Real Analysis Exchange, Vol. 8 (1982-83)

Zbigniew Grande, Department of Mathematics, Higher Pedagogical School Bydgoszcz, Poland

# La mesurabilité des fonctions de plusieurs variables.

Dans cette communication je présenterai quelques nouvelles conditions suffisantes pour la mesurabilité des fonctions de deux variables et quelques exemples montrant que les hypothèses dans ces théorèmes sont essentielles.

Définition 1. On dit qu'une fonction $f: R \longrightarrow R$ mesurable(L) (au sens de Lebesgue) est non dégénérée [non dégénérée positivement] au point $x_0 \in R$ lorsque la densité supérieure [la densité inférieure] de l'ensemble $f^{-1}(U)$ au point $x_0$ est positive, quel que soit l'ensemble ouvert $U$ contenant $f(x_0)$.

Pour une fonction quelconque $F: R \times R \longrightarrow R$ posons $F_x(t) = F(x,t)$ et $F^y(t) = F(t,y)$ (les coupes de $F$). Soient $A(f)$ $[B(f)]$ l'ensemble des points $(x,y)$ tels que $F_x$ n'est pas non dégénérée positivement [n'est pas non dégénérée] au point $y$ ou bien $F^y$ n'est pas non dégénérée au point $x$. Désignons par $m_2$ la mesure plane de Lebesgue.

Théorème 1. Soit $F: R \times R \rightarrow R$ une fonction telle que toutes ses coupes $F_x$ et $F^y$ sont mesurables (L). Pour que la fonction $F$ soit mesurable (L) il faut et il suffit que $m_2(A(f)) = 0$.

Exemple 1. Admettons l'hypothèse du continu. Il existe une fonction $F: R \times R \longrightarrow R$ non mesurable (L) et telle que toutes ses coupes $F_x$ et $F^y$ sont mesurables (L) et non dégénérées en tout point $x \in R$.

Exemple 2. Admettons l'hypothèse du continu. Il existe une fonction $F: R \times R \longrightarrow R$ non mesurable (L) et telle que toutes les coupes $F_x$ sont de deuxième classe de Baire et ont la propriété de Denjoy et toutes les coupes $F^y$ sont approximativement continues.

Définition 2. On dit qu'une fonction $g: R \longrightarrow R$ a la propriété (H) lorsqu'il existe pour tout point $x \in R$ deux ensembles ouverts $U_1(x)$ et $U_2(x)$ ayant ses densités supérieures positives au point x et tels que la fonction partielle $g / U_1(x) \cup \{x\}$ est semi - continue supérieurement au point x et la fonction partielle $g / U_2(x) \cup \{x\}$ est semi - continue inférieurement au point x.

Théorème 2. Soit $f: R^2 \longrightarrow R$ une fonction. Si toutes les sections $f^y$ ont la propriété (H) et toutes les sections $f_x$ sont mesurables, la fonction f est également mesurable.

Théorème 3. Soit $f: R^2 \longrightarrow R$ une fonction. Si toutes les sections $f^y$ ont la propriété (H) et toutes les sections $f_x$ ont la propriété de Baire, la fonction f a également la propriété de Baire.

Définition 3. Une fonction $F: R^2 \longrightarrow R$ est dite:

(a) sup - mesurable lorsque la superposition $g(x) = F(x, f(x))$ est mesurable (au sens de Lebesgue), quelle que soit la fonction mesurable $f: R \rightarrow R$

(b) (B) sup - mesurable lorsque la superposition $g(x) = F(x, f(x))$ a la propriété de Baire, quelle que soit la fonction $f: R \longrightarrow R$ ayant la propriété de Baire.

On sait les suivantes conditions suffisantes pour la sup - mesurabilité d'une fonction $F: R \times R \longrightarrow R$:

(1) la continuité des toutes les sections $F_x(t) = F(x,t)$ et la mesurabilité de toutes les sections $F^y(t) = F(t,y)$ ;

(2) la mesurabilité (au sens de Lebesgue) de la fonction F et la continuité approximative de toutes ses sections $F_x$ ;

(3) la semi - équicontinuité supérieure de toutes les sections $'_x$ et la mesurabilité de toutes les sections $F^y$ ;

(4) la semi - continuité approximative inférieure de la fonction ' et la semi - continuité supérieure de toutes ses sections $F_x$ ;

(5) la semi - continuité supérieure de toutes les sections $F_x$ et la semi - continuité approximative inférieure de toutes les sections $F^y$ ;

D'autre part l'hypothèse du continu implique l'existence d'une fonction $F: R^2 \longrightarrow R$ qui n'est pas sup - mesurable, dont toutes les sections $F_x$ sont approximativement continues et toutes les sections $F^y$ sont mesurables et l'existence d'une fonction sup - mesurable et n'étant pas mesurable.

Définition 4. On dit qu'un ensemble $A \subset R$ a la propriété (Z) lorsque, que soit le point $x \in A$, il existe un ensemble ouvert $U \subset A$ et un nombre $\delta > 0$ tels que $m(J \cap U)/m(J) > 1/2$ pour tout intervalle J contenant le point x et de longuer plus petite que $\delta$ ( m, comme d'habitude, désigne la mesure de Lebesgue dans R).

Définition 5. On dit qu'une fonction $F: R \quad R$ a la propriété $(Z_1)$ lorsque, quel que soit le nombre réel a, les ensembles

$$\{x \in R: f(x) < a\} \quad \text{et} \quad \{x \in R: f(x) > a\} \text{ ont la propriété (Z) .}$$

Théorème 4. Si toutes les sections $F_x$ d'une fonction $F: R^2 \longrightarrow R$ ont la propriété $(Z_1)$ et si toutes sections $F^y$ ont la propriété de Baire [sont mesurables] , la fonction F est (B) sup - mesurable • sup - mesurable .

Exemple 3. Il existe une fonction $F:R^2 \longrightarrow R$ ayant la propriété le Baire, mesurable, n'étant pas (B) sup - mesurable et n'étant pas sup - mesurable et telle que toutes ses sections $F^y$ sont boréliennes et qu'il existe pour tout $y \in R$ un ensemble ouvert $U(y) \subset$ tel que la densité inférieure de l'ensemble $U(y)$ au point est $\geq 1/2$ et les fonctions partielles $F_x/U(y)$ sont équicontinues au point y.

Exemple 4. Admettons l'hypohèse du continu. Il existe une fonction $F:R^2 \longrightarrow R$ ayant la propriété de Baire, n'étant pas (B) sup - mesurable, dont toutes les sections $F_x$ sont approximativement continues et dont toutes les sections $F^y$ ont la propriété le Baire.

Théorème 5. Soit $F:R^2 \longrightarrow R$ une fonction. Si toutes les sections $X_y$ ont la propriété de Baire et s'il existe pour tout $y \in R$ un ensemble mesurable $A(y) \subset R$ et un nombre $\delta > 0$ tels que $m(A(y) \cap I)/m(I) \geq 1/2$ pour tout intervalle I contenant y et de longueur plus petite que $\delta$ et que les sections partielles $F_y/A(y)$ sont équicontinues au point y, la fonction F est (B) sup - mesurable.

Théorème 6. Si toutes les sections $F_x$ d'une fonction $F:R^2 \longrightarrow R$ sont semi - équicontinues supérieurement en tout point $y \in R$ et toutes les sections $F^y$ ont la propriété de Baire, la fonction F est (B) sup - mesurable.

Exemple 5. Il existe une fonction $F:R^2 \longrightarrow R$ n'étant pas ni (B) sup - mesurable, ni sup - mesurable, ayant la propriété de Baire et toutes ses sections $F^y$ boréliennes et telle qu'il existe pour tout point $y_o \in R$ et pour tout nombre $\varepsilon > 0$ un ensemble ouvert $\subset R$ de densité 1 au point $y_o$ et tel que, quel que soit R, on a $F(x,y) - F(x,y_o) < \varepsilon$ pour tout $y \in U$.

Exemple 6. Admettons l'hypothèse du continu. Il existe une fonction $F:R^2 \longrightarrow R$ (B) sup - mesurable qui n'a pas de la propriété de Baire.