Tôhoku Math. Journ.
24 (1972), 473-486.

ÜBER DIE APPROXIMATIONSORDNUNG BEI KUGELFUNKTIONEN UND ALGEBRAISCHEN POLYNOMEN

SIEGFRIED PAWELKE

(Received Dec. 23, 1971)

1. **Einleitung.** Für die Approximation stetiger, 2π-periodischer Funktionen auf der reellen Achse durch trigonometrische Polynome wurde ein direkter Satz von D. Jackson 1911 [8] und die Umkehrung von S. N. Bernstein 1912 [1] bewiesen und die Ergebnisse von A. Zygmund [25] 1945 verallgemeinert. 1949 stellte M. Zamansky [25] eine Beziehung zwischen der Approximationsordnung und dem Wachstum bezüglich n der Ableitungen der Approximationspolynome her; auf die Approximationsordnung für die Ableitungen der Funktion schloß S. B. Stečkin 1951. Die Umkehrung des Ergebnisses von M. Zamansky bewies G. Sunouchi 1968 [21, 22], womit die Äquivalenz aller Aussagen gezeigt ist.

Die Übertragung der Ergebnisse auf Approximationsoperatoren in Banachräumen stammt von K. Scherer und P. L. Butzer [3, 4], wobei gewisse Voraussetzungen an die Operatorfolge (eine verallgemeinerte Bernsteinsche Ungleichung und eine sogenannte Jacksonsche Ungleichung) gestellt werden. An die Stelle der strukturellen Eigenschaften der Funktion, die durch das Verhalten des Stetigkeitsmoduls der Funktion charakterisiert werden, treten in allgemeinen Banachräumen Eigenschaften des von J. Peetre [17] eingeführten K-Funktionals.

In dieser Arbeit wird die Approximation von Funktionen, die auf der Einheitskugel S^k im R^k definiert sind, durch Linearkombinationen von Kugelfunktionen untersucht. Es wird für diesen Fall eine Bernstein-Ungleichung und die Jackson-Ungleichung bewiesen, wenn man die Ableitung durch den Laplace-Operator auf S^k ersetzt. Damit ist der oben zitierte allgemeine Satz von Butzer-Scherer anwendbar. Weiter kann man hier an Stelle des K-Funktionals einen verallgemeinerten Stetigkeitsmodul setzen. Anschließend wird der Spezialfall der zonalen Funktionen und ihre Approximation durch algebraische Polynome untersucht.

2. **Bezeichnungen und elementare Eigenschaften.** Es sei S^k die Oberfläche der Einheitskugel im k-dimensionalen euklidischen Raum R^k; x, y sind Punkte auf S^k und (x, y) ihr euklidisches Skalarprodukt. Mit $C(S^k)$ bezeichnet man den Banachraum der auf S^k definierten stetigen

Funktionen mit der Norm

$$\| f \|_C = \max_{x \in S^k} | f(x) | ,$$

$L^p(S^k)$, $1 \leqq p < \infty$, ist der Banachraum der auf S^k definierten und dort bezüglich des Oberflächenelements ds zur p-ten Potenz integrierbaren Funktionen mit der Norm

$$\| f \|_p = \left\{ \frac{1}{\Omega_k} \int_{S^k} | f(x) |^p \, ds(x) \right\}^{1/p}$$

wobei Ω_k die Oberfläche von S^k ist. Mit X wird immer einer der Räume $C(S^k)$ oder $L^p(S^k)$ bezeichnet.

Banachunterräume dieser Räume sind die zonalen Funktionen d.h. Funktionen, die invariant sind gegenüber Drehungen um eine Achse durch einen festgewählten Nordpol auf S^k. Es besteht ein Isomorphismus zwischen den zonalen Funktionen und den Funktionen $f(\theta)$ der einen Veränderlichen θ mit $0 \leqq \theta \leqq \pi$. Der Unterraum der stetigen zonalen Funktionen wird mit C_z bezeichnet mit der Norm

$$\| f \|_{C_z} = \max_{0 \leqq \theta \leqq \pi} | f(\theta) | . \tag{2.1}$$

Den Unterraum der zonalen Funktionen in L^p bezeichnen wir mit L^p_λ mit der Norm

$$\| f \|_{p,\lambda} = \left\{ \frac{\Omega_{k-1}}{\Omega_k} \int_0^\pi | f(\theta) |^p (\sin \theta)^{2\lambda} \, d\theta \right\}^{1/p} \qquad (2\lambda = k - 2) . \tag{2.2}$$

Mit dieser Norm ist der erwähnte Isomorphismus isometrisch. Mit Δ wird der Laplace-Beltrami-Operator auf der Kugel S^k bezeichnet (s. [6, 14]). $Y_n(x)$ ist eine Kugelfunktion vom Grade n.

$$\{ Y_n^m(x);\ m = 1, 2, \cdots, H(n, k) \}$$

ist die Menge der $H(n, k)$ linear unabhängigen Kugelfunktionen vom Grade n. Es ist

$$H(n, k) = (2n + k - 2) \frac{(n + k - 3)\,!}{n\,!\,(k - 2)\,!} .$$

$P_n(x)$ ist ein Polynom der Form

$$P_n(x) = \sum_{l=0}^{n} \sum_{m=1}^{H(l,k)} a_{lm} Y_l^m(x)$$

und $\mathscr{P}_n$ der lineare Raum aller Polynome $P_n(x)$ vom Grade $\leqq n$ (s. [6, 14]). Jeder Funktion $f \in X$ kann man eine Entwicklung nach Kugelfunktionen zuordnen, die sogenannte Laplace-Reihe von f:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(f;\, x)\ , \tag{2.3}$$

wobei $Y_n(f; x)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ gegeben ist durch

$$Y_n(f;\, x) = \frac{\Gamma(\lambda)(n+\lambda)}{2\pi^{\lambda+1}} \int_{S^k} P_n^{\lambda}[(x,\, y)]\, f(y) ds(y)\ , \tag{2.4}$$

wobei $P_n^{\lambda}(t)$ die Gegenbauer-Polynome sind, die durch Orthonormalisierung der Funktionen $\{1, t, t^2, \cdots, t^n, \cdots\}$ auf $[-1, 1]$ bzgl. der Gewichtsfunktionen $(1-t^2)^{\lambda-1/2}$ entstehen [14]. Die Cesaro-Mittel der Ordnung r der Reihe (2.3) sind definiert durch

$$\sigma_n^r(f;\, x) = (A_n^r)^{-1} \sum_{m=0}^{n} A_{n-m}^r Y_m(f;\, x) \tag{2.5}$$

mit $A_n^r = \binom{n+r}{n}$.

Die Polynome bester Approximation P_n^* der Funktion f sind definiert durch

$$E_n(X, f) = \| f - P_n^* \|_X = \inf_{P_n \in \mathscr{P}_n} \| f - P_n \|_X\ .$$

Die Existenz der Polynome P_n^* ist gesichert, da $\mathscr{P}_n$ endlichdimensional ist. Wie der Satz von Mairhuber (s. [13]) zeigt, sind sie im Falle $C(S^k)$ $(k \geqq 3)$ nicht eindeutig. Eindeutigkeit ist dagegen im Falle $L^p(S^k)$, $1 < p < \infty$, gegeben [13], da $L^p(S^k)$, für $1 < p < \infty$ strikt konvex ist.

Wir wollen nun den Definitionsbereich des Operators Δ wie folgt angeben. Für jede Kugelfunktion $Y_n(x)$ gilt

$$\Delta Y_n(x) = -n(n+2\lambda) Y_n(x)\ . \tag{2.6}$$

Man sagt nun, $f \in X$ ist im Definitionsbereich des Operators Δ enthalten ($f \in D(\Delta)$ und $\Delta f = g$), falls eine Funktion $g \in X$ existiert, so daß gilt $-n(n+2\lambda)\ Y_n(f;\, x) = Y_n(g;\, x)$. Man kann leicht zeigen, daß Δ in X abgeschlossen ist und $D(\Delta)$ ein Banachraum ist unter der Graphennorm $\| f \|_D = \| f \|_X + \| \Delta f \|_X$. Mit Δ^r wird die r-te Potenz des Operators Δ bezeichnet.

3. Die Ungleichungen von Jackson und Bernstein. Als erstes definieren wir die verallgemeinerte Translation $T_h f$ einer Funktion $f \in X$. Sie wird auch als das sphärische Mittel von f bezeichnet und ist gegeben durch

$$(T_h f)(x) = \frac{1}{\Omega_{k-1}(\sin h)^{2\lambda}} \int_{(x,y)=\cos h} f(y) dt(y) \qquad (0 < h \leqq \pi)\ , \tag{3.1}$$

wobei dt das $(k-2)$-dimensionale Oberflächenelement der Fläche $(x, y) = \cos h$ auf S^k ist. Die Integration wird auf dem Rand der Kugelkappe

$D(x, h)$ mit dem Mittelpunkt x ausgeführt, wobei $D(x, h)$ gegeben ist durch $D(x, h) = \{y;\ y \in S^k,\ (x, h) \geqq \cos h\}$. Eigenschaften von $T_h f$ sind (s. [15])

$$Y_n(T_h f;\ x) = \frac{P_n^\lambda(\cos h)}{P_n^\lambda(1)} Y_n(f;\ x) \tag{3.2}$$

$$\| T_h f \|_X \leqq \| f \|_X \qquad (h > 0,\ f \in X) \tag{3.3}$$

$$\lim_{h \to 0} \| T_h f - f \|_X = 0 \qquad (f \in X)\ . \tag{3.4}$$

Man definiert einen verallgemeinerten Stetigkeitsmodul ω von f durch

$$\omega(f;\ h) = \sup_{0<t\leqq h} \| T_t f - f \|_X\ . \tag{3.5}$$

Benutzt man diese Verallgemeinerung des Stetigkeitsmoduls, dann gilt folgender Satz vom Jacksonschen Typ.

SATZ 3.1. *Zu jeder Funktion* $f \in X$ *existiert ein Polynom* $P_n \in \mathscr{P}_n$, *so daß gilt*

$$\| f - P_n \|_X \leqq M\omega\left(f;\ \frac{1}{n}\right) \qquad (n = 1, 2, \cdots)\ ,$$

wobei M *eine positive Konstante ist, die nicht von* f *abhängt.*

Dieser Satz wurde in [16] bewiesen. Hieraus folgt analog wie in [16]

SATZ 3.2. *Es sei* $f \in X$ *und für eine ganze Zahl* $r \geqq 1$ *gelte* $\Delta^r f \in X$, *dann folgt*

$$E_n(X, f) \leqq M^{r+1} n^{-2r} \omega\left(\Delta^r f;\ \frac{1}{n}\right)\ .$$

Wir kommen nun zum Beweis der Jacksonschen Ungleichung.

SATZ 3.3. (Jacksonsche Ungleichung). *Für jedes* $f \in X \cap D(\Delta^r)$ *gilt*

$$E_n(X, f) \leqq M^r n^{-2r} \| \Delta^r f \|_X\ .$$

BEWEIS. Man benutzt folgende Beziehung für $f \in D(\Delta^r)$, die in [15, S. 51] bewiesen wurde:

$$T_h f - f = I_h(\Delta f) \equiv \int_0^h (\sin t)^{-2\lambda} dt \int_0^t (\sin u)^{2\lambda} T_u(\Delta f) du\ , \tag{3.6}$$

wobei das Integral im Sinne von S. Bochner aufzufassen ist (s. [7]). Ersetzt man f durch $\Delta^{r-1} f$, so erhält man

$$\begin{aligned} \omega(\Delta^{r-1} f;\ h) &= \sup_{0<t\leqq h} \| T_t \Delta^{r-1} f - \Delta^{r-1} f \|_X \\ &= \sup_{0<t\leqq h} \| I_t(\Delta^r f) \|_X \\ &\leqq \sup_{0<t\leqq h} (\| \Delta^r f \|_X \cdot t^2) \leqq \| \Delta^r f \|_X\, h^2 \quad (0 < h \leqq \pi/2)\ . \end{aligned}$$

Damit folgt aus Satz 3.2

$$E_n(X, f) \leqq M^r n^{-2(r-1)} \omega\left(\Delta^{r-1} f; \frac{1}{n}\right) \leqq M^r n^{-2r} \| \Delta^r f \|_X ,$$

womit der Satz bewiesen ist.

Für den Raum $C(S^3)$ stammt diese Ungleichung von G. G. Kušnirenko [11]. Die Bezeichnung 'Jacksonsche Ungleichung' stammt von J. Peetre [17]. Es soll nun eine Verallgemeinerung der Bernsteinschen Ungleichung bewiesen werden, wobei man den gewöhnlichen Differentialoperator im Falle der trigonometrischen Polynome durch den Operator Δ ersetzt. Es werden wesentliche Ergebnisse von E. M. Stein [20] benutzt, die als Satz formuliert werden. Die Elemente f aus X sind Funktionen, die auf S^k definiert sind.

SATZ 3.4. *Es existiert eine Folge von linearen Operatoren* $\{V_n^{(r)}\}_{n=1}^{\infty}$ *auf* X, *wobei für die natürliche Zahl* r *gilt* $r > (k-2)/2$, *mit folgenden Eigenschaften.*

i) $V_n^{(r)} f \in \mathscr{P}_{(r+1)\cdot n-1}$ *für alle* $f \in X$.

ii) *Es existiert eine natürliche Zahl* N *mit der folgenden Eigenschaft: Für alle* $n \geqq N$ *gilt* $V_n^{(r)} f = f$, *falls* f *ein Polynom vom Höchstgrad* n *ist.*

iii) *Für* $V_n^{(r)}$ *gilt die Darstellung*

$$V_n^{(r)} = a_{1,r}\sigma_{n-1}^{(r)} + a_{2,r}\sigma_{2n-1}^{(r)} + \cdots + a_{r+1,r}\sigma_{(r+1)n-1}^{(r)} ,$$

wobei die Koeffizienten $a_{i,r}$ *von* n *abhängen. Jedoch gilt* $|a_{i,r}| \leqq A$ *unabhängig von* n.

iv) *Es existiert eine positive Konstante* M_r, *die nicht von* n *abhängt, so daß gilt*

$$\| V_n^{(r)} f \|_X \leqq M_r \| f \|_X \qquad (f \in X;\ n = 1, 2, \cdots) .$$

v) *Es existiert eine positive Konstante* K_r, *die nicht von* n *abhängt, mit*

$$\| V_n^{(r)} f - f \|_X \leqq K_r E_n(X, f) \qquad (f \in X,\ n \geqq N) .$$

BEWEIS. Die Teile i), ii), und iii) wurden von E. M. Stein [20] in seiner Dissertation bewiesen. Der Beweis von iv) stammt im wesentlichen von E. Kogbetliantz [10] und verläuft wie folgt. $\sigma_n^r(f; x)$ kann in der Form

$$\sigma_n^r(f; x) = \frac{1}{\Omega_k} \int_{S^k} K_n^r [(x, y)]\, f(y) ds(y) \tag{3.7}$$

dargestellt werden mit dem Kern

$$(3.8) \qquad K_n^r(t) = (A_n^r)^{-1} \sum_{m=0}^{n} A_{n-m}^r \frac{m+\lambda}{\lambda} P_m^\lambda(t) ,$$

für den es eine positive Konstante C_r gibt mit (s. [10])

$$(3.9) \qquad \| K_n^r \|_{1,\lambda} \leqq C_r \qquad \left(r > \lambda = \frac{k-2}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots\right).$$

Weiter gilt nach der Ungleichung von Young für die sphärische Faltung (s. [5])

$$(3.10) \qquad \| \sigma_n^r f \|_X \leqq \| K_n^r \|_{1,\lambda} \| f \|_X \leqq C_r \| f \|_X .$$

Aus iii) folgt nun

$$\| V_n^{(r)} f \| \leqq (r+1) \cdot A \cdot C_r \| f \|_X = M_r \| f \|_X ,$$

womit Teil iv) bewiesen ist.

Um Teil v) zu beweisen, geht man davon aus, daß es ein Element $P_n^*(f) \in \mathscr{P}_n$ gibt mit $\| P_n^*(f) - f \| = E_n(X, f)$.

Daher gilt wegen ii) und iv) für $n \geqq N$

$$\begin{aligned} \| V_n^{(r)} f - f \|_X &\leqq \| V_n^{(r)} f - V_n^{(r)} P_n^*(f) \| + \| P_n^*(f) - f \| \\ &\leqq (M_r + 1) \| P_n^*(f) - f \| = (M_r + 1) E_n(X, f) , \end{aligned}$$

womit Satz 3.4 bewiesen ist.

Von E. M. Stein wurde auch eine verallgemeinerte Bernsteinsche Ungleichung für die zonalen Kugelfunktionen bewiesen. Die zonalen Kugelfunktionen der Ordnung n auf S^k sind die Gegenbauerpolynome $P_n^\lambda(\cos\theta)$ auf $0 \leqq \theta \leqq \pi$, die Restriktion des Operators $\varDelta$ auf zonale Funktionen ergibt den Operator $\varDelta_\lambda$ und die Beziehung (2.6) geht über in

$$(3.11) \qquad \begin{aligned} \varDelta_\lambda P_n^\lambda(\cos\theta) &\equiv (\sin\theta)^{-2\lambda} \frac{d}{d\theta}\left[(\sin\theta)^{2\lambda} \frac{d}{d\theta} P_n^\lambda(\cos\theta)\right] \\ &= -n(n+2\lambda) P_n^\lambda(\cos\theta) . \end{aligned}$$

E. M. Stein [20] bewies folgendes Ergebnis.

Lemma 3.5. *Ist $T_n(\cos\theta)$ ein gerades trigonometrisches Polynom der Ordnung n, dann gilt die Ungleichung*

$$\| \varDelta_\lambda T_n \|_{p,\lambda} \leqq B_\lambda n^2 \| T_n \|_{p,\lambda} \qquad (1 \leqq p \leqq \infty) ,$$

wobei die positive Konstante B_λ nur von λ abhängt und $\| \cdot \|_{\infty,\lambda} = \| \cdot \|_{C_z}$ gesetzt ist.

Der Beweis benutzt die Gültigkeit für $p = 2$ und $p = \infty$, eine verallgemeinerte Form des Rieszschen Interpolationssatzes für $2 < p < \infty$ und die Methode der "Konjugiertheit" für $1 \leqq p < 2$.

Damit können wir die Bernsteinsche Ungleichung für Kugelfunktionen beweisen.

SATZ 3.6. *Sei $P_n \in \mathscr{P}_n$, dann gilt die Ungleichung*

$$\| \Delta P_n \|_X \leqq D_k n^2 \| P_n \|_X ,$$

wobei die Konstante D_k nur von k abhängt.

BEWEIS. Nach Satz 3.4., ii) existiert ein Operator $V_n^{(r)}$ und eine Zahl N, so daß gilt $V_n^{(r)} P_n = P_n$ für $n \geqq N$.

Außerdem hat $V_n^{(r)} f$ wegen (3.7) und (3.8) die Darstellung

$$(V_n^{(r)} f)(x) = \frac{1}{\Omega_k} \int_{S^k} U_n^{(r)} [(x, y)] f(y) ds(y)$$

mit

$$U_n^{(r)}(t) = a_{1,r} K_{n-1}^r(t) + a_{2,r} K_{2n-1}^r(t) + \cdots + a_{r+1,r} K_{(r+1)n-1}^r(t)$$

d.h. $U_n^{(r)}(t)$ ist ein algebraisches Polynom der Ordnung $(r+1) \cdot n - 1$ in t. Weiter gilt

$$\Delta P_n(x) = (V_n^{(r)} \Delta P_n)(x) = \frac{1}{\Omega_k} \int_{S^k} (\Delta_\lambda U_n^{(r)} [(x, y)]) P_n(y) ds(y) ,$$

mit der Youngschen Ungleichung folgt wie in (3.10)

$$\| \Delta P_n \|_X \leqq \| \Delta_\lambda U_n^{(r)} \|_{1,\lambda} \| P_n \|_X$$

und mit Lemma 3.5, Satz 3.4., iii) und (3.10) gilt

$$\begin{aligned} \| \Delta P_n \|_X &\leqq B_\lambda [(r+1) \cdot n - 1]^2 \| U_n^{(r)} \|_{1,\lambda} \| P_n \|_X \\ &\leqq B_\lambda (r+1)^2 n^2 A \cdot (r+1) \cdot C_r \| P_n \|_X \\ &\leqq D_k \cdot n^2 \| P_n \|_X , \end{aligned}$$

da r und λ nur von k abhängen, womit Satz 3.6 bewiesen ist.

BEMERKUNG. Im Falle $k = 3$ und $X = C(S^3)$ wurde diese Ungleichung von A. L. Šaginjan [19] und G. G. Kušnirenko [11] bewiesen.

4. **Der Äquivalenzsatz.** Zuerst soll der Begriff eines intermediären Raumes in einer speziellen Form definiert werden. Seien X und Y zwei Banachräume, wobei Y stetig in X eingebettet ist. Man betrachtet das von J. Peetre [17] eingeführte K-Funktional, welches für $0 < t < \infty$ und $f \in X$ definiet ist durch

$$K(t, f; X, Y) = \inf_{g \in Y} (\| f - g \|_X + t \| g \|_Y) .$$

Es kann gezeigt werden, daß $K(t, f\colon X, Y)$ für jedes feste $f \in X$ eine monoton wachsende, konkave (daher stetige) Funktion in t auf $(0, \infty)$ ist und für jedes feste t eine Norm auf X bildet.

DEFINITION 4.1. Die Menge aller Elemente $f \in X$, für die gilt

$$\| f \|_{\theta,k} := \sup_{0<t<\infty} t^{-\theta} K(t, f) < +\infty ,$$

wird mit $(X, Y)_{\theta,k}$ $(0 \leqq \theta \leqq 1)$ bezeichnet.

$(X, Y)_{\theta,k}$ ist ein intermediärer Raum von X und Y mit der Norm $\| f \|_{\theta,k}$ d.h. ein Banachraum mit der Eigenschaft $Y \subset (X, Y)_{\theta,k} \subset X$.

Gegeben sind nun durch $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$, $X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \cdots \subset Y$, eine Folge von linearen Unterräumen von X, die Minimalabweichung $E_n(X, f)$ ist definiert durch

$$E_n(X, f) := \inf_{p_n \in X_n} \| f - p_n \|_X \qquad (n \in N_0 := N \cup \{0\}) .$$

Die Räume X_n seien proximinal d.h. zu jedem $f \in X$ und $n \in N_0$ existiert ein Element $p_n^*(f) \in X_n$, so daß gilt

$$E_n(X, f) = \| f - p_n^*(f) \| .$$

Weiter soll gelten $\lim_{n\to\infty} E_n(X, f) = 0$ $(f \in X)$. Außerdem sollen für diese Unterräume X_n eine reelle Zahl $\beta > 0$ und zwei Konstanten C und D existieren, so daß gilt

$$E_n(X, f) \leqq C n^{-\beta} \| f \|_Y \qquad (n \in N_0;\ f \in Y) \tag{4.1}$$

und

$$\| p_n \|_Y \leqq D n^{\beta} \| p_n \|_X \qquad (n \in N_0;\ p_n \in X_n) . \tag{4.2}$$

Damit gilt folgendes Lemma (s. [3, 4]).

LEMMA 4.2. *Y_1 und Y_2 seien zwei in X stetig eingebettete Banachräume mit $X_n \subset Y_i$ $(i = 1, 2;\ n \in N_0)$ und für Y_1 bzw. Y_2 seien beide Ungleichungen* (4.1) *und* (4.2) *mit den Exponenten β_1 bzw. β_2 erfüllt. Dann sind folgende Aussagen für $0 \leqq \beta_1 < \theta < \beta_2 < \infty$ und $f \in X$ äquivalent:*

i) $n^{\theta} E_n(X, f) < +\infty$;

ii) $f \in Y_1$ *und* $n^{\theta-\beta_1} \| p_n^*(f) - f \|_{Y_1} < \infty$;

iii) $n^{\theta-\beta_2} \| p_n^*(f) \|_{Y_2} < \infty$;

iv) $f \in (X, Y_2)_{\theta/\beta_2, K}$.

Wendet man dieses Lemma auf den hier untersuchten konkreten Fall an, so erhält man, wobei X die in Abschnitt 2 definierten Funktionenräume sind, SATZ 4.3. *Für $f \in X$ und natürliche Zahlen $m \leqq r < l$ sind die folgenden Aussagen äquivalent für $0 < \alpha < 2$:*

i) $E_n(X, f) \leqq M_1 n^{-(2r+\alpha)}$;

ii) $f \in D(\Delta^m)$ *und* $\| \Delta^m P_n^*(f) - \Delta^m f \|_X \leqq M_2 n^{-(2r+\alpha-2m)}$;

iii) $\| \Delta^l P_n^*(f) \|_X \leqq M_3 n^{2l-2r-\alpha}$;

iv) $f \in D(\Delta^r)$ *und* $\omega(\Delta^r f; h) \leqq M_4 h^\alpha$.

BEWEIS. Es sei $\theta = 2r + \alpha$, $\beta_1 = 2m$, $\beta_2 = 2l$, $Y_1 = D(\Delta^m)$, $Y_2 = D(\Delta^l)$ und $X_n = \mathscr{P}_n$, $n = 0, 1, 2, \cdots$. Wegen der Sätze 3.3 und 3.6 sind die angegebenen Ungleichungen (4.1) und (4.2) erfüllt und damit sind die Aussagen i), ii) und iii) untereinander äquivalent. Es wird jetzt die Äquivalenz von i) und iv) bewiesen. Aus i) folgen mit ii) und $m = r$ die Aussagen $f \in D(\Delta^r)$ und die Ungleichung

$$E_n(X, \Delta^r f) \leqq \| \Delta^r P_n^*(f) - \Delta^r f \|_X \leqq M n^{-\alpha} .$$

Daraus folgt mit Satz 4.2 i) $\Rightarrow$ iv) die Aussage

$$\Delta^r f \in (X, D(\Delta^l))_{\alpha/2l, K} .$$

Hieraus folgt mit Hilfe des Reduktionssatzes für intermediäre Räume [2, S. 198]

$$\Delta^r f \in (X, D(\Delta))_{\alpha/2}$$

d.h. $\sup_{0<t<\infty} t^{-\alpha/2} K(t, \Delta^r f) < +\infty$.

Nun haben J. Löfström und J. Peetre [12] bewiesen, daß gilt

$$\omega(f, t) \cong K(t^2, f)^{*)} \qquad (t \to 0+) .$$

Daraus folgt also

$$\omega(\Delta^r f, h) = O(h^\alpha) \qquad (h \to 0+)$$

d.h. die Aussage iv). Der Schluß von iv) auf i) folgt aus Satz 3.2. Damit ist der Satz 4.3 vollständig bewiesen.

Im Falle $\alpha = 2$ kann man die in iv) auftretende Funktionenklasse wie folgt charakterisieren.

SATZ 4.4. *Es gilt* $\| \Delta^r P_n^*(f) \|_X = O(1)$ $(n \to \infty)$ *genau dann, wenn* $f \in D(\Delta^{r-1})$ *ist und* $\omega(\Delta^{r-1} f, h) = O(h^2)$ $(h \to 0+)$.

BEWEIS. Aus $\| \Delta^r P_n^*(f) \|_X = O(1)$ folgt, daß die Bedingung iii) in Satz 4.3 erfüllt ist, wenn man dort l durch r und r durch $r-1$ ersetzt. Daraus folgt wegen iv) $f \in D(\Delta^{r-1})$. Weiter gilt nun mit der Identität (3.6)

*) Dies gilt nach [12] nur für alle f mit $Y_0(f; x) \equiv 0$. Daraus folgt die Aussage iv) auch für beliebige f.

$$T_h \Delta^{r-1} P_n^*(f) - \Delta^{r-1} P_n^*(f) = I_h(\Delta^r P_n^*(f))$$

und damit wie im Beweis zu Satz 3.3

$$\| T_h \Delta^{r-1} P_n^*(f) - \Delta^{r-1} P_n^*(f) \|_X \leqq \| I_h \| \cdot \| \Delta^r P_n^*(f) \|_X = O(h^2) \qquad (h \to 0+) .$$

Aus der Aussage ii) in Satz 4.3 folgt

$$\lim_{n\to\infty} \| \Delta^{r-1} P_n^*(f) - \Delta^{r-1} f \|_X = 0$$

und damit gilt für $n \to \infty$.

$$\| T_h \Delta^{r-1} f - \Delta^{r-1} f \|_X = O(h^2) ,$$

also

$$\omega(\Delta^{r-1} f, h) = O(h^2) \qquad (h \to 0+) .$$

Damit ist die eine Richtung des Satzes bewiesen.

Ist nun $f \in D(\Delta^{r-1})$ und $\omega(\Delta^{r-1} f; h) = O(h^2)$, dann folgt nach Satz 3.2

$$E_n(X, f) = O(n^{-2r}) \qquad (n \to \infty) . \tag{4.3}$$

Nach Satz 3.4, v) existiert eine Folge linearer Operatoren $\{L_n\}$ mit

$$\| L_n f - f \|_X = (n^{-2r}) . \tag{4.4}$$

Weiter folgt aus der Voraussetzung $\omega(\Delta^{r-1} f; h) = O(h^2)$ mit Teil iv) von Satz 3.4 die Beziehung

$$h^{-2} \omega(\Delta^{r-1} L_n f; h) = O(1) \qquad (h \to 0,\ n = 0, 1, 2 \cdots)$$

und mit

$$\lim_{h\to 0} h^{-2} \{ T_n \Delta^{r-1} L_n f - \Delta^{r-1} L_n f \} = \frac{1}{2(2\lambda + 1)} \Delta^r L_n f$$

(wegen (3.6)) folgt

$$\| \Delta^r L_n f \|_X = O(1) \qquad (n \to \infty) . \tag{4.5}$$

Mit der Bernsteinschen Ungleichung (Satz 3.6) und (4.3) und (4.4) erhält man

$$\| \Delta^r (L_n f - P_n^* f) \|_X \leqq C n^{2r} \| L_n f - P_n^* f \|_X = O(1) \qquad (n \to \infty) .$$

Mit (4.5) ergibt sich die Behauptung

$$\| \Delta^r P_n^* f \|_X \leqq \| \Delta^r L_n f \|_X + \| \Delta^r (L_n f - P_n^* f) \|_X = O(1) .$$

M. Zamansky [24, S. 29] hat ein ähnliches Ergebnis für stetige, 2π-periodische Funktionen und trigonometrische Polynome bewiesen.

BEMERKUNG. Satz 4.4 ist den Sätzen über die Differenzierbarkeit der

Grenzfunktion verwandt, in denen man aus der gleichmäßigen Konvergenz der Folge selbst und der Folge der Ableitungen auf die Differenzierbarkeit der Grenzfunktion schließt. Hier ist die Folge der "Ableitungen" $\{\Delta^r P_n^*(f)\}$ nur beschränkt und man erhält nur, daß die Funktion f einer verallgemeinerten Lipschitzbedingung genügt. Ähnlich ist die Aussage iii) $\Rightarrow$ iv) in Satz 4.3 zu interpretieren.

5. Approximation durch algebraische Polynome. Es sollen nun die Unterräume der zonalen Funktionen betrachtet werden. Setzt man $t = \cos\theta$, dann erhält man wegen (2.2) die Räume L_λ^p $(1 \leqq p < \infty)$ mit der Norm

$$\| f \|_{p,\lambda} = \left\{\frac{\Omega_{k-1}}{\Omega_k}\int_{-1}^1 | f(t) |^p (1 - t^2)^{\lambda-1/2}\, dt\right\}^{1/p} \qquad (2\lambda = k - 2)\,.$$

Den Raum der stetigen zonalen Funktionen kann man dann wegen (2.1) mit der Norm

$$\| f \|_{C_z} = \max_{-1\leqq t\leqq 1} | f(t) |$$

versehen. Die Menge der orthogonalen Kugelfunktionen vom Grade n der Dimension k geht dann über in die orthogonalen algebraischen Polynome $P_n^\lambda(t)$, die Gegenbauer-Polynome. Wir erhalten also das Problem, auf dem Intervall $[-1, 1]$ definierte Funktionen durch algebraische Polynome in der Norm $\|\cdot\|_{p,\lambda}$ bzw. C_z-Norm zu approximieren. Als Folgerung aus Satz 4.3 für zonale Funktionen erhält man hier einen Approximationssatz für algebraisch Polynome. Auf die Formulierung der Ergebnisse in den Räumen L_λ^p $(1 \leqq p < \infty)$ soll hier verzichtet werden.

Wir betrachten jetzt den Raum C_z. p_n^* sei das algebraische Polynom bester Approximation der Funktion $f \in C_z$ in der C_z-Norm. Durch die Substitution $t = \cos\theta$ erhält man aus (3.11) die Darstellung des zonalen Δ-Operators

$$\Delta_\lambda f(t) \equiv (1 - t^2)^{-\lambda+1/2}\frac{d}{dt}\left[(1 - t^2)^{\lambda+1/2}\frac{d}{dt}f(t)\right].$$

Eine genaue Charakterisierung seines Definitionsbereichs durch Differenzierbarkeitseigenschaften der Funktion f findet man in [15]. Die Translation $T_h^\lambda f$ hat hier die Darstellung

$$(T_h^\lambda f)(t) = \begin{cases} \dfrac{\Omega_{k-2}}{\Omega_{k-1}}\displaystyle\int_{-1}^1 f(t\cdot\cos h + \sqrt{1 - t^2}\, z\cdot\sin h)\,(1 - z^2)^{\lambda-1}\, dz & (\lambda > 0) \\ \dfrac{1}{2}\{f(t\cdot\cos h + \sqrt{1 - t^2}\sin h) + f(t\,\cos h - \sqrt{1 - t^2}\sin h)\} & (\lambda = 0)\,. \end{cases}$$

Im Falle stetiger Funktionen ist Teil i) von Satz 4.3 unabhängig von λ, da die C_z-Norm und die Menge $\mathscr{P}_n$ unabhängig von λ ist. Damit sind im Falle zonaler Funktionen die Ergebnisse von Satz 4.3 für verschiedene Werte von λ äquivalent. Als Spezialfall erhält man folgendes Ergebnis.

SATZ 5.1. *Für $f \in C[-1, 1]$ sind folgende Aussagen äquivalent für $0 < \alpha < 2$:*

i) $$\max_{-1 \leqq t \leqq 1} | p_n^*(t) - f(t) | \leqq M_1 n^{-\alpha} ;$$

ii) $$\max_{-1 \leqq t \leqq 1} \left| (1 - t^2)^{1/2} \frac{d}{dt} \left[(1 - t^2)^{1/2} \frac{d}{dt} p_n^*(t) \right] \right| \leqq M_2 n^{2-\alpha} ;$$

iii) $$\max_{-1 \leqq t \leqq 1} \left| \frac{d}{dt} \left[(1 - t^2) \frac{d}{dt} p_n^*(t) \right] \right| \leqq M_3 n^{2-\alpha} ;$$

iv) $$\sup_{0<h \leqq \delta} \max_{-1 \leqq t \leqq 1} | f(t \cos h + \sqrt{1-t^2} \sin h) + f(t \cos h - \sqrt{1-t^2} \sin h) - 2f(t) | \leqq M_4 \delta^\alpha ;$$

v) $$\sup_{0<h \leqq \delta} \max_{-1 \leqq t \leqq 1} \left| \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} f(t \cdot \cos h + z \sqrt{1 - t^2} \sin h) (1 - z^2)^{-1/2} dz - f(t) \right| \leqq M_5 \delta^\alpha ;$$

vi) $$\sup_{0<h \leqq \delta} \max_{-1 \leqq t \leqq 1} \left| \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f(t \cdot \cos h + z \sqrt{1 - t^2} \sin h) dz - f(t) \right| \leqq M_6 \delta^\alpha .$$

BEWEIS. Es wird Satz 4.3 mit $r = m = 0$ und $l = 2$ angewandt. Teil i) ist die Aussage i) aus Satz 4.3, ii) ist Teil iii) aus Satz 4.3 im Falle $\lambda = 0$, iii) ist der Fall $\lambda = 1/2$. Die Aussagen iv), v) und vi) dieses Satzes sind genau der Teil iv) von Satz 4.3 für die Werte $\lambda = 0$, $\lambda = 1/2$ und $\lambda = 1$.

Teile dieses Satzes sind bekannt. Die Äquivalenz von i) und iv) wurde von M. K. Potapov [18] und die von i) und v) von G. G. Kušnirenko [11] bewiesen. Literatur zu bekannten Ergebnissen in den Räumen L_λ^p ist in [16] angegeben. Zu bemerken ist noch, daß man die Äquivalenz der Aussagen i), ii), und iv) wie folgt bekommen kann. Die Funktion $g(\theta) = f(\cos \theta)$ ist (falls $f \in C_z$) stetig und 2π-periodisch und $p_n^*(\cos \theta)$ ist ein gerades trigonometrisches Polynom der Ordnung n. Führt man in dem für solche Polynome gültigen Äquivalenzsatz (s. [21, 3, 4, 22]) die Substitution $t = \cos \theta$ durch, so erhält man die Aussagen i), ii) und iv) aus Satz 5.1.

BEMERKUNG: Nach Fertigstellung der Arbeit lernte der Autor die folgenden Arbeiten kennen: P. L. Butzer and H. Johnen, Lipschitz Spaces on Compact Manifolds, Journ. Funct. Anal. 7 (1971), 242–266; D. L. Ragozin, Constructive polynomial approximation on spheres and projective spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 162 (1971), 157–170. In beiden Arbeiten werden sehr verwandte Ergebnisse bewiesen, allerdings nur im Raum $C(S^k)$.

LITERATUR

[1] S. N. BERNSTEIN, Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par les polynômes de degré donné, Mém. acad. royale Belg. 4 (1912), 1-104.
[2] P. L. BUTZER AND H. BERENS, Semi-Groups of Operators and Approximation, Berlin-Heidelberg-New York 1967.
[3] P. L. BUTZER AND K. SCHERER, On the Fundamental Approximation Theorems of D. Jackson, S. N. Bernstein and Theorems of M. Zamansky and S. B. Stečkin, Aequationes Math. 3 (1969), 170–185.
[4] P. L. BUTZER UND K. SCHERER, Über die Fundamentalsätze der klassischen Approximationstheorie in abstrakten Räumen, in: Abstract Spaces and Approximation, ISNM Vol. 10, Basel 1969, p. 113-125.
[5] A. P. CALDERÓN AND A. ZYGMUND, On a problem of Mihlin, Trans. Amer. Math. Soc. 78 (1955), 209-224.
[6] A. ERDELYI, W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER AND F. TRICOMI, Higher transcendental functions, Vol. II, New York-Toronto-London 1953.
[7] E. HILLE AND R. S. PHILLIPS, Functional analysis and semi-groups, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 31, New York 1957.
[8] D. JACKSON, The Theory of Approximation, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 11, New York 1930.
[9] H. JOHNEN, Über Sätze von M. Zamansky und S. B. Stečkin und ihre Umkehrungen auf dem n-dimensionalen Torus, J. Approx. Theory 2 (1969), 97-110.
[10] E. KOGBETLIANTZ, Recherches sur la sommabilité des séries ultraspheriques par la méthode de moyennes arithmetiques, J. Math. Pures Appl. (3) 9 (1924), 107-187.
[11] G. G. KUŠNIRENKO, Einige Fragen der Approximation stetiger Funktionen auf der Einheitskugel mittels endlicher sphärischer Summen (russisch), Trudy Charkov. Politechn. Inst. Ser. Inž. Fiz. 25 No. 3 (1959), 3-22.
[12] J. LÖFSTRÖM AND J. PEETRE, Approximation Theorems Connected with Generalized Translations, Math. Ann. 181 (1969), 225-268.
[13] G. G. LORENTZ, Approximation of Functions, New York 1966.
[14] Cl. MÜLLER, Spherical harmonics, Lecture Notes in Math. 17, Berlin 1966.
[15] S. PAWELKE, Saturation und Approximation bei Reihen mehrdimensionaler Kugelfunktionen, Dissertation TH Aachen 1969.
[16] S. PAWELKE, Ein Satz von Jackson für algebraische Polynome (erscheint demnächst).
[17] J. PEETRE, A Theory of Interpolation of Normed Spaces, Notas de Matemática No. 39, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro 1968.
[18] M. K. POTAPOV. Über die Approximation aperiodischer Funktionen durch algebraische Polynome (russisch), Vestnik Mosk. Univ. No. 4 (1960), 14-25.
[19] A. L. ŠAGINJAN, Über die beste Approximation harmonischer Polynome im Raum (russisch), Dokl. Akad. Nauk SSSR 90 (1953), 141-144.
[20] E. M. STEIN, Interpolation in Polynomial Classes and Markoff's Inequality, Duke Math.

24 (1957), 467-476.
[21] G. SUNOUCHI, Derivatives of a polynomial of best approximation, Jber. Deutsch. Math. Verein. 70 (1968), 165-166.
[22] G. SUNOUCHI, Derivatives of a trigonometric polynomial of best approximation, in: Abstract Spaces and Approximation, 233-241, ISNM 10, Basel 1969.
[23] G. SZEGÖ, Orthogonal Polynomials, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 23, New York 1967.
[24] M. ZAMANSKY, Classes de saturation de certains procédés d'approximation des séries de Fourier des fonctions continues, Ann. Sci. École Norm. Sup. 66 (1949), 19-93.
[25] A. ZYGMUND, Smooth Functions, Duke Math. J. 12 (1945), 47-76.

FACHHOCHSCHULE AACHEN
ABTEILUNG JÜLICH
D 517 JÜLICH, GINSTERWEG
DEUTSCHLAND