

## GROUPES DE LIE MUNIS DE MÉTRIQUES BI-INVARIANTES

ALBERTO MEDINA

(Received January 18, 1984, revised October 16, 1984)

Soit  $G$  un groupe de Lie d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . L'action co-adjointe de  $G$  définit une structure de Lie-Poisson sur  $\mathfrak{g}^*$  (cf. [11]). Supposons  $G$  muni d'une métrique pseudo-riemannienne bi-invariante, c'est à dire, invariante par les translations à gauche et à droite de  $G$ . La métrique de  $G$  définit un isomorphisme entre les représentations adjointe et co-adjointe de  $G$ , par conséquent la variété  $\mathfrak{g}$  est munie d'une structure de Lie-Poisson transportée de  $\mathfrak{g}^*$  par cet isomorphisme.

Dans cet article nous étudions des liens entre la structure du groupe  $G$ , la nature de la métrique et la structure de Lie-Poisson sur  $\mathfrak{g}$  associée à la métrique. Dans ce travail une métrique pseudo-riemannienne est appelée simplement une métrique.

La classe des groupes de Lie qui admettent une métrique bi-invariante est assez large. Dans une publication interne à Montpellier (cf. [6]) nous avons fourni les idées essentielles pour le dévissage de ces groupes. Pour que l'étude qui va suivre soit complète et illustrée par des exemples, nous reprenons ici quelques une des résultats de la référence citée, présentés sous un angle différent.

**1. Introduction.** Supposons  $G$  muni d'une métrique bi-invariante et identifions l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  à l'ensemble des champs de vecteurs invariants à gauche sur  $G$ .

La métrique de  $G$  induit sur  $\mathfrak{g}$  une métrique pour laquelle l'action adjointe de  $G$  sur  $\mathfrak{g}$  se fait par des isométries. Par conséquent si  $(\text{ad } a)(b) = [a, b]$  désigne le produit sur  $\mathfrak{g}$ , pour tout  $a, b$  et  $c$  dans  $\mathfrak{g}$  on a l'identité suivante:

$$(*) \quad \langle (\text{ad } a)(b), c \rangle + \langle b, (\text{ad } a)(c) \rangle = 0 .$$

Réciproquement soit  $\langle , \rangle$  une métrique sur la variété  $\mathfrak{g}$ . Si pour tout  $g$  dans  $G$ ,  $\text{Ad}(g): \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  est une isométrie alors  $\langle , \rangle$  définit, par transport suivant les translations à gauche, une métrique sur  $G$ ; cette métrique qui est invariante à gauche est aussi invariante à droite.

Si la métrique de  $\mathfrak{g}$  vérifie seulement (\*), elle définit une métrique bi-invariante sur la composante connexe de l'identité de  $G$  (2.2). Soit

$\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*$ ,  $a \mapsto \varphi(a) = \langle a, - \rangle$ , l'isomorphisme linéaire canonique défini par une métrique bi-invariante de  $G$ . Si  $f_1, f_2$  sont deux formes linéaires sur  $\mathfrak{g}$ , l'identité

$$\{f_1, f_2\}(a) = \langle a, [x_1, x_2] \rangle, \quad a \in \mathfrak{g}$$

où  $f_i = \varphi(x_i)$ ,  $i = 1, 2$ , définit une structure de Lie-Poisson sur  $\mathfrak{g}$  (voir [11]). Ainsi l'orbite  $O(a)$  de  $a \in \mathfrak{g}$ , suivant la représentation adjointe de  $G$  est une variété symplectique sur laquelle  $G$  agit par des symplectomorphismes. Si la métrique de  $\mathfrak{g}$  induit une métrique sur  $O(a)$ , l'action de  $G$  sur  $O(a)$  se fait aussi par des isométries. Celui-ci est le cas si et seulement si  $O(a)$  est un espace homogène réductif (Théorème 6.2). Nous étudions les orbites voisines d'une orbite réductrice. En général il existe sur  $O(a)$  un feuilletage  $G$ -invariant, pour que ce feuilletage soit fait par des points il faut et il suffit que  $O(a)$  soit réductrice.

Le contenu des différentes sections est le suivant: Les paragraphes 2 à 5 traitent de l'existence d'une métrique bi-invariante. Les paragraphes 6 et 7 étudient respectivement les orbites sous l'action adjointe et la structure de Lie-Poisson sur  $\mathfrak{g}$ ,  $G$  étant muni d'une métrique bi-invariante.

**2. Conditions nécessaires pour l'existence d'une métrique bi-invariante.** Voyons d'abord quelques interprétations de la donnée d'une métrique bi-invariante sur un groupe de Lie.

**LEMME 2.1.** *Soit  $G$  un groupe de Lie d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . Les propositions suivantes sont équivalentes:*

- (1) *Le groupe  $G$  admet une métrique bi-invariante.*
- (2) *La variété  $\mathfrak{g}$  est munie d'une métrique pour laquelle l'action adjointe de  $G$  se fait par des isométries.*
- (3) *Il existe un isomorphisme  $\psi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*$  entre les représentations adjointe et co-adjointe de  $G$  tel que  $\psi(a)(b) = \psi(b)(a)$  pour tout  $a$  et  $b$  dans  $\mathfrak{g}$ .*

**DÉMONSTRATION.** Compte tenu de ce qui a été dit dans l'introduction, il suffit de prouver l'équivalence de (2) et (3).

Soit  $\langle , \rangle$  une métrique sur  $\mathfrak{g}$  telle que  $\langle a, b \rangle = \langle \text{Ad}(g)(a), \text{Ad}(g)(b) \rangle$  pour tout  $a$  et  $b$  dans  $\mathfrak{g}$  et tout  $g$  dans  $G$ . Pour  $a \in \mathfrak{g}$  posons  $\varphi(a) = \langle a, - \rangle$  et soit  $g \rightarrow \text{Ad}(g)^*$  la représentation co-adjointe de  $G$ . Des définitions il résulte:

$$(\varphi \circ \text{Ad}(g))(a)(b) = \langle \text{Ad}(g)(a), b \rangle \quad \text{et} \quad (\text{Ad}(g)^*(\varphi(a)))(b) = \langle a, \text{Ad}(g)^{-1}(b) \rangle.$$

Or d'après l'hypothèse, les deux membres de droite sont égaux. Réciproquement soit  $\psi$  comme dans (3). Si l'on pose  $\langle a, b \rangle = \psi(a)(b)$ , l'hypothèse

se traduit par l'égalité,  $\langle \text{Ad}(g)(a), b \rangle = \langle a, \text{Ad}(g)^{-1}(b) \rangle$ . De plus  $\langle , \rangle$  est bilinéaire symétrique et non dégénérée. Par conséquent (3) implique (2).

**COROLLAIRE 2.2.** *Si  $G$  est connexe, les trois propositions du lemme sont aussi équivalentes à l'assertion suivants. Il existe une forme bilinéaire symétrique non dégénérée  $\langle , \rangle$  sur  $\mathfrak{g}$  telle que pour tout  $a, b$  et  $c$  dans  $\mathfrak{g}$  on ait,*

$$(1) \quad \langle (\text{ad } a)(b), c \rangle + \langle b, (\text{ad } a)(c) \rangle = 0 .$$

L'équivalence de (1) et de l'assertion, dans le cas où  $G$  est connexe, résulte d'un argument analogue à celui de la preuve du lemme 7.2 de [7] et de ce qui a été remarqué dans l'introduction.

Une forme  $\langle , \rangle$  sur  $\mathfrak{g}$  comme celle du corollaire sera dite une métrique bi-invariante sur  $\mathfrak{g}$ . De (1), ou bien de (2) de 2.1, il est immédiat que l'orthogonal  $I^\perp$  d'un idéal  $I$  de  $\mathfrak{g}$  est lui-même un idéal. Noter aussi que les idéaux de  $\mathfrak{g}$  sont des sous-espaces stables par l'action adjointe. Désignons par  $C^r(\mathfrak{g})$  et  $C_r(\mathfrak{g})$  respectivement les idéaux des suites centrales descendante et ascendante de  $\mathfrak{g}$ ; on a:

**LEMME 2.3.** *Si  $G$  admet une métrique bi-invariante, son algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  vérifie les conditions suivantes:*

- (1) *Pour tout entier positif  $r$ ,  $C^r(\mathfrak{g})^\perp = C_r(\mathfrak{g})$ .*
- (2) *Un sous-espace  $J$  de  $\mathfrak{g}$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$  si et seulement si le centralisateur de  $J$  contient  $J^\perp$ .*
- (3) *Tout idéal de  $\mathfrak{g}$  de dimension 1 est contenu dans le centre de  $\mathfrak{g}$ .*
- (4) *La métrique de  $\mathfrak{g}$  induit une métrique bi-invariante sur toute sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}$ .*

**DÉMONSTRATION.** La première affirmation résulte de (1) par un simple argument de récurrence.

Soit  $J$  un idéal,  $Z_{\mathfrak{g}}(J) = \{x \in \mathfrak{g}; [x, y] = 0 \forall y \in J\}$  sont centralisateur et  $x \in J^\perp$ . Si  $y \in J$  et  $z \in \mathfrak{g}$ ,  $[y, z] \in J$  et  $\langle x, [y, z] \rangle = 0$  et donc  $\langle [x, y], z \rangle = 0$ . Comme  $z$  est arbitraire dans  $\mathfrak{g}$  on a  $[x, y] = 0$  et  $x$  est dans  $Z_{\mathfrak{g}}(J)$ . La réciproque est évidente.

Maintenant soit  $I = \mathbf{R}z$  un idéal de  $\mathfrak{g}$ . Comme  $Z_{\mathfrak{g}}(I)$  contient l'idéal maximal  $I^\perp$ , il suffit de montrer que  $Z_{\mathfrak{g}}(I)$  ne peut être égal à  $I^\perp$ . En effet cela signifierait qu'il existe  $c \in \mathfrak{g}$  tel que  $\langle z, c \rangle$  et  $[z, c]$  sont tous deux non nuls. Comme  $I$  est un idéal,  $[z, c] = \lambda z$ ,  $\lambda$  réel non nul et  $\langle [z, c], c \rangle = \lambda \langle z, c \rangle$  est non nul. Ceci est impossible car  $\langle [z, c], c \rangle = \langle z, [c, c] \rangle = 0$ , d'où la contradiction. Ceci montre (3). Soient  $T_i, 1 \leq i \leq p$ ,  $p$  endomorphismes antisymétriques de l'espace  $\mathfrak{g}$ . Pour  $x$  et  $y$  quelconques dans  $\mathfrak{g}$  nous pouvons écrire:

$$\langle T_1 T_2 \cdots T_p(x), y \rangle = (-1)^p \langle x, T_p \cdots T_2 T_1(y) \rangle .$$

En particulier si  $T_i = T$  et  $1 \leq i \leq n$  on aura  $\langle T^n x, y \rangle = (-1)^n \langle x, T^n y \rangle$ . Décomposons  $\mathfrak{g}$  comme  $\mathfrak{g} = \text{Ker}(T^n) \oplus \text{Im}(T^n)$  où  $n$  est la dimension de  $\mathfrak{g}$ . De l'identité qui précède  $x \in \text{Ker}(T^n)$  si et seulement si  $x$  est orthogonal à  $\text{Im}(T^n)$ . Ainsi si  $T$  n'est ni nilpotent ni un isomorphisme alors  $\text{Ker}(T^n)$  et  $\text{Im}(T^n)$  sont des sous-espaces non dégénérés. Appliquons ces observations à l'endomorphisme  $T = \text{ad } a$  où  $a \in \mathfrak{g}$  est choisi de façon que  $C = \text{Ker}(\text{ad } a)^n$  ait la plus petite dimension possible:  $C$  est donc une sous-algèbre de Cartan non dégénérée de  $\mathfrak{g}$ . Toute sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}$  peut être obtenue de cette façon (cf. [3]).

Le lemme 2.3 est utile pour reconnaître des algèbres qui n'admettent pas de métrique bi-invariante. Par exemple, d'après (1), pour qu'il ait une telle métrique sur  $\mathfrak{g}$  il faut que  $\dim Z(\mathfrak{g}) + \dim \mathcal{S}(\mathfrak{g}) = \dim \mathfrak{g}$  où  $Z(\mathfrak{g})$  et  $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$  sont respectivement le centre et l'idéal dérivé de  $\mathfrak{g}$ . Ainsi une algèbre d'Heisenberg de dimension quelconque ou une algèbre résoluble de centre réduit à  $\{0\}$  n'ont pas de métrique bi-invariantes. Nous dirons qu'un idéal  $I$  de  $\mathfrak{g}$  est dégénéré (ou isotrope) si  $I \cap I^\perp \neq \{0\}$ ;  $I$  est totalement dégénéré si  $I \subset I^\perp$ . Ceci étant on a:

LEMME 2.4. *Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie munie d'une métrique bi-invariante et soit  $I$  un idéal minimal de  $\mathfrak{g}$ .*

(1) *Si  $I$  est non dégénéré, c'est un idéal simple ou abélien de dimension 1.*

(2) *Si  $I$  est dégénéré,  $I$  est totalement isotrope et commutatif.*

(3) *L'idéal  $I^\perp$  est un idéal (propre) maximal de  $\mathfrak{g}$ .*

Dans la première hypothèse,  $\mathfrak{g}$  est produit direct des idéaux  $I$  et  $I^\perp$  et tout idéal de  $I$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$ , donc  $I$  est simple puisque minimal. Si  $J = I \cap I^\perp \neq \{0\}$  alors  $J$  est un idéal de  $I$  et donc  $I = J$  et  $I \subset I^\perp$ . De plus, comme  $I^\perp \subset Z_{\mathfrak{g}}(I)$ , d'après 2.3,  $I$  est commutatif. L'assertion (3) est évidente.

En particulier si la métrique de  $\mathfrak{g}$  est définie positive (ou négative)  $\mathfrak{g}$  est produit direct d'un idéal commutatif par un idéal compact i.e. à forme de Killing définie négative (voir [6] et [7]).

Les considérations précédentes amènent à distinguer trois types d'algèbres de Lie munie d'une métrique bi-invariante: les algèbres simples munies de la forme de Killing, les algèbres de dimension 1 et enfin les algèbres non simples de dimension plus grande que 1, telles que tout idéal propre est dégénéré. On a en fait:

PROPOSITION 2.5. *Toute algèbre de Lie munie d'une métrique bi-*

*invariante se décompose en produit d'idéaux orthogonaux de l'un des trois types ci-dessus.*

La démonstration se fait par récurrence sur la dimension de l'algèbre  $\mathfrak{g}$ ; si  $\mathfrak{g}$  est de dimension 1, le résultat est clair. Si la dimension de  $\mathfrak{g}$  dépasse 1,  $\mathfrak{g}$  est ou bien du premier type, ou bien du troisième type ou bien  $\mathfrak{g}$  contient un idéal propre  $I$  non dégénéré. Dans ce dernier cas,  $\mathfrak{g}$  est somme orthogonale des idéaux  $I$  et  $I^\perp$  auxquels l'hypothèse de récurrence s'applique.

D'après la proposition il nous faut étudier les algèbres des types 1 et 3 pour compléter ce travail.

**3. Métriques bi-invariantes sur les groupes simples.** Ici le groupe  $G$  est supposé connexe. Un argument analogue à celui de l'introduction montre qu'il y a une bijection entre les tenseurs de type  $(0, 2)$  symétriques bi-invariants sur  $G$  et les formes bilinéaires symétriques sur  $\mathfrak{g}$  qui vérifient la condition (1). Supposons  $G$  simple, la forme de Killing  $k(a, b) = \text{tr}(\text{ad } a \circ \text{ad } b)$  de  $\mathfrak{g}$  définit une métrique bi-invariante sur  $G$ . Soit  $B$  une forme bilinéaire sur  $\mathfrak{g}$ , alors il existe une application linéaire  $u: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  unique telle que  $B(a, b) = k(u(a), b)$  quels que soient  $a$  et  $b$  dans  $\mathfrak{g}$ . Si  $B$  est symétrique, le noyau de  $u$  est le radical de  $B$ . Ce noyau est un idéal de  $\mathfrak{g}$  si  $B$  satisfait (1). Si le corps sous-jacent à l'algèbre  $\mathfrak{g}$  était algébriquement clos, un argument analogue au lemme de Schur montre que  $B$  est proportionnelle à  $k$ . Dans notre cas on a:

**LEMME 3.1.** *L'ensemble des applications linéaires  $u: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  telles que  $(a, b) \mapsto k(u(a), b)$  est symétrique et vérifie (1) est un sous-corps commutatif  $k(\mathfrak{g})$  de l'anneau  $\text{End}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$  des endomorphismes de l'espace  $\mathfrak{g}$ .*

**DEMONSTRATION.** Que  $k(\mathfrak{g})$  soit formé d'éléments inversibles et de l'endomorphisme nul provient de ce qui a été dit. Le fait que  $k(u(a), b)$  satisfait (1) équivaut à la condition:

$$(C) \quad u([a, b]) = [u(a), b] = [a, u(b)] \quad \forall a, b \in \mathfrak{g}.$$

De plus si  $u$  et  $v$  vérifient (C),  $u \circ v$  et  $v \circ u$  la vérifient également et ces deux applications coïncident sur  $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ :

$$(u \circ v)([a, b]) = u([v(a), b]) = [u \circ v(a), b]$$

mais aussi

$$\begin{aligned} (u \circ v)([a, b]) &= u([a, v(b)]) = [u(a), v(b)] \\ &= [v(a), u(b)] = (v \circ u)([a, b]) \end{aligned}$$

**REMARQUE 3.2.** Si  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie telle que  $\mathcal{D}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$  qui

possède une métrique bi-invariante  $k$ , le raisonnement précédent est valable:  $k(\mathfrak{g})$  est alors un sous-anneau commutatif de  $\text{End}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{g})$ . C'est donc un anneau semi-local complet, produit fini d'anneaux locaux complets (de dimension finie). La décomposition de l'unité 1 en somme d'idempotents indécomposables correspond à la décomposition de  $\mathfrak{g}$  en somme orthogonal d'idéaux indécomposables  $I_j$  chacun d'eux vérifiant  $\mathcal{D}(I_j) = I_j$ . Revenons au cas simple, on a:

3.3. Soit  $G$  un groupe de Lie simple et connexe. L'espace des tenseurs sur  $G$  de type  $(0, 2)$  symétriques bi-invariants est de dimension au plus 2. Il est de dimension 1 si  $G$  est de dimension impaire.

En effet  $k(\mathfrak{g})$  ne peut être que  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ ; de plus si la dimension de  $\mathfrak{g}$  sur  $\mathbf{R}$  est impaire, tout endomorphisme de  $\mathfrak{g}$  a au moins une valeur propre et par suite tout élément de  $k(\mathfrak{g})$  est un multiple de la forme de Killing de  $\mathfrak{g}$ .

Étudions de plus près le cas où  $k(\mathfrak{g}) = \mathbf{C}$ . Alors  $\mathfrak{g}$  a une structure naturelle de  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel et la condition (C) signifie que le crochet est  $\mathbf{C}$ -bilinéaire si bien que  $\mathfrak{g}$  est en fait une  $\mathbf{C}$ -algèbre de Lie, simple puisqu'elle l'est en tant qu'algèbre de Lie réelle. Soit alors  $k_{\mathbf{C}}: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbf{C}$  la forme de Killing de  $\mathfrak{g}$  sur  $\mathbf{C}$ ; pour toute forme  $\mathbf{R}$ -linéaire  $f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{R}$ , l'application  $(a, b) \rightarrow f(k(a, b))$  est une forme bilinéaire symétrique vérifiant (1), sur l'algèbre de Lie réelle  $\mathfrak{g}$ . On voit donc puisque  $k(\mathfrak{g})$  est de dimension 2, que toute forme bilinéaire symétrique bi-invariant sur  $\mathfrak{g}$  est de la forme  $f \circ k_{\mathbf{C}}$ . L'espace de ces formes admet par exemple pour base  $R_e \circ k_{\mathbf{C}}$  et  $\text{Im} \circ k_{\mathbf{C}}$  où  $R_e$  et  $\text{Im}$  désignent respectivement les projections réelle et imaginaire. Soit maintenant  $g'$  une forme réelle de l'algèbre de Lie simple complexe  $\mathfrak{g}$ ; alors  $g' \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}$  en tant que  $\mathbf{R}$  et que  $\mathbf{C}$ -algèbre de Lie. La forme de Killing de  $\mathfrak{g}$  sur  $\mathbf{C}$  est l'extension de la forme de Killing (réelle) de  $g'$ . Soient  $\mathfrak{g}_1$  et  $\mathfrak{g}_2$  les sous-espaces réels de  $\mathfrak{g}$  formés respectivement des vecteurs réels,  $g'$ , et des vecteurs imaginaires pures  $i g'$ . Pour la forme  $R_e \circ k_{\mathbf{C}}$ ,  $\mathfrak{g}_1$  et  $\mathfrak{g}_2$  sont orthogonaux et les formes quadratiques  $y$  sont opposées car  $k_{\mathbf{C}}(ix, iy) = -k_{\mathbf{C}}(x, y)$ . Ainsi la forme  $R_e \circ k_{\mathbf{C}}$  est donc de signature  $(m, m)$  où  $m$  est la dimension de  $g'$ ; les autres métriques bi-invariantes sur  $\mathfrak{g}$  ont toutes la même signature  $(m, m)$ , en particulier la forme de Killing  $k_{\mathbf{R}}$ , car sur  $k(\mathfrak{g}) - \{0\}$ , la fonction signature est continue donc localement constante.

Par conséquent les algèbres de Lie réelles simples  $\mathfrak{g}$  telles que  $k(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}$  ne sont autres que les algèbres de Lie complexes simples, considérées comme algèbres sur  $\mathbf{R}$ . Celle de plus petite dimension est  $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$  qui en tant qu'algèbre de Lie réelle est l'algèbre  $\mathfrak{so}_{3,1}(\mathbf{R})$ , algèbre du groupe de Lorentz.

**4. Groupes avec métrique de Lorentz bi-invariante.** Pour une métrique de Lorentz on entend une métrique d'indice 1. Etudions les groupes de Lie qui ont des métriques de Lorentz bi-invariantes. D'après la section 3, si un groupe simple a une métrique comme ci-dessus, sa forme de Killing est d'indice 1; aussi son groupe complexifié est simple. Soit  $(G, \langle, \rangle)$  un groupe de Lie muni d'une métrique bi-invariante; nous dirons qu'il est indécomposable si son algèbre  $\mathfrak{g}$  n'est pas produit orthogonal d'idéaux non triviaux. Compte tenu de 2.5, pour connaître les groupes dont il est question dans ce paragraphe il suffit de connaître ceux qui sont indécomposables.

Soit  $H_{2m+1} = \mathbf{R} \times \mathbf{C}^m$  muni de sa structure usuelle de variété différentiable réelle. Avec des notations évidentes, le produit sur  $H_{2m+1}$  défini par:

$$(\alpha, (z_j))(\alpha', (z'_j)) = (\alpha + \alpha' + (1/2) \sum_{j=1}^m I_m \bar{z}_j z'_j, (z_j + z'_j))$$

fait de  $H_{2m+1}$  un groupe de Lie; c'est le groupe d'Heisenberg de dimension  $2m + 1$ . Soient  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m > 0$ ,  $m$  nombres réels, Faisons agir le groupe additif  $\mathbf{R}$  sur  $H_{2k+1}$  par l'action:

$$\ell(t)(\alpha, (z_j)) = (\alpha, (e^{i\lambda_j t} z_j))$$

Désignons par  $G(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ , ou simplement  $G_m(\lambda)$ , le groupe produit semi-direct de  $\mathbf{R}$  par  $H_{2m+1}$  suivant  $\ell$ . Les groupes  $G_m(\lambda)$  sont caractérisés par le fait suivant:

**THÉORÈM 4.1.** *Les groupes  $G_m(\lambda)$ ,  $m \in \mathbf{N}^*$ , sont les seuls groupes de Lie connexes, simplement connexes et non simples qui peuvent être munis d'une métrique de Lorentz-invariante pour laquelle ils soient indécomposables.*

**DÉMONSTRATION.** D'abord construisons sur  $G_m(\lambda)$  une métrique comme celle de l'énoncé. Pour cela soit  $\mathfrak{g}_m(\lambda) = \mathfrak{g}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  l'algèbre de Lie de  $G_m(\lambda)$ . Celle-ci est un produit semi-direct de l'algèbre d'Heisenberg  $\mathfrak{h}_{2m+1}$  par l'algèbre  $\mathbf{R}$ . De façon précise, il existe une base  $\{e_0, e_1, \dots, e_{2m}, e_{2m+1}\}$  de  $\mathfrak{g}_m(\lambda)$  dans laquelle le crochet s'exprime comme:

$$(2) \quad \begin{aligned} [e_0, e_i] &= 0, & [e_{2j-1}, e_{2j}] &= e_0 \\ [e_{2m+1}, e_{2j-1}] &= \lambda_j e_{2j}, \\ [e_{2m+1}, e_{2j}] &= -\lambda_j e_{2j-1} \end{aligned}$$

pour  $i > 0, j = 1, 2, \dots, k$  tous les autres crochets étant nuls ou déduits de ceux par antisymétrisation. On remarquera que  $\{e_0, e_1, \dots, e_{2m}\}$  est une base de  $\mathfrak{h}_{2m+1}$ . Considérons sur  $\mathbf{C}^m \equiv \mathbf{C}^{2m}$  le produit scalaire usuel; étendons

celui-ci en une forme bilinéaire symétrique  $\langle , \rangle$  sur  $\mathfrak{g}_m(\lambda)$  de façon que le plan déterminé par  $e_0$  et  $e_{2m+1}$  soit hyperbolique et orthogonal à  $\mathbf{R}^{2m} \equiv \mathbf{C}^m$ . Evidemment cette forme est non dégénérée et d'indice 1; de plus un calcul direct montre que pour tout  $a, b$  et  $c$  dans  $\mathfrak{g}$  on a:

$$\langle (\text{ad } a)(b), c \rangle + \langle b, (\text{ad } a)(c) \rangle = 0 .$$

Ainsi  $\langle , \rangle$  est une métrique de Lorentz bi-invariante sur  $G_m(\lambda)$  d'après 2.2.

Pour prouver l'assertion réciproque, remarquons d'abord les faits suivants, pour une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  munie d'une métrique bi-invariante: Si  $I$  est un idéal totalement isotrope de  $\mathfrak{g}$ , on a les deux suites, canoniques d'algèbres de Lie suivantes

$$(3) \quad \begin{aligned} 0 &\rightarrow I \rightarrow I^\perp \rightarrow I^\perp/I \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow I^\perp \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/I^\perp \rightarrow 0 . \end{aligned}$$

L'algèbre quotient  $W = I^\perp/I$  est munie, par restriction à  $I^\perp$  puis par passage au quotient, d'une métrique bi-invariante déduite de celle de  $\mathfrak{g}$ . Si  $I$  est de dimensions 1, la première suite est déterminée par un 2-cocycle  $\omega: W \times W \rightarrow I \equiv \mathbf{R}$  tandis que la seconde est définie par une dérivation  $D$  de l'algèbre  $I^\perp$ .

Dans ce qui suit nous ferons les identifications suivantes:

$$I^\perp = I \oplus W, \quad \mathfrak{g}/I^\perp = \mathbf{R}D, \quad \mathfrak{g} = I^\perp \oplus \mathbf{R}D .$$

Ceci étant nous avons le:

**LEMME 4.2.** *Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie non simple munie d'une métrique de Lorentz bi-invariante  $\langle , \rangle$ . Si tout idéal de  $\mathfrak{g}$  est non dégénéré alors:*

- (1) *Le centre  $I = Z(\mathfrak{g})$  est de dimension 1 et totalement dégénéré.*
- (2) *L'algèbre quotient  $W = I^\perp/I$  est commutative et la métrique induite sur  $W$  est d'indice 0.*
- (3) *Il existe une dérivation  $D$  de l'algèbre  $I^\perp$ , nulle sur  $I$ , induisant une dérivation inversible sur  $W = I^\perp/I$  et telle que  $\mathfrak{g} = I^\perp \oplus \mathbf{R}D$ .*

**DÉMONSTRATION.** Montrons d'abord que  $Z(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$ . Pour ceci soit  $J$  un idéal minimal de  $\mathfrak{g}$ . D'après l'hypothèse  $J \cap J^\perp \neq \{0\}$  et par suite  $J \subset J^\perp$ ,  $\dim J = 1$  et  $J \subset Z(\mathfrak{g})$  d'après (3) de 2.3. Par ailleurs soit  $z \in Z(\mathfrak{g})$ ,  $z \neq 0$ ; alors  $\mathbf{R}z$  est un idéal minimal de  $\mathfrak{g}$  et l'argument qui précède assure qu'il est totalement dégénéré. Donc  $Z(\mathfrak{g})$  est totalement isotrope et puisque la métrique est d'indice 1,  $Z(\mathfrak{g})$  est de dimension 1.

Posons  $Z(\mathfrak{g}) = \mathbf{R}e_1 = I$  et écrivons  $\mathfrak{g} = I^\perp \oplus \mathbf{R}D$  en choisissant  $D$  dans  $\mathfrak{g}$  tel que  $\langle D, e_1 \rangle = 1$  et  $\langle D, D \rangle = 0$ . Evidemment on pourra regarder  $D$  comme une dérivation de l'algèbre  $I^\perp$ . Désignons par  $P$  le plan hyperbo-



lique  $\mathbf{R}D \oplus I$ . On a,  $P^\perp \subset I^\perp$  et  $P^\perp \cap I = \{0\}$  car  $P \cap P^\perp = \{0\}$ . Ceci implique, pour des questions de dimension, que  $I^\perp = P^\perp \oplus I$  et donc les espaces vectoriels  $W$  et  $P^\perp$  sont isomorphes. Si  $[x, y]_g$  dénote le crochet sur  $g$ , pour  $x$  et  $y$  dans  $P^\perp$  nous pouvons écrire  $[x, y]_g = [x, y]_{P^\perp} \oplus \omega(x, y)e_1$  où  $\omega(x, y) \in \mathbf{R}$ . D'autre part,  $[D, e_1] = D(e_1) = 0$  et  $[D, x] = D_1(x) + \lambda(x)e_1$  pour  $x \in P^\perp$  avec  $D_1(x) \in P^\perp$  et  $\lambda(x) \in \mathbf{R}$ . Or comme  $\langle [D, x], D \rangle = 0$ , d'après (1), on a donc  $\langle D_1(x) + \lambda(x)e_1, D \rangle = 0$  ce qui implique  $\lambda(x) = 0$ . Ainsi  $D$  peut être vue comme une dérivation de  $W$ .

Cependant pour  $x$  et  $y$  dans  $P^\perp$  on a les identités:

$$\begin{aligned} \langle D, [x, y] \rangle &= \langle D, [x, y]_{P^\perp} + \omega(x, y)e_1 \rangle = \omega(x, y) \\ \langle D, [x, y] \rangle &= \langle [D, x], y \rangle = \langle Dx, y \rangle \end{aligned}$$

autrement dit,

$$(4) \quad \omega(x, y) = \langle Dx, y \rangle \text{ pour tout } x \text{ et } y \text{ dans } W.$$

Supposons  $W$  commutative et considérons la seconde suite exacte de (3). Puisque  $g/I^\perp \cong \mathbf{R}D$ ,  $g$  est un produit semi-direct de l'idéal  $I^\perp$  par l'algèbre  $\mathbf{R}D$  et pour  $x$  et  $y$  dans  $I^\perp$  nous pouvons écrire:

$$[(x, \lambda D), (y, \mu D)] = (\lambda D(y) - \mu D(x), 0)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont quelconques dans  $\mathbf{R}$ . Cette formule jointe au fait que  $\mathcal{D}(g) = I^\perp = I \oplus W$  nous permet d'affirmer que  $D$ , en tant que dérivation de  $W$ , est surjective.

Reste à montrer que  $W$  est commutative. Il est évident que la métrique induite sur  $W$  est d'indice 0; par conséquent  $W$  est produit orthogonal d'un idéal commutatif  $X$  par un idéal semi-simple  $S$ , d'après 2.5. La dérivation  $D$  de  $W$  étant antisymétrique, elle laisse stables  $X$  et  $S$ . Or si  $S \neq \{0\}$ , alors  $S$  est un idéal non dégénéré de l'algèbre  $g$ . Ainsi  $W = X$  est commutative. Ceci achève la preuve du lemme.

Revenons à la démonstration du théorème. Soit  $G$  un groupe de Lie connexe et simplement connexe. Si  $G$  est muni d'une métrique de Lorentz bi-invariante, il en sera de même de  $g$ . Soit  $\langle, \rangle$  cette métrique; appliquons à  $g$  le lemme précédent. Alors l'algèbre commutative  $W$  possède une dérivation antisymétrique inversible  $D$ , le crochet sur  $I^\perp = Z(g) \oplus W$  est défini par un 2-cocycle  $\omega$ , et  $D$  et  $\omega$  sont liés par la relation (4). Or  $D$  étant antisymétrique et inversible il existe une base orthonormée  $\{e_1, \dots, e_{2m}\}$  de  $W$  et des scalaires non nuls  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  pour lesquels

$$D(e_{2i-1}) = \lambda_i e_{2i}, \quad D(e_{2i}) = -\lambda_i e_{2i-1}$$

pour  $1 \leq i \leq m$ .

Par ailleurs, la suite exacte  $0 \rightarrow I = \mathbf{R}e_0 \rightarrow I^\perp \rightarrow W \rightarrow 0$ , définie par le

cocycle non dégénéré  $\omega$ , permet d'exprimer le crochet de l'algèbre  $I^\perp$  dans la base  $\{e_0, e_1, \dots, e_{2m}\}$  comme:

$$[e_{2i-1}, e_{2i}] = \lambda_i e_0, \quad [e_k, e_l] = 0 \quad \text{autrement}$$

et donc  $I^\perp$  est isomorphe à l'algèbre d'Heisenberg de dimension  $2m + 1$ . Par conséquent si on pose  $D = e_{2m+1}$  et on utilise la seconde suite de (3), le crochet de  $\mathfrak{g}$  est donné par:

$$\begin{aligned} [e_{2i-1}, e_{2i}] &= \lambda_i e_0, & 1 \leq i \leq m \\ [e_{2m+1}, e_{2i-1}] &= \lambda_i e_{2i}; & [e_{2m+1}, e_{2i}] = -\lambda_i e_{2i-1} \end{aligned}$$

Evidemment  $\mathfrak{g}$  est isomorphe à une algèbre comme celles définies par (2). Ceci montre le théorème.

**5. Applications.** Voici quelques conséquences du théorème 4.1 ou de sa preuve. Soit  $W$  une algèbre de Lie munie d'une métrique bi-invariante. Supposons donnés une forme bilinéaire  $\omega: W \times W \rightarrow \mathbf{R}$  et un endomorphisme  $D$  de l'espace  $W$  liés par la relation:

$$\omega(x, y) = \langle D(x), y \rangle \quad x, y \quad \text{quelconques dans } W.$$

Il est banal que  $D$  est antisymétrique si et seulement si il en est ainsi de  $\omega$ . En outre pour que  $D$  soit une dérivation il faut et il suffit que pour tout  $x, y$  et  $z$  dans  $W$  on ait:

$$\omega([x, y], z) + \omega([y, z], x) + \omega([z, x], y) = 0.$$

De plus  $\omega$  est un cobord si et seulement si  $D$  est intérieure. Considérons une dérivation antisymétrique  $D$  de  $W$ . Le 2-cocycle  $\omega$  défini comme ci-dessus détermine une extension centrale notée  $I^\perp$  de  $W$  par  $\mathbf{R}$ . L'algèbre  $\mathfrak{g}$  produit semi-direct de l'idéal  $I^\perp$  par  $\mathbf{R}D$  est dite l'algèbre double extension de  $W$  suivant  $D$  (ou  $\omega$ ). On a:

**LEMME 5.1.** *Soient  $D_1, D_2$  deux dérivations antisymétriques de  $W$ . Si  $D_1 - D_2 = \text{ad } z$  où  $z \in W$ , alors les doubles extensions définies par  $D_1$  et  $D_2$  sont isomorphes.*

**DÉMONSTRATION.** Désignons par  $V_1$  et  $V_2$  l'espace vectoriel  $V = \mathbf{R}e \oplus W$  muni respectivement des crochets de Lie définis par:

$$\begin{aligned} [\alpha e + x, \beta e + y]_1 &= \langle D_1 x, y \rangle e + [x, y]_W, \\ [\alpha e + x, \beta e + y]_2 &= \langle D_2 x, y \rangle e + [x, y]_W, \end{aligned}$$

pour  $\alpha, \beta$  dans  $\mathbf{R}$  et  $x$  et  $y$  dans  $W$ . Compte tenu du fait que  $\langle (D_1 - D_2)(x), y \rangle = \langle (\text{ad } z)(x), y \rangle$  il résulte que l'isomorphisme  $\eta$  de l'espace  $V$  défini par:  $\eta(e) = e, \eta(x) = x - \langle z, x \rangle e$  pour  $x \in W$ , est un isomorphisme de l'algèbre  $V_1$  sur l'algèbre  $V_2$ . Soit  $\mathfrak{g}_1 = \mathbf{R}D_1 \oplus V_1$  (resp.  $\mathfrak{g}_2 = \mathbf{R}D_2 \oplus V_2$ ) l'algèbre de

Lie produit semi-direct de l'idéal  $V_1$  (resp.  $V_2$ ) par  $RD_1$  (resp.  $RD_2$ ). Etendons l'isomorphisme  $\eta$  de  $V_1$  dans  $V_2$ , en un isomorphisme linéaire noté encore  $\eta$  de  $\mathfrak{g}_1$  dans  $\mathfrak{g}_2$ , en posant  $\eta(D_1) = D_2 + z$ . Un calcul direct montre que  $\eta$  est un isomorphisme d'algèbres de Lie.

Par ailleurs l'argument donné dans la preuve du théorème implique le:

**LEMME 5.2.** *Soit  $W$  une algèbre munie d'une métrique bi-invariante et  $D$  une dérivation antisymétrique de  $W$ . Alors, l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  double extension de  $W$  suivant  $D$  est munie d'une métrique bi-invariante déduite de celle de  $W$ .*

En effet la métrique sur  $\mathfrak{g} = \mathbf{R}e_1 \oplus \mathbf{R}D \oplus W$  est construite en décidant que  $\mathbf{R}e_1 \oplus \mathbf{R}D$  est un plan hyperbolique orthogonal à  $W$ . Remarquer que la notion de double extension joue un rôle capital dans notre théorie.

Le corollaire qui suit est une conséquence immédiate du théorème et de l'étude faite au paragraphe 3.

**COROLLAIRE 5.3.** *Soit  $G$  un groupe de Lie connexe. Si  $G$  est muni d'une métrique de Lorentz bi-invariante pour laquelle son algèbre  $\mathfrak{g}$  est indécomposable alors,  $G$  est simple et sa forme de Killing est d'indice 1 ou bien le revêtement universel de  $G$  est isomorphe à un groupe de la forme  $G_m(\lambda)$ .*

Remarquer que ce corollaire et la proposition 2.5 permettent de décrire les groupes de Lie connexes qui ont des métriques de Lorentz bi-invariantes. Il suffit pour cela d'utiliser un argument analogue à celui du lemme 7.5 de [7].

Regardons l'espace de Minkowski  $M$ , de dimension 4, comme un groupe de Lie muni d'une métrique de Lorentz bi-invariante. Ce groupe a une structure d'espace-temps au sens de [9] et il en est de même de  $G_1(\lambda)$ . Cependant  $G_1(\lambda)$  et  $G_1(1)$  sont isomorphes. Par conséquent, compte tenu du théorème, on a:

**COROLLAIRE 5.4.** *Les groupes  $G_1(1)$  et  $M$  sont les seuls groupes de Lie résolubles connexes et simplement connexes à être munis d'une structure d'espace-temps dont la métrique est bi-invariante.*

Noter que le groupe des isométries d'un plan hyperbolique est aussi muni d'une métrique de Lorentz bi-invariante. En effet ce groupe est la composante connexe de l'élément neutre de  $O(1, 2)$  et la forme de Killing de ce dernier groupe est d'indice 1.

Pour l'étude des propriétés de courbure, des variétés Lorentziennes  $G_m(\lambda)$  le lecteur est renvoyé à [6].

**6. Orbites suivant la représentation adjointe.** Intéressons nous aux orbites de  $\mathfrak{g}$  par  $G$ . Soit  $O(a)$  l'orbite passant par  $a$ . Il est évident que l'algèbre d'isotropie en  $a$  est le noyau  $\text{Ker}(\text{ad } a)$  de l'endomorphisme  $\text{ad } a$  de  $\mathfrak{g}$  et que l'espace tangent à  $O(a)$  au point  $a$  est l'espace affine  $a + \text{Im}(\text{ad } a)$ . D'autre part il est connu, pour une algèbre de Lie quelconque  $\mathfrak{g}$ , que  $M_a = \text{Ker}(\text{ad } a) \cap \text{Im}(\text{ad } a)$  est une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$  et que  $[\text{Ker}(\text{ad } a), \text{Im}(\text{ad } a)] \subseteq \text{Im}(\text{ad } a)$  (cf. [1], Ch. 8 page 160).

Transportons  $M_a$  sur  $O(a)$  par l'action de  $G$  de façon à définir une distribution. De ce qui précède cette distribution est intégrable. De plus si  $\mathfrak{g}$  est munie d'une métrique bi-invariante, le sous-espace  $M_a$  de  $\mathfrak{g}$  est totalement dégénéré puisque d'après (1),  $\text{Ker}(\text{ad } a)$  et  $\text{Im}(\text{ad } a)$  sont orthogonaux entre-eux. Nous avons donc:

**LEMME 6.1.** *Si  $G$  est muni d'une métrique bi-invariante alors l'orbite  $O(a)$  d'un point quelconque  $a$  de  $\mathfrak{g}$  par l'action adjointe est munie d'un feuilletage  $\mathcal{F}_a$  totalement isotrope défini par l'algèbre  $M_a$ .*

Voici deux conditions pour que le feuilletage  $\mathcal{F}_a$  soit trivial, c'est à dire fait par des points.

**THÉORÈME 6.2.** *Soit  $G$  un groupe de Lie d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  muni d'une métrique bi-invariante. Pour l'orbite  $O(a)$  de  $a \in \mathfrak{g}$ , suivant la représentation adjointe de  $G$ , les conditions suivantes sont équivalentes:*

- (1) *Le feuilletage  $\mathcal{F}_a$  de  $O(a)$  est trivial.*
- (2) *La restriction de la métrique de  $\mathfrak{g}$  fait de  $O(a)$  une variété pseudoriemannienne.*
- (3) *L'espace homogène  $O(a)$  est réductif.*

Nous dirons que  $a$  est réductif s'il vérifie l'une des conditions du théorème.

**DÉMONSTRATION.** L'équivalence de (1) et (2) résulte du fait que  $\text{Ker}(\text{ad } a)$  et  $\text{Im}(\text{ad } a)$  sont orthogonaux pour toute métrique bi-invariante. Identifions  $O(a)$  avec la variété quotient  $G/\text{Is}(a)$  où  $\text{Is}(a)$  est le groupe d'isotropie de  $a$ . Si  $O(a)$  est réductif, il existe un sous-espace  $S$  supplémentaire de  $\text{Ker}(\text{ad } a)$  dans  $\mathfrak{g}$  stable par les  $\text{Ad}(g)$ ,  $g \in \text{Is}(a)$  (cf. [5]). Par conséquent  $[\text{Ker}(\text{ad } a), S] \subset S$ .

D'autre part la restriction de l'endomorphisme  $\text{ad } a$  de  $\mathfrak{g}$  à  $\text{Ker}(\text{ad } a)$  est nilpotent tandis que sa restriction à  $S$  est inversible car sinon  $S \cap \text{Ker}(\text{ad } a) \neq \{0\}$ . Par suite  $\mathfrak{g} = \text{Ker}(\text{ad } a) \oplus S$  n'est autre que la décomposition de Fitting de  $\mathfrak{g}$  relative à  $\text{ad } a$  et donc  $S = \text{Im}(\text{ad } a)$  ([3], page 171). Ainsi (3) implique (2) ou (1). L'assertion réciproque est une évidence.

Remarquer que pour que  $O(a)$  soit la seule feuille du feuilletage  $\mathcal{F}_a$ ,

quel que soit  $a$  dans  $\mathfrak{g}$ , il faut et il suffit que  $\mathfrak{g}$  soit plate. Le théorème fournit des indications sur la nature de l'ensemble des points réductifs. On a par exemple:

**COROLLAIRE 6.3.** *Soit  $G$  un groupe de Lie d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . Si  $G$  est muni d'une métrique bi-invariante alors*

(1) *Si  $\mathfrak{g}$  est nilpotente,  $a$  est réductif si et seulement si  $a$  appartient au centre de  $\mathfrak{g}$ .*

(2) *Si  $\mathfrak{g}$  est semi-simple, les points réductifs de  $\mathfrak{g}$  forment un ensemble dense de  $\mathfrak{g}$  qui contient les éléments semi-simples de  $\mathfrak{g}$ . De plus, tout élément nilpotent non nul de  $\mathfrak{g}$  est non réductif.*

**DÉMONSTRATION.** Supposons  $\mathfrak{g}$  nilpotente. Si  $a \in Z(\mathfrak{g})$  alors  $\text{Ker}(\text{ad } a) = \mathfrak{g}$  et  $a$  est réductif. Réciproquement si  $a$  est réductif,  $\mathfrak{g} = \text{Ker}(\text{ad } a) \oplus \text{Im}(\text{ad } a)$  d'après 6.2 et cette décomposition est celle de Fitting relative à  $\text{ad } a$ . Puisque la restriction de  $\text{ad } a$  à  $\text{Im}(\text{ad } a)$  est inversible nécessairement  $\text{Im}(\text{ad } a) = \{0\}$ .

Faisons l'hypothèse que  $\mathfrak{g}$  soit semi-simple. Rappelons que  $a \in \mathfrak{g}$  est semi-simple (resp. nilpotent), si l'endomorphisme  $\text{ad } a$  de  $\mathfrak{g}$  est semisimple (resp. nilpotente) et observons que  $\text{ad } a$  laisse stable  $\text{Ker}(\text{ad } a)$ . Donc si  $\text{ad } a$  est semi-simple, il existe un sous-espace  $S$  supplémentaire de  $\text{Ker}(\text{ad } a)$  dans  $\mathfrak{g}$  stable par  $\text{ad } a$ . Ainsi la restriction de  $\text{ad } a$  à  $S$  est inversible et donc  $S = \text{Im}(\text{ad } a)$  comme dans la preuve du théorème. Par ailleurs, l'ensemble des éléments réguliers de  $\mathfrak{g}$  est un ouvert dense et si  $a$  est régulier, il est semi-simple ([4], [10]).

Finalement si  $a \neq 0$  est nilpotent, il suit d'un résultat de Jacobson-Morozov ([1], Ch 8, page 162) que  $a \in \text{Ker}(\text{ad } a)^2 \cap \text{Im}(\text{ad } a)^2$ . Ainsi  $a$  n'est pas réductif.

**COROLLAIRE 6.4.** *Soit  $G$  un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . Pour que  $G$  admette une métrique bi-invariante pour laquelle tout point de  $\mathfrak{g}$  est réductif, il faut et il suffit que  $\mathfrak{g}$  soit produit direct d'une algèbre commutative par une algèbre compacte.*

**DÉMONSTRATION.** Soit  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$  comme dans l'énoncé avec  $\mathfrak{g}_1$  commutative. Quelle que soit la métrique bi-invariante sur  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{g}_1$  et  $\mathfrak{g}_2$  sont orthogonales (2.5). La forme de Killing de  $\mathfrak{g}_2$  étant définie négative nous pouvons munir  $\mathfrak{g}$  d'une métrique bi-invariante ayant la même propriété et qui étend cette forme. Or pour  $a \in \mathfrak{g}$  il est alors facile de voir que  $x \in \text{Ker}(\text{ad } a) \cap \text{Im}(\text{ad } a)$  si et seulement si  $x = 0$ .

Supposons que  $\text{Ker}(\text{ad } a) \cap \text{Im}(\text{ad } a) = \{0\}$  pour tout  $a \in \mathfrak{g}$ . Ceci veut dire que les conditions  $a \in \mathfrak{g}$ ,  $b \in \mathfrak{g}$ ,  $[[a, b], b] = 0$  impliquent  $[a, b] = 0$ . Dans ce cas  $\mathfrak{g}$  se décompose comme  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$  où  $\mathfrak{g}_1$  (resp.  $\mathfrak{g}_2$ ) est un idéal

commutatif (resp. semi-simple) de  $\mathfrak{g}$  ([1], Ch. 1, page 130, exercice 10). De plus  $\mathfrak{g}_1$  et  $\mathfrak{g}_2$  sont orthogonales. Par conséquent si  $\mathfrak{g}_2$  n'était pas compacte,  $\mathfrak{g}_2$  et donc  $\mathfrak{g}$  aurait des points non réductifs d'après (2) de 6.3.

**7. Structure de Lie-Poisson associée.** Supposons toujours  $G$  muni d'une métrique bi-invariante et soit  $a \in \mathfrak{g}$ . Si  $\xi_1, \xi_2$  sont deux vecteurs tangents à l'orbite  $O(a)$  au point  $a$ , alors  $\xi_i = [a, x_i] + a$  où  $x_i \in \mathfrak{g}$  pour  $i = 1, 2$  et l'expression  $\langle a, [x_1, x_2] \rangle$  est indépendante des  $x_i$  choisis. Ainsi,

$$\omega(\xi_1, \xi_2) = \langle a, [x_1, x_2] \rangle$$

définit une forme bilinéaire alternée non dégénérée sur l'espace tangent en  $a$  à la variété  $O(a)$ . De plus la 2-forme différentielle  $\omega_a$  sur  $O(a)$  obtenue par transport de  $\omega$  par l'action de  $G$  est fermée. En fait si  $f_1, f_2$  sont deux formes linéaires sur  $\mathfrak{g}$ , il existe des  $x_i, i = 1, 2$ , uniques dans  $\mathfrak{g}$  tels que  $f_i = \langle x_i, - \rangle = \varphi(x_i)$  et l'identité

$$\{f, f_2\}(a) = \langle a, [x_1, x_2] \rangle$$

définit une structure de Lie-Poisson sur  $\mathfrak{g}$  (voir par exemple [11] pour la définition de structure de Lie-Poisson). Cette structure est simplement la structure transportée par  $\varphi$  de la structure de Lie-Poisson sur  $\mathfrak{g}^*$  définie par l'action co-adjointe de  $G$ . Par conséquent chaque orbite  $O(a)$  munie de sa forme  $\omega_a$  est une variété symplectique sur laquelle  $G$  agit par des symplectomorphismes. Analysons maintenant les orbites voisines d'une orbite; pour ceci faisons la construction suivante:

Considérons  $G$  comme fibré principal sur  $O(a)$  de groupe  $\text{Is}(a)$ . Faisons agir  $\text{Is}(a)$  sur la variété produit  $G \times \text{Ker}(\text{ad } a)$  par  $(g_1, \xi) \cdot g = (g_1 g, \text{Ad}(g^{-1})\xi)$  et désignons par  $E_a$  la variété quotient par l'action;  $E_a$  est un fibré vectoriel sur  $O(a)$  dont la fibre au dessus de  $x = g \cdot a = \text{Ad}(g)(a)$  est l'algèbre  $\text{Ker}(\text{ad } x)$ . Il est immédiat de voir que l'application  $\psi_a: E_a \rightarrow \mathfrak{g}$  définie par  $\psi_a(x) = x + \xi_x$ , où  $\xi_x$  est le hamiltonien de la forme linéaire  $x$  sur  $\mathfrak{g}^*$ , est équivariante. De plus, on a:

7.1. Si  $a$  est réductif alors  $\psi_a$  est un difféomorphisme local de  $E_a$  sur la sous-variété ouverte  $\text{Im}(\psi_a)$  de  $\mathfrak{g}$  et réciproquement. Dans ce cas  $\text{Im}(\psi_a)$  est réunion d'orbites et  $E_a$  est un fibré pseudo-riemannien pour la métrique induite sur  $\text{Ker}(\text{ad } a)$  par celle de  $\mathfrak{g}$ . En outre, puisque chaque orbite de  $G$  dans  $E_a$  est un fibré sur  $O(a)$  de fibre type une orbite de la représentation adjointe de  $\text{Is}(a)$  alors, à des revêtements près, les orbites de  $\text{Im}(\psi_a)$  auront la même propriété (comparer avec [8] et 3.2 de [11]).

D'autre part, relativement à la structure de Lie-Poisson sur  $\mathfrak{g}$  on a:

7.2. Si  $a$  est réductif, la structure de Lie-Poisson de  $\mathfrak{g}$  induit une structure de Lie-Poisson sur l'algèbre  $\text{Ker}(\text{ad } a)$  et une structure de Poisson

sur le fibré  $E_a$  pour lesquelles  $\psi_a$  est un morphisme.

Concernant la structure de Poisson transverse à  $O(a)$  au sens de A. Weinstein (voir [11]) nous avons:

7.3. Si  $a$  est réductif, la structure de Poisson transverse à  $O(a)$  est isomorphe à celle de  $\text{Ker}(\text{ad } a)$ . En effet  $a + \text{Ker}(\text{ad } a)$  est une variété transverse à  $O(a)$  et pour  $f_1, f_2$  formes linéaires sur  $\text{Ker}(\text{ad } a)$  on a:

$$\{f_1, f_2\} = \{\tilde{f}_1, \tilde{f}_2\}_a$$

avec  $\tilde{f}_i = f_i \circ \pi$ ,  $\pi$  étant la projection orthogonale de  $\mathfrak{g}$  sur  $\text{Ker}(\text{ad } a)$  (comparer avec Th. II de [8]).

Supposons  $\mathfrak{g}$  semi-simple. Le fait que tout élément nilpotent non nul de  $\mathfrak{g}$  soit non réductif (6.3) explique pourquoi A. B. Givental a choisit a nilpotent pour fournir un contre-exemple à un résultat conjecturé par A. Weinstein (Th. 3.1 de [11]).

7.4. Soit  $\mathfrak{h}$  l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie connexe et simplement connexe  $H$ . Nous appellerons  $P$ -rang de  $\mathfrak{h}$  la dimension maximale  $r$  des orbites de  $\mathfrak{h}$  par l'action adjointe de  $H$ . Cette notion diffère de celle classique de rang d'une algèbre de Lie; les deux notions coïncident si  $\mathfrak{h}$  est semi-simple. Si l'orbite  $O(b)$  de  $b \in \mathfrak{h}$  est de dimension  $r$ , nous dirons que  $b$  est  $P$ -régulier. Ceci étant on a:

LEMME 7.5. *Soit  $\mathfrak{h}$  une algèbre de Lie et soit  $\Omega$  l'ensemble de ses points  $P$ -réguliers. Alors:*

(1) *L'ensemble  $\Omega$  est un ouvert dense de  $\mathfrak{h}$ .*

(2) *Si  $\mathfrak{h}$  est munie d'une métrique bi-invariante,  $\text{Ker}(\text{ad } b)$  est commutative quel que soit  $b$  dans  $\Omega$ .*

En effet, la maximalité du rang se traduit par un nombre fini d'inégalités algébriques; ainsi  $\Omega$  est un ouvert dense de  $\mathfrak{h}$ . La seconde assertion découle du théorème de Duflo-Vergne (cf. [2]).

EXEMPLE 7.6. Etudions les points réductifs et les points  $P$ -réguliers suivant l'action adjointe d'un groupe de la forme  $G_m(\lambda)$  comme ceux définis en 4.

Regardons l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G_m(\lambda)$  comme une double extension. Alors  $\mathfrak{g}$  s'écrit comme  $\mathfrak{g} = \mathbf{R}e_0 \oplus V \oplus \mathbf{R}D$  où  $V$  est un espace vectoriel de dimension  $m$  et  $D: V \rightarrow V$  est un isomorphisme antisymétrique par rapport à un produit scalaire sur  $V$ . De plus le crochet sur  $\mathfrak{g}$  est défini essentiellement par  $[D, x] = D(x)$ ;  $[x, y] = \omega(x, y)e_0$  où  $x, y \in V$  et  $\omega(x, y) = \langle Dx, y \rangle$  la forme  $\langle, \rangle$  étant telle que  $\mathbf{R}e_0 \oplus \mathbf{R}D$  est un plan hyperbolique orthogonal à  $V$ . On a évidemment  $Z(\mathfrak{g}) = \mathbf{R}e_0$  et  $\mathcal{S}(\mathfrak{g}) = \mathbf{R}e_0 \oplus V$ . Montrons que tout point  $a$  de  $\mathfrak{g}$  n'appartenant pas à  $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$  est réductif et  $P$ -régulier.

Soit  $a = \lambda e_0 + x + \eta D$ , avec  $\lambda$  et  $\eta$  réels,  $\eta \neq 0$  et  $x$  dans  $V$ .

Si  $b = \alpha e_0 + y + \gamma D$  est un point quelconque de  $\mathfrak{g}$  on a :

$$[a, b] = \omega(x, y)e_0 + \eta D(y) - \gamma D(x).$$

Par conséquent  $b \in \text{Ker}(\text{ad } a)$  si et seulement si  $y = \gamma(x/\eta)$  ou ce qui est de même  $b = \alpha e_0 + \gamma((x/\eta) + D)$  où  $\alpha$  et  $\gamma$  sont quelconques dans  $\mathbf{R}$ . Ainsi  $\dim \text{Im}(\text{ad } a) = \dim \mathfrak{g} - 2 = \dim V$  ce qui veut dire que  $a$  est  $P$ -régulier.

Maintenant soit  $z \in \text{Ker}(\text{ad } a) \cap \text{Im}(\text{ad } a)$ . Alors

$$\begin{aligned} z &= \alpha e_0 + \gamma((x/\eta) + D) = [a, \alpha' e_0 + y' + \gamma' D] \\ &= \omega(x, y')e_0 + D(\eta y' - \gamma' x) \end{aligned}$$

et donc  $\gamma = 0$ . Par suite,

$$z = \alpha e_0 = \omega(x, y')e_0 + D(\eta y' - \gamma' x)$$

ce qui signifie  $y' = \gamma'(x/\eta)$ ,  $\alpha = \omega(x, y')$ . Or  $d = \omega(x, y') = 0$  et donc  $z = 0$ . Aussi nous avons:

Si  $a \in \mathcal{D}(\mathfrak{g}) - Z(\mathfrak{g})$  alors  $a$  est non réductif, en outre  $a$  est non  $P$ -régulier si  $\dim V = m > 2$ . Si  $\dim V = 2$  et  $a$  est quelconque dans  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_2(\lambda)$ , alors  $a$  est  $P$ -régulier si et seulement si  $a \in \mathfrak{g} - Z(\mathfrak{g})$ . En effet si  $a \in \mathcal{D}(\mathfrak{g}) - Z(\mathfrak{g})$  et  $y \in V$  alors  $[a, D + y] = [\alpha e_0 + x, D + y] = \omega(x, y)e_0 - D(x)$ ; par suite  $\text{Im}(\text{ad } a)$  est dégénérée et  $\dim \text{Im}(\text{ad } a) = 2$ . Supposons  $\dim \mathfrak{g} = 4$ . Si  $a \in \mathfrak{g}$  est  $P$ -régulier,  $\dim \text{Im}(\text{ad } a) = 2$  et donc  $a \notin Z(\mathfrak{g})$ . Réciproquement soit  $a = \alpha e_0 + x + \mu D$  avec un au moins parmi  $x$  et  $\mu$  non nuls. Si  $\mu = 0$ , l'argument ci-dessus montre que  $a$  est  $P$ -régulier. Si  $\mu \neq 0$  et  $x = 0$  alors  $[a, D + y] = \mu D(y)$  et donc  $\text{Im}(\text{ad } a)$  est de dimension 2.

Des arguments de même nature montrent que pour que  $a \in \mathfrak{g}$ ,  $\dim \mathfrak{g} = 4$ , soit réductif il faut et il suffit que  $a \in Z(\mathfrak{g}) \cup (\mathfrak{g} - \mathcal{D}(\mathfrak{g}))$ .

Nous terminons ce travail par l'observation suivante:

7.7. Tous groupe de Lie connexe peut être considéré comme un sous-groupe d'un groupe de Lie connexe muni d'une métrique bi-invariante. En effet, soit  $T^*G$  le fibré cotangent de  $G$ . La variété  $T^*G$  a une structure canonique de groupe de Lie pour laquelle  $G$  est un sous-groupe. Il suffit pour ceci de regarder  $T^*G$  comme le groupe produit semi-direct du groupe commutatif  $\mathfrak{g}^*$  par  $G$  suivant la représentation co-adjointe. Si  $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}$  désigne l'algèbre de Lie de  $T^*G$  il est immédiat de constater que la forme bilinéaire sur  $\mathfrak{g}_1$  définie, avec des notations évidentes, par:

$$\langle (f_1, a), (f_2, b) \rangle = f_1(b) + f_2(a)$$

vérifie la condition (1).



## REFERENCES

- [1] N. BOURBAKI, Groupes et algèbres de Lie, chapitres 1, 7 et 8, Herman, Paris, 1960, 1975,
- [2] M. DUFLO ET M. VERGNE, Une propriété de la représentation co-adjointe d'une algèbre de Lie, C.R. Acad. Sci. Paris 268 (1969), 583-585.
- [3] G. HOSCHILD, The structure of Lie groups, Holden Day Inc., San Francisco, 1965.
- [4] N. JACOBSON, Lie Algebras, John Wiley and Sons, New York, 1962.
- [5] S. KOBAYASHI ET K. NOMIZU, Foundations of Differential Geometry, Vol. II, Interscience Publishers, New York, 1969.
- [6] A. MEDINA, Groupes de Lie munis de pseudo-métriques de Riemann bi-invariantes, Sem. Geom. Diff. (1981-1982), Montpellier.
- [7] J. MILNOR, Curvatures of left invariant metrics on Lie groups, Adv. in Math. 21 (1976), 283-329.
- [8] P. MOLINO, Structure transverse aux orbites de la représentation co-adjointe: le cas des orbites réductives, Sem. Geom. Diff. (1983-1984), Montpellier.
- [9] R. K. SACHS et H. WU, General relativity for Mathematicians, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [10] J. P. SERRE, Algèbres de Lie semi-simples complexes, W. A. Benjamin Inc., New York, 1966.
- [11] A. WEINSTEIN, The local structure of Poisson manifolds, J. of Diff. Geom. 18 (1983), 523-557.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES  
UNIVERSITE DE MONTPELLIER II  
34060 MONTPELLIER CEDEX  
FRANCE

