# ÜBER DIE ÜBERTRAGUNGEN, DIE DER ERWEITERTEN TRANSFORMATIONS-GRUPPE ANGEHÖREN, II

Von

**Shisanji Hokari**

In der letzten Arbeit(1) behandelten wir die Übertragungen, die der Transformationsgruppe(2)

$$(1)\quad \begin{cases} \bar{y}^i = \bar{y}^i(y^1, \ldots, y^m), & (i = 1, 2, \ldots, m), \\ \bar{x}^\lambda = \bar{x}^\lambda(x^{m+1}, \ldots, x^{m+n};\ y^1, \ldots, y^m), & (\lambda = m+1, \ldots, m+n)^{(3)} \end{cases}$$

angehören. Bei jener Gelegenheit haben wir als spezielle Fälle die Theorien von T. Hosokawa, A. Wundheiler, V. Hlavatý und E. Cartan, indem wir die kontravarianten bezw. die kovarianten Vektoren definierten, eingeführt(4). Wir konnten damals die kontravarianten Vektoren *natürlich* erhalten, jedoch die kovarianten Vektoren *unnatürlich*. In der vorliegenden Arbeit möchten wir diese Schwäche verbessern.

1. *Allgemeine Theorie.* Wir nehmen zunächst $x^\lambda$ als die Koordinaten der $n$-dimensionalen Mannigfaltigkeit $X_n$ an, und adjungieren jedem Punkte in $X_n$ eine $(m+n)$-dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathfrak{X}_{m+n}$,

---

(1) S. Hokari, Über die Übertragungen, die der erweiterten Transformationsgruppe angehören, Journal of the Faculty of Science, Hokkaido Imperial University, Bd. 3 (1935), S. 15–26.

(2) Diese Transformationsgruppe wurde erstens von Herrn Professor A. Kawaguchi in seiner Arbeit behandelt. Siehe: A. Kawaguchi, The Foundation of the Theory of Displacements, II, Proceedings of the Imperial Academy, Bd. 10 (1934), S. 45–48.

(3) Die lateinischen, griechischen bezw. grossen lateinischen Indizes durchlaufen die Werte $(1, 2, \ldots, m)$, $(m+1, \ldots, m+n)$ bezw. $(1, 2, \ldots, m+n)$.

(4) Siehe: S. Hokari, a. a. O.

die auf ein System von $m+n$ reellen Funktionen $v^1, \ldots, v^{m+n}$ der $m$ reellen Variablen $y^1, \ldots, y^m$ bezogen ist. Selbstverständlich sollen alle Funktionen $v^A$ vom adjungierten Punkte $x^\lambda$ in $X_n$ abhängen. Wir nennen *einen kontravarianten Punkt* in $\mathfrak{X}_{m+n}$ ein System von $m+n$ reellen Werten, welche $m+n$ Funktionen $v^A$ annehmen. Wir setzen voraus, dass die Funktionen $v^A$ sich bei den Transformationen (1) in folgender Weise transformieren:

$$\bar{v}^A = P^A_B v^B , \tag{2}$$

wobei

$$\begin{cases} P^i_j = \dfrac{\partial \bar{y}^i}{\partial y^j} , \\ P^i_\lambda = 0 , \qquad\qquad P^\lambda_i = 0 , \\ P^\lambda_\mu = \dfrac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\mu} . \end{cases} \tag{3}$$

Unter diesen Voraussetzungen lassen sich die Gleichungen (2) folgendermassen darstellen:

$$\bar{v}^i = P^i_j v^j ,$$
$$\bar{v}^\lambda = P^\lambda_\mu v^\mu .$$

Nun erhalten wir nicht nur die zwei unverschwindenden Determinanten $|P^i_j|$ und $|P^\lambda_\mu|$, sondern auch die einfache Relation $|P^A_B| = |P^i_j| \cdot |P^\lambda_\mu|$.

*Der auf diese Weise definierte kontravariante Punkt $v^A$ ist eigentlich*; mit anderen Worten der Punkt $v^A$ hat die geometrische Invarianteneigenschaft. Um den wahren Sachverhalt zu erfahren, nehmen wir die zwei folgenden Transformationen von (1):

$$\begin{cases} \bar{\bar{y}}^i = \bar{\bar{y}}^i(\bar{y}) \\ \bar{\bar{x}}^\lambda = \bar{\bar{x}}^\lambda(\bar{x}, \bar{y}) \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} \bar{y}^i = \bar{y}^i(y) \\ \bar{x}^\lambda = \bar{x}^\lambda(x, y) \end{cases}$$

an, nun lässt sich der kontravariante Punkt $v^A$ folgendermassen transformieren:

$$\bar{\bar{v}}^A = \bar{P}^A_B \bar{v}^B$$

und

$$\bar{v}^B = P^B_C v^C ,$$

wobei die Funktionen $\bar{P}^A_B$ dieselben Bedingungen wie (3) erfüllen. Deshalb erhalten wir sofort bei der Transformation von $(x, y)$ zu $(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})$

$$\bar{\bar{v}}^A = \overset{*}{P}{}^A_C v^C ,$$

wobei

$$\overset{*}{P}{}^A_C = \bar{P}^A_B P^B_C .$$

Daraus ergibt sich sogleich, dass die Funktionen $\overset{*}{P}{}^A_C$ dieselben Bedingungen wie (3) erfüllen.

Die ersten Gleichungen von (1) gibt uns

$$d\bar{y}^i = P^i_j dy^j .$$

Wir denken uns weiterhin für $x^\lambda$ nur die folgenden Differentiale:

$$(4) \qquad \delta x^\lambda = dx^\lambda + \mathfrak{M}^\lambda_i dy^i ,$$

wobei $\mathfrak{M}^\lambda_i$ im allgemeinen die Funktionen von $y^i$ und $x^\lambda$ sind. Die geometrische Bedeutung von (4) wird folgendermassen erklärt: Jede Koordinate $x^\lambda$ in $X_n$ hängt von den Parametervariablen $y^i$ ab und die Übertragung von $x^\lambda$ bei der infinitesimalen Veränderung von $y^i$ definiert sich durch (4). *Deshalb stellt (4) dann und nur dann die Parallelverschiebung des Punktes $x^\lambda$ dar, wenn alle Differentiale $\delta x^\lambda$ gleich Null sind.* Diese Verschiebung (4) heissen wir *die Grundübertragung.*

Nehmen wir die weitere Forderung an, dass die Funktionen $\mathfrak{M}^\lambda_i$ sich bei den Transformationen (1) in folgender Weise transformieren:

$$(5) \qquad \bar{\mathfrak{M}}^\lambda_i P^i_j = \mathfrak{M}^\mu_j P^\lambda_\mu + \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial y^j} ,$$

so ergibt sich bei den Transformationen (1)

$$\delta\bar{x}^\lambda = P^\lambda_\mu \delta x^\mu \,; \tag{6}$$

nun erkennen wir, dass $(dy^i, \delta x^\lambda)$ die Bestimmungszahlen eines kontravarianten Punktes in $\mathfrak{X}_{m+n}$ sind.

Auf ähnliche Weise definieren wir *einen kovarianten Punkt* in $\mathfrak{X}_{m+n}$, d. h. wenn die Funktionen $w_A$ von $y^i$ und $x^\lambda$ in folgender Weise sich transformieren

$$w_A = Q^B_A w_B \,,$$

so stellt $w_A$ einen kovarianten Punkt in $\mathfrak{X}_{m+n}$ dar, wobei

$$Q^i_j = \frac{\partial y^i}{\partial \bar{y}^j} \,,$$

$$Q^i_\lambda = 0 \,, \qquad Q^\lambda_i = 0 \,,$$

$$Q^\lambda_\mu = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^\mu} \,.$$

Wir erkennen nun gleich, dass zwischen den $P^A_B$ und $Q^B_C$ die gewöhnlichen Relationen entstehen:

$$P^A_B Q^B_C = \delta^A_C \,.$$

Definieren wir *die lineare Punktübertragung* in $\mathfrak{X}_{m+n}$ folgendermassen:

$$\begin{aligned} \delta v^A &= dv^A + \Gamma^A_{BC} v^B \delta z^C \\ &= dv^A + (\Lambda^A_{Bi} dy^i + \Lambda^A_{B\lambda} dx^\lambda) v^B \,, \end{aligned} \tag{7}$$

wobei

$$\begin{aligned} \delta z^C &= dy^i \qquad \text{für} \quad C = i \,, \\ &= \delta x^\lambda \qquad \text{für} \quad C = \lambda \end{aligned}$$

und

$$\Lambda^A_{Bi} = \Gamma^A_{Bi} + \Gamma^A_{B\lambda} \mathfrak{M}^\lambda_i \,, \qquad \Lambda^A_{B\lambda} = \Gamma^A_{B\lambda} \,, \tag{8}$$

so transformieren sich die Parameter $\Lambda^A_{BC}$ der Übertragung nach (1) in folgender Weise:

$$
(9) \qquad \begin{cases}
\bar{\Lambda}^i_{jk} = P^i_l\Big(Q^m_j Q^n_k \Lambda^l_{mn} + Q^m_j \dfrac{\partial x^\tau}{\partial \bar{y}^k}\Lambda^l_{m\tau} + \dfrac{\partial Q^l_j}{\partial \bar{y}^k}\Big), \\
\bar{\Lambda}^i_{\mu k} = P^i_l\Big(Q^\beta_\mu Q^n_k \Lambda^l_{\beta n} + Q^\beta_\mu \dfrac{\partial x^\tau}{\partial \bar{y}^k}\Lambda^l_{\beta\tau}\Big), \\
\bar{\Lambda}^\lambda_{jk} = P^\lambda_\alpha\Big(Q^m_j Q^n_k \Lambda_{mn} + Q^m_j \dfrac{\partial x^\tau}{\partial \bar{y}^k}\Lambda^\alpha_{m\tau}\Big), \\
\bar{\Lambda}^\lambda_{\mu k} = P^\lambda_\alpha\Big(Q^\beta_\mu Q^n_k \Lambda^\alpha_{\beta n} + Q^\beta_\mu \dfrac{\partial x^\tau}{\partial \bar{y}^k}\Lambda^\alpha_{\beta\tau} + \dfrac{\partial Q^\alpha_\mu}{\partial \bar{y}^k}\Big), \\
\bar{\Lambda}^i_{j\nu} = P^i_l Q^m_j Q^\tau_\nu \Lambda^l_{m\tau}, \\
\bar{\Lambda}^\lambda_{\mu\nu} = P^\lambda_\alpha\Big(Q^\beta_\mu Q^\tau_\nu \Lambda^\alpha_{\beta\tau} + \dfrac{\partial Q^\alpha_\mu}{\partial \bar{x}^\nu}\Big), \\
\bar{\Lambda}^i_{\mu\nu} = P^i_l Q^\beta_\mu Q^\tau_\nu \Lambda^l_{\beta\tau}, \\
\bar{\Lambda}^\lambda_{j\nu} = P^\lambda_\alpha Q^m_j Q^\tau_\nu \Lambda^\alpha_{m\tau}.
\end{cases}
$$

Wenn wir $z^A$ anstatt $y^i$ für $A = i$ und $x^\lambda$ für $A = \lambda$ umschreiben, so haben wir nach (7)

$$
(10) \qquad \delta v^A = dv^A + \Lambda^A_{BC} v^B dz^C .
$$

2. *Der von* T. HOSOKAWA, A. WUNDHEILER *und* V. HLAVATÝ *betrachtete Fall.* In der $\mathfrak{X}_{m+n}$ nehmen wir eine bestimmte $n$-dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathfrak{X}_n$ an, setzend die Bestimmungszahlen $v^i$ bezw. $w_i$ von kontravariantem bezw. kovariantem Punkte in der $\mathfrak{X}_{m+n}$ (für $i = 1, 2, \ldots, m$) gleich Null; mit anderen Worten wir nehmen durch die Projektion von der $\mathfrak{X}_{m+n}$ eine neue kleine $\mathfrak{X}_n$ an, welche auf ein System von $n$ reellen Funktionen $v^\lambda$ der $m$ reellen Variablen $y^i$ und der $n$ reellen Variablen $x^\lambda$ bezogen ist.

Wir nennen also ein auf diese Weise erhaltenes System von $n$ reellen Werten, welche $n$ Funktionen $v^\lambda$ bezw. $w_\lambda$ annehmen, *einen kontravarianten* bezw. *kovarianten Punkt* in $\mathfrak{X}_n$. Diese Überlegungen führen uns dahin, folgende Definition aufzustellen:

*Ein Wertsystem $v^\lambda$ bezw. $w_\lambda$ ist ein kontravarianter bezw. kovarianter Vektor im Punkte $x^\lambda$ der Mannigfaltigkeit $X_n$, sobald $v^\lambda$ bezw. $w_\lambda$ ein kontravarianter bezw. kovarianter Punkt in $\mathfrak{X}_n$ ist.*

Dieser kontravariante Vektor $v^\lambda$ transformiert sich gemäss (1) folgendermassen:

$$\bar{v}^\lambda = P^\lambda_\mu v^\mu .$$

Gleichfalls transformiert sich dieser kovariante Vektor $w_\lambda$ gemäss (1) in folgender Weise:

$$w_\lambda = Q^\mu_\lambda w_\mu .$$

Wir müssen aber bemerken, dass die Grössen $v^\lambda$, $w_\lambda$, $P^\lambda_\mu$ und $Q^\lambda_\mu$ alle von den Parametern $y^i$ abhängig sind.

Wir beschäftigen uns weiter mit der Frage: Was die Grundübertragung

$$\delta x^\lambda = dx^\lambda + \mathfrak{M}^\lambda_i dy^i$$

bedeutet? Wenn alle Parameter $y^i$ fest bleiben, so erhalten wir $\delta x^\lambda = dx^\lambda$; in diesem Falle sind nämlich die $\delta x^\lambda$ den gewöhnlichen Differentialen $dx^\lambda$ der Koordinaten gleich. Damit erklären wir die Grundübertragung folgendermassen: Wenn ein Punkt $P(x)$ in $X_n$ in einem bestimmten Wertsystem von $y^i$ gegeben ist, so wird bei infinitesimaler Veränderung von $x^\lambda$ und $y^i$ der Punkt $P(x)$ dem anderen Punkte $Q(x+\delta x)$ übertragen.

*Die Grundübertragung bestimmt also bei gegebener infinitesimaler Veränderung von $x^\lambda$ und $y^i$ die Beschaffenheit der Veränderung des Punktes von dem Raume $X_n$.*

Die Übertragung in $X_n$ wird aus der allgemeinen Punktübertragung in $\mathfrak{X}_{m+n}$ in einfacher Weise eingeführt. Wenn wir die folgenden Bedingungen:

$$\text{(11)} \qquad \Gamma^i_{\lambda C} = 0 \quad \text{und} \quad \Gamma^\lambda_{iC} = 0$$

für $i=1,\ 2,\ \ldots,\ m$; $\lambda=m+1,\ \ldots,\ m+n$; $C=1,\ 2,\ \ldots,\ m+n$ annehmen, so ergibt sich uns unmittelbar infolge (8) und (9)

$$\bar{\Gamma}^{i}_{\lambda C}=0 \qquad \text{und} \qquad \bar{\Gamma}^{\lambda}_{iC}=0\ .$$

Deshalb sind diese Bedingungen (11) *eigentlich.* Da die Parameter $\Gamma^{i}_{jC}$ in der allgemeinen Theorie (Nr. 1) hierbei nicht vorkommen, erhalten wir als die Transformationen der Parameter $\Gamma^{\lambda}_{\mu C}$ die folgenden zwei Gleichungssysteme:

$$(12)\qquad \begin{cases} \text{(a)}\quad \bar{\Lambda}^{\lambda}_{\mu k}=P^{\lambda}_{\alpha}\left(Q^{\beta}_{\mu}\,Q^{\eta}_{k}\,\Lambda^{\alpha}_{\beta\eta}+Q^{\beta}_{\mu}\dfrac{\partial x^{\tau}}{\partial\bar{y}^{k}}\Lambda^{\alpha}_{\beta\tau}+\dfrac{\partial Q^{\alpha}_{\mu}}{\partial\bar{y}^{k}}\right), \\ \text{(b)}\quad \bar{\Lambda}^{\lambda}_{\mu\nu}=P^{\lambda}_{\alpha}\left(Q^{\beta}_{\mu}\,Q^{\tau}_{\nu}\,\Lambda^{\alpha}_{\beta\tau}+\dfrac{\partial Q^{\alpha}_{\mu}}{\partial\bar{x}^{\nu}}\right). \end{cases}$$

Wir erhalten weiterhin die Übertragung in diesem Raume aus (7) und (10)

$$\begin{aligned}\delta v^{\lambda}&=dv^{\lambda}+\Gamma^{\lambda}_{\mu C}v^{\mu}\,\delta z^{C}\\ &=dv^{\lambda}+\Lambda^{\lambda}_{\mu C}v^{\mu}\,dz^{C}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\delta w_{\lambda}&=dw_{\lambda}-\Gamma^{\mu}_{\lambda C}w_{\mu}\,\delta z^{C}\\ &=dw_{\lambda}-\Lambda^{\mu}_{\lambda C}w_{\mu}\,dz^{C}\,.\end{aligned}$$

Wir ersehen: *Die Geometrie von* A. WUNDHEILER *ist ein Spezialfall der hier betrachteten Geometrie:*

$$m=1\,,\qquad \bar{y}=y(=t)\ .$$

Wenn wir die Parameter von A. WUNDHEILER mit $\overset{*}{\Lambda}{}^{A}_{BC}$ zeigen, so entstehen zwischen den $\overset{*}{\Lambda}{}^{A}_{BC}$ und unseren Parameter $\Lambda^{A}_{BC}$ die Relationen

$$\overset{*}{\Lambda}{}^{\lambda}_{\mu\nu}=\Lambda^{\lambda}_{\mu\nu} \qquad \text{und} \qquad \overset{*}{\Lambda}{}^{\lambda}_{\mu}=\Lambda^{\lambda}_{\mu 1}\ .$$

Hieraus folgt ohne weiteres: *Die spezielle Punktkonnexion von* V. HLAVATÝ *ist ein Spezialfall der hier betrachteten Geometrie:*

$$m = 1 , \qquad \bar{y} = y( = t) .$$

Die Parameter $\Phi^{\lambda}_{\mu 0}$ von V. HLAVATÝ transformieren sich folgendermassen:

$$\bar{\Phi}^{\lambda}_{\mu 0} = P^{\lambda}_{\alpha}\left( Q^{\beta}_{\mu} \Phi^{\alpha}_{\beta 0} + Q^{\beta}_{\mu} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial t} \Phi^{\alpha}_{\beta\gamma} + \frac{\partial Q^{\alpha}_{\mu}}{\partial t} \right) .$$

Deshalb erkennen wir

$$\Phi^{\lambda}_{\mu\nu} = \Lambda^{\lambda}_{\mu\nu} \qquad \text{und} \qquad \Phi^{\lambda}_{\mu 0} = \Lambda^{\lambda}_{\mu 1} .$$

*Bemerkung.* Wir sehen, dass in dieser Übertragung sich die Bestimmungszahlen

$$K^{\cdot\cdot\omega}_{\cdot\lambda\mu\nu} = \frac{\partial \Lambda^{\omega}_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \Lambda^{\omega}_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}} + \Lambda^{\omega}_{\mu\rho} \Lambda^{\rho}_{\lambda\nu} - \Lambda^{\omega}_{\nu\rho} \Lambda^{\rho}_{\lambda\mu}$$

nach (12. b) untereinander transformieren und also einen Affinor bilden.

Das obige erhaltene Ergebnis zeigt uns *nicht nur*, dass *viele Parameter $y^i$ eintreten dürfen, sondern auch*, dass *die Transformationsregel von $y^i$ nicht identisch sein kann.*

3. FINSLER*scher Raum.* In Nr. 1 nahmen wir $x^{\lambda}$ als die Koordinaten der Mannigfaltigkeit $X_n$ an, und adjungierten jedem Punkte in $X_n$ eine $(m+n)$-dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathfrak{X}_{m+n}$. Es mögen $x^{\lambda}$ und $y^i$ vertauscht werden, d. h. wir deuten nun $y^i$ als die Koordinaten in einem $m$-fach ausgedehnten Raume $Y_n$, und adjungieren jedem Punkte in $Y_m$ eine $(m+n)$-dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathfrak{Y}_{m+n}$, die auf ein System von $m+n$ reellen Funktionen $v^A$ der $n$ reellen Variablen $x^{\lambda}$ bezogen ist.

Alle Relationen, welche wir für $\mathfrak{X}_{m+n}$ erklärten, entstehen gleichfalls für die neue $\mathfrak{Y}_{m+n}$.

Wir setzen voraus, dass *alle Grössen in $\mathfrak{Y}_{m+n}$ nur von dem Verhältnis der Variablen $x^{\lambda}$ abhängen, und ferner $m = n$.* Wir nehmen eine bestimmte $n$-dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathfrak{Y}_n$ an, setzend $v^\lambda$ bezw. $w_\lambda$ von kontravariantem bezw. kovariantem Punkte in $\mathfrak{Y}_{m+n}$ für $\lambda = m+1, \ldots, m+n$ gleich Null; mit anderen Worten die $\mathfrak{Y}_n$ wird durch die $n$ Bestimmungszahlen $v^i$ bezogen, und $\mathfrak{Y}_n$ entspricht der gewöhnlichen tangentialen Mannigfaltigkeit, welche im Punkte $y^i$ von $Y_n$ adjungiert wird. Wir definieren $v^i$, welches der kontravariante Punkt in $\mathfrak{Y}_n$ ist, als *kontravarianten Vektor im Punkte $y^i$ der Mannigfaltigkeit $Y_n$*. Den kovarianten Vektor $w_i$ definieren wir ebenso wie den kontravarianten.

Denken wir uns $x^\lambda$ als *das ausgezeichnete Linienelement*, welches im Punkte $y^i$ adjungiert wird, so erhalten wir *einen* FINSLER*schen Raum $Y_n$*. In diesem Falle sind $x^\lambda$ die Bestimmungszahlen eines Vektors, und deshalb transformieren sie sich folgendermassen:

$$\bar{x}^\lambda = P^{\lambda-n}_{\mu-n} x^\mu .$$

Nehmen wir noch weitere Bedingungen

$$\Gamma^\lambda_{iC} = 0 \qquad \text{und} \qquad \Gamma^i_{\lambda C} = 0 \tag{13}$$

für $i = 1, 2, \ldots, n$; $\lambda = n+1, \ldots, 2n$; $C = 1, 2, \ldots, 2n$ an, so haben wir gemäss (10) als kovariantes Differential eines kontravarianten Vektors $v^i$ bezw. eines kovarianten Vektors $w_i$

$$\begin{aligned} \delta v^i &= dv^i + \Gamma^i_{jC} v^j \delta z^C \\ &= dv^i + \Lambda^i_{jC} v^j dz^C \end{aligned}$$

bezw.

$$\begin{aligned} \delta w_i &= dw_i - \Gamma^j_{iC} w_j \delta z^C \\ &= dw_i - \Lambda^j_{iC} w_j dz^C . \end{aligned} \tag{14}$$

Die Bedingungen (13) sind *eigentlich*, d.h. wir haben nämlich aus (9) und (13)

$$\bar{\Gamma}^\lambda_{iC} = 0 \qquad \text{und} \qquad \bar{\Gamma}^i_{\lambda C} = 0 .$$

Da die Parameter $\Gamma^{\lambda}_{\mu C}$ in der allgemeinen Theorie (Nr. 1) hierbei nicht vorkommen, so erhalten wir als die Transformationen der Parameter $\Gamma^{i}_{jC}$ die folgenden zwei Gleichungssysteme:

$$\Lambda^{i}_{jk} = P^{i}_{l}\Big(Q^{m}_{j} Q^{n}_{k} \Lambda^{l}_{mn} + Q^{m}_{j} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial \bar{y}^{k}} \Lambda^{l}_{m\tau} + \frac{\partial Q^{l}_{j}}{\partial \bar{y}^{k}}\Big),$$

$$\Lambda^{i}_{j\nu} = P^{i}_{l} Q^{m}_{j} Q^{\tau}_{\nu} \Lambda^{l}_{m\tau}.$$

In diesem Falle gibt uns die Grundübertragung

$$\delta x^{\lambda} = dx^{\lambda} + \mathfrak{M}^{\lambda}_{i}\, dy^{i}$$

die Übertragung des ausgezeichneten Linienelementes $x^{\lambda}$.

Schreiben wir genau die Gleichungen (14), so erhalten wir

$$\delta w_i = \Big(\frac{\partial w_i}{\partial y^{k}} - \frac{\partial w_i}{\partial x^{\nu}} \mathfrak{M}^{\nu}_{k} - \Gamma^{j}_{ik} w_j\Big) dy^{k} + \Big(\frac{\partial w_i}{\partial x^{\nu}} - \Gamma^{j}_{i\nu} w_j\Big)\delta x^{\nu}.$$

Also können wir das Ergebnis aufstellen: *Wenn wir in unserem Raume geeignete Metrik einführen und die Relationen zwischen* $\mathfrak{M}^{\lambda}_{i}$ *und* $\Gamma^{i}_{jC}$ *versuchen, so erhalten wir die* CARTAN*sche Übertragung im* FINSLER*schen Raume.*

Zum Schlusse möchte ich mich besonders für die lehrreichen Anweisungen des Herrn Professors A. KAWAGUCHI herzlichst bedanken.

25. Juli 1935.

Mathematisches Seminar,
Universität zu Sapporo.

# KONFORME INVARIANTEN IM FINSLERSCHEN RAUME, II

Von

Hitoshi HOMBU

## EINLEITUNG.

Das Äquivalenzproblem von den RIEMANNschen Räumen(1) ist bisher von zwei verschiedenen Seiten aus betrachtet worden. Erstens beruht die Methode von E. CARTAN darauf, dass zu einer bestimmten MONGEschen Gleichung

$$g_{\lambda\mu}\, dx^{\lambda}\, dx^{\mu} = 0$$

umkehrbar eindeutig eine sogenannte *normale konforme* Übertragung zugeordnet wird, so dass die Äquivalenz der RIEMANNschen Räume auf die der konformen Übertragungen zurückgeführt wird. Zweitens hat T. Y. THOMAS direkt mit Hilfe der Eliminationsmethode das System der konformen Grössen gesucht; das wurde kürzlich schematisch in zwei Arten sehr vereinfacht, die eine von J. L. VANDERSLICE und die andere von J. LEVINE.

Andererseits hat M. S. KNEBELMAN(2) das konforme Problem des FINSLER*schen Räume* in seiner eigenen Weise auseinandergesetzt und studiert. In meiner früheren Arbeit habe ich mich auch mit ihr in dem Fall der zwei-dimensionalen FINSLERschen Räume beschäftigt und

---

(1) E. CARTAN. Les espaces à connexion conforme, Ann. Soc. Polon. math., 2 (1923), S. 171–221; T. Y. THOMAS, Differential invariants of generalized spaces, Cambridge Univ. Press (1934), S. 66–83; J. L. VANDERSLICE, Conformal tensor invariants, Proc. Nat. Acad. Sc., 20 (1934), S. 672–677; J. LEVINE, Conformal-affine connections, Proc. Nat. Acad. Sc., 21 (1935), S. 165–167; V. HLAVATÝ, Zur Konformgeometrie, I. Eichinvariante Konnexion, Proc. Kon. Akad. Wet., 38 (1935), S. 281–286.

(2) M. S. KNEBELMAN, Conformal geometry of generalized metric spaces, Proc. Nat. Acad. Sc., 15 (1929), S. 376–379.

ein vollständiges System der konformen Kovarianten hergeleitet(3). Die dabei anzuwendende Methode, die eine Art Eliminationsmethode ist, wird im allgemeinen ohne weiteres auf den Fall von $n$ Dimensionen erweitert (§§ 1, 2). Aber es gelang mir noch nicht, statt dieser Eliminationsmethode vom Standpunkte der konformen Übertragung aus das Problem aufzulösen.

Gelegentlich in § 3, über die konformen Invarianten des unitären Raumes wird eine kleine Bemerkung gemacht.

Vor kurzer Zeit hat T. HOSOKAWA eine notwendige Bedingung dafür untersucht, dass zwei konforme FINSLERschen Räume (im oben genannten Sinne) projektiv aufeinander abgebildet werden können(4). Ich möchte hier diese Gelegenheit benutzen, eine Antwort auf diese Frage zu geben. Die Extremalen zweier Räume mit $ds = \mathfrak{L}(x, dx)$ und $d\bar{s} = \rho^{\frac{1}{2}}\mathfrak{L}(x, dx)$ sind nämlich

$$x^{r\prime\prime} + 2G^r = 0 \qquad \text{und} \qquad x^{r\prime\prime} + 2\bar{G}^r = 0\,,$$

wobei

$$\bar{G}^r = G^r + \frac{1}{2}\sigma_h H^{hr}\,; \tag{16}$$

dafür, dass die Räume sich zueinander projektiv abbilden lassen, muss

$$\bar{G}^r = G^r + \phi x^{r\prime}$$

sein, daraus folgt

$$\phi x^{r\prime} = \frac{1}{2}\sigma_h H^{hr}\text{(5)}$$

oder

$$\sigma_h = \psi F_{;h} \qquad \left(\psi = \frac{1}{F}(\sigma_m x^{m\prime} - 2\phi)\right).$$

(3) H. HOMBU, Konforme Invarianten im FINSLERschen Raume, dieses Journal, 2 (1934), S. 157–168.

(4) T. HOSOKAWA, Conformal property of a manifold $B_n$, Jap. Journ. of Math., 9 (1932), S. 59–62.

(5) Diese Gleichung ergibt sich auch aus T. HOSOKAWA, a. a. O., (11), überschiebend mit $x^{\lambda\prime}x^{\mu\prime}$.

Differenzierend die letzte Gleichung nach $x^{k\prime}$, haben wir

$$\psi g_{kh} = -\psi_{;k} F_{;h} ,$$

folglich

$$|\psi g_{kh}| = 0 , \quad \psi = 0 , \quad \sigma_h = 0 ;$$

daher ist $\rho$ konstant.

## § 1. KONFORM-AFFINE ÜBERTRAGUNG ABGELEITET IN EINEN FINSLERSCHEN RAUME.

**1.** In der $n$-dimensionalen Mannigfaltigkeit $X_n$ wird die FINSLERsche Massbestimmung bekanntlich folgendermassen definiert:

$$ds = \mathfrak{L}(x, dx) , \tag{1}$$

wobei die Funktion $\mathfrak{L}(x, dx)$ in Bezug auf die Argumente $dx^1$, $dx^2$, ..., $dx^n$ positiv-homogen erster Ordnung ist.

Die Mannigfaltigkeit $X_n$ ergänzt sich in die verallgemeinerte Mannigfaltigkeit erster Ordnung $K_n^{(1)}$, indem zu jedem Punkte in $X_n$ jedes System von Differentialen $dx^i$ adjungiert wird, d. h. $K_n^{(1)}$ ist der Inbegriff der Linienelemente erster Ordnung in $X_n$. Die Metrik in jedem Elemente $(x, x')$ der $K_n^{(1)}$ wird natürlicherweise[(6)] aus der FINSLERschen (1) in $X_n$ hergeleitet:

$$\begin{cases} g_{ij}(x, x')dx^i dx^j , \\ g_{ij} = \mathfrak{L} \cdot \dfrac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial x^{i\prime} \partial x^{j\prime}} + \dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^{i\prime}} \dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^{j\prime}} . \end{cases} \tag{2}$$

Setzt man

$$F(x, x') = \frac{1}{2} \mathfrak{L}^2(x, x') , \tag{3}$$

(6) Vgl. E. CARTAN, Les espaces de FINSLER, 1934; auch L. BERWALD, Untersuchung der Krümmung allgemeiner metrischer Räume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus, Math. Zeitschr., 25 (1926), S. 40–73.

so ist

$$g_{ij} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^{i\prime} \partial x^{j\prime}} \,. \tag{4}$$

Von dem Fundamentaltensor $g_{ij}$ setzen wir voraus, dass die Determinante

$$g = |g_{ij}| \tag{5}$$

nicht verschwindet[7]. Dann werden die Parameter $\Gamma^i_{jk}$, $C^i_{jk}$ der metrischen Übertragung in $K^{(1)}_n$

$$dv^i = -(\Gamma^i_{jk} dx^k + C^i_{jk} dx^{k\prime}) v^j \tag{6}$$

durch die folgenden Formeln gegeben:

$$g_{hk} \Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\left( \frac{\partial g_{ih}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} \right) + C_{ijr} \frac{\partial G^r}{\partial x^{h\prime}} - C_{hjr} \frac{\partial G^r}{\partial x^{i\prime}} \,, \tag{7}$$

$$g_{hk} C^k_{ij} = C_{ihj} = \frac{1}{2} \frac{\partial^3 F}{\partial x^{i\prime} \partial x^{h\prime} \partial x^{j\prime}} \,, \tag{8}$$

und es ist

$$g_{hr} G^r = \frac{1}{2}\left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^{h\prime} \partial x^k} x^{k\prime} - \frac{\partial F}{\partial x^h} \right) . \tag{9}$$

Die Torsionsgrösse $A_{ijk}$ und die Krümmungsgrösse $R_{khi}^{\cdot\cdot\cdot j}$ der Übertragung nehmen die Form an:

$$A_{ijk} = \mathfrak{L} C_{ijk} \,, \tag{10}$$

(7) D. h. die $F_1$-Funktion der Variationsrechnung des Integral

$$s = \int \mathfrak{L}(x, dx)$$

verschwindet nicht. Siehe L. BERWALD, a. a. O., S. 44.

(11) $$R_{khi}^{\cdot\cdot\cdot j} = \frac{\partial \Gamma_{ik}^{*j}}{\partial x^h} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^{*j}}{\partial x^{m'}}\frac{\partial G^m}{\partial x^{h'}} - \left(\frac{\partial \Gamma_{ih}^{*j}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ih}^{*j}}{\partial x^{m'}}\frac{\partial G^m}{\partial x^{k'}}\right)$$

$$+ C_{im}^j\left(\frac{\partial^2 G^m}{\partial x^{k'}\partial x^h} - \frac{\partial^2 G^m}{\partial x^{h'}\partial x^k} - G_{kr}^m\frac{\partial G^r}{\partial x^{h'}} + G_{hr}^m\frac{\partial G^r}{\partial x^{k'}}\right)$$

$$+ \Gamma_{ik}^{*m}\Gamma_{mh}^{*j} - \Gamma_{ih}^{*m}\Gamma_{mk}^{*j},$$

$$\left(\Gamma_{ij}^{*k} = \Gamma_{ij}^k - C_{jr}^k\frac{\partial G^r}{\partial x^{i'}}, \quad G_{ij}^k = \Gamma_{ij}^{*k} + \frac{x^{h'}}{\mathfrak{L}}\Gamma_h A_{ij}^k\right),$$

während zwei andere Krümmungsgrössen $S_{khij}$, $P_{khij}$ von der Torsionsgrösse $A_{ijk}$ und ihren kovarianten Ableitungen gebildet werden:

$$S_{khij} = A_{jk}^m A_{ihm} - A_{jh}^m A_{ikm},$$

$$P_{khij} = \Gamma_i A_{jkh} - \Gamma_j A_{ikh} + \frac{x^{l'}}{\mathfrak{L}} A_{ikm}\Gamma_l A_{jh}^m - \frac{x^{l'}}{\mathfrak{L}} A_{jkm}\Gamma_l A_{ih}^m .$$

Die zur Übertragung (6) gehörigen kovarianten Ableitungen eines Vektors $v^i$ werden durch

(12a) $$\Gamma_k v^i = \frac{\partial v^i}{\partial x^k} - \frac{\partial v^i}{\partial x^{m'}}\frac{\partial G^m}{\partial x^{k'}} + \Gamma_{jk}^{*i} v^j,$$

(12b) $$\Gamma_k^{(1)} v^i = \mathfrak{L}\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^{k'}} + C_{jk}^i v^j\right)$$

gegeben.

Die von E. Cartan herrührende Theorie[8] schliesst, dass $\frac{x^{i'}}{\mathfrak{L}}$, $g_{ij}$, $A_{ijk}$, $R_{khij}$ und deren sukzessive kovarianten Ableitungen ein vollständiges System von Differentialkomitanten bilden.

2. Die Differentialinvarianten des Finslerschen Raumes sind Funktionen der $\mathfrak{L}$, $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^i}$, $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^{i'}}$, ..., die für die Gruppe aller topologischen Transformationen Invarianteneigenschaften haben. Wir verlangen nun ausserdem von diesen Funktionen noch Invarianz bei den Transformationen der Gestalt

(8) E. Cartan, Les espaces de Finsler.

$$\bar{\mathfrak{L}} = \big(\rho(x)\big)^{\frac{1}{2}}\mathfrak{L}\,, \qquad \bar{F} = \rho F\,, \tag{13}$$

folglich auch

$$\bar{g}_{ij} = \rho g_{ij}\,, \tag{14}$$

wo $\rho$ eine positive, willkürliche Funktion bedeutet. Die Transformation (13) wollen wir als die konforme bezeichnen (nach KNEBELMAN). Um alle Invarianten zu ermitteln, möchten wir vorerst die Transformationen von den Übertragungsparametern bei (13) auffinden. Dies gelingt durch leichte Rechnung:

$$\bar{C}^i_{jk} = C^i_{jk}\,, \tag{15}$$

$$\bar{G}^r = G^r + \frac{1}{2}\sigma_h H^{hr}\,, \tag{16}$$

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} &+ \frac{1}{2}(A^k_i \sigma_j + A^k_j \sigma_i - g_{ij}g^{kh}\sigma_h) \\ &+ \frac{1}{2}g^{mk}(C_{ijr}H^{rh}_{;\,m} - C_{mjr}H^{rh}_{;\,i})\sigma_h\,,\end{aligned} \tag{17}$$

wobei gesetzt ist:

$$H^{ij} = x^{i\prime}x^{j\prime} - Fg^{ij}\,, \tag{18}$$

$$\sigma_h = \frac{\partial \log \rho}{\partial x^h}\,, \qquad H^{ij}_{;\,m} = \frac{\partial H^{ij}}{\partial x^{m\prime}}\,.$$

Hiermit erhält man nach (16) für ein beliebiges Skalar $f$

$$\bar{\Gamma}_k f = \Gamma_k f - \frac{1}{2}\sigma_h H^{hj}_{;\,k} f_{;\,j} \tag{19a}$$

und nach (15) für einen beliebigen Affinor $\Phi^{r_1\ldots r_\alpha}_{s_1\ldots s_\beta}$

$$\bar{\Gamma}^{(1)}_k \Phi^{r_1\ldots r_\alpha}_{s_1\ldots s_\beta} = \Gamma^{(1)}_k \Phi^{r_1\ldots r_\alpha}_{s_1\ldots s_\beta}\,. \tag{19b}$$

**3.** Eine allgemeine Grösse $H$ heisst konform mit Gewicht $p$, die sich bei konformer Transformation (13) transformiert:

$$\overline{H} = \rho^p H ,$$

z. B. ist der Fundamentaltensor $g_{ij}$ vom Gewicht eins.

Jetzt wenden wir uns zum Probleme, eine konform-affine Übertragung abzuleiten, dadurch mag das Reduktionsproblem für konforme Transformationen leicht gelöst werden.

*Erstens* setzen wir voraus, über ein konformes Skalar von nicht verschwindendem Gewicht verfügen zu dürfen. Dann wird aus ihm ein anderes Skalar $K$ vom Gewicht $-1$ konstruiert, und ferner ein gewöhnlicher (Gewicht 0) Tensor zweiter Stufe

$$h_{ij} = K g_{ij} . \tag{20}$$

Der Tensor $h_{ij}$ ist im allgemeinen kein von einer FINSLERschen Metrik abgeleiteter Fundamentaltensor, ausser wenn das Skalar $K$ nur vom Orte abhängig ist; aber die FINSLERsche Metrik

$$ds^{*2} = \mathfrak{L}^{*2} = h_{ij}(x, dx)\, dx^i dx^j \tag{21}$$

ist konform invariant. Aus $\mathfrak{L}^*$ konstruiert man

$$g^*_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathfrak{L}^{*2}}{\partial x^{i\prime} \partial x^{j\prime}} = K g_{ij} + (K_{;i} F_{;j} + K_{;j} F_{;i}) + K_{;i;j} F .$$

Mit $A^*_{ijk}$, $R^*_{khij}$ bezeichnen wir die Torsions- und die Krümmungsgrösse der zu $h_{ij}$ gehörigen CARTANschen Übertragung $\delta^*$. Damit gewinnt man den *Reduktionssatz* für die Gruppe aller topologischen Transformationen und konformen Transformationen: *Die Differentialkomitanten sind die algebraischen Komitanten der Grössen* $\frac{x^{j\prime}}{\mathfrak{L}^*}$, $g^*_{ij}$, $h_{ij}$, $A^*_{ijk}$, $R^*_{khij}$ *und deren* $\delta^*$*-Ableitungen.* Denn, wenn die Transformationsgleichungen

$$h_{ij} = {}'h_{\alpha\beta} \frac{\partial' x^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial' x^\beta}{\partial x^j}$$

für die Bestimmungszahlen $h_{ij}$, $'h_{\alpha\beta}$ der Tensoren, deren jeder sich wie (20) aus dem zu einer FINSLERschen Metrik gehörigen Fundamentaltensor bilden lässt, unter einer Abbildung $x \rightarrow 'x$ bestehen, so sind diese zwei Metriken wirklich konform[9].

Anstatt der $\delta^*$-Ableitung, kann man eine zu $h_{ij}$ gehörige (metrische) Konnexion in $K_n^{(1)}$ auffinden. Zu diesem Zwecke legen wir vorest die Grundübertragung der CARTANschen Übertragung $G^{*i}_{;\,m}$ als diejenige[10] der gesuchten zugrund und sodann fordern wir, dass die letzten zwei von den Forderungen[11], welche bei der Bestimmung von E. CARTAN eingeführt wurden, erfüllt werden. Somit haben wir die Parameter $\Pi^i_{jk}$, $D^i_{jk}$ der Übertragung

$$(22)\qquad \begin{cases} h_{hk}\Pi^k_{ij} = \dfrac{1}{2}(h_{ih,\,j}+h_{jh,\,i}-h_{ij,\,h})+D_{ijr}G^{*r}_{;\,h}-D_{hjr}G^{*r}_{;\,i}\,, \\[2ex] h_{hk}D^k_{ij} = \dfrac{1}{2}h_{ih\,;\,j}\,, \qquad\qquad \Pi^{*k}_{ij} = \Pi^k_{ij}-D^k_{ir}G^{*r}_{;\,j} \end{cases}$$

und zugehöriges kovariantes Ableitungsverfahren

$$'\nabla_j v^k = v^k{}_{,\,j} - v^k_{;\,r}G^r_{;j} + \Pi^{*k}_{ij}v^i\,, \qquad '\nabla^{(1)}_j v^k = \mathfrak{L}^*(v^k_{;j}+D^k_{ij}v^i)\,.$$

*Das Reduktionssystem besteht offenbar aus* $\dfrac{x^{i\prime}}{\mathfrak{L}^*}$, $h_{ij}$, *Torsions- und Krümmungsgrössen, und deren* $\nabla'$*-Ableitungen.*

Bemerkung. Ein konformes Skalar von nicht verschwindendem Gewicht gewinnt man aus einem beliebigen konform-invarianten Vektor. Z. B., wenn eine nur vom Orte abhängige Invariante $I$ vom Gewicht 0 (d. h. $\bar{I}=I$ bei (13)) gegeben wird, so ist der kovariante Vektor $I_i \equiv \nabla_i I$ konform-invariant (vgl. (23)) und folglich

$$\bar{g}^{ij}\bar{I}_i\bar{I}_j = \rho^{-1}g^{ij}I_iI_j\,.$$

**4.** *Zweitens* betrachten wir den Fall, dass sich eine konforme Invariante $I$ angeben lässt, welche wirklich von der Richtung $(x')$ des Linienelementes abhängig ist.

---

(9) Siehe M. S. KNEBELMAN, a. a. O.

(10) A. KAWAGUCHI, Die Differentialgeometrie in der verallgemeinerten Mannigfaltigkeit, Rend. Circ. Mat. Palermo, 56 (1932), S. 245–276, insbesondere § 1.

(11) E. CARTAN, Les espaces de FINSLER, S. 10, D, E.

Nach (19a) erhält man für diese $\bar{I}=I$

$$\bar{\Gamma}_k\bar{I}-\Gamma_k I = -\frac{1}{2}\sigma_h H^{hj}_{;k} I_{;j} , \tag{23}$$

und hiermit wegen der Homogenität von $H^{hj}$

$$\bar{\Gamma}_0\bar{I}-\Gamma_0 I = -\sigma_h H^{hj} I_{;j} \qquad (\Gamma_0 I \equiv x^{k\prime}\Gamma_k I) ,$$

woraus folgt durch Differenzierung nach $x^{k\prime}$ und vermöge (23)

$$(2\bar{\Gamma}_k\bar{I}-(\bar{\Gamma}_0\bar{I})_{;k})-(2\Gamma_k I-(\Gamma_0 I)_{;k}) = \sigma_h H^{hj} I_{;j;k} . \tag{24}$$

Jedes von (23), (24) wird bezüglich $\sigma_h$ in der Form

$$\sigma_h = a_h-\bar{a}_h \tag{25}$$

mit nicht konform-invariantem, kovariantem Vektor $a_h$ gelöst, wenn die Determinanten

$$| H^{hj}_{;k} I_{;j} | \qquad \text{bzw.} \qquad | I_{;j;k} |$$ [12]

nicht verschwindend sind. Wenn eine Gleichung von der Form (25) im allgemeinen besteht (vgl. die Endbemerkung der Nr. 6), können wir ohne weiteres eine konform-invariante Übertragung $\Delta$ herstellen, deren Parameter ausser $C^k_{ij}$, $a_j$

$$K^k_{ij} = \Gamma^k_{ij}+\frac{1}{2}(A^k_i a_j+A^k_j a_i-g_{ij}g^{kh}a_h) \tag{26a}$$
$$+\frac{1}{2}g^{mk}(C_{ijr}H^{rh}_{;m}-C_{mjr}H^{rh}_{;i})a_h$$

sind, und folglich deren Grundübertragungsparameter

$$L^k_j \equiv K^k_{ij}x^{i\prime} = G^k_{;j}+\frac{1}{2}H^{kr}_{;j}a_r . \tag{26b}$$

(12) Da $\qquad H^{ij}g_{ik}g_{jl} = F_k F_l - F F_{kl} = \mathfrak{L}^2(\mathfrak{L}_k\mathfrak{L}_l-\mathfrak{L}\mathfrak{L}_{kl})$,
ist $\qquad | H^{ij} | \cdot g^2 = \mathfrak{L}^{2n} | \mathfrak{L}_i\mathfrak{L}_j-\mathfrak{L}\mathfrak{L}_{ij} |$ ;
nach P. DELENS (La métrique angulaire des espaces de FINSLER, 1934, Paris, S. 11) verschwindet die rechte Seite nicht, also auch $| H^{ij} |$ nicht.

Die zugehörige $\varDelta$-Ableitungen für einen Vektor $v^i$ vom Gewicht $p$ sind

$$\varDelta_h v^i = v^i{}_{,h} - v^i{}_{;m} L^m_h + \overset{*}{K}{}_{kh}^{\cdot\cdot i} v^k + p\alpha_h v^i \,,$$

$$\varDelta^{(1)}_h v^i = \mathfrak{L}(v^i{}_{;h} + C^i_{kh} v^k) \,, \quad (\overset{*}{K}{}_{kh}^{\cdot\cdot i} = K^i_{kh} - C^i_{km} L^m_h) \,,$$

die letzte von höherem Gewicht um $\frac{1}{2}$ als $v^i$ ist, während die erste von demselben Gewicht wie $v^i$. Man bestätigt leicht, dass der Tensor $g_{ij}$ (Gewicht eins) bei $\varDelta$-Übertragung kovariant konstant ist:

$$\varDelta_h g_{ij} = 0 \,, \qquad \varDelta^{(1)}_h g_{ij} = 0 \,;$$

deswegen darf diese Übertragung konform-affin genannt werden. *Das Reduktionssystem von allen konform-kovarianten und folglich auch konforminvarianten Komitanten besteht aus* $g_{ij}$, *den Torsions- und den Krümmungsgrössen, und deren* $\varDelta$*-Ableitungen* (vgl. Nr. 7).

Hiermit, wenn es zu verlangen ist, lässt sich eine konforminvariante affine Übertragung $\varDelta'$ angeben, denn wir können im allgemeinen aus den konform-kovarianten Komitanten eine Kovariante mit nicht verschwindendem Gewicht wählen.

## § 2. KONFORME INVARIANTEN.

**5.** Nun wenden wir uns zum Aufsuchen von einigen konformen Invarianten, so dass das Aufstellungsproblem eines Reduktionssystemes nach Nr. 4 prinzipiell gelöst wird. Wir schliessen den Fall aus, dass die Metrik (1) RIEMANNsch ist,

Nach (19 b) sehen wir, dass die Affinoren

$$\text{(27)} \qquad \mathfrak{L} g_{i_1 i_2 i_3} \,, \quad \mathfrak{L}^2 g_{i_1 i_2 i_3 i_4} \,, \quad \ldots \,, \quad \mathfrak{L}^{m-2} g_{i_1 i_2 \ldots i_m} \,, \quad \ldots .$$
$$(g_{i_1 i_2 \ldots i_{m+1}} \equiv g_{i_1 i_2 \ldots i_m ;\, i_{m+1}})$$

konform-kovariant und von den Gewichten $\frac{3}{2}, 2, \ldots, \frac{m}{2}, \ldots$ sind[13]. Jeder von diesen Affinoren verschwindet nicht identisch, denn aus dem

(13) Es ist evident, dass im allgemeinen das System von $g_{ij}$ und (27) nicht vollständig ist.

Verschwinden des einen $\mathfrak{L}^{m-2}g_{i_1\ldots i_m}$ folgt ohne weiteres das des Affinors $\mathfrak{L}g_{i_1 i_2 i_3}$ wegen der EULERschen Formeln für homogene Funktionen. Das Gewicht jedes von $g_{ij}$ und (27) ist gleich seiner mit $\frac{1}{2}$ multiplizierten Gradeszahl, also alle von diesem System gebildete Simultaninvarianten sind notwendig vom Gewicht Null. Es ist genug an den Satz zu erinnern, dass im allgemeinen jede Simultankomitante sich nur mit Hilfe der Addition, der Multiplikation und der Überschiebung aus den Grössen des Systems konstruieren lässt. Setzen wir voraus, dass die quadratische Form $g_{ij}\delta x^i \delta x^j$ positiv definit sei, so gibt es unendlich viele, nicht identisch verschwindende Invarianten, z. B.

$$\underset{m}{I} = g^{i_1\alpha_1}\ldots g^{i_m\alpha_m}(\mathfrak{L}^{m-2}g_{i_1\ldots i_m})(\mathfrak{L}^{m-2}g_{\alpha_1\ldots\alpha_m}) \quad (m=3,\,4,\,\ldots)\,; \tag{28}$$

$\underset{m}{I}$ verschwindet nicht identisch, sonst $g_{i_1 i_2\ldots i_m}=0$.

Von den betreffenden Invarianten haben die nur von $g_{ij}$, $\mathfrak{L}g_{ijk}$ gebildeten Invarianten, z. B.

$$\underset{3}{I},\ g^{ij}A_iA_j \qquad \left(A_i = \frac{1}{2}\mathfrak{L}g^{ij}g_{ijk}\right),$$

die niedrigste Differentiationsordnung 3 nach $x'$ von der Funktion $\mathfrak{L}$. Ist $|H^{hj}_{;k}I_{;j}| \neq 0$ von einer Invariante $I$ erfüllt, so werden $\alpha_h$ und somit die wie in Nr. 4 definierte $\Delta$-Übertragung von den Differentialquotienten bis zur vierten Ordnung von $\mathfrak{L}$ abhängig.

6. Im Folgenden betrachten wir das Gleichungssystem

$$\Xi^h_m\sigma_h = \beta_m - \bar{\beta}_m\,, \tag{29}$$

wobei $\Xi^h_m$ ein konform-invarianter Affinor ist und $\beta_m$, $\bar{\beta}_m$ nicht konforminvariante Vektoren sind. Ist $|\Xi^h_m| \neq 0$, kehren wir zu dem Fall in Nr. 4 zurück; also wird so vorausgesetzt, dass $|\Xi^h_m| = 0$, oder der Rang $r$ von der Matrix $(\Xi^h_m)$ kleiner als $n$ ist. Es folgt so aus (29)

$$0 = \Xi^{h_1}_{[m_1}\Xi^{h_2}_{m_2}\ldots\Xi^{h_r}_{m_r}\Xi^{h}_{m]}\sigma_h = \Xi^{h_1}_{[m_1}\Xi^{h_2}_{m_2}\ldots\Xi^{h_r}_{m_r}(\beta_{m]} - \bar{\beta}_{m]})\,;$$

das besagt, dass der Affinor

$$\sum^{h_1 h_2 \ldots h_r}_{m_1 m_2 \ldots m_r m} = \Xi^{h_1}_{[m_1} \Xi^{h_2}_{m_2} \ldots \Xi^{h_r}_{m_r} \beta_{m]}$$

konform-invariant. *Ist $\Sigma$ nicht identisch verschwindend,* so gibt es mehrere, nicht verschwindende Kovarianten ; z. B.

$$K = g_{h_1 k_1} \ldots g_{h_r k_r} g^{m_1 n_1} \ldots g^{m_r n_r} g^{mn} \sum^{h_1 \ldots h_r}_{m_1 \ldots m_r m} \sum^{k_1 \ldots k_r}_{n_1 \ldots n_r n}$$

ist vom Gewicht $-1$ .

Man sieht daher nach Nr. 3, dass in diesem Fall eine konform-invariante metrische Übertragung bestimmt wird, welche, wie wir bereits gesehen haben, in unserem Problem eine wichtige Rolle spielt, und welche speziell im Fall (23), (24) von den Differentialquotienten bis zur 7- bzw. 8-ter Ordnung von $\mathfrak{L}$ abhängig ist.

Damit ist nur der Fall $\sum = 0$ üblich.

Bemerkung 1. Durch die Differentiation erster Art von einer beliebigen Simultankomitante vom System (27) gewinnt man statt (29) folgende Gleichung, berücksichtigt auf (16), (17):

$$\Xi^h_{\mathfrak{A}} \sigma_h = \beta_{\mathfrak{A}} - \bar{\beta}_{\mathfrak{A}} ,$$

wo $\mathfrak{A}$ zu einem bestimmten Indizesgebiete gehört. Diese ist vielleicht nützlich für einen einzelnen Raum.

2. Im Fall $n = 2$, kann man leicht bestätigen, dass $|I_{;j;k}|$ von Null verschieden, insofern $I$ wirklich von der Richtung des Linienelementes abhängig ist. Nach Nr. 4 und der Bemerkung von Nr. 3 wird das konforme Problem gelöst, ausser wenn Simultaninvarianten von (27) konstant sind. In meiner bereits zitierten Arbeit habe ich die fundamentale Invariante $I\left(I^2 = g^{ij} A_i A_j \text{ und auch } = I_3\right)$ benutzt und im Fall $I =$ konst. die analytische Form des Raumes angegeben[14].

3. Existieren zwei verschiedene Gleichungen von der Form (25), so ist die Differenz der zugehörigen Vektoren ($\beta$) konform-invariant.

(14) Dabei wurde die Bedingung beseitigt, dass die quadratische Form $g_{ij} \delta x^i \delta x^j$ positiv definit sei.

**7.** Krümmungsgrössen und andere fundamentale Grössen für die $\varDelta$-Übertragung (Nr. 4) werden folgendermassen berechnet:

$$
(30)\quad \begin{cases} K_{khj}^{\cdots i} = K^{*i}_{jk,h} - K^{*i}_{jh,k} + K^{*i}_{lh} K^{*l}_{jk} - K^{*i}_{lk} K^{*l}_{jh} + K^{*i}_{jk;l} L^l_k - K^{*i}_{jk;l} L^l_h + \\ \qquad + C^i_{jl}(L^l_{k,h} - L^l_{h,k} + L^l_{h;m} L^m_k - L^l_{k;m} L^m_h)\,, \\ Q_{khj}^{\cdots i} = \mathfrak{L}(K^{*i}_{jk;h} - C^i_{jh,k} + C^i_{jh;m} L^m_k - C^m_{jh} K^{*i}_{mk} + C^i_{mh} K^{*m}_{jk} \\ \qquad + C^i_{jm} L^m_{k;h})\,, \\ S_{khj}^{\cdots i} = A^i_{mk} A^m_{jh} - A^i_{mh} A^m_{jk}\,; \end{cases}
$$

$$
(31)\qquad A_{kh} = \varDelta_{[k}\alpha_{h]}\,, \qquad A'_{kh} = -\frac{1}{2}(\varDelta^{(1)}_h \alpha_k + \mathfrak{L} C^l_{kh} \alpha_l)\,;
$$

$$
(32)\quad \begin{cases} K_{kh0}^{\cdots i} = K_{khj}^{\cdots i} \cdot \dfrac{x^{j\prime}}{\mathfrak{L}}\,, & Q^i_{kh} = Q_{khj}^{\cdots i} \cdot \dfrac{x^{j\prime}}{\mathfrak{L}}\,, \\ A^i_{kh} = \mathfrak{L} C^i_{kh}\,, & \mathfrak{L}_k = \mathfrak{L}_{;k}\,, \end{cases}
$$

deswegen haben wir die Relationen für einen Vektor $v^i$ vom Gewicht $p$

$$
(33)\quad \begin{cases} 2\varDelta_{[k}\varDelta_{h]} v^i = -K_{khj}^{\cdots i} v^j + K_{kh0}^{\cdots l} \varDelta^{(1)}_l v^i + 2pA_{kh} v^i\,, \\ (\varDelta_k \varDelta^{(1)}_h - \varDelta^{(1)}_h \varDelta_k) v^i = -Q_{khj}^{\cdots i} v^j + A^l_{kh} \varDelta_l v^i + Q^l_{kh} \varDelta^{(1)}_l v^i + 2pA'_{kh} v^i\,, \\ 2\varDelta^{(1)}_{[k} \varDelta^{(1)}_{h]} v^i = -S_{khj}^{\cdots i} v^j + \mathfrak{L}_{[k} \varDelta^{(1)}_{h]} v^i\,. \end{cases}
$$

Die Grössen $K_{khj}^{\cdots i}$, $Q_{khj}^{\cdots i}$, $S_{khj}^{\cdots i}$, $A_{kh}$, $A'_{kh}$ sind die Krümmungsgrössen von den Gewichten 0, $\frac{1}{2}$, 1, 0, $\frac{1}{2}$, insbesondere die letzten zwei treten für den Vektor mit dem Gewicht ein, was zu beachten ist, und die übrigen Grössen $K_{kh0}^{\cdots i}$, $Q^i_{kh}$, $A^i_{kh}$, $\mathfrak{L}_k$ sind die Torsionsgrössen von den Gewichten $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$.[15] *Diese Grössen und deren $\varDelta$-Ableitungen, zusammen mit $g_{ij}$, bilden ein vollständiges System für die konform-kovarianten Differentialkomitanten.*

(15) Für die Krümmungs- und die Torsionsaffinoren werden die BIANCHIschen Identitäten bekannterweise verallgemeinert, die hier aber übergangen werden. Vgl. A. KAWAGUCHI, a. a. O., S. 266–268.

## § 3. KONFORMKRÜMMUNG VOM UNITÄREN RAUM.

8. In der $n$-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit sei eine unitäre Metrik $ds^2 = \mathfrak{L}(x^\lambda, x^A, dx^\lambda, dx^A)$ angegeben, wo die Funktion $\mathfrak{L}$ in Bezug auf $dx^\lambda$ und auch $dx^A$ homogen von erster Ordnung ist. Transformation der Metrik von der folgenden Form wollen wir konform nennen, analog wie in den RIEMANNschen und den FINSLERschen Räumen:

$$\bar{\mathfrak{L}} = \rho \mathfrak{L} , \tag{34}$$

dabei ist $\rho$ nur vom Orte abhängige reelle Funktion.

Einfachheitshalber beschäftigen wir uns mit dem gewöhnlichen unitären Raume

$$ds^2 = g_{\lambda M} dx^\lambda dx^M .$$ [16]

Bei der Transformation (34) transformieren sich $g_{\lambda M}$, $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$, $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$, $R_{\Omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ folgendermassen:

$$\left\{\begin{aligned} \bar{g}_{\lambda M} &= \rho g_{\lambda M} , \qquad \bar{g}^{M\nu} = \rho^{-1} g^{M\nu} , \\ \bar{\Gamma}^\nu_{\lambda\mu} &= \Gamma^\nu_{\lambda\mu} + A^\nu_\lambda \sigma_{,\mu} \quad (\sigma = \log \rho) , \\ \bar{S}_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} &= S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} + A^\nu_{[\lambda} \sigma_{,\mu]} , \quad \bar{S}_{\mu\pi}^{\cdot\cdot\pi} = S_{\mu\pi}^{\cdot\cdot\pi} - \frac{n-1}{2} \sigma_\mu , \\ \bar{R}_{\Omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} &= R_{\Omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} - A^\nu_\lambda \sigma_{,\Omega,\mu} , \quad \text{konj.} \end{aligned}\right. \tag{35}$$

Setzt man

$$\left\{\begin{aligned} a_\mu &= \frac{2}{n-1} S_{\mu\pi}^{\cdot\cdot\pi} \quad (n \geqq 2) , \qquad K^\nu_{\lambda\mu} = \Gamma^\nu_{\lambda\mu} + A^\nu_\lambda a_\mu , \\ T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} &= S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} + \frac{2}{n-1} A^\nu_{[\lambda} S_{\mu]\pi}^{\cdot\cdot\pi} = S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} + A^\nu_{[\lambda} a_{\mu]} , \quad \text{konj.}, \end{aligned}\right. \tag{36}$$

---

(16) Siehe J. A. SCHOUTEN und D. VAN DANTZIG, Über unitäre Geometrie, Math. Ann., 103 (1930), S. 319-346; H. HOMBU, Zur Theorie der unitären Geometrie, dieses Journal, 3, S. 27-42.

so ist

$$(37)\qquad \sigma_{\mu}=a_{\mu}-\bar{a}_{\mu}\,,\quad \text{konj.},$$

$$(38)\qquad \left\{\begin{aligned} &\bar{K}^{\nu}_{\lambda\mu}=K^{\nu}_{\lambda\mu}\,,\qquad K^{\nu}_{[\lambda\mu]}=T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}\,,\\ &\qquad\quad T_{\mu\pi}^{\cdot\cdot\pi}=0\,. \end{aligned}\right. \qquad \text{konj.}$$

Die Funktionen $K^{\nu}_{\lambda\mu}$ definieren eine affine Übertragung, zusammen mit

$$K^{\nu}_{\lambda M}=K^{\nu}_{M\lambda}=0\,,\qquad K^{\nu}_{\Lambda M}=0\,,\qquad \text{konj.},$$

da die Differenz $K^{\mathfrak{E}}_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}-\Gamma^{\mathfrak{E}}_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$ ein Affinor ist. Das kovariante Differential $\delta v^{\nu}$ eines Vektors $v^{\nu}$ vom Gewicht $p$ und folglich die Ableitungen $\Delta v^{\nu}$ werden in folgender Weise definiert:

$$\delta v^{\nu}=dv^{\nu}+K^{\nu}_{\lambda\mu}v^{\lambda}dx^{\mu}+pv^{\nu}(a_{\mu}dx^{\mu}+a_{M}dx^{M})\,,\quad \text{konj.}$$

$$\Delta_{\mu}v^{\nu}=v^{\nu}_{,\mu}+K^{\nu}_{\lambda\mu}v^{\lambda}+pa_{\mu}v^{\nu}\,,\quad \Delta_{M}v^{\nu}=v^{\nu}_{,M}+pa_{M}v^{\nu}\,,\quad \text{konj.}$$

Der Fundamentaltensor $g_{\lambda M}$ vom unitären Raume ist kovariant konstant, wie leicht bestätigt wird.

Es besteht

$$2\nabla_{[\mathfrak{B}}\nabla_{\mathfrak{A}]}v^{\mathfrak{E}}=-K_{\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{D}}^{\cdot\cdot\cdot\mathfrak{E}}v^{\mathfrak{D}}+2T_{\mathfrak{B}\mathfrak{A}}^{\cdot\cdot\mathfrak{D}}\nabla_{\mathfrak{D}}v^{\mathfrak{E}}+2pA_{\mathfrak{B}\mathfrak{A}}v^{\mathfrak{E}}\,,$$

wo

$$(39)\qquad \left\{\begin{aligned} &K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}=-2A^{\nu}_{\lambda}A_{\omega\mu}\,,\qquad K_{\omega\mu\Lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}=0\,,\\ &K_{\Omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}=R_{\Omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}-A^{\nu}_{\lambda}a_{\mu,\Omega}\,,\qquad K_{\Omega\mu\Lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}=0\,,\\ &K_{\Omega M\mathfrak{D}}^{\cdot\cdot\cdot\nu}=0\,,\qquad \text{konj.} \end{aligned}\right.$$

$$(40)\qquad T_{\omega\mu}^{\cdot\cdot\Lambda}=T_{\Omega\mu}^{\cdot\cdot\mathfrak{E}}=0\,,\quad T_{\omega\mu}^{\cdot\cdot\lambda}\,,\quad A_{\mathfrak{B}\mathfrak{A}}=a_{[\mathfrak{A},\mathfrak{B}]}\qquad \text{konj.}$$

$K_{\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{D}}^{\cdot\cdot\cdot\mathfrak{E}}$, $T_{\mathfrak{E}\mathfrak{A}}^{\cdot\cdot\mathfrak{D}}$, $A_{\mathfrak{B}\mathfrak{A}}$ sind die fundamentalen konform-invarianten Grössen (d. h. vom Gewicht Null). Infolgedessen, dafür dass der Raum kon-

(17) D. h. abbildbar auf den Raum $ds^2=\delta_{\lambda M}dx^{\lambda}dx^{M}$.

form-HERMITEsch[17] sei, ist es notwendig und hinreichend, dass diese Grössen alle identisch verschwinden, oder

$$\alpha_{\mu,\omega} = \alpha_{\omega,\mu}, \qquad \alpha_{\mu,\Omega} = \alpha_{\Omega,\mu},$$

$$S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\,\nu} = -A_{[\lambda}^{\nu}\alpha_{\mu]}, \quad R_{\Omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\,\nu} = A_{\lambda}^{\nu}\alpha_{\mu,\Omega}.$$

Wenn also der Raum nicht konform-HERMITEsch ist, so gibt es nicht verschwindende konform-invariante Grössen und damit im allgemeinen eine Kovariante $K$ vom Gewicht $-1$. *$Kg_{\lambda M}$ mit $K_{\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{D}}^{\cdot\cdot\cdot\,\mathfrak{C}}$, $T_{\mathfrak{B}\mathfrak{A}}^{\cdot\cdot\,\mathfrak{D}}$, $A_{\mathfrak{B}\mathfrak{A}}$, und deren $\Delta$-Ableitung bilden sodann ein Reduktionssystem für die konformen Differentialkomitanten.*

Juli 1935.