Real Analysis Exchange Vol. 4 (1978-79)
Zbigniew Grande, ul. Sandomierska 37 m. 39, 85-830
Bydgoszcz, Poland

Quelques remarques sur un théorème de Kamke et les fonctions sup-mesurables

Dans l'article [6] Kamke a démontré le théorème suivant:

Théorème 0. *Si une fonction* f: R→R, *où* R *désigne l'espace des nombres reels, satisfait à la condition suivante:*

(A) *l'ensemble* A(f) *de tous les points* $x \in R$ *pour lesquels il existe un ensemble* E(x) *mesurable (au sens de Lebesgue) tel que* $x \in E(x)$, *la densité inférieure de l'ensemble* E(x) *au point* x *est positive et la fonction partielle* f/E(x) *est semicontinue supérieurement au point* x, *est de mesure pleine (c'est-à-dire la mesure du complementaire* R - A(f) *est égale à zéro);,*

alors la fonction f *est mesurable (au sens de Lebesgue).*

Dans la première part de cet article je démontre quelques remarques concernant de ce théorème et dans la deuxieme je résous un problème concernant la mesurabilité de la superposition F(x,f(x)).

§I. Remarque 1. Dans la condition (A) du théorème 0 on peut remplacer les mots " la densité inférieure de l'ensemble E(x) " par les mots " la densité supérieure de l'ensemble E(x) " et le théorème modifié reste vrai.

Dans la démonstration de cette remarque 1 nous appliquerons le lemme suivant:

Lemme 1. ([1], Lemme 2 et [3], Lemme 1). Soit (X,M,μ) un espace mesurable avec la mesure σ-finie μ. Si une fonction $f: X \to R$ satisfait à la condition suivante:

(B) il existe pour tout ensemble $A \in M$ de mesure positive et pour tout nombre $\varepsilon > 0$ un ensemble $B \in M$ tel que $\mu(B) > 0$, $B \subset A$ et $\operatorname{osc}_B f \leq \varepsilon$;,

alors la fonction f est $\bar{\mu}$-mesurable, où $\bar{\mu}$ désigne le complété de la mesure μ.

Démonstration de la remarque 1. Soient $A \subset R$ un ensemble mesurable (au sens de Lebesgue) de mesure positive et ε un nombre positive. Sans restreindre la généralité on peut supposer que la fonction f soit bornée. Posons $a = \inf \operatorname{ess}_{x \in A} f(x)$. Comme l'ensemble $C = \{x \in A: a \leq f(x) < a + \varepsilon/2\}$ est de mesure extérieure positive, il existe donc un point $x \in C$ étant un point de densité extérieure de l'ensemble C et un ensemble $E(x)$ mesurable, contenant x, ayant la densité supérieure positive au point x et tel que $f(t) - f(x) < \varepsilon/2$ pour tout point $t \in E(x)$. Posons $B = [A - \{x \in A: f(x) < a\}] \cap E(x)$ et remarquons que l'ensemble B est mesurable, contenu dans l'ensemble A et que $\operatorname{osc}_B f \leq \varepsilon$. Comme, de plus, x est un point de densité extérieure de l'ensemble $C \subset A$ et un point auquel la densité supérieure de l'ensemble $E(x)$ est positive, la mesure de l'ensemble B est donc positive et par conséquent, d'après le lemme 1, la fonction f est mesurable.

Remarque 2. Dans le théorème 0 on ne peut pas remplacer l'hypothèse, que la densité inférieure de l'ensemble $\bar{E}(x)$ au point x est positive par l'hypothese que l'ensemble E(x) est de mesure positive dans tout entourage ouvert du point x.

Cette remarque résulte de l'exemple suivant:

Exemple 1. Soit A l'ensemble de Cantor de mesure positive. Il existe deux ensembles B et C nonmesurables et tels que $B \cup C = A$ et $B \cap C = \emptyset$. Rangeons toutes les composantes de l'ensemble R - A en une suite $\{(\alpha_n, \beta_n)\}$ et posons

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ pour } x \in B \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (\alpha_n, (\alpha_n + \beta_n)/2] \\ 1 \text{ pour } x \in C \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} ((\alpha_n + \beta_n)/2, \beta_n) . \end{cases}$$

Théorème 1. <u>Si une fonction</u> f: R→R <u>satisfait à la condition suivante</u>:

(H) <u>l'ensemble</u> H(f) <u>de tous les points</u> $x \in R$ <u>pour lesquels il existe un ensemble</u> E(x) <u>contenant</u> x, <u>ayant la propriété de Baire, étant de deuxième catégorie dans tout entourage ouvert du point</u> x <u>et tel que la fonction partielle</u>

f/E(x) est semicontinue supérieurement au point

x, est résiduel;,

alors la fonction f a la propriete de Baire.

La démonstration du théorème 1 resulte du lemme 2 d'une façon analogue que la démonstration de la remarqu 1 du lemme 1.

Lemme 2. ([4], Th. 1) Soient X un espace métrique, separable et f: X→R une fonction. Pour que la fonction f possède la propriété de Baire, il faut et il suffit qu'elle satisfasse à la condition suivante:

(J) il existe pour tout ensemble $A \subset X$ ayant la propriété de Baire et de deuxième catégorie et pour tout nombre $\varepsilon > A$ ayant la propriété de Baire et de deuxième catégorie tel que $\operatorname{osc}_{B} f \leq \varepsilon$.

Remarque 3. L'exemple 1 montre qu'il existe une fonction dont l'ensemble H(f) = R et qui n'est pas mesurable.

Théorème 2. Il existe une fonction f: R→R n'ayant pas de la propriété de Baire telle que, quel que soit le point $x \in R$, il existe un ensemble mesurable E(x) tel que $x \in E(x)$, la densité supérieure de l'ensemble E(x) au point x est positive et la fonction partielle f/E(x) est continue au point x.

Démonstration. Soit $C \subset R$ l'ensemble dense du type G_δ et de mesure zero. Il existe deux ensembles D et E n'ayant pas de la propriété de Baire et tels que $D \cup E = C$ et $D \cap E = \emptyset$. Il existe également une suite $\{U_n\}$ d'ensembles ouverts tels que les conditions suivantes soient satisfaites:

1/ $U_n \supset U_{n+1}$ pour $n = 1,2,\ldots$;

2/ $C = \bigcap_n U_n$;

3/ en désignant par (α_n^i, β_n^i) les composantes de l'ensemble U_n $(n=1,2,\ldots)$ et par m la mesure de Lebesgue, on ait

$$\frac{m((\alpha_n^i, \beta_n^i))}{m(U_{n+1} \cap (\alpha_n^i, \beta_n^i))} > n .$$

Soit F_{ni} l'ensemble fermé contenu dans l'ensemble $G_{ni} = (\alpha_{2n}^i, \beta_{2n}^i) - U_{2n+1}$ tel que $m(F_{ni})/m(G_{ni}) > 1 - 1/n$. Désignons par H l'ensemble des points de densité de l'ensemble $\bigcup_n \bigcup_i F_{ni}$ et posons

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \in H \cup E \\ 0 & \text{pour } x \notin H \cup E . \end{cases}$$

La fonction f satisfait à toutes les conditions exigées dans le théorème 2.

Remarque 4. Cependant toute fonction $f\colon R \to R$ telle qu'il existe pour tout point $x \in R$ un ensemble mesurable

$E(x)$ tel que $x \in E(x)$, la densité inférieure de l'ensemble $E(x)$ au point x est positive et la fonction partielle $f/E(x)$ est continue au point x, a déjà la propriété de Baire, comme elle a la propriété (G) définie dans le travail [5], plus forte que la propriete " être ponctuellement discontinue " (voir [5], Th. 2).

Démontrons encore le théorème suivant:

Théorème 3. <u>Si la fonction</u> $f: R \to R$ <u>satisfait à la condition suivante</u>:

(K) <u>l'ensemble de tous les points</u> $x \in R$ <u>pour lesquels il existe un ensemble mesurable</u> $E(x)$ <u>contenant</u> x, <u>ayant la densité inférieure positive au point</u> x <u>et tel que la fonction partielle</u> $f/E(x)$ <u>est continue au point</u> x, <u>est résiduel</u>;,

<u>alors la fonction</u> f <u>a la propriété de Baire</u>.

Demonstration. Supposons, au contraire, que la fonction f n'ait pas de la propriété de Baire. Il existe donc un nombre réel a tel que l'ensemble $A = \{x: f(x) < a\}$ n a pas de la propriété de Baire. Soit $\{U_n\}$ la suite de tous les intervalles d'extrémités rationnelles. Désignons par B la différence de l'ensemble A et de la somme de tous les intervalles $U_{n_k} \in \{U_n\}$ dans lesquels l'ensemble A possède la propriété de Baire. Comme l'ensemble A n'a pas de la propriété de Baire, il existe donc un intervale ouvert J tel que les deux ensembles B et $R - A$ sont en même

temps de deuxième catégorie dans tout intervalle I contenu dans J. Désignons par $A_n (n=1,2,\dots)$ l'ensemble de tous les points $x \in B$ tels que $f(x) < a - 1/n$ et la densité moyenne de l'ensemble $\{x: f(x) < a - 1/n\}$ (c'est-à-dire d'un sous-ensemble mesurable de cet ensemble) dans tout intervalle ouvert contenant x et contenu dans l'intervalle $(x-1/n, x+1/n)$ est plus grande que $1/n$. Remarquons que $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Comme l'ensemble B est de deuxième catégorie dans J, au moins l'un des ensembles A_n, $n=1,2,\dots$ est donc le même. Désignons cet ensemble par A_{n_o}. Il existe un intervalle ouvert $I_o \subset J$ dans lequel l'ensemble A_{n_o} est dense. D'autre part, comme l'ensemble R-A est de deuxième catégorie dans l'intervalle I_o, il existe donc, d'après l'hypothese du théorème 3, un point $x_o \in I_o$ tel que $f(x_o) \geq a$ et qui est un point de densité de l'ensemble $D = \{x: f(x) > a - 1/2n_o\}$. Soit $\{x_k\} \subset A_{n_o}$ la suite de points convergente vers le point x_o.
Il existe un nombre $r > 0$ tel que la densité moyenne d'un sous-ensemble mesurable de l'ensemble D dans tout intervalle ouvert contenant x_o et contenu dans l'intervalle (x_o-r, x_o+r) est plus grande que $1-1/2n_o$. Posons $s = \min(r, 1/n_o)$.
En désignant par m_i la mesure intérieure et par F l'ensemble $\{x: f(x) < a - 1/n_o\}$ on a

$$\frac{m_i(F \cap (x_k-s, x_k+s))}{2s} > \frac{1}{n_o} \quad \text{pour } k=1,2,\dots$$

et par conséquent

$$\frac{m_1(F \cap (x_0-s,x_0+s))}{2s} \geq \varlimsup_{k\to\infty} \frac{m_1(F \cap (x_k-s,x_k+s))}{2s}$$

$$\geq \frac{1}{n_0}\text{ , en contradiction avec les faits que}$$

$$\frac{m_1(D \cap (x_0-s,x_0+s))}{2s} > 1 - 1/2n_0 \text{ et } F \cap D = \emptyset \text{ .}$$

Remarque 5. Le théorème 3 ne reste pas vrai, si remplacer dans la condition (K) la continuite de la fonction partielle $f/E(x)$ au point x par sa semicontinuité supérieurement en ce point x. Ceci résulte de l'exemple suivant:

Exemple 2. Soit $A \subset R$ un ensemble de mesure zéro qui n'a pas de la propriété de Baire. Posons

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \in A \\ 0 & \text{pour } x \notin A. \end{cases}$$

§II. Soit $R^2 = RxR$. Une fonction $F: R^2 \to R$ est dite sup-mesurable (voir [9]) lorsque, quelle que soit la fonction mesurable (au sens de Lebesgue) $f: R \to R$, la superposition $g_f(x) = F(x,f(x))$ est une fonction mesurable.

Dans le travail [5] j'ai posé le problème suivant:

Problème. ([5], Probleme 4). Soit $F: R^2 \to R$ une fonction mesurable dont toutes les sections $F_x(t) = F(x,t)$

sont des dérivées. La fonction F doit-elle etre sup-mesurable?

Dans le cas, où la fonction F est bornée, la réponse affirmative a été donnee par Ryll-Nardzewski (voir [5], Addition). Dans cet article je démontre que la réponse est également affirmative dans le cas général. La méthode appliquée ici est la méthode de Ryll-Nardzewski modifiée par l'introduction de l'integrale de Denjoy.

Théorème 4. _Soit_ $F: R^2 \to R$ _une fonction mesurable. Si toutes les sections_ $F_x(y) = F(x,y)$ _sont des dérivées, la fonction_ F _est sup-mesurable_.

Dans la démonstration de ce théorème nous appliquerons le théorème suivant de Laczkovich:

Théorème 5. ([7], Th. 2). _Let_ J _be a finite closed interval and let_ f _be a measurable on_ $J \times I (I=[0,1])$. _Suppose that for every fixed_ $y \in I$, $f^y(x) = f(x,y)$ _is Denjoy-integrable in the restricted sense on_ J. _Then the function_

$$g(y) = (D_*) \int_J f^y \, dx$$

is measurable on I.

Dans le théorème 5 l'intervalle I peut être remplacer par R.

Démonstration du théorème 4. Remarquons que

$$F(x,y) = \lim_{n\to\infty} g_n(x,y), \text{ où } g_n(x,y) = n\cdot(D_*)\int_y^{y+1/n} F(x,t)dt$$

(voir [8], p. 241).

Considérons maintenant la fonction g_n. Par raison de symétrie, il résulte du théorème 5 que toutes les sections $(g_n)^y$ sont mesurables. D'autre part toutes les sections $(g_n)_x(y) = g_n(x,y)$ sont continues. Les fonctions g_n sont donc, d'après bien connu le théorème de Carathéodory [1], sup-mesurables et par conséquent la fonction F est la même.

TRAVAUX CITES

[1] Carathéodory C.; Vorlesungen über reelle Funktionen, Leipzig-Berlin, 1927.

[2] Davies R.; Separate approximate implies measurability, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 73(1973), 461-465.

[3] Grande Z.; Sur la mesurabilite des fonctions de deux variables, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Math. Astronom. Phys. 21(1973), 813-816.

[4] Grande Z.; Sur la propriété de Baire d'une fonction de deux variables ponctuellement discontinue par rapport à une variable, ibid. 25(1970), 533-537.

[5] Grande Z.; La mesurabilité des fonctions de deux variables et de la superposition F(x,F(x)), Dissertationes Math. 159(1978).

[6] Kamke E.; Zur Definition der approximative stetigen Funktionen, Fund. Math. 10(1927), 431-433.

[7] Laczkovich M.; On the mesurability of functions whose sections are derivatives, Periodica Mathematica Hungarica (sous presse)

[8] Saks S.; Theory of the Integral, Hafner Publ. Comp. New York, 1937.

[9] Szragin J. W.; Les conditions de la mesurabilité de la superposition (en russe), Dokl. Akad. Nauk SSSR, 197(1971), 295-298.

Received March 19, 1979