SUR LES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES CONTENANT UN PARAMÈTRE

Par

Masuo HUKUHARA

TABLE DES MATIÈRES

Le but de ce présent mémoire est à établir la dérivabilité par rapport à un paramètre de la solution d'une équation différentielle contenant ce paramètre(1), en nous appuyant sur les théorèmes de comparaison(2). Les théorèmes ainsi obtenus joueront un rôle important dans l'étude des points singuliers des équations différentielles. Dans la dernière section, nous étendrons ces résultats aux équations fonctionnelles.

(1) Pour le théorème déjà classique sur la dérivabilité par rapport à un paramètre, voir par exemple Goursat, Cours d'Analyse, t. III, Chap. XIII.

(2) Voir, par exemple, Hukuhara et Satô, Sur les théorèmes de comparaison des équations différentielles ordinaires, ce Jour., 3 (1935), p. 191–211.

Journal of the Faculty of Science, Hokkaido Imp. Univ., Ser. I, Vol. V, Nos. 3–4, 1937.

I. CONTINUITÉ

1. Points semi-réguliers, points semi-singuliers. Soit donnée une équation différentielle[1]

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) . \tag{1}$$

Nous appellerons point semi-singulier à droite (gauche) de cette équation tout point (x_0, y_0) tel que quelque petit que soit le nombre positif δ, il existe au moins deux solutions de (1) prenant la valeur y_0 pour $x=x_0$ et ne coïncidant pas dans l'intervalle $x_0 \leqq x \leqq x_0+\delta$ $(x_0-\delta \leqq x \leqq x_0)$. Le point qui n'est pas semi-singulier à droite (gauche) s'appelle semi-régulier à droite (gauche).

Soit $\varphi_0(x)$ une solution de (1) continue dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq a$ et s'annulant pour $x=0$, et supposons la fonction $f(x, y)$ continue dans

$$0 \leqq x \leqq a, \quad |y-\varphi_0(x)| \leqq b, \tag{2}$$

a et b étant deux nombres positifs. Nous dirons *qu'il existe une solution $\varphi_1(x)$ de* (1) *continue dans $0 \leqq x \leqq a$ et différente de $\varphi_0(x)$ et que s'il existe sur la courbe $y=\varphi_0(x)$ des points semi-singuliers à droite on peut prendre pour $\varphi_1(x)$ une solution s'annulant pour $x=0$.*

Supposons d'abord que la courbe $y=\varphi_0(x)$ est formée des points semi-réguliers à droite. Nous prenons alors une suite de points $\{\eta_j\}$ convergeant vers zéro. Désignons par $y=\psi_j(x)$ une solution de (1) prenant la valeur η_j pour $x=0$. La fonction $\psi_j(x)$ tend uniformément vers $\varphi_0(x)$ dans $0 \leqq x \leqq a$ lorsque $j \to \infty$. On peut donc prendre pour $\varphi_1(x)$ la fonction $\psi_j(x)$ correspondant à l'indice assez grand.

Supposons ensuite qu'il existe sur la courbe $y=\varphi_0(x)$ des points semi-singuliers à droite. $f(x, y)$ étant continue dans (2) le module $|f(x, y)|$ n'y surpasse pas un certain nombre fini M. Prenons un nombre ξ tel que $0 < a-\xi < \frac{b}{2M}$. S'il existe des points semi-singuliers à droite dans l'intervalle $\xi \leqq x \leqq a$, il y a au moins une solution $y=\psi(x)$ bifurquant de la solution $y=\varphi_0(x)$ en un point d'abscisse x_1 entre ξ et a. $\psi(x)$ est nécessairement continue dans l'intervalle

---

(1) La variable x est réelle mais y un vecteur variable dans l'espace à n dimensions, de sorte que l'équation unique (1) est équivalente à un système des n équations différentielles

$$\frac{dy_j}{dx} = f_j(x, y_1, \ldots\ldots, y_n) \qquad (j=1, 2, \ldots\ldots, n).$$

$x_1 \leqq x \leqq a$. Il suffit donc de poser $\varphi_1(x) = \varphi_0(x)$ pour $0 \leqq x \leqq x_1$ et $\varphi_1(x) = \psi(x)$ pour $x_1 \leqq x \leqq a$. Désignons par α la borne supérieure des abscisses des points semi-singuliers à droite situés sur la courbe $y = \varphi_0(x)$. Il reste à considérer le cas où $0 \leqq \alpha < a$. Si $(\alpha, \varphi_0(\alpha))$ est un point semi-régulier à droite, il existe une suite de points semi-singuliers à droite $\{(\alpha_j, \varphi_0(\alpha_j)\}$ convergeant vers $(\alpha, \varphi_0(\alpha))$. Désignons par $y = \psi_j(x)$ une solution de (1) prenant la valeur $\varphi_0(\alpha_j)$ pour $x = \alpha_j$ et ne coïncidant pas avec $\varphi_0(x)$ dans $\alpha_j \leqq x \leqq a$. $\psi_j(x)$ converge uniformément vers $\varphi_0(x)$ dans $\alpha \leqq x \leqq a$. Il suffit donc de poser $\varphi_1(x) = \varphi_0(x)$ pour $0 \leqq x \leqq \alpha_j$ et $\varphi_1(x) = \psi_j(x)$ pour $\alpha_j \leqq x \leqq a$, j désignant un indice suffisamment grand.

Supposons enfin le point $(\alpha, \varphi(\alpha))$ simi-singulier à droite. La section par l'hyperplan $x = \alpha + \delta$ de l'ensemble des courbes intégrales de (1) passant par $(\alpha, \varphi(\alpha))$ est un continu C ne se réduisant pas à un point pourvu que le nombre positif δ soit convenablement choisi. Si l'on prend dans ce continu un point $(\alpha+\delta, \beta)$ assez voisin de $(\alpha+\delta, \varphi(\alpha+\delta))$, la solution $y = \psi_1(x)$ de (1) prenant la valeur β pour $x = \alpha+\delta$ est nécessairement continue dans l'intervalle $\alpha+\delta \leqq x \leqq a$. Il y a au moins une solution $y = \psi_2(x)$ prenant la valeur $\varphi(\alpha)$ pour $x = \alpha$ et la valeur β pour $x = \alpha+\delta$. Il suffit donc de poser $\varphi_1(x) = \varphi_0(x)$ pour $0 \leqq x \leqq \alpha$, $\varphi_1(x) = \psi_2(x)$ pour $\alpha \leqq x \leqq \alpha + \delta$ et $\varphi_1(x) = \psi_1(x)$ pour $\alpha+\delta \leqq x \leqq a$.

De ce qui précède nous pouvons conclure immédiatement que *si l'équation* (1) *n'admet qu'une solution s'annulant pour* $x = 0$ *et continue dans l'intervalle* $0 \leqq x \leqq a$, *les points de la courbe intégrale sont tous semi-réguliers à droite.*

2. Cas de l'intervalle fermé à gauche. Soit donnée une équation différentielle contenant un paramètre[1]

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \lambda). \tag{3}$$

Supposons que l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, 0) \tag{4}$$

n'admette qu'une solution $\varphi_0(x)$ s'annulant pour $x = 0$ et continue dans

(1) y désigne un vecteur variable dans l'espace à n dimensions et λ un vecteur variable dans l'espace à m dimensions, de sorte que l'équation unique (3) est équivalente au système différentiel

$$\frac{dy_j}{dx} = f_j(x, y_1, \ldots, y_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

l'intervalle $0 \leqq x \leqq a$ et que $f(x, y, \lambda)$ soit continue dans

$$(5) \qquad 0 \leqq x \leqq a, \quad |y-\varphi_0(x)| \leqq b, \quad |\lambda| \leqq c.$$

Alors l'équation (3) admet au moins une solution s'annulant pour $x=0$ et continue dans $0 \leqq x \leqq a$ pourvu que $|\lambda|$ soit assez petit et cette solution converge uniformément vers $\varphi_0(x)$ dans $0 \leqq x \leqq a$.

Si donc l'équation (1) admet, quelle que soit la valeur λ ($|\lambda| \leqq c$), une solution $y = \varphi(x, \lambda)$ et une seule s'annulant pour $x = 0$ et continue dans $0 \leqq x \leqq a$, la solution $\varphi(x, \lambda)$ considérée comme fonction de (x, λ) est continue dans

$$0 \leqq x \leqq a, \quad |\lambda| \leqq c.$$

3. Cas de l'intervalle ouvert à gauche. Avant d'aborder l'équation (3) faisons une remarque très simple analogue à celle du n° 1. Soit $\varphi_0(x)$ une solution de (1) continue dans $0 < x \leqq a$ et supposons que $f(x, y)$ soit continue dans

$$0 < x \leqq a, \quad |y-\varphi_0(x)| \leqq B(x),$$

$B(x)$ désignant une fonction continue dans $0 < x \leqq a$. *Si l'équation (1) n'admet qu'une solution continue dans $0 < x \leqq a$, les points de la courbe $y = \varphi_0(x)$ sont tous semi-réguliers à droite.*

En effet, supposons qu'il existe sur la courbe $y = \varphi_0(x)$ un point semi-singulier à droite (ξ, η). Alors le résultat au n° 1 s'applique à l'intervalle $\xi \leqq x \leqq a$. Il y a donc au moins une solution $\psi(x)$ prenant la valeur η pour $x = \xi$, continue dans $\xi \leqq x \leqq a$ et ne coïncidant pas avec $\varphi_0(x)$. Si l'on pose $\varphi_1(x) = \varphi_0(x)$ pour $0 < x \leqq \xi$ et $\varphi_1(x) = \psi(x)$ pour $\xi \leqq x \leqq a$, $\varphi_1(x)$ est une solution de (1) continue dans $0 < x \leqq a$ et ne coïncidant pas avec $\varphi_0(x)$.

Cela posé, considérons l'équation (3) et supposons que $f(x, y, \lambda)$ soit continue dans[1]

$$(6) \qquad 0 < x \leqq a, \quad |y-\varphi_0(x)| \leqq B(x), \quad |\lambda| \leqq c,$$

$\varphi_0(x)$, $B(x)$ étant des fonctions continues dans $0 < x \leqq a$. *Si l'équation (3) admet, quelle que soit la valeur λ, une solution et une seule continue dans $0 < x \leqq a$, $\varphi(x, \lambda)$ considérée comme fonction de (x, λ) est continue pour*

(1) On peut remplacer l'intervalle $0 < x \leqq a$ par $-\infty < x \leqq a$, car le nombre 0 ne joue aucun rôle important.

$$0 < x \leqq a\,, \quad |\lambda| \leqq c\,.$$

Car quelque petit que soit le nombre positif δ, $\varphi(x, \lambda)$ tend uniformément vers $\varphi(x, \lambda_0)$ dans $\delta \leqq x \leqq a$ lorsque $\lambda \to \lambda_0$.

II. DÉRIVABILITÉ

4. Cas de l'intervalle fermé à gauche. Soit $\varphi_0(x)$ une solution de (4) s'annulant pour $x = 0$ et continue dans $0 \leqq x \leqq a$ et supposons que $f(x, y, \lambda)$ et ses dérivées partielles $f_y'(x, y, \lambda)$, $f_\lambda'(x, y, \lambda)$ soient continue dans (5). L'équation (3) n'admet qu'une solution $y = \varphi(x, \lambda)$ s'annulant pour $x = 0$ quelle que soit la valeur λ. Si le nombre γ est est assez petit, la fonction $\varphi(x, \lambda)$ est continue dans

$$(7) \qquad 0 \leqq x \leqq a\,, \quad |\lambda| \leqq \gamma\,,$$

c'est ce qui résulte des propositions établies aux n^{os} 1, 2. Nous allons maintenant montrer *l'existence et la continuité de la dérivé partielle* $\varphi_\lambda'(x, \lambda)$[1]. Désignons par $g(x, \lambda)$, $h(x, \lambda)$ les fonctions que nous obtenons en posant $y = \varphi(x, \lambda)$ dans $f_y'(x, y, \lambda)$, $f_\lambda'(x, y, \lambda)$. Ces fonctions sont continues dans (7). S'il existe la dérivée partielle $\varphi_\lambda'(x, \lambda)$, elle doit coïncider avec la solution $z = \psi(x, \lambda)$ de

$$(8) \qquad \frac{dz}{dx} = g(x, \lambda)z + h(x, \lambda)$$

s'annulant pour $x = 0$. $\psi(x, \lambda)$ est continue dans (7). Il suffit donc de démontrer par exemple la relation

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\varphi(x, \lambda) - \varphi_0(x)}{\lambda} = \psi_0(x) \quad (\psi_0(x) = \psi(x, 0))\,.$$

Pour cela nous posons

$$\varphi(x, \lambda) = \varphi_0(x) + \lambda\psi_0(x) + \chi(x, \lambda)\,.$$

La relation que nous voulons établir devient

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\chi(x, \lambda)}{\lambda} = 0\,.$$

(1) Ce théroème déjà classique sert de lemme à la démonstration du théorème que nous établirons au n° suivant et il ne serait pas sans intérêt de montrer comment on peut appliquer les théorèmes de comparaison à la démonstration de ce théorème.

L'équation à laquelle satisfait la fonction $u = \chi(x, \lambda)$ est

$$\frac{du}{dx} = k(x, u, \lambda)$$

où

$$k(x, u, \lambda) = f(x, \varphi_0 + \lambda\psi_0 + u, \lambda) - f(x, \varphi_0, 0) \\ - \lambda\left\{f'_y(x, \varphi_0, 0)\psi_0(x) + f'_\lambda(x, \varphi_0, 0)\right\}.$$

Soit ε un nombre positif quelconque. On peut trouver un nombre positif δ tel que l'on ait

$$|f'_y(x, y, \lambda) - f'_y(x, \varphi_0, 0)| < \varepsilon, \quad |f'_\lambda(x, y, \lambda) - f'_\lambda(x, \varphi_0, 0)| < \varepsilon$$

pour

$$0 \leqq x \leqq a, \quad |y - \varphi_0(x)| < \delta, \quad |\lambda| < \delta.$$

$\varphi(x, \lambda)$ étant continue dans (7), il existe un mombre positif ρ tel que l'on ait

$$|\lambda\psi_0(x) + \chi(x, \lambda)| < \delta, \quad \rho < \delta$$

pour $|\lambda| < \rho$. Nous aurons alors

$$|k(x, u, \lambda)| < G|u| + \varepsilon(M+1)|\lambda|$$

pour

$$0 \leqq x \leqq a, \quad u = \chi(x, \lambda), \quad |\lambda| < \rho,$$

en supposant

$$|f'_y(x, y, \lambda)| \leqq G, \quad |\psi_0(x)| \leqq M.$$

Puisque $\chi(x, \lambda)$ s'annule pour $x = 0$, on peut la comparer avec la solution s'annulant pour $x = 0$ de l'équation différentielle

$$\frac{dU}{dx} = GU + \varepsilon(M+1)|\lambda|.$$

Nous obtenons ainsi

$$|\chi(x, \lambda)| \leqq \frac{\varepsilon(M+1)|\lambda|}{G}(e^{Gx} - 1)$$

pour $0 \leqq x \leqq a$, $|\lambda| \leqq \rho$, ce qui démontre la relation voulue.

Remarque 1. On peut supposer que y et λ soient des variables complexes. Alors la dérivabilité de $\varphi(x, \lambda)$ par rapport à λ dans (7) entraîne la régularité de $\varphi(x, \lambda)$ par rapport à λ dans

$$0 \leqq x \leqq a\,, \qquad |\lambda| < \gamma\,.$$

Par suite on a

$$\varphi(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)\lambda^n\,,$$

la convergence étant uniforme dans $0 \leqq x \leqq a$, $|\lambda| \leqq \gamma'(<\gamma)$.

Remaruque 2. Il est aisé d'étendre les résultats précédents aux équations différentielles

$$\frac{dy_j}{dx} = f_j(x, y_1, \ldots\ldots, y_n, \lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_m) \quad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n)\,.$$

5. Cas de l'intervalle ouvert à gauche. Soit $\varphi_0(x)$ une solution de (4) continue dans $0 < x \leqq a$, et supposons que $f(x, y, \lambda)$ et ses dérivées partielles $f'_y(x, y, \lambda)$, $f'_\lambda(x, y, \lambda)$ soient continue dans (6) et que

$$|f'_y(x, y, \lambda)| \leqq G(x)\,, \quad |f'_\lambda(x, y, \lambda)| \leqq H(x)\,.$$

Nous allons démontrer le théorème suivant.

Si l'on a, en posant $\eta(x) = e^{\int G(x)dx}$,

$$r(x) = O(B(x))\,, \quad r(x) = O(\eta(x))\,, \quad \int_0^x \frac{H(x)}{\eta(x)}dx = o\left(\frac{r(x)}{\eta(x)}\right)$$

pour $x \to +0$, *l'équation* (3) *n'admet, quelle que soit la valeur* λ, *qu'une solution telle que* $y = \varphi_0(x) + o\,(r(x))$(1) *pour* $x \to +0$. *Si le nombre* γ *est assez petit, cette solution* $y = \varphi(x, \lambda)$ *est continue et admet la derivée partielle continue* $\varphi'_\lambda(x, \lambda)$ *dans*

$$(9) \qquad 0 < x \leqq a\,, \quad |\lambda| \leqq \gamma\,.$$

Il est aisé de démontrer l'unicité de la solution telle que $y = \varphi_0(x) + o(r(x))$. Puisque

$$|f(x, y, \lambda) - f(x, \varphi_0(x), 0)| \leqq G(x)\,|y - \varphi_0(x)| + H(x)\,|\lambda|\,,$$

on peut comparer la solution $\varphi(x, \lambda)$ avec celle de l'équation

---

(1) On peut remplacer cette condition par

$$\lim_{x \to +0} \frac{|y - \varphi_0(x)|}{r(x)} = 0\,.$$

$$\frac{dY}{dx} = G(x)Y + |\lambda| H(x) .$$

Posons

$$\Psi(x) = \eta(x) \int_0^x \frac{H(x)}{\eta(x)} dx$$

et désignons par γ un nombre positif tel que l'on ait $\gamma\Psi(x) < B(x)$ pour $0 < x \leqq a$. $\varphi(x, \lambda)$ est continue et satisfait à l'inégalité

$$|\varphi(x, \lambda) - \varphi_0(x)| \leqq |\lambda| \Psi(x)$$

dans (9). En portant l'expresssion $y = \varphi(x, \lambda)$ dans $f'_y(x, y, \lambda)$, $f'_\lambda(x, y, \lambda)$ nous obtenons les fonctions $g(x, \lambda)$, $h(x, \lambda)$ continues dans (9) et satisfaisant aux inégalités

$$|g(x, \lambda)| \leqq G(x), \quad |h(x, \lambda)| \leqq H(x) .$$

L'équation différentielle linéaire (8) admet donc une solution et une seule continue dans $0 < x \leqq a$ et satisfaisant à $z = o(r(x))$. Nous la désignerons par $z = \psi(x, \lambda)$. Elle est aussi continue dans (9) et satisfait à l'inégalité

$$|\psi(x, \lambda)| \leqq \Psi(x) .$$

Il est à démontrer la relation $\varphi'_\lambda(x, \lambda) = \psi(x, \lambda)$.

Soit δ un nombre positif quelconque. Désignons par $y = \varphi(x, \lambda, \delta)$ la solution de (3) prenant la valeur $\varphi_0(\delta)$ pour $x = \delta$. On démontre comme plus haut que $\varphi(x, \lambda, \delta)$ considérée comme fonction de (x, λ) est continue et satisfait à l'inégalité

$$|\varphi(x, \lambda, \delta) - \varphi_0(x)| \leqq |\lambda| \Psi(x)$$

pour

$$(10) \qquad \delta \leqq x \leqq a \qquad |\lambda| \leqq \gamma .$$

En portant l'expression $y = \varphi(x, \lambda, \delta)$ dans $f'_y(x, y, \lambda)$, $f'_\lambda(x, y, \lambda)$, nous obtenons des fonctions $g(x, \lambda, \delta)$, $h(x, \lambda, \delta)$ continues dans (10). Désignons par $z = \psi(x, \lambda, \delta)$ la solution de l'équation

$$\frac{dz}{dx} = g(x, \lambda, \delta)z + h(x, \lambda, \delta)$$

s'annulant pour $x = \delta$. $\psi(x, \lambda, \delta)$ considérée comme fonction de (x, λ) est aussi continue dans (10) et satisfait à l'inégalité

$$|\psi(x, \lambda, \delta)| \leq \Psi(x).$$

On sait de plus que $\varphi'_\lambda(x, \lambda, \delta)$ coïncide avec $\psi(x, \lambda, \delta)$. Si

$$|\mu_j| \leq \gamma, \quad \mu_j \to \lambda_0, \quad \delta_j \to 0,$$

la fonction $\varphi(x, \mu_j, \delta_j)$ tend uniformément vers $\varphi(x, \lambda_0)$ dans tout intervalle fermé $\delta \leq x \leq a$, δ désignant un nombre positif quelconque. En effet, l'inégalité

$$|\varphi'_x(x, \lambda, \delta_j) - \varphi'_0(x)| \leq G(x)\Psi(x) + H(x)|\lambda|$$

montre que la suite $\{\varphi(x, \mu_j, \delta_j)\}$ est également continue dans $0 < x \leq a$. On peut donc en extnaire une suite partielle uniformément convergente dans tout intervalle fermé $\delta \leq x \leq a$. La limite de cette suite est nécessairement la solution de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \lambda_0)$$

satisfaisant à l'inégalité $|y - \varphi_0(x)| \leq |\lambda_0| \Psi(x)$ dans $0 < x \leq a$. Elle coïncide donc avec $\varphi(x, \lambda_0)$. On en conclut que quelque petit que soit le nombre positif δ, $\varphi(x, \lambda, \xi)$ converge uniformément vers $\varphi(x, \lambda)$ dans (10) lorsque $\xi \to 0$. Par suite les fonctions $g(x, \lambda, \xi)$ convergent uniformément vers $g(x, \lambda)$, $h(x, \lambda)$ dans (10) lorsque $\xi \to 0$. On en conclut comme plus haut que $\psi(x, \lambda, \xi)$ converge uniformément vers $\psi(x, \lambda)$ dans (10) lorsque $\xi \to 0$. En remarquant que

$$\varphi(x, \lambda, \xi) = \varphi_0(x) + \int_0^\lambda \psi(x, \lambda, \xi) d\lambda$$

on obtient

$$\varphi(x, \lambda) = \varphi_0(x) + \int_0^\lambda \psi(x, \lambda) d\lambda.$$

En dérivant cette relation par repport à λ, on obtient la relation voulue.

Remarque 1. Si $f(x, y, \lambda)$ est régulière par rapport à (y, λ), $\varphi(x, \lambda)$ est régulière par rapport à λ.

Remarque 2. Il est aisé d'étendre les résultats au cas des équations différentielles simultanées contenant un nombre fini de paramètres. Mais pour obtenir des propositions qui s'appliquent à des problèmes concernant les équations différentielles et intégrales, il est préférable de traiter les problèmes analogues dans l'espace abstrait.

III. EQUATIONS FONCTINNELLES

6. Continuité. Soient $\mathfrak{E}$ un espace linéaire, normé et complet[1], E un ensemble ouvert dans $\mathfrak{E}$ et Ω un ensemble dans le plan de nombres complexes[2]. Soit $F(y, \lambda)$ une fonction définie dans $(\overline{E} \times \Omega)$, complètement continue (vollstetig) par rapport à y[3] et également continue par rapport à λ[4]. Nous voulons étudier l'équation en y:

$$\Phi_\lambda(y) \equiv y - F(y, \lambda) = o \,. \tag{11}$$

Si le degré topologique $d(\Phi_\lambda, E)$ de la transformation Φ_λ dans E n'est pas nul[5], l'équation (11) admet au moins une solution[6]. *Si l'équation* (11) *n'admet qu'une solution $y = \varphi(\lambda)$ quelle que soit la valeur λ, $\varphi(\lambda)$ est continue dans Ω.*

En effet, soit λ_0 un point de Ω. Si $\varphi(x)$ n'était pas continue en λ_0, on pourrait trouver une suite de points $\{\mu_j\}$ dans Ω, convergeant vers λ_0 et telle que toute suite partielle de $\{\varphi(\mu_j)\}$ ne converge pas vers $\varphi(\lambda_0)$. $F(\overline{E}, \lambda_0)$ étant compact, on pourrait supposer que la suite $\{F(\varphi(\mu_j), \lambda_0)\}$ converge vers un point η, en prenant, s'il est nécessaire, une suite partielle. A un voisinage V de o on pourrait faire correspondre un nombre positif δ tel que l'on ait

$$F(\varphi(\mu_j), \mu_j) - F(\varphi(\mu_j), \lambda_0) \in V$$

pour $|\mu_j - \lambda_0| < \delta$. La suite $\{F(\varphi(\mu_j), \mu_j)\}$ convergerait donc vers η. Puisque $\varphi(\mu_j) = F(\varphi(\mu_j), \mu_j)$, on obtiendrait $\eta = F(\eta, \lambda_0)$, ce qui exige $\eta = \varphi(\lambda_0)$. La suite $\{\varphi(\mu_j)\}$ convergerait donc vers $\varphi(\lambda_0)$ contrairement à l'hypothèse.

---

(1) Espace de M. BANACH.

(2) On peut supposer, d'une manière plus générale, que Ω soit un ensemble dans un certain espace distancié.

(3) Cela veut dire que $F(y, \lambda)$ considérée comme fonction de y est continue dans $\overline{E}$ et que l'image $F(\overline{E}, \lambda)$ de $\overline{E}$ est compacte. $\overline{E}$ désigne l'ensemble de fermeture de E.

(4) C'est-à-dire, à chaque voisinage U de o et à un point λ_0 de Ω on peut faire correspondre un nombre positif δ tel que l'on ait $F(y, \lambda) - F(y, \lambda_0) \in U$ pour $|\lambda - \lambda_0| < \delta$, $\lambda \in \Omega$ quel que soit le point y dans $\overline{E}$.

(5) On peut remplacer cette hypothèse par $F(\overline{E}, \lambda) \subseteqq \overline{E}$ si E est convexe. On peut alors supposer que $\mathfrak{S}$ soit un espace de HAUSDORFF, linéaire et localement convexe. Voir TYCHONOFF, Ein Fixpunktsatz, Math. Ann., 111 (1936).

(6) Voir LERAY et SCHAUDER, Topologie et équations fonctionnelles, Ann. Ec. norm., 51 (1934). Nous supposons que la valeur que prend la foction $F(y, \lambda)$ soit un point de $\mathfrak{S}$ et que $y \neq F(y, \lambda)$ pour $y \in \overline{E} - E$.

Remarque. On voit de même que *l'ensemble des solutions* (y, λ) *de l'équation* (11) *est fermé sur* $(\mathfrak{E}\times\Omega)$. Nous emploierons désormais les mots fermé, ouvert, continu etc. par rapport à $(\mathfrak{E}\times\Omega)$, s'il n'y a pas de mention contraire.

7. Généralisation d'un théorème de MM. Leray et Schauder. MM. Leray et Schauder ont démontré *l'existenc d'un continu de solutions le long duquel* λ *prend toutes les valeurs de* Ω, *en supposant que* Ω *soit un segment et que l'équation* (11) *n'admette qu'un nombre fini de solutions pour une certaine valeur* λ_0 *de* λ, *la somme des indices de ces solutions étant differente de zéro.* Nous allons établir ce théorème en nous plaçant dans les hypothèses moins restrictives c'est-à-dire en ne supposant pas l'existence d'une valeur λ où l'équation (11) n'admet qu'un nombre fini de solutions. Quant à Ω nous supposerons seulement qu'il soit un continu borné dans le plan de nombres complexes(1).

Soit $\mathfrak{E}^\lambda$ l'ensemble de tous les points de $(\mathfrak{E}\times\Omega)$ ayant la même abscisse λ. Si A est un ensemble dans $(\mathfrak{E}\times\Omega)$, nous désignerons $\mathfrak{E}^\lambda A$ par A^λ. Soit C l'ensemble des solutions (y, λ) de l'équation (11) en (y, λ). C est un ensemble fermé, c'est ce que nous avons déjà remarqué au n° précédent. Considérons une suite de points de C: $\{(y_j, \lambda_j)\}$. Ω étant compact, on peut extraire de la suite $\{\lambda_j\}$ une suite partielle convergente $\{\lambda_{j_k}\}$. Soit $\bar{\lambda}$ la limite de cette suite partielle. L'ensemble $\{F(y_{j_k}, \bar{\lambda})\}$ étant compact, on peut en extraire une suite convergente $\{F(y_{j'_k}, \bar{\lambda})\}$. Si η est la limite de cette suite, on voit sans peine que la suite $\{F(y_{j'_k}, \lambda_{j'_k})\}$ converge vers η. Puisque $y_j = F(y_j, \lambda_j)$, $(\eta, \bar{\lambda})$ est une solution de l'équation (11) et la suite $\{(y_j, \lambda_j)\}$ admet une suite partielle convergeant vers $(\eta, \bar{\lambda})$. L'ensemble C est donc compact.

Soit ε un nombre positif quelconque. C étant compact, il se partage en un nombre fini d'ensembles $C_1, \ldots, C_m$ tels que deux points quelconques d'un même ensemble C_j puissent être reliés par une chaîne de points de C à chaînons moindres que ε et que la distance de deux ensembles C_j et C_k $(j \neq k)$ soit au moins égale à ε. Désignons par U_j l'ensemble des points de $(E\times\Omega)$ qui sont à une distance de C_j inférieure à $\frac{\varepsilon}{2}$. Supposons que(2) $d(\Phi_0, E) \neq 0$. Le degré topo-

(1) Nous pouvons supposer, comme MM. Leray et Schauder, que $F(y, \lambda)$ soit définie dans $\bar{D}$, D étant un ensemble ouvert sur $(\mathfrak{E}\times\Omega)$. La démonstration s'appliquera sans aucune modification essentielle.

(2) Nous supposons ici que 0 appartienne à Ω. Sinon, on remplacerait 0 par un point quelconque λ_0 de Ω.

logique $d(\Phi_0, E)$ étant égal à la somme $\sum_{j=0}^{m} d(\Phi_0, U_j^0)$, il existe au moins un indice j pour lequel $d(\Phi_0, U_j^0) \neq 0$.

Prenons une suite de nombres positifs $\{\varepsilon_k\}$ convergeant vers zéro. Posons $\varepsilon_1 = \varepsilon$, $\Gamma_0 = C$, $\Gamma_1 = C_j$, $V_1 = U_j$, j désignant l'indice tel que $d(\Phi_0, U_j^0) \neq 0$. Nous pouvons définir comme ci-dessus l'ensemble Γ_2 de manière que deux points quelconques de Γ_2 puissent être reliés par une chaîne de points de Γ_1 à chaînons moindres que ε_2, que si $\Gamma_1 - \Gamma_2 \neq 0$ la distance de Γ_2 à $\Gamma_1 - \Gamma_2$ soit au moins égale à ε_2 et que $d(\Phi_0, V_2) \neq 0$, V_2 désignant l'ensemble des points de V_1 qui sont à une distance de Γ_2 moindre que $\frac{\varepsilon_2}{2}$. Nous pouvons définir de la manière analogue les ensembles Γ_3, Γ_4, ... de proche en proche. Alors les propriétés suivantes seront vérifiées:

1° $\Gamma_j \subseteqq \Gamma_{j-1}$;

2° Si $\Gamma_{j-1} - \Gamma_j \neq 0$, la distance de Γ_j à $\Gamma_{j-1} - \Gamma_j$ est au moins égale à ε_j;

3° Deux points quelconques de Γ_j peuvent être reliés par une chaîne de points de Γ_{j-1} à chaînons moindres que ε_j;

4° Si V_j est l'ensemble des points de $(E \times \Omega)$ qui sont à une distance de Γ_j inférieure à $\frac{\varepsilon_j}{2}$, on a $d(\Phi_0, V_j) \neq 0$.

Les ensembles Γ_j sont évidemment fermés. L'ensemble $C = \Gamma_0$ étant compact, l'ensemble

$$\Gamma = \prod_{j=0}^{\infty} \Gamma_j$$

n'est pas vide. Γ est l'ensemble dont nous voulions démontrer l'existence. Puisqu'il est le produit des ensembles fermés, il l'est aussi. Si Γ était la somme de deux ensembles fermés et disjoints A et B, la distance δ de A à B serait positive car $C(\supset \Gamma)$ est compact. Γ_j contiendrait une chaîne à chaînons moindres que ε_j, qui joint un point de A à un point de B. Si $3\varepsilon_j < \delta$, Γ_j contiendrait donc un point η_j qui est distant de A et de B plus de $\frac{\delta}{3}$. On pourrait extraire de la suite $\{\eta_j\}$ une suite partielle convergente. Le point limite η de cette suite partielle appartiendrait à Γ et serait distant de A et de B au moins de $\frac{\delta}{3}$, ce qui est absurde. Γ est donc un continu. Il reste à démontrer que λ prend toutes les valeurs de Ω le long de Γ. Pour cela il suffit de montrer que λ prend toutes les valeurs de Ω le long de Γ_j.

Puisque $(\overline{V}_j - V_j)C = 0$, le degré topologique $d(\Phi_\lambda, V_j^\lambda)$ est indépendant de λ. Il est différent de zéro pour $\lambda = 0$. Par suite $d(\Phi_\lambda, V^\lambda) \neq 0$ pour $\lambda \in \Omega$. L'équation (11) en y admet donc au moins une solution. Elle appartient nécessairement à Γ_j car $CV_j = \Gamma_j$. Par conséquent, λ prend toutes les valeurs de Ω le long de Γ_j.

C. Q. F. D.

8. **Dérivabilité.** Nous supposerons ici que $F(y, \lambda)$ soit définie dans $(E \times \Omega)$, complètement continue par rapport à y et également continue par rapport à λ et que l'équation (11) n'admette pas de solutions sur la frontière de $(E \times \Omega)$. Nous supposerons en outre vérifiées les hypothèses suivantes.

A. $F(y, \lambda)$ admet dans $(E \times \Omega)$ la différentielle $\delta F = G(y, \lambda; \delta y, \delta\lambda)$. Plus précisément, à un nombre positif ε et à un point (y, λ) dans $(E \times \Omega)$ on peut faire correspondre un nombre positif ρ tel que si l'on pose

$$F(y+\delta y, \lambda+\delta\lambda) = F(y, \lambda) + G(y, \lambda; \delta y, \delta\lambda) + \Delta(y, \lambda; \delta y, \delta\lambda)$$

on ait

$$\| \Delta(y, \lambda; \delta y, \delta\lambda) \| < \varepsilon(\| \delta y \| + |\delta\lambda|)$$

pour $\| \delta y \| < \rho$, $|\delta\lambda| < \rho$, $y + \delta y \in E$, $\lambda + \delta\lambda \in \Omega$, $G(y, \lambda; \delta y, \delta\lambda)$ étant linéaire par rapport à $(\delta y, \delta\lambda)$.

B. La différentielle $G(y, \lambda; \delta y, \delta\lambda)$ est complètement continue. Plus précisément, étant donnés un nombre positif ε et un point (y, λ) dans $(E \times \Omega)$, on peut trouver un nombre positif ρ tel que

$$\| G(y, \lambda; \delta y, \delta\lambda) - G(z, \mu; \delta y, \delta\lambda) \| < \varepsilon(\| \delta y \| + |\delta\lambda|)$$

pour $\| y - z \| < \rho$, $|\lambda - \mu| \rho$, $z \in E$, $\mu \in \Omega$, et $G(y, \lambda; \delta y, \delta\lambda)$ considérée comme fonction de $(\delta y, \delta\lambda)$ est complètement continue.

Posons

$$G(y, \lambda; z, 0) = G_1(y, \lambda; z), \quad G(y, \lambda; 0, 1) = G_2(y, \lambda).$$

C. Si (y, λ) appartient à $(E \times \Omega)$, l'équation linéaire en z

$$z = G_1(y, \lambda; z)$$

n'admet que la solution $z = 0$.

Nous allons d'abord établir la proposition suivante :

Si (y_0, λ_0) *est une solution de* (11) *on peut trouver un nombre positif* ρ *tel que l'équation* (11) *en* y *n'admette pas deux solutions distinctes dans* $|y-y_0|<\rho$ *si* $|\lambda-\lambda_0|<\rho$.

En effet, supposons le contraire. Il existerait deux suites de solutions $\{(\eta_j, \mu_j)\}$, $\{(\zeta_j, \mu_j)\}$ telles que

$$\eta_j \neq \zeta_j, \quad \eta_j \to y_0, \quad \zeta_j \to y_0, \quad \mu_j \to \lambda_0 .$$

On obtiendrait, après un calcul facile,

$$\eta_j - \zeta_j = \int_0^1 G_1(\eta_j + t(\zeta_j - \eta_j), \mu_j, \zeta_j - \eta_j)\, dt .$$

On aurait

$$\| G_1(\eta_j + t(\zeta_j - \eta_j), \mu_j ; u) - G_1(y_0, \lambda_0 ; u) \| < \varepsilon_j \| u \| ,$$

ε_j tendant vers zéro avec $\dfrac{1}{j}$, d'où

$$\| \eta_j - \zeta_j - G_1(y_0, \lambda_0 ; \eta_j - \zeta_j) \| < \varepsilon_j \| \eta_j - \zeta_j \| .$$

Posons

$$\eta_j - \zeta_j = \| \eta_j - \zeta_j \| u_j .$$

De la suite $\{ G_1(y_0, \lambda_0 ; u_j) \}$ on pourrait extraire une suite partielle convergente. Si u est la limite de cette suite, on aurait

$$u = G_1(y_0, \lambda_0 ; u), \quad \| u \| = 1$$

contrairement à l'hypothèse.

Supposons, pour fixer les idées, que l'ensemble Ω soit connexe[1]. L'équation (11) n'admet pour $\lambda = \lambda_0$ qu'un nombre fini de solutions $y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}$, et les indices de ces solutions sont égaux à $+1$ ou à -1[2]. Soient C l'ensemble des solutions (y, λ) de l'équation (11) et C_j le plus grand continu contenu dans C et contenant y_j. Il est maintenant aisé de démontrer les propositions suivantes :

L'équation (11) *admet* m *solutions et* m *seules quelle que soit la valeur* λ.

---

(1) Sinon, on prend au lieu de Ω le plus grand ensemble connexe contenu dans Ω et contenant λ_0.

(2) LERAY et SCHAUDER, loc. cit.

Le nombre des points contenus dans C_j^λ ne dépend pas de λ.

Supposons par exemple que

$$C_0 = \dots = C_{n-1}, \quad C_0 C_n = 0, \quad \dots, \quad C_0 C_{m-1} = 0.$$

Si l'on désigne par $\varphi(\lambda)$ la solution de (11) qui prend la valeur y_0 pour $\lambda = \lambda_0$, $\varphi(\lambda)$ est continue et prend n valaurs distinctes permutables dans Ω. Si Ω est un domaine simplement connexe, $\varphi(\lambda)$ est nécessairement uniforme.

Démontrons enfin *la dérivabilité de la fonction* $\varphi(\lambda)$. En différentiant par rapport à λ la relation

$$\varphi(\lambda) = F(\varphi(\lambda), \lambda),$$

nous obtenons

$$z = G_1(\varphi(\lambda), \lambda; z) + G_2(\varphi(\lambda), \lambda)$$

où $z = \varphi'(\lambda)$. On sait que cette équation linéaire en z admet une solution et une seule $z = \psi(\lambda)$. Il est à démontrer la relation $\varphi'(\lambda) = \psi(\lambda)$. Pour cela il suffit de montrer que

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{\varphi(\lambda) - y_0}{\lambda - \lambda_0} = z_0 \qquad (z_0 = \psi(\lambda_0))$$

car λ_0 est un point quelconque de Ω. Si l'on pose

$$\varphi(\lambda) = y_0 + (\lambda - \lambda_0) z_0 + \chi(\lambda),$$

$u = \chi(\lambda)$ satisfait à l'équation

$$u = G_1(y_0, \lambda_0; u) + \Delta(y_0, \lambda_0; (\lambda - \lambda_0) z_0 + u, \lambda - \lambda_0).$$

Soit ε un nombre positif donné. $\chi(\lambda)$ s'annulant pour $\lambda = \lambda_0$, on peut trouver un nombre positif ρ tel que l'on ait

$$\| \Delta(y_0, \lambda_0; (\lambda - \lambda_0) z_0 + u, \lambda - \lambda_0) \| < \varepsilon (\| u \| + | \lambda - \lambda_0 |)$$

pour $u = \chi(\lambda)$, $| \lambda - \lambda_0 | < \rho$, $\lambda \in \Omega$. Prenons une suite quelconque convergeant vers λ_0 et posons

$$u_j = \chi(\mu_j), \qquad u_j = \| u_j \| v_j.$$

On aura alors

$$\| v_j - G_1(y_0, \lambda_0; v_j) \| < \varepsilon_j \left\{ 1 + \frac{| \mu_j - \lambda_0 |}{\| u_j \|} \right\}, \quad \| v_j \| = 1$$

ε_j tendant vers zéro avec $\frac{1}{j}$. Si l'on avait

$$\varlimsup_{j\to\infty} \frac{\| u_j \|}{|\mu_j - \lambda_0|} > 0 ,$$

on aurait

$$\lim_{k\to\infty} \left\{ v_{j_k} - G_1(y_0, \lambda_0, v_{j_k}) \right\} = 0 , \qquad \| v_{j_k} \| = 1$$

en choisissant convenablement la suite d'entiers croissants $\{j_k\}$. On pourrait supposer que la série $\{G_1(y_0, \lambda_0; v_{j_k})\}$ soit convergente. Soit v la limite de cette suite. On aurait alors

$$v = G_1(y_0, \lambda_0; v) , \qquad \| v \| = 1$$

contrairement à l'hypothèse. On doit donc avoir

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{\chi(\lambda)}{\lambda - \lambda_0} = 0 . \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque. Si Ω est le cercle $|\lambda| < R$, $\varphi(\lambda)$ y est régulière. On a donc le développement

$$\varphi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \lambda^n .$$

On peut étendre les résultats obtenus jusqu'ici aux équations contenant plusieurs paramètres.