quad Y = \gamma' U = \beta' U,$$

$$(2) \quad U = \downarrow U - (X + Y),$$

on peut estimer les classes de X et Y d'après la classe de U , et en suite réestimer la classe U même.

Un ensemble uniforme (B_1) est un ensemble uniforme (B_1^*) , on en obtient le tableau suivant :

U	$\overline{F'}$	F_σ^*	F_σ	B_1	A_n^*	A_n
X, Y	F_ρ	$B_{1,1}^*$	F_σ	B_1	B_n^*	A_n
U	$\overline{F'}$					

Tableau 2

En particulier nous avons le

COROLLAIRE 1. *Toute courbe (F_σ) est $(B_{1,1}^*)$.*

N. Lusin a étudié l'estimation des classes des ensembles U et Y en

1) Tôhoku Math. Journ., 4(1952), 38-48.

2) Pour les chiffres entre crochets, voir la table des travaux cités à la fin de ma note précédente.

donnant la classe de l'ensemble X ; et en donnant les classes des ensembles X et Y il a obtenu l'estimation de la classe de l'ensemble U et la réestimation des classes des ensembles X et Y (Voir [5]).

2. Application du tableau 1 aux ensembles d'unicité des ensembles plans. Soit E un ensemble plan donné. On dit, d'après N. Lusin ([6] p. 255), *l'ensemble d'unicité* de E l'ensemble de tous les points (x, y) de E tels que la droite P_x ne coupe E en aucune point distinct de (x, y) . Désignons cet ensemble par E_1 . Il est bien connu que $E_1 \in (C_n)$ si $E \in (B_n)$ et $E_1 \in (A_{n\rho})$ si $E \in (A_n)$, mais ce qui sont encore des conséquences faciles des égalités

$$(3) \quad E_1 = E - (\beta E + \beta' E) = (\delta E) \bullet (\delta' E)$$

et du tableau 1.

Si un ensemble E est (G) on a $E \subset \beta E$. Nous avons le tableau suivant :

E	G	F	F_σ^*	F_σ	B_n	A_n^*	A_n
E_1	0	G_δ		$F_{\sigma\rho}$	C_n		$A_{n\rho}$

Tableau 3

Il est bien connu que si un ensemble E est semi-uniforme et (B_1) , on a $E_1 \in (B_1)$ (Voir [6] p. 239). Ce résultat s'obtiendra de (3) et du remarque à la fin du § 1 de la partie I.

3. Applications du tableau 1 à l'uniformisation d'ensembles plans.

THÉORÈME 1. *Tout ensemble plan (F_σ) $[(F_\sigma^*)]$ peut être uniformisé par un ensemble $(F_{\sigma\rho})$ $[(G_\delta)]$.*

DÉMONSTRATION. Soit E un ensemble plan (F_σ) . Il existe une suite des ensembles $E_n \in (K)$ ($n = 1, 2, \dots$) tels que $E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$. Posons

$$(4) \quad U = \zeta E_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \{\zeta E_{n+1} - \downarrow(E_1 + \dots + E_n)\}.$$

Comme l'ensemble ζE_n est évidemment un uniformisateur de l'ensemble $E_n \in (K)$, on voit facilement que l'ensemble U est un uniformisateur de l'ensemble E . Or on a aisément

$$(5) \quad U = \downarrow E - \left[\beta' E_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \{\beta' E_{n+1} - \downarrow(E_1 + \dots + E_n)\} \right. \\ \left. + \gamma E_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \{\gamma E_{n+1} - \downarrow(E_1 + \dots + E_n)\} \right]$$

$$(6) \quad U = E - [\dots].$$

L'ensemble E étant (F_σ) on a $\downarrow E \in (F_\sigma)$, et pour l'ensemble $E_n \in (K)$ —

donc à fortiori $E_n \in (\bar{F})$ — on a $\beta'E_n \in (F_\sigma)$ et $\gamma E_n \in (F_\rho)$ d'après le tableau 1. Comme $\downarrow(E_1 + \dots + E_n) \in (F)$ puisque l'ensemble $E_1 + \dots + E_n \in (K)$, il en résulte que l'ensemble U est $(F_{\sigma\rho})$ d'après (5). En particulier si $E \in (F_\sigma^*)$ on a $U \in (G_\delta)$, car $\downarrow E \in (B_{1,1})$ d'après la définition de F_σ^* , c. q. f. d.

Nous ne pouvons décider l'exactitude de l'estimation $(F_{\sigma\rho})$ de l'uniformisateur. Nous remarquons qu'il existe un ensemble plan (F_σ) qui ne peut être uniformisé par ni F_σ par ni G_δ . Désignons, en effet, par R l'ensemble de tous les points $(r, 0)$ où $-1 < r < 0$ et r est rationnel. Il est évidemment (eF_σ) . Posons $E = R + S$ où S est l'ensemble (K) de M^{elle} S. Braun défini à la fin de la Partie I. Comme l'ensemble E est (F_σ) , il ne peut être uniformisé par ni F_σ par ni G_δ . L'ensemble U défini par (5) pour cet ensemble E , est $(F_{\sigma\rho})$ et $(CF_{\sigma\rho})$ à la fois.

Sur les théorèmes de M^{elle} S. Braun cités au début de l'introduction dans la partie I, nous faisons quelques remarques :

REMARQUE 1. Comme $\zeta E_n = (G_\delta)$ on obtient $U \in (G_{\delta\sigma})$ en estimant sa classe d'après (4). C'est le théorème B. 2.

REMARQUE 2. Si $E \in (F)$ on a $U \in (G_\delta)$ d'après (6). C'est le théorème B. 3.

THÉORÈME 2. *Tout ensemble plan (G) peut être uniformisé par un ensemble $(B_{1,1}^*)$.*

DÉMONSTRATION. Soit E un ensemble plan (G) . Il existe une suite des cercles fermés E_n ($n = 1, 2, \dots$) tels que $E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$. Par la méthode employée dans la démonstration du théorème précédent, on voit que l'ensemble U défini par (4) est un uniformisateur de l'ensemble E . Or, dans ce cas $\zeta E_n \in (F)$, donc on a $U \in (F_\sigma)$. D'autre part $\downarrow U = \downarrow E \in (G)$ et l'ensemble uniforme U est (F_σ) . Nous avons alors $U \in (B_{1,1}^*)$ d'après le tableau 2, ou $U \in (G_\delta)$ d'après (6), c. q. f. d.

4. Applications du tableau 1 aux séparations des ensembles plans.

THÉORÈME 3. *Soient M et N deux ensembles plans et uniformes tels que*

$$(7) \quad M \subset \gamma N, \quad \downarrow M = \downarrow N,$$

$\downarrow M \in (B_n) [(A_n), (F_\sigma), (G_\delta), (G), (F)]$ et que les deux ensembles M et N n'appartiennent pas à la classe $(B_n^) [(A_n), (F_{\sigma\rho}), (G_\delta), (F_\rho), (F)]$. Alors il n'existe pas toujours un ensemble plan $S \in (A_n) [(A_n), (F_\sigma), (F_\sigma), (G), (G)]$ tel que*

$$(8) \quad M \subset \delta S, \quad N \subset \delta' S.$$

DÉMONSTRATION. Soit M un ensemble plan uniforme et non- (B_n^*) tel que $\downarrow M \in (B_n)$. Désignons par M_k et M'_k les ensembles qui sont obtenus au moyen des déplacements de l'ensemble M aux directions positive et négative respectivement par ordonné $1/k$ ($k = 1, 2, \dots$). Chaque couple des ensembles

(M_k, M_{k+1}) et (M'_{k+1}, M'_k) satisfait aux conditions de la forme (7).

D'autre part, il existe un couple pour lequel il n'existe aucune ensemble plan $S \in (A_n)$ qui jouit de la condition de la forme (8). Supposons, en effet, qu'il existe un tel ensemble S pour chaque couple des ensembles. Et soient S_k et S'_k les ensembles qui correspondent respectivement aux couples (M_k, M_{k+1}) et (M'_{k+1}, M'_k) .

On a évidemment

$$(9) \quad M = (\downarrow M) \cdot \prod_{k=1}^{\infty} (\alpha' S_k) (\alpha S'_k),$$

$$(10) \quad M = (\downarrow M) \cdot \prod_{k=1}^{\infty} (\gamma' S_k) (\gamma S'_k),$$

$$(11) \quad M = \downarrow M - \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha S_k + \alpha'_k S'_k).$$

Comme $\alpha' S_k$ et $\alpha S'_k$ sont des ensembles (A_n) d'après le tableau 1. et comme $\downarrow M \in (B_n)$ par l'hypothèse, l'ensemble uniforme M appartient à (A_n^*) ; et il en résulte d'après le tableau 2 qu'il est un ensemble (B_n^*) , ce qui contredit l'hypothèse que $M \notin (B_n^*)$. Remarquons que l'on a $M \in (C_n)$ d'après (11) et il en résulte immédiatement, sans usage du tableau 2, que l'ensemble M appartient à (B_n) d'après (9) et (11).

La première partie du théorème est ainsi démontrée.

Les parties qui restent seront démontrées de la manière analogue. c. q. f. d.

Pour le problème L de N. Lusin cité dans l'introduction de la partie I³⁾ nous avons d'après ce théorème une réponse négative que voici :

COROLLAIRE 2. *Entre deux courbes données dont l'une est située au-dessus de l'autre et dont aucune n'appartient à la classe $(B_n) [(G_\delta), (F)]$, il n'existe pas toujours un ensemble plan $(A_n) [(F_\sigma), (G)]$ qui est coupé par toute droite parallèle à l'axe OY.*

Une démonstration du théorème suivant peut se déduire d'une façon analogue.

THÉORÈME 4. *Soient M et N des ensembles plans uniformes qui n'appartiennent à la classe $(B_n^*) [(A_n), (F_{\sigma\rho}), (G_\delta), (F), (F_\rho)]$ et tels que*

$$M \subset \gamma N, \quad \downarrow M = \downarrow N.$$

Il n'existe pas toujours un ensemble plan $S \in (A_n^) [(A_n), (F_\sigma), (F_\sigma^*), (\overline{F}), (G)]$ tel que*

$$M \subset \delta S, \quad N \subset \delta' S, \quad \downarrow S = \downarrow M.$$

THÉORÈME 5. *Il existe deux ensembles plans $M \in (G_\delta) [(G), (F_\sigma), (C_{n-1})$*

($n = 2, 3, \dots$)] et $N \in (C_1) [(\overline{F}), (G_\delta), (C_n) (n = 2, 3, \dots)]$ tels que

$$(12) \quad \downarrow M = \downarrow N = \downarrow \{(\gamma M) \cdot (\gamma' N)\} = \downarrow (y = 0)$$

3) H. Watanabe, loc. cit. 1).

et qu'il n'existe aucun ensemble $S \in (A_1) [(G) + (F), (F_\sigma), (A_n) (n = 2, 3, \dots)]$ tel que

$$(13) \quad \downarrow S = \downarrow (y = 0), \quad S \subset (\delta M)(\delta' N).$$

DÉMONSTRATION. Désignons par M l'ensemble $E^1 \in (G_\delta)$ donné dans 4, § 2 de la partie I, et posons $N = \gamma M$. On a

$$\begin{aligned} \downarrow M = \downarrow N = \downarrow \zeta M = \downarrow (y = 0), \\ N \in (C_1), \quad \zeta M \in (eA_{1\rho}). \end{aligned}$$

Soient M_k et M'_k les ensembles obtenus au moyen des déplacements de l'ensemble M respectivement à la direction positive et à la direction négative par ordonnées $1/k$ ($k = 1, 2, \dots$).

De même deux ensembles N_k et N'_k seront définis à partir de l'ensemble N .

Pour les couples M_{k+1} , N_k et M'_k , N'_{k+1} dont chacun est constitué de deux ensembles (G_δ) et (C_1) , la condition de la forme (12) est satisfaite, au contraire, pour au moins une valeur des indices k , il n'existe aucun ensemble $S \in (A_1)$ qui satisfait à la condition de la forme (13). Si, en effet, il existait un tel ensemble S pour tout k , le raisonnement employé dans la démonstration du théorème 4 déduirait que l'ensemble $\zeta M \in (eA_{1\rho})$ appartient à la classe (B_1) , ce qui est une contradiction.

Les autres parties du théorème peuvent se démontrer d'après le raisonnement du § 2 de la partie I, c. q. f. d.

La méthode, qui vient d'être employée du déplacement d'un ensemble est aussi utile aux problèmes de séparations de deux ensembles uniformes M et N tels que $N \subset \gamma M$ et $\downarrow M = \downarrow N$ au moyen de deux ensembles S et T tels que $M \subset S$, $N \subset T$, $T \subset \gamma S$ et $\downarrow S = \downarrow T = \downarrow M$. Par exemple, nous avons facilement :

THÉORÈME 6. *Pour deux courbes M et $N \subset \gamma M$ qui n'appartiennent à la classe $(F^{2\xi}) [(G^{2\xi+1}), (B_n)]$ ($0 \leq \xi < \Omega$), il n'existe pas toujours deux ensembles S et T tels que*

$$M \subset S, \quad N \subset T, \quad T \subset \gamma S$$

$$\text{et} \quad S, T \in (F^{2\xi}) [(G^{2\xi+1}), (A_n)].$$

Au contraire nous pourrons le suivant

THÉORÈME 7. *Pour deux ensembles plans $M \in (\tilde{F}\sigma) [(\tilde{B}_1)]$ et semi-uniforme] et $N \in (\tilde{F}\sigma) [(\tilde{B}_1)]$ et semi-uniforme] tels que*

$$(14) \quad \downarrow \{(\gamma M) \cdot (\gamma' N)\} = (\downarrow M) \cdot (\downarrow N),$$

il existe une courbe $L \in (B_1)$ telle que

$$M \subset \gamma' L, \quad N \subset \gamma L.$$

LEMME. *Pour deux ensembles plans uniformes U et V tels que*

$$V \cdot \downarrow U \subset \gamma U.$$

il existe une courbe $L \in (B_1)$ telle que

$$U \subset \gamma' L, \quad V \subset \gamma L.$$

DÉMONSTRATION DU LEMME. Posons $U_1 = U \cdot \downarrow V$, $V_1 = V \cdot \downarrow U$, $U_2 = U - U_1$, $V_2 = V - V_1$ et $W = (y = 0) - \downarrow (U + V)$, et désignons par $U'_2 [V'_2]$ l'ensemble obtenu en déplaçant $U_2 [V_2]$ parallèlement à l'axe OY par l'ordonnée $1 [-1]$. Les ensembles U_1 , V_1 , W , U'_2 et V'_2 sont uniformes et appartiennent à la classe (B_1) . Pour les ensembles U_1 et V_1 , pour lesquels on a $V_1 \subset \gamma U_1$ et $\downarrow U_1 = \downarrow V_1$, il existe un ensemble uniforme $L_1 \in (B_1)$ tel que $U_1 \subset \gamma' L_1$, $V_1 \subset \gamma L_1$ et $\downarrow L_1 = \downarrow U_1 = \downarrow V_1$. En effet, chacun des deux ensembles U_1 et V_1 est situé sur une courbe (B_1) ; nous les désignons par U_0 et V_0 et ses équations par $y = f(x)$ et $y = g(x)$. Désignons par L_0 la courbe (B_1) à l'équation $y = \frac{1}{2} \{f(x) + g(x)\}$. Alors il suffit de poser $L_1 = L_0 \cdot \downarrow U_1$.

Posons maintenant $L = L_1 + U'_2 + V'_2 + W$, et le lemme sera démontré facilement.

REMARQUE 3. Dans ce lemme on peut remplacer $\delta [\delta']$ au lieu de $\gamma [\gamma']$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 7. Si deux points (x, y_1) et (x, y_2) sont contenus dans les ensembles uniformes ζM et $\zeta' N$ respectivement, on verra $y_1 < y_2$ ou bien $y_1 = y_2$. Et dans le dernier cas le point $(x, y_1) = (x, y_2)$ n'appartient ni à l'ensemble M ni à l'ensemble N .

Nous montrons d'abord que l'inégalité $y_1 > y_2$ est impossible. Supposons, en effet, que $y_1 > y_2$. Les points de l'ensemble γM qui sont situés sur la droite P_x , ils ont les ordonnées $\geq y_1$, car le point (x, y_1) est supérieur ζ à l'ensemble M . De même les points de l'ensemble $\gamma' N$ qui sont situés sur la droite P_x , ils ont les ordonnées $\leq y_2$. Donc les deux ensembles γM et $\gamma' N$ n'ont pas de point commun sur la droite P_x , comme $y_1 > y_2$. Il en résulte que

$$P_x \in \downarrow \{(\gamma M) \cdot (\gamma' N)\}.$$

D'autre part, comme $(x, y_1) \in \zeta M$ et $(x, y_2) \in \zeta' N$, chacun des deux ensembles M et N contient un point d'abscisse x . On a donc $P_x \in \downarrow M$ et $P_x \in \downarrow N$ ou $P_x \in (\downarrow M) \cdot (\downarrow N)$, contrairement à la condition (14). On sait donc $y_1 \leq y_2$.

Dans le cas $y_1 = y_2$ le point $(x, y_1) = (x, y_2)$ n'appartient ni à l'ensemble M ni à l'ensemble N . Si, en effet, il appartenait à l'ensemble M , il étant supérieur η à M , les points de l'ensemble γM qui sont situés sur la droite P_x auraient les ordonnées $> y_1$. D'autre part les points de l'ensemble $\gamma' N$ qui sont situés sur la droite P_x ont les ordonnées $\leq y_1$, comme le point $(x, y_1) = (x, y_2)$ est inférieur ζ à N . Par conséquent on a

$$P_x \in \downarrow \{(\gamma M) \cdot (\gamma' N)\}$$

contrairement à la condition (14). On a donc

$$(x, y_1) = (x, y_2) \in M + N.$$

Les deux ensembles uniformes ζM et $\zeta' N$ de cette nature sont $(F_{\sigma\delta})$

par le tableau 1 comme M et N sont (F_σ) . Par le même raisonnement que celui de la démonstration du lemme on voit qu'il existe une courbe L qui est (B_1) et telle que :

i) si $(x, y_1) \in \zeta M$, $(x, y_0) \in L$ et $(x, y_2) \in \zeta' N$, on a $y_1 < y_0 < y_2$ ou bien $y_1 = y_0 = y_2$, dans le dernier cas le point $(x, y_1) = (x, y_0) = (x, y_2)$ n'appartient ni à M ni à N ;

ii) si $(x, y_1) \in \zeta M$, $(x, y_0) \in L$ et $x \in \text{Proj } \zeta' N$, on a $y_1 < y_0$;

iii) si $x \in \text{Proj } \zeta M$, $(x, y_0) \in L$ et $(x, y_2) \in \zeta' N$, on a $y_0 < y_2$.

Nous montrerons que cette courbe L est une cherchée. Pour tout point $(x, m) \in M$, il existe un seul point situé sur la courbe L et d'abscisse x , soit ce point (x, y_0) . Comme $M \in (\sim)$, il existe un $(x, y_1) \in \zeta M$ tel que $m < y_1$ ou bien $m = y_1$.

Dans le cas $m < y_1$, en vertu de i) et de ii) on a $y_1 \leq y_0$ s'il existe ou non un point d'abscisse x dans l'ensemble $\zeta' N$. On obtient $m < y_0$ dans ce cas.

Dans le cas $m = y_1$, s'il existait un point (x, y_2) dans l'ensemble $\zeta' N$, et si $y_1 = y_0 = y_2$, alors par la propriété i) le point (x, y_1) n'appartiendrait à l'ensemble M , ainsi que le point (x, m) d'après $m = y_1$. C'est évidemment une contradiction. Donc par les propriétés i) et ii) on a $y_1 < y_0$ ou $m < y_0$. Par conséquent on a facilement

$$M \subset \gamma' L.$$

De même on obtient $N \subset \gamma L$. La première partie du théorème est ainsi démontrée.

Dans le cas où $M \in (\widetilde{B}_1)$ et $N \in (\widetilde{B}_1)$ qui sont semi-uniformes, le même raisonnement s'applique, c. q. f. d.

En terminant, j'adresse mes vifs remerciements à M. T. Tsuchikura qui, pendant la rédaction de ce travail, m'a donné des précieux conseils.