SUR LES FONCTIONS QUI OPÈRENT SUR L'ANNEAU DE DIRICHLET $D(G)$

SATORU IGARI

(Received March 17, 1965)

1. On appelle contraction normale du plan complexe toute fonction T qui diminue la distance et conserve l'origine, c'est à dire $|T(z)-T(z')|\leqslant|z-z'|$ quels que soient les nombres complexes z, z' et $T(0)=0$.

Soit G un groupe abélien localement compact et soit ds la mesure de Haar sur G. On appelle, d'après Beurling-Deny [1], espace de Dirichlet spécial relativement à G un espace hilbertien complexe $D=D(G)$ dont les éléments sont des fonctions à valeurs complexes localement sommables, les quatre axiomes suivants étant vérifiés:

a. $\| u_n \| \to 0$ entraîne $\int_K | u_n(x) | \, dx \to 0$ pour tout compact $K \subset G$.

b. $C \cap D$ est dense dans C et dans D.

c. Si u est un élément de D et si T est une contraction normale, alors $Tu \in D$ et $\| Tu \| \leqslant \| u \|$.

d. Si u est un élément de D et s un point de G, alors la translatée de u par s est un élément $U_s u$ de D, $\| U_s u \| = \| u \|$ et $U_s u$ est une fonction continue de s.

Dans cette définition C est l'espace des fonctions continues sur G, á valeurs complexes et à support compact. On désigne par $\| u \|$ la norme de l'élèment u de D.

Suivant un théorème de Beurling-Deny on a : D est un espace de Dirichlet sur le groupe G abélien localement compact, si et seulement si il existe une fonction λ définie-négative réelle sur le groupe dual $\widehat{G}$ de G, dont l'inverse $1/\lambda$ est sommable sur tout compact de $\widehat{G}$ et telle que, pour tout élément $u \in C \cap D$, on ait

$$\| u \| = \left(\int_{\hat{G}} | \hat{u}(\hat{x}) |^2 \lambda(\hat{x}) \, d\hat{x} \right)^{\frac{1}{2}}$$

On appelle anneau de Dirichlet un espace de Dirichlet D qui satisfait à

$$\| uv \| \leqslant c \| u \| \| v \|$$

quels que soient les éléments u, v de D, c étant une constante indépendante de u et v.

Sous ces conditions on peut facilement établir que

$$\| u \|_\infty \leqslant c \| u \| .$$

Donc on peut supposer que toute fonction d'un anneau de Dirichlet est continue.

Nous rappelons le théorème des condensateurs de Beurling-Deny : soient ω_0 et ω_1 deux ouverts de G, d'adhérences disjointes, ω_1 étant relativement compact. L'ensemble

$$E = \{u \in D : \Re u \geqslant 1 \text{ sur } \omega_1,\ \Re u \leqslant 0 \text{ sur } \omega_0\}$$

est convexe, fermé non-vide. Donc il existe un élément unique u de E dont la norme soit minimum et en considérant la contraction normale de la projection du plan complexe sur le segment $(0, 1)$, on a $0 \leqslant u \leqslant 1$ dans G.

2. THEOREM. *Soit G un groupe abélien compact qui n'est pas totalement discontinu et soit D un anneau de Dirichlet sur G et soit φ une fonction sur le plan complexe à valeurs complexes. Alors pour que φ opère sur D, il faut et il suffit que φ satisfasse à la condition de Lipschitz sur tout ensemble compact du plan complexe.*

LEMME 1. *Soit λ la fonction définie-négative associée à l'anneau de Dirichlet du théorème. Pour chaque entier N assez grand, il existe un élément $\hat{x}$ de $\hat{G}$ tel que*

$$8^N \leqslant \lambda(\hat{x}) \leqslant 8^{N+1} .$$

DÉMONSTRATION. Soit $\hat{y}$ un élément d'ordre infini de $\hat{G}$ et supposons que

$$\lambda(0) < 8^N \quad \text{et} \quad \lambda(\hat{y}) \leqslant 8^N .$$

On pose

$$\Gamma = \{n\hat{y} : \lambda(n\hat{y}) \leqslant 8^N ,\quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\} .$$

Or on a, comme une propriété bien connue des fonctions définies-négatives,

$$\lambda(\hat{x}-\hat{y}) \leqslant 4\lambda(\hat{x}) + 4\lambda(\hat{y}).$$

Donc s'il n'existe pas d'élément dans Γ satisfaisant à notre exigence, alors Γ est un sous-groupe infini de $\hat{G}$. Soit H l'annihilateur de Γ, alors Γ est isomorphe et homéomorphe au dual de G/H. Si f est la fonction caractéristique d'un ensemble ouvert de G/H de mesure plus petite que $1/c^2 8^N$ et si on prolonge f commodément sur G, alors:

$$1 \leqslant c\|f\| = c\left(\int_{\hat{G}} |\hat{f}(\hat{x})|^2 \lambda(\hat{x})\, d\hat{x}\right)^{\frac{1}{2}} = c\left(\int_{\Gamma} |\hat{f}(\gamma)|^2 \lambda(\gamma)\, d\gamma\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant c\, 8^{\frac{N}{2}}\left(\int_{\Gamma} |\hat{f}(\gamma)|^2\, d\gamma\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{c\,8^{N/2}}{c\,8^{N/2}} = 1,$$

ce qui est absurde.

Soit $n\hat{y}$ $(n=-1,2,-2,3,-3,\cdots)$ le premier élément de Γ tel que $\lambda(n\hat{y}) > 8^N$. On suppose que $n \geqslant 2$. Alors on a

$$8^N < \lambda(n\hat{y}) \leqslant 4\lambda((n-1)\hat{y}) + 4\lambda(-\hat{y}) \leqslant 8^{N+1}.$$

LEMME 2. *Soit* $(x, \hat{y})$ *un caractère de* G. *Si l'on pose*

$$\omega = \{x : \Re(x, \hat{y}) > 1/3\},$$

alors $$\operatorname{mes}(\omega) \geqslant 1/8.$$

DÉMONSTATION.

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{2} \leqslant \int_G \left|\frac{1}{3} + \Re(x,\hat{y})\right|^2 dx = \left(\int_\omega + \int_{\complement\omega}\right)\left|\frac{1}{3} + \Re(x,\hat{y})\right|^2 dx$$

$$\leqslant \left(\frac{4}{3}\right)^2 \operatorname{mes}(\omega) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \operatorname{mes}(\complement\omega) = \frac{4}{9} + \frac{12}{9}\operatorname{mes}(\omega),$$

d'où le lemme.

LEMME 3. *Pour chaque nombre positif a assez grand, il existe deux ouverts* ω_0, ω_1 *de* G *tels que la fonction* θ *de norme minimum dans l'ensemble*

$$E = \{u : \Re u \geqslant 1 \ \text{sur}\ \omega_1,\ \Re u \leqslant 0\ \text{sur}\ \omega_0\}$$

satisfait à

$$a \leqslant \| \theta \| \leqslant 24\sqrt{3}\, a\,.$$

DÉMONSTRATION. D'après le lemme 1, pour a assez grand il existe un élément $\hat{y}$ de $\widehat{G}$ tel que

$$24 a^2 \leqslant \lambda(\hat{y}) \leqslant 8\cdot 24 a^2\,.$$

On pose

$$\omega_1 = \{x : \Re e\,(x, \hat{y}) > 1/3\} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \{x : \Re e\,(x, \hat{y}) < 0\}\,.$$

Comme $3(x, \hat{y}) \in E$, on a

$$\| \theta \| \leqslant \| 3(x, \hat{y}) \| \leqslant 3\{\lambda(\hat{y})\}^{\frac{1}{2}} \leqslant 3\sqrt{8}\sqrt{24}\, a = 24\sqrt{3}\, a\,.$$

D'autre part, comme θ est à valeurs réelles et $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, on a

$$\Re e \int_G \theta(x)\overline{(x, \hat{y})}\, dx = \int_G \theta(x)\, \Re e\,(x, \hat{y})\, dx \geqslant \int_{\omega_1} \frac{1}{3}\, dx = \frac{1}{3}\, \mathrm{mes}(\omega_1) \geqslant \frac{1}{24}$$

dès que $\mathrm{mes}(\omega_1) \geqslant 1/8$. Donc

$$\| \theta \| = \Big(\int_{\hat{G}} |\hat{\theta}(\hat{y})|^2 \lambda(\hat{y})\, d\hat{y}\Big)^{\frac{1}{2}} \geqslant \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{24}} a = a\,,$$

ce qui démontre notre lemme.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. Démontrons la nécessité de la condition : notre démonstration s'inspire de [2].

Soient $V_1, V_2, \cdots$ des ouverts non-vides de G tels que l'adhérence de V_k est disjointe de l'adhérence de $\bigcup_{l \neq k} V_l$. Alors il existe des fonctions ξ_k de D telles que $\xi_k = 1$ sur V_k et $\xi_k = 0$ sur $V_l (l \neq k)$.

Notre démonstration se fera en quatre parties:

(1) "Pour chaque z complexe, il existe deux constantes δ_z, M_z et un ouvert V_z tels que si u est à support dans V_z et $\| u \| \leqslant \delta_z$, alors $\| \varphi(z+u) \| \leqslant M_z$".

Supposons au contraire que cet énoncé ne soit pas vrai. Alors il existe une suite $\{u_k\}$ de D telle que

$$\text{support de } u_k \subset V_k,\ \| u_k \| \leqslant 1/k^2 \ \text{et} \ \| \varphi(z+u_k) \| \geqslant k \| \xi_k \|\,.$$

Comme $\|\Sigma u_k\| \leqslant \Sigma \|u_k\| \leqslant \Sigma 1/k^2$, $u = \Sigma u_k$ appartient à D, donc $\|\varphi(z+u)\|$ est finie. En notant que les supports de u_k sont disjoints, on voit que

$$\xi_k [\varphi(z+u) - \varphi(z)] = \varphi(z+u_k) - \varphi(z) .$$

Donc on a

$$\begin{aligned} \|\varphi(z+u_k)\| &\leqslant \|\xi_k\varphi(z+u)\| + \|\xi_k\|(|\varphi(z)| + \|1\|) \\ &\leqslant \|\xi_k\| (c\|\varphi(z+u)\| + |\varphi(z)| + \|1\|) . \end{aligned}$$

ce qui est contraire à $\|\varphi(z+u_k)\| \geqslant k\|\xi_k\|$.

(2) "Pour chaque z complexe, il existe deux constantes δ'_z, M'_z telles que si $\|u\| \leqslant \delta'_z$, alors $\|\varphi(z+u)\| \leqslant M'_z$".

Soient U, W deux ouverts de G tels que $\overline{W} \subset U \subset \overline{U} \subset V$. Alors il existe des translatés finis de $W, W_1, \cdots, W_n$ dont la réunion couvre G. Soient $U_1, \cdots, U_n$ et $V_1, \cdots, V_n$ les translatés correspondants et soient α_k et β_k des fonctions de D non négatives telles que $\alpha_k=1$ sur U_k, $\alpha_k=0$ hors de V_k et $\beta_k=1$ sur W_k, $\beta_k=0$ hors de U_k. Si l'on pose

$$\psi_k = \frac{\beta_k}{\beta_1 + \cdots + \beta_n},$$

alors $\Sigma\psi_k = 1$ et comme $\Sigma\beta_k > 0$ sur G, ψ_k appartient à D. On pose

$$\delta'_z = \inf_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{\delta_z}{c\|\alpha_k\|}, \quad M'_z = c\, M_z \sum_{k=1}^{n} \|\psi_k\|$$

avec les constantes δ_z et M_z de l'énoncé (1).

Si $\|u\| \leqslant \delta'_z$, alors $\alpha_k u$ est à support dans V_k et $\|\alpha_k u\| \leqslant \delta_z$, donc d'après (1) et l'invariance de la norme par translation, on a $\|\varphi(\alpha_k u+z)\| \leqslant M_z$. D'autre part

$$\psi_k\varphi(z+u) = \psi_k\varphi(z+\alpha_k u) ,$$

d'où l'on a

$$\begin{aligned} \|\varphi(z+u)\| = \ & \Sigma\psi_k\varphi(z+u)\| \leqslant \Sigma\|\psi_k\varphi(z+\alpha_k u)\| \\ &\leqslant c\Sigma\|\psi_k\|\, \|\varphi(z+\alpha_k u)\| \leqslant M'_z . \end{aligned}$$

De l'énoncé (2), on a facilement.

(3) "Si $\|u\| \leqslant \frac{\delta'_z}{2}$ et $|z'| \leqslant \frac{\delta'_z}{2\|1\|}$, alors $\|\varphi(z+z'+u)-\varphi(z+z')\| \leqslant 2M'_z$".

(4) "Pour chaque z complexe, φ satisfait à la condition de Lipschitz dans un voisinage de z".

Supposons que $|z'| \leqslant \frac{\delta'_z}{2\|1\|}$ et $|z'-z''|$ est suffisamment petite, alors d'après le lemme 3, il existe une fonction θ telle que $\delta'_z/48\sqrt{3} \leqslant \|(z''-z')\theta\| \leqslant \delta'_z/2$. Par conséquent en vertu de (3) et de la propriété de θ, on a

$$
\begin{aligned}
2M'_z &\geqslant \|\varphi(z+z'+(z''-z')\theta) - \varphi(z+z')\| \\
&\geqslant |\varphi(z+z'') - \varphi(z+z')|\,\|\theta\| \\
&\geqslant \frac{\delta'_z}{48\sqrt{3}} \frac{|\varphi(z+z'')-\varphi(z+z')|}{|z'-z''|}
\end{aligned}
$$

ce qui démontre notre assertion.

Donc φ satisfait à la condition de Lipschitz dans tout ensemble compact.

RÉFÉRENCES

[1] A. BEURLING et J. DENY, Dirichlet spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 45 (1959), pp. 208–215.

[2] S. IGARI, Sur les fonctions qui opèrent sur l'espace $\hat{A}^2$, Annales de l'Institut Fourier, à paraître.

UNIVERSITÉ DE PARIS ET UNIVERSITÉ DE TÔHOKU.