

LA THÉORIE DES ENSEMBLES ANALYTIQUES ET LES ESPACES ABSTRAITS⁽¹⁾.

Par

Kinjiro KUNUGUI

Introduction.

Il semble que la théorie des ensembles analytiques, développée surtout par MM. N. LUSIN et W. SIERPIŃSKI, a pour champ de validité les espaces métriques, complets et séparables⁽²⁾. Pourtant, en 1932, M. G. STEINBACH a réussi à débarrasser ces deux conditions du théorème de projection. M. W. SIERPIŃSKI, d'autre part, l'en a dégagée parfaitement et a traité une partie importante de cette théorie comme une question des ensembles complètement généraux. Dans ce travail, nous allons compléter les résultats de ces auteurs et, en suivant les méthodes dues aux mathématiciens varsoviens, montrer comment on peut généraliser la plus grande partie de cette théorie aux espaces abstraits.

Pour nous, ce qui joue un rôle essentiel, c'est le système d'axiomes introduit par M. F. HAUSDORFF pour les espaces (v) . Dans le premier paragraphe, nous discuterons donc quelques théorèmes préliminaires sur ce sujet.

Le deuxième paragraphe contient quatre théorèmes sur la projection, dont le premier est dû à M. G. STEINBACH. Ce théorème fondamental ne s'applique pas d'une façon générale aux espaces (v) quelconques (même avec l'espace composant S métrique compact).

(1) Une partie des résultats contenus dans cette Note a été publiée dans "Sur la théorie des ensembles analytiques dans les espaces abstraits" the Proceedings of the Imperial Academy, X (1934), p. 546-549.

(2) Voir, par exemple, l'exposé excellent de C. KURATOWSKI (1), p. 234-267.

Dans le troisième paragraphe, nous considérerons les cribles de M. LUSIN. Son théorème fondamental est vrai pour les espaces quasi-accessibles.

Dans le paragraphe 4, nous étudierons le deuxième principe de séparation. L'extension des principes de M. LUSIN aux espaces abstraits a été déjà considérée par M. W. SIERPIŃSKI. Il a généralisé le premier, tandis qu'ici nous traiterons le deuxième. Ce deuxième principe est vrai pour les espaces métriques arbitraires.

Dans le 5^e paragraphe, nous démontrerons, en suivant la marche de M. C. KURATOWSKI, les théorèmes sur l'ordre de la projection. Ici nous remplacerons d'abord la notion d'ensembles mesurables (B) par celle des ensembles d'unicité; leur différence sera discutée dans § 4. Sur ce sujet, nous avons trois théorèmes importants pour les espaces abstraits; ils sont dûs à M M. N. LUSIN, W. SIERPIŃSKI, S. MAZURKIEWICZ et S. BRAUN.

Dans le dernier paragraphe, ce seront les théorèmes de M. S. MAZURKIEWICZ et de M. W. SIERPIŃSKI sur les points inférieurs que nous traiterons également dans notre cadre.

§ 1.

THÉORÈMES PRÉLIMINAIRES.

Soient A et B deux ensembles quelconques. Nous désignons par $A \times B$ le produit cartésien de A et B . Soient \mathfrak{F}_1 et \mathfrak{F}_2 deux familles quelconques d'ensembles. Nous désignons par $\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$ la famille de tous les ensembles de la forme $A_1 \times A_2$, $A_1 \in \mathfrak{F}_1$, $A_2 \in \mathfrak{F}_2$. Étant donnée une famille quelconque \mathfrak{F} d'ensembles, nous désignons par \mathfrak{F}_A la famille de tous les ensembles qui sont des noyaux des schèmes de Souslin: $\{E_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ formés des ensembles de \mathfrak{F} , c. -à -d. la famille de tous les ensembles de la forme :

$$E = \sum_{\nu} \prod_k E_{n_1, n_2, \dots, n_k}; \quad E_{n_1, n_2, \dots, n_k} \in \mathfrak{F}.$$

Théorème 1. *Pour deux familles quelconques d'ensembles, \mathfrak{F}_1 et \mathfrak{F}_2 , nous avons toujours*

$$(\mathfrak{F}_1)_A \times (\mathfrak{F}_2)_A \subseteq (\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2)_A. \quad (1)$$

Démonstration. Soit E un ensemble de $(\mathfrak{F}_1)_A \times (\mathfrak{F}_2)_A$:

$$E = E_1 \times E_2; \quad E_1 = \sum_{\nu} \prod_k P_{n_1, n_2, \dots, n_k}; \quad E_2 = \sum_{\nu'} \prod_{k'} Q_{m_1, m_2, \dots, m_{k'}};$$

$$P_{n_1, n_2, \dots, n_k} \in \mathfrak{F}; \quad Q_{m_1, m_2, \dots, m_{k'}} \in \mathfrak{F}_2.$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} E_1 \times E_2 &= \sum_{\nu} \prod_k P_{n_1, n_2, \dots, n_k} \times \sum_{\nu'} \prod_{k'} Q_{m_1, m_2, \dots, m_{k'}} \\ &= \sum_{\nu\nu'} \prod_k (P_{n_1, n_2, \dots, n_k} \times \prod_{k'} Q_{m_1, m_2, \dots, m_{k'}}) \\ &= \sum_{\nu\nu'} \prod_k (P_{n_1, n_2, \dots, n_k} \times Q_{m_1, m_2, \dots, m_{k'}}). \end{aligned}$$

Donc, en posant $[n, m] = \frac{(n+m-1)(n+m-2)}{2} + m$,

$$F_{[n_1, m_1], [n_2, m_2], \dots, [n_k, m_k]} = P_{n_1, n_2, \dots, n_k} \times Q_{m_1, m_2, \dots, m_k}$$

et $\lambda = ([n_1, m_1], [n_2, m_2], \dots, [n_k, m_k], \dots)$, nous avons

$$E_1 \times E_2 = \sum_{\lambda} \prod_l F_{p_1, p_2, \dots, p_l}; \quad F_{p_1, p_2, \dots, p_l} \in \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2.$$

D'où, $E = E_1 \times E_2 \in (\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2)_A$. C. Q. F. D.

Nous appelons, avec M. M. FRÉCHET⁽²⁾, un espace (v) , un espace R où la définition des points d'accumulation peut être donnée comme il suit : un point a de R est un point d'accumulation d'un ensemble E de points de R , si chaque voisinage V_a de a contient un point de E distinct de a . Les voisinages V_a de a sont des ensembles de points de R , attachés à chaque point a et qui contiennent le point a .

Le produit cartésien de deux espaces $(v): R$ et S est l'espace $R \times S$, dont les voisinages $V(a, b)$ du point (a, b) sont des ensembles $V(a) \times V(b)$, où $V(a)$ et $V(b)$ sont des voisinages quelconques de a et de b respectivement⁽³⁾. Si A et B sont fermés (ou ouverts) dans R et dans S resp., $A \times B$ est fermé (ou ouvert) dans $R \times S$.

(1) C'est une généralisation du théorème 40.7.2 de H. HAHN (1), p. 351.
 (2) M. FRÉCHET (1) p. 172.
 (3) H. TIETZE (1) p. 41.

Nous appelons *un ensemble analytique* dans un espace (v) tout ensemble de \mathfrak{F}_A , où \mathfrak{F} est la famille de tous les ensembles fermés dans cet espace.

Pour les espaces (v) , nous considérons, avec M. F. HAUSDORFF⁽¹⁾, trois axiomes suivants :

(B) Pour tout point a , quels que soient les voisinages V_a et W_a de a , il existe au moins un voisinage de a qui appartient entièrement à V_a et à W_a .

(C) Quel que soit le point b du voisinage W_a du point a , il existe un voisinage W_a de b appartenant entièrement à W_a .

(D) Pour tout couple d'éléments distincts a et b , il existe deux voisinages respectifs W_a de a et W_b de b qui sont disjoints.

Dans la suite nous considérerons ces axiomes séparément. Un espace (v) qui permet d'attacher un système (équivalent) de voisinages satisfaisant à l'axiome (C) sera dit *un espace quasi-accessible*. En d'autres termes, d'après un théorème de M. TUMARKIN⁽²⁾, un espace quasi-accessible est un espace (v) où la fermeture $\bar{E} = E + E'$ d'un ensemble E quelconque est fermée.

Pour les espaces (v) qui satisfont à l'axiome (B), nous avons le théorème suivant :

Théorème 2. *Soient R un espace (v) qui satisfait à l'axiome (B), et S un espace métrique compact. Alors la projection H d'un ensemble fermé F de l'espace $R \times S$ sur R est aussi fermé dans R ⁽³⁾.*

Démonstration. Nous allons prouver que le complémentaire CH de H est un ensemble ouvert. Soit p un point quelconque de CH . Alors l'ensemble $p \times S$, (p étant l'ensemble contenant seulement le point p), est disjoint de l'ensemble F . Comme F est un ensemble fermé, tout point (p, q) de $p \times S$ possède au moins un voisinage $V(p, q) = V(p) \times V(q)$ disjoint de F . Correspondons ce $V(q)$ au point q de S ; ainsi nous avons une famille d'ensembles $\{V(q)\}$ de S , telle

(1) F. HAUSDORFF (2) p. 213.

(2) M. FRÉCHET (1) p. 187-188.

(3) Voir p. ex. C. KURATOWSKI (2) p. 253 et H. HAHN (1) 23-6-3, p. 168.

que tout point q de S soit à l'intérieur à l'un au moins de $\{V(q)\}$. Donc, d'après le théorème de BOREL-LEBESGUE, il existe un nombre fini d'ensembles: $V(q_1), V(q_2), \dots, V(q_n)$ tels que tout point de S soit à l'intérieur à l'un d'eux. Soient $V_1(p), V_2(p), \dots, V_n(p)$ les voisinages de p , tels que $V(p, q_i) = V_i(p) \times V(q_i)$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$). Comme l'espace R satisfait à l'axiome (B), il existe au moins un voisinage $V(p)$ qui appartient entièrement à $V_1(p) \cdot V_2(p) \cdot \dots \cdot V_n(p)$. Puisque $\sum_{i=1}^n V(p, q_i) = \sum_{i=1}^n V_i(p) \times V(q_i)$ est disjoint de F , l'ensemble $V(p) \times S$ est aussi disjoint de F . Donc $V(p)$ est disjoint de H , et par suite p est un point intérieur de CH . CH est ainsi un ensemble ouvert, et H est un ensemble fermé. C. Q. F. D.

Quant aux espaces (v) satisfaisant à l'axiome (D), nous avons un théorème suivant:

Théorème 3. Soient R un espace (v) qui satisfait à l'axiome (D), et S un espace (v) quelconque. Alors l'image I de l'équation⁽¹⁾ $p = f(q)$ est un ensemble fermé dans l'espace $R \times S$, si la fonction $p = f(q)$ est univoque et continu à tout point de S ⁽²⁾.

Démonstration. Soient I l'image de l'équation $p = f(q)$ et (x, y) un point quelconque de $I + I'$ (I' étant l'ensemble dérivé de I). Posons $x^* = f(y)$ et montrons que $x = x^*$.

Supposons par impossible que $x \neq x^*$. Comme R satisfait à l'axiome (D), il existe deux voisinages $V(x)$ de x et $V(x^*)$ de x^* tels que $V(x) \cdot V(x^*) = 0$. Soit W la projection de l'image I sur R . Puisque $p = f(q)$ est continue au point y et que x^* est un point intérieur à $V(x^*)$, $E^* = f^{-1}\{W \cdot V(x^*)\}$ contient y dans son intérieur. Donc il existe un voisinage $V(y)$ de y tel que $V(y) \subseteq E^*$. Or, $V(x, y) = V(x) \times V(y)$ est un voisinage de (x, y) , et (x, y) est un point de $I + I'$. Donc, il existe au moins un point $(f(y^*), y^*)$ de I contenu dans $V(x) \times V(y)$. Nous avons donc $f(y^*) \in V(x)$ et $y^* \in V(y)$. Celui-ci veut dire $y^* \in E^*$. Par suite, $f(y^*) \in W \cdot V(x^*) \subseteq V(x^*)$. Donc $f(y^*) \in V(x) \cdot V(x^*)$. $V(x)$ et $V(x^*)$ ne seraient pas disjoints, contrairement à notre supposition.

(1) Voir C. KURATOWSKI (1) p. 143.

(2) C. KURATOWSKI (1) p. 144 et p. 184; le domaine de la définition de $f(q)$ doit être l'espace S tout entier.

Ainsi nous avons démontré que $x = x^*$. (x, y) doit être un point de I . D'où, $I = I + I'$. C. Q. F. D.

Nous ne pouvons pas remplacer la condition (D) dans le théorème 3 par (T_0) : Quels que soient les points a et b , il existe un ensemble disjoint de b et auquel a est intérieur (et inversement)⁽¹⁾. Il existe un espace (v) , soit R , satisfaisant à (T_0) , un espace (v) , soit S , et une fonction $p = f(q)$ univoque et continue telle que son image ne soit pas fermée dans $R \times S$.

Enfin remarquons que si R et S sont des espaces quasi-accessibles, $R \times S$ l'est aussi. De même, si R et S sont des espaces qui satisfont à l'axiome (B) ou (D), $R \times S$ l'est aussi.

§ 2.

THÉORÈMES DE PROJECTION.

Lemme. Soient R un espace (v) quelconque, et S un espace métrique, complet et séparable. Soit M un ensemble analytique dans $R \times S$: $M = \sum_{\nu} \prod_k M_{n_1, n_2, \dots, n_k}$, où M_{n_1, n_2, \dots, n_k} sont des ensembles fermés dans $R \times S$. Supposons que ces ensembles satisfassent à deux conditions suivantes :

$$(1) \quad M_{n_1, n_1, \dots, n_k} \supseteq M_{n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1}} \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

(2) La projection de M_{n_1, n_2, \dots, n_k} sur S a un diamètre tendant vers 0 avec $\frac{1}{k}$.

Désignons par P et P_{n_1, n_2, \dots, n_k} la projection de M et de M_{n_1, n_2, \dots, n_k} respectivement sur R . Nous avons alors

$$P = \sum_{\nu} \prod_k P_{n_1, n_2, \dots, n_k} = \sum_{\nu} \prod_k \bar{P}_{n_1, n_2, \dots, n_k}$$

où $\bar{P}_{n_1, n_2, \dots, n_k} = P_{n_1, n_2, \dots, n_k} + P'_{n_1, n_2, \dots, n_k}$.

Démonstration. Il est clair que $P \subseteq \sum_{\nu} \prod_k P_{n_1, n_2, \dots, n_k} \subseteq \sum_{\nu} \prod_k \bar{P}_{n_1, n_2, \dots, n_k}$. Il nous suffit, donc, de démontrer que $P \supseteq \sum_{\nu} \prod_k \bar{P}_{n_1, n_2, \dots, n_k}$.

(1) Voir M. FRÉCHET (1) p. 205.

Soit p un point de $\sum_{\nu} \prod_k \bar{P}_{n_1, n_2, \dots, n_k}$. Alors, il existe une suite de nombres naturels $\nu = (n_1, n_2, n_3, \dots)$, telle que $p \in \prod_{k=1}^{\infty} \bar{P}_{n_1, n_2, \dots, n_k}$. Comme $\bar{P}_{n_1, n_2, \dots, n_k} \neq \emptyset$, nous avons $P_{n_1, n_2, \dots, n_k} \neq \emptyset$; par suite $M_{n_1, n_2, \dots, n_k} \neq \emptyset$ ($k = 1, 2, 3, \dots$).

La projection H_{n_1, n_2, \dots, n_k} de M_{n_1, n_2, \dots, n_k} sur S , ayant un diamètre $\delta(H_{n_1, n_2, \dots, n_k})$ tendant vers 0 avec $\frac{1}{k}$, on peut dire la même chose avec la fermeture $\bar{H}_{n_1, n_2, \dots, n_k}$.

Ainsi $\bar{H}_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) est une suite montone d'ensembles fermés de S , non vides tels que $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta(\bar{H}_{n_1, n_2, \dots, n_k}) = 0$. Donc il existe un point q de S tel que $q = \prod_k \bar{H}_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ (S étant un espace métrique complet).

Soit $V(p, q) = V(p) \times V(q)$ un voisinage quelconque de (p, q) . Comme $p \in \bar{P}_{n_1, n_2, \dots, n_k}$, il existe un point p_k de P_{n_1, n_2, \dots, n_k} , contenu dans $V(p)$. $p_k \in P_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ veut dire qu'il existe un point q_k de S tel que $(p_k, q_k) \in M_{n_1, n_2, \dots, n_k}$. Comme la distance $\rho(q_k, q)$ entre les points q_k et q tend vers 0 avec $\frac{1}{k}$, q_k appartient à $V(q)$, à partir d'un certain rang: $k \geq k_0$. Donc pour tout k tel que $k \geq k_0$, $(p_k, q_k) \in V(p, q)$. De là, $V(p, q) \cdot M_{n_1, n_2, \dots, n_k} \neq \emptyset$ pour $k \geq k_0$. M_{n_1, n_2, \dots, n_k} étant monotone d'après (1), celui-ci est vrai pour tout $k: k = 1, 2, 3, \dots$. Par conséquent, $(p, q) \in \bar{M}_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ pour tout $k = 1, 2, 3, \dots$. M_{n_1, n_2, \dots, n_k} étant fermé, $(p, q) \in M_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ pour tout $k = 1, 2, 3, \dots$. Donc $(p, q) \in \prod_k M_{n_1, n_2, \dots, n_k} \subseteq M$, et par suite $p \in P$. Ainsi nous avons démontré que $P \supseteq \sum_{\nu} \prod_k P_{n_1, n_2, \dots, n_k}$.

C. Q. F. D.

Théorème 4. Soient R un espace quasi-accessible, S un espace métrique, complet et séparable. La projection P d'un ensemble analytique M dans l'espace $R \times S$ projetée sur R est un ensemble analytique dans $R^{(1)}$.

Démonstration. Posons $M = \sum_{\nu} \prod_k M_{n_1, n_2, \dots, n_k}$, où M_{n_1, n_2, \dots, n_k} sont des ensembles fermés dans $R \times S$. S étant un espace métrique

(1) Cette généralisation du théorème de SOUSLIN est due à M. STEINBACH. Voir M. SOUSLIN (1) p. 91 et G. STEINBACH (1) p. 8.

séparable, M_{n_1, n_2, \dots, n_k} est une somme d'une infinité dénombrable des ensembles fermés dont la projection sur S a un diamètre plus petit que $\frac{1}{k}$. Donc, sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer que la projection de M_{n_1, n_2, \dots, n_k} sur S ait un diamètre plus petit que $\frac{1}{k}$. En remplaçant ensuite M_{n_1, n_2, \dots, n_k} par $M^*_{n_1, n_2, \dots, n_k} = M_{n_1} \cdot M_{n_1, n_2} \cdot M_{n_1, n_2, n_3, \dots} \cdot M_{n_1, n_2, \dots, n_k}$, nous pouvons supposer d'ailleurs que $M_{n_1, n_2, \dots, n_k} \supseteq M_{n_1, n_2, \dots, n_{k+1}}$, ($k = 1, 2, 3, \dots$).

Alors, d'après le lemme, nous avons $P = \sum_{\nu} \prod_k \bar{P}_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ où P_{n_1, n_2, \dots, n_k} est la projection de M_{n_1, n_2, \dots, n_k} sur R . R étant un espace quasi-accessible, $\bar{P}_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ sont des ensembles fermés. Donc P est un ensemble analytique dans R . C. Q. F. D.

Théorème 5. Soient R un espace (v) qui satisfait à l'axiome (B) , et S un espace métrique compact. Alors la projection d'un ensemble analytique M de $R \times S$ sur l'espace R est un ensemble analytique dans R .

Démonstration. Soit $M = \sum_{\nu} \prod_k M_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ un ensemble analytique donné dans $R \times S$, où M_{n_1, n_2, \dots, n_k} sont fermés dans $R \times S$. Comme $R \times S$ est un espace (v) , il nous suffit de considérer le cas où $M_{n_1, n_2, \dots, n_k} \supseteq M_{n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1}}$. Soit P_{n_1, n_2, \dots, n_k} la projection de M_{n_1, n_2, \dots, n_k} sur R . D'après le théorème 2, P_{n_1, n_2, \dots, n_k} sont des ensembles fermés. Par conséquent, il nous suffit de démontrer que $P = \sum_{\nu} \prod_k P_{n_1, n_2, \dots, n_k}$. Mais, il est clair que $P \subseteq \sum_{\nu} \prod_k P_{n_1, n_2, \dots, n_k}$. Donc, montrons que $P \supseteq \sum_{\nu} \prod_k P_{n_1, n_2, \dots, n_k}$.

Soit p un point quelconque de $\sum_{\nu} \prod_k P_{n_1, n_2, \dots, n_k}$. Il existe alors une suite de nombres naturels $\nu = (n_1, n_2, n_3, \dots)$ telle que $p \in \prod_k P_{n_1, n_2, \dots, n_k}$. Considérons l'ensemble $p \times S$. C'est un ensemble compact en soi. Or, puisque $p \in P_{n_1, n_2, \dots, n_k}$, $M_{n_1, n_2, \dots, n_k}(p \times S) \neq \emptyset$. D'autre part, $M_{n_1, n_2, \dots, n_k}(p \times S)$ sont des ensembles fermés. D'après un théorème de CANTOR, le produit $\prod_k M_{n_1, n_2, \dots, n_k}(p \times S)$ n'est pas vide. Ce produit est contenu dans M . Donc $p \in P$. Ainsi nous avons démontré que $P \supseteq \sum_{\nu} \prod_k P_{n_1, n_2, \dots, n_k}$. C. Q. F. D.

Le théorème de projection est ainsi vrai pour S métrique, complet et séparable et R satisfaisant à l'axiome (C) (Théorème 4). Il est vrai également pour S métrique compact et R satisfaisant à l'axiome (B), (Théorème 5). Or, la question se pose : ce théorème de projection, est-il vrai pour S métrique compact et R un espace (v) arbitraire ? Malheureusement la réponse y est négative.

Nous donnons maintenant :

Un exemple d'un espace (v) , soit R , d'un espace S métrique compact, et d'un ensemble fermé M dans $R \times S$ dont la projection sur R n'est pas un ensemble analytique dans R .

D'abord nous précisons l'espace R . Prenons l'ensemble \mathcal{I} de tous les nombres réels entre 0 et 1 : $0 \leq x \leq 1$, et soit A l'ensemble parfait non dense de CANTOR. L'ensemble complémentaire $\mathcal{I} - A$ de A par rapport à \mathcal{I} se compose d'un nombre dénombrable d'intervalles contigus dont la somme est partout dense dans \mathcal{I} . Donc il existe une infinité c (la puissance du continu) d'ensembles disjoints contenus dans $\mathcal{I} - A$, dont chacun est dénombrable et partout dense dans \mathcal{I} .

Considérons maintenant la suite transfinie de nombres ordinaux de CANTOR inférieurs à ceux de la classe $Z(c)$ qui correspond à la puissance c :

$$(1) \quad 0, 1, 2, 3, \dots, \omega, \omega+1, \dots, \alpha, \dots \quad (0 \leq \alpha < \gamma),$$

où γ est le premier de la classe $Z(c)$. Supprimons de cette suite tous les nombres limites (c.-à-d. les nombres de la deuxième espèce) et ceux qui suivent immédiatement (c.-à-d. les nombres de la forme $\beta+1$ où β est un nombre limite). Le reste se divise en une infinité c de classes qui sont des intervalles⁽¹⁾ de la suite (1), limités par les nombres exclus. Ces intervalles ont le type d'ordre ω et contiennent une infinité dénombrable de nombres. Nous pouvons donc faire correspondre d'abord ces classes aux ensembles dénombrables obtenus plus haut, et ensuite leurs nombres aux points de ces ensembles. Ainsi

(1) Voir F. HAUSDORFF (1) p. 89.

nous avons une correspondance biunivoque entre $A-A$ et l'ensembles des nombres restants.

Maintenant nous correspondons les points de A aux nombres supprimés de la suite (1). A cet effet, nous prenons tous les ensembles parfaits, contenus dans A , et les rangeons en une suite transfinie. Comme il y a précisément une infinité c de ces ensembles, nous pouvons désigner cette suite par

$$(2) \quad P_0, P_1, P_2, \dots, P_\omega, P_{\omega+1}, \dots, P_\alpha, \dots \quad (0 \leq \alpha < \gamma).$$

Or, comme F. BERNSTEIN a fait, nous pouvons extraire de chacun de ces ensembles deux de leurs points :

$$(3) \quad b_0, c_0, b_1, c_1, b_2, c_2, \dots, b_\alpha, c_\alpha, \dots \quad (0 \leq \alpha < \gamma)$$

tels qu'ils soient tous distincts.

Leur somme est un ensemble θ de la puissance c . Si $A-\theta$ ne contient qu'un nombre fini de points, supprimons de cette suite (3) tous les points $b_0, c_0, b_1, c_1, \dots, b_n, c_n, \dots$ ($0 \leq n < \omega$) de sorte que $A-\theta_1$ contienne toujours un nombre infini de points, où θ_1 est l'ensemble de tous les points restants de la suite (3). $A-\theta_1$ contient donc un nombre pair de points. Nous pourrons correspondre tous les points de A aux nombres supprimés de la suite (1), de telle manière que, avec b_α de θ_1 correspondu à β , c_α se corresponde au nombre $\beta+1$.

Ainsi nous avons une correspondance biunivoque entre tous les points de A (nombres réels $0 \leq x \leq 1$) et tous les nombres ordinaux $< \gamma$. Nous désignons cette correspondance par

$$(4) \quad x_0, x_1, x_2, \dots, x_\omega, x_{\omega+1}, \dots, x_\alpha, \dots \quad (0 \leq \alpha < \gamma).$$

Introduisons maintenant une nouvelle définition de voisinages des points de la suite (4). L'espace R envisagé est l'ensemble de tous les points de la suite (4) avec des voisinages définis comme il suit :

1°) Cas où $x \in A$; les voisinages $V(x)$ sont les mêmes qu'ordinaire, c.-à-d. ε étant un nombre réel positif, $V_\varepsilon(x)$ est l'ensemble de tous les nombres réels p satisfaisant à l'inégalité $|p-x| < \varepsilon$.

2°) Cas où $x \in A - A$. x_0 et x_1 sont deux points isolés; il n'existe qu'un seul voisinage de x_i ($i = 0, 1$), et ce voisinage $V(x_i)$ ne contient que x_i : $V(x_i) = x_i$ ($i = 0, 1$). Tous les autres points de $A - A$ sont de la forme $x_{\alpha+2}$. Nous prenons deux ensembles:

$$(5) \quad V_0(x_{\alpha+2}) = (x_{\alpha+2}) + (x_\alpha); \quad V_1(x_{\alpha+2}) = (x_{\alpha+2}) + (x_{\alpha+1})$$

comme voisinages de $x_{\alpha+2}$. Ils ne contiennent que deux points donnés par (5).

Ainsi notre R est un espace (v). La définition du système de voisinages montre que, si un ensemble E contient deux points x_α et $x_{\alpha+1}$ ($0 \leq \alpha < \gamma$), $x_{\alpha+2}$ est un point d'accumulation de E . Donc si, de plus, E est un ensemble fermé, E contient les points $x_{\alpha+1}$, $x_{\alpha+2}$, ..., et par suite tous les points de A . Comme A contient $x_{\alpha+\omega}$ et $x_{\alpha+\omega+1}$, E contient les points $x_{\alpha+\omega+2}$, $x_{\alpha+\omega+3}$, ... etc. Ainsi l'ensemble fermé E qui contient deux points consécutifs x_α et $x_{\alpha+1}$ contient nécessairement tous les points qui suivent x_α .

Prenons comme l'espace S l'ensemble de tous les nombres réels entre 0 et 1: $0 \leq y \leq 1$; les points d'accumulation y sont définis comme ordinaire.

Soit maintenant M l'ensemble de tous les points (p, q) de $R \times S$ tels que $p \in A$ et $p = q$, c.-à-d. M est la partie commune du diagonal de $R \times S$, et de l'ensemble $A \times S$.

Je dis que M est un ensemble fermé dans $R \times S$. Pour le voir, montrons que son complémentaire $(R \times S) - M$ est un ensemble ouvert. Soit (p, q) un point de $(R \times S) - M$.

1°) Cas où $p \in A$. On a alors $p \neq q$. Posons $|p - q| = \sigma > 0$. Soient $V(p)$ l'ensemble de tous les nombres x tels que $|x - p| < \frac{\sigma}{2}$, et $V(q)$ l'ensemble de tous les nombres y tels que $|y - q| < \frac{\sigma}{2}$. $V(p)$ est un voisinage de p dans R et $V(q)$ est un voisinage de q dans S . Par suite, $V(p, q) = V(p) \times V(q)$ est un voisinage de (p, q) dans $R \times S$. Or, $V(p, q) \cdot M = 0$, car, sinon cet ensemble $V(p, q) \cdot M$ contiendrait un point de la forme (r, r) où $|p - r| < \frac{\sigma}{2}$, $|q - r| < \frac{\sigma}{2}$; et par suite

on aurait $|p-q| < \sigma$. Ainsi $V(p, q)$ est contenu dans $(R \times S) - M$; (p, q) est un point intérieur à $(R \times S) - M$.

2°) Cas où $p = x_0$ ou x_1 . Soient $V(p) = x_i$ ($i = 0$ ou 1) et $V(q)$ l'ensemble de tous les nombres y tel que $|y-q| < \varepsilon$, ε étant un nombre positif. Alors $V(p, q) = V(p) \times V(q)$ est disjoint de M , car $V(p, q)$ ne contient que des points de la forme (x_i, r) . Le point (p, q) est donc intérieur à $(R \times S) - M$.

3°) Cas où $p \in A - A$, $p \neq x_i$ ($i = 0$ et 1). Dans ce cas le point p a la forme $x_{\alpha+2}$. Puisque $x_\alpha \neq x_{\alpha+1}$, nous avons ou bien $x_\alpha \neq q$, ou bien $x_{\alpha+1} \neq q$. Donc nous pouvons poser $x_{\alpha+i} \neq q$ ($i = 0$ ou 1) et $|x_{\alpha+i} - q| = \sigma > 0$. Soient $V(p) = V_i(x_{\alpha+2})$ et $V(q)$ l'ensemble de tous les nombres y tels que $|y-q| < \sigma$. Alors, $V(p, q) = V(p) \times V(q)$ est disjoint de M . Car, sinon, $V(p, q) \cdot M$ contiendrait un point de la forme (r, r) , $r \neq p$, d'où $r = x_{\alpha+i}$ tel que $|r-q| < \sigma$. Ceci est absurde. Ainsi le point (p, q) est intérieur à $(R \times S) - M$.

Dans tous les cas, (p, q) est intérieur à $(R \times S) - M$. $(R \times S) - M$ est un ensemble ouvert. C. Q. F. D.

La projection de l'ensemble M sur R est évidemment l'ensemble A . Je dis que maintenant A n'est pas un ensemble analytique dans R . En effet, supposons par impossible que l'ensemble A soit analytique dans R . Posons $A = \sum_{\nu} \prod_k F_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ où F_{n_1, n_2, \dots, n_k} sont des ensembles fermés dans R . Or, nous pouvons écrire $A = \sum_{\nu} \prod_k A \cdot F_{n_1, n_2, \dots, n_k}$. Donc, en posant $A \cdot F_{n_1, n_2, \dots, n_k} = A_{n_1, n_2, \dots, n_k}$, on a $A = \sum_{\nu} \prod_k A_{n_1, n_2, \dots, n_k}$. Comme produit de l'ensemble A et des ensembles fermés F_{n_1, n_2, \dots, n_k} , A_{n_1, n_2, \dots, n_k} sont des ensembles fermés dans A . Donc A_{n_1, n_2, \dots, n_k} sont des ensembles de nombres réels qui sont fermés au sens ordinaire (remarquons que les voisinages des points de A dans R sont les mêmes qu'ordinaires). Or, comme A est indénombrable, il existe une suite de nombres naturels $\nu = (n_1, n_2, n_3, \dots)$ telle que A_{n_1, n_2, \dots, n_k} contienne une infinité indénombrable de points, pour tout $k = 1, 2, 3, \dots$. Car, sinon, il existerait pour toute suite $\nu = (n_1, n_2, n_3, \dots)$ un indice $k(\nu)$ tel que $A_{n_1, n_2, \dots, n_{k(\nu)}}$ soit au plus dénombrable. Alors,

l'ensemble $H = \sum A_{n_1, n_2, \dots, n_{k(\nu)}}$ qui serait dénombrable, contiendrait l'ensemble A . Ceci est impossible, puisque A est indénombrable.

Ainsi il existe une $\nu = (n_1, n_2, n_3, \dots)$ telle que A_{n_1, n_2, \dots, n_k} soit indénombrable. A_{n_1, n_2, \dots, n_k} contient donc un ensemble parfait non vide (au sens ordinaire), par suite une infinité indénombrable d'ensembles parfaits non vides. Donc il contient au moins un $P_\alpha (\alpha \geq \omega)$ de la suite (2), et par suite, un b_α et $c_\alpha (\alpha \geq \omega)$. Ces deux points sont placés consécutivement dans la suite (4). Puisque $A_{n_1, n_2, \dots, n_k} \subseteq F_{n_1, n_2, \dots, n_k}$, F_{n_1, n_2, \dots, n_k} contient ces deux points $b_\alpha = x_{\tau(k)}$ et $c_\alpha = x_{\tau(k)+1}$. F_{n_1, n_2, \dots, n_k} étant fermé, F_{n_1, n_2, \dots, n_k} contient tous les points de la suite (4) qui suivent $x_{\tau(k)}$.

Or, d'après un théorème de KÖNIG, le nombre γ n'est pas confinal avec une suite dénombrable de nombres ordinaux inférieurs: $\eta(1), \eta(2), \eta(3), \dots, \eta(k), \dots$. Donc il existe un nombre ordinal $\eta < \gamma$, tel que $\eta(k) < \eta$ pour tout $k = 1, 2, 3, \dots$. $\prod_{k=1}^{\infty} F_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ contient alors tous les points de la suite (4) qui suivent x_η . Comme $A \supseteq \prod_k F_{n_1, n_2, \dots, n_k}$, A contient ces points, et A doit être un ensemble partout dense dans A (au sens ordinaire). Ceci est précisément une contradiction. Ainsi A n'est pas un ensemble analytique dans R , et le théorème de projection est faux pour R, S et M .

Théorème 6. Soient R un ensemble quelconque et S un espace métrique, complet et séparable. Soient \mathfrak{F} une famille quelconque de sous-ensembles de R , et Φ la famille de tous les ensembles fermés dans S . Alors la projection de tout ensemble M de $(\mathfrak{F}_A \times \Phi_A)_A$ sur R appartient à \mathfrak{F}_A .

Démonstration. On sait qu'il existe une et une seule famille \mathfrak{F}^* qui est la plus petite parmi celles qui contiennent \mathfrak{F} , et qui sont multiplicatives⁽¹⁾. Mais nous avons $(\mathfrak{F}^*)_A = \mathfrak{F}_A$. Donc nous pouvons supposer, sans restreindre la généralité, que \mathfrak{F} soit elle-même multiplicative. Or, d'après le théorème 1, $\mathfrak{F}_A \times \Phi_A \subseteq (\mathfrak{F} \times \Phi)_A$. Donc nous

(1) On dit qu'une famille est multiplicative, si, avec tous les deux ensembles A et B de cette famille, la partie commune $A \cdot B$ lui appartient aussi.

avons $(\mathfrak{F}_A \times \Phi_A)_A = (\mathfrak{F} \times \Phi)_A$. Par conséquent, l'ensemble M donné est un ensemble de $(\mathfrak{F} \times \Phi)_A$. Posons donc $M = \sum_{\nu} \prod_k M_{n_1, n_2, \dots, n_k}$; $M_{n_1, n_2, \dots, n_k} \in \mathfrak{F} \times \Phi$. Or, nous pouvons supposer que la projection de M_{n_1, n_2, \dots, n_k} sur S a un diamètre $< \frac{1}{k}$. En effet, S est la somme d'une infinité dénombrable de sphères fermées S_n^k ($n = 1, 2, 3, \dots$) dont les diamètres sont $< \frac{1}{k}$. Mais, M_{n_1, n_2, \dots, n_k} étant un ensemble de $\mathfrak{F} \times \Phi$, $M_{n_1, n_2, \dots, n_k} = F_k \times H_k$; $F_k \in \mathfrak{F}$, $H_k \in \Phi$. Donc $M_{n_1, n_2, \dots, n_k} = F_k \times \sum_{n=1}^{\infty} H_k \cdot S_n^k = \sum_{n=1}^{\infty} (F_k \times H_k S_n^k)$. M_{n_1, n_2, \dots, n_k} est ainsi la somme des ensembles $F_k \times H_k S_n^k$ de $\mathfrak{F} \times \Phi$, dont les projections sur S ont des diamètres $< \frac{1}{k}$. Par suite, nous pouvons supposer que la projection de M_{n_1, n_2, \dots, n_k} sur S a un diamètre $< \frac{1}{k}$. D'autre part, avec \mathfrak{F} et Φ , $\mathfrak{F} \times \Phi$ est multiplicative. En effet, soient M_1 et M_2 deux ensembles de $\mathfrak{F} \times \Phi$. On peut poser, $M_1 = F_1 \times H_1$, $M_2 = F_2 \times H_2$. F_1 et $F_2 \in \mathfrak{F}$. H_1 et $H_2 \in \Phi$. \mathfrak{F} et Φ étant multiplicatives, $F_1 \cdot F_2 \in \mathfrak{F}$ et $H_1 \cdot H_2 \in \Phi$. Par conséquent, $M_1 \cdot M_2 = (F_1 \times H_1) \cdot (F_2 \times H_2) = (F_1 \cdot F_2) \times (H_1 \cdot H_2)$ appartient à $\mathfrak{F} \times \Phi$. $\mathfrak{F} \times \Phi$ est ainsi multiplicative. Donc, nous pouvons supposer que, pour tout $k = 1, 2, 3, \dots$, $M_{n_1, n_2, \dots, n_k} \supseteq M_{n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1}}$.

Soient P la projection de M sur R , et P_{n_1, n_2, \dots, n_k} celle de M_{n_1, n_2, \dots, n_k} . Comme M_{n_1, n_2, \dots, n_k} est un ensemble de $\mathfrak{F} \times \Phi$, P_{n_1, n_2, \dots, n_k} , appartient à \mathfrak{F} . Il est facile maintenant démontrer que $P = \sum_{\nu} \prod_k P_{n_1, n_2, \dots, n_k}$. En effet, d'abord, il est clair que $P \subseteq \sum_{\nu} \prod_k P_{n_1, n_2, \dots, n_k}$. Montrons qu'on a également $P \supseteq \sum_{\nu} \prod_k P_{n_1, n_2, \dots, n_k}$. Soit p un point de $\sum_{\nu} \prod_k P_{n_1, n_2, \dots, n_k}$. Il existe alors une suite de nombres naturels $\nu = (n_1, n_2, n_3, \dots)$ telle que $p \in \prod_k P_{n_1, n_2, \dots, n_k}$. Posons $A_k = M_{n_1, n_1, \dots, n_k} (p \times S)$. Nous avons d'abord $A_k \supseteq A_{k+1}$ et $A_k \neq \emptyset$. D'autre part, comme $M_{n_1, n_2, \dots, n_k} \in \mathfrak{F} \times \Phi$, nous avons $M_{n_1, n_2, \dots, n_k} = F_k \times H_k$, $F_k \in \mathfrak{F}$, $H_k \in \Phi$. Par suite, $A_k = (F_k \times H_k)(p \times S) = p \times H_k$. A_k est, par conséquent, un ensemble fermé dans $p \times S$. Enfin, le diamètre de A_k (comme ensemble dans l'espace métrique $p \times S$), tend vers 0 avec $\frac{1}{k}$. $p \times S$ étant un espace

métrique complet, il existe alors au moins un point (p, q) , commun à tous les A_k . Ce point (p, q) appartient à $\prod_k M_{n_1, n_2, \dots, n_k}$, par suite à M . Donc p est un point de P . Ainsi nous avons démontré que $P \supseteq \sum_k \prod_k P_{n_1, n_2, \dots, n_k}$. C. Q. F. D.

Enfin considérons la projection univalente. On dit qu'une projection d'un ensemble M de $R \times S$ sur R est univalente, si, pour chaque point p de R , l'ensemble $(p \times S) \cdot M$ ne contient qu'un point au plus. Un schème de Souslin $\{M_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ est dit système d'unicité, si pour deux suites différentes: m_1, m_2, m_3, \dots et n_1, n_2, n_3, \dots on a toujours $\prod_{k=0}^{\infty} M_{n_1, n_2, \dots, n_k} \cdot M_{m_1, m_2, \dots, m_k} = 0$. Nous appelons ensemble d'unicité⁽¹⁾ tout ensemble qui peut être le noyau d'un schème d'unicité des ensembles fermés.

Théorème 7. Soient R un espace quasi-accessible, et S un espace métrique, complet et séparable. La projection P univalente de tout ensemble d'unicité M dans l'espace $R \times S$ est un ensemble d'unicité dans R .

Démonstration. Soit $M = \sum_k \prod_k M_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ l'ensemble d'unicité donné dans $R \times S$. M_{n_1, n_2, \dots, n_k} sont des ensembles fermés, tels que $\prod_k M_{n_1, n_2, \dots, n_k} \cdot M_{m_1, m_2, \dots, m_k} = 0$ pour toutes les suites différentes $(n_1, n_2, n_3, \dots) \neq (m_1, m_2, m_3, \dots)$. On sait qu'un espace S métrique complet séparable peut être considéré comme noyau d'un schème d'unicité: $S = \sum_k \prod_k S_{m_1, m_2, \dots, m_k}$ tel que le diamètre de $S_{m_1, m_2, \dots, m_k} < \frac{1}{k}$. L'ensemble M , comme produit de M et $R \times \sum_k \prod_k S_{m_1, m_2, \dots, m_k}$, peut être exprimé par $M = \sum_k \prod_k M^*_{n_1, n_2, \dots, n_{2k}}$ où $M^*_{n_1, n_2, \dots, n_{2k}} = M_{n_1, n_3, \dots, n_{2k-1}} \cdot (R \times S_{n_2, n_4, \dots, n_{2k}})$. Donc, en posant $M^*_{n_1} = R \times S$, $M^*_{n_1, n_2, \dots, n_{2k}} = M^*_{n_1, n_2, \dots, n_{2k+1}}$, nous avons un schème d'unicité $\{M^*_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ dont le noyau est l'ensemble M . Ainsi nous pouvons supposer, sans restreindre la généralité, que M_{n_1, n_2, \dots, n_k} a une projection sur S à un diamètre $< \frac{1}{k}$. Nous pouvons supposer évidemment, de plus, que $M_{n_1, n_2, \dots, n_k} \supseteq M_{n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1}}$, ($k = 1, 2, 3, \dots$). D'après le lemme du

(1) M. F. HAUSDORFF l'appelle "ensemble (L)". Cf. F. HAUSDORFF (2) p. 185. et W. SIERPIŃSKI (5), p. 250.

Théorème 4, nous avons alors $P = \sum_{\nu} \prod_k \bar{P}_{n_1, n_2, \dots, n_k}$, en désignant par P_{n_1, n_2, \dots, n_k} la projection de M_{n_1, n_2, \dots, n_k} sur R , et par $\bar{P}_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ sa fermeture. Il nous reste à démontrer que $\prod_{k=1}^{\infty} \bar{P}_{n_1, n_2, \dots, n_k} \cdot \bar{P}_{m_1, m_2, \dots, m_k} = 0$ pour toutes les suites différentes $(n_1, n_2, n_3, \dots) \neq (m_1, m_2, m_3, \dots)$. Supposons par impossible qu'il existe un point p appartenant à $\prod_{k=1}^{\infty} \bar{P}_{m_1, m_2, \dots, m_k} \cdot \bar{P}_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ pour deux certaines suites différentes: $(n_1, n_2, n_3, \dots) \neq (m_1, m_2, m_3, \dots)$.

Soit $V(p)$ un voisinage quelconque de p . Pour tout $k = 1, 2, 3, \dots$ nous avons $P_{n_1, n_2, \dots, n_k} V(p) \neq 0$ et $P_{m_1, m_2, \dots, m_k} V(p) \neq 0$. Il existe, par conséquent, deux suites de points (p_k, q_k) et (p'_k, q'_k) dans $R \times S$, telles que $p_k \in V(p)$, $p'_k \in V(p)$, $(r_k, q_k) \in M_{n_1, n_2, \dots, n_k}$, $(p'_k, q'_k) \in M_{m_1, m_2, \dots, m_k}$. S étant complet, il existe deux points (différents ou non) q et q' tels que $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = q$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} q'_n = q'$. (Remarquons que q et q' sont déterminés par les suites (n_1, n_2, n_3, \dots) et (m_1, m_2, m_3, \dots) , et ils sont indépendants du choix de $V(p)$). Soient $V(q)$ et $V(q')$ un voisinage quelconque de q et de q' . Il existe alors un indice k_0 tel que $(p_k, q_k) \in V(p, q) = V(p) \times V(q)$ et $(p'_k, q'_k) \in V(p, q') = V(p) \times V(q')$, pour tout $k \geq k_0$. Or, comme $M_{n_1, n_2, \dots, n_k} \supseteq M_{n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1}}$ et $M_{m_1, m_2, \dots, m_k} \supseteq M_{m_1, m_2, \dots, m_k, m_{k+1}}$, nous avons $M_{n_1, n_2, \dots, n_k} \cdot V(p, q) \neq 0$ et $M_{m_1, m_2, \dots, m_k} \cdot V(p, q) \neq 0$ pour tout $k = 1, 2, 3, \dots$. Donc $(p, q) \in \bar{M}_{n_1, n_2, \dots, n_k} = M_{n_1, n_2, \dots, n_k}$, et $(p, q') \in \bar{M}_{m_1, m_2, \dots, m_k} = M_{m_1, m_2, \dots, m_k}$. Si $q = q'$, (p, q) appartient à $\prod_{k=1}^{\infty} M_{n_1, n_2, \dots, n_k} \cdot M_{m_1, m_2, \dots, m_k}$, et par suite $\{M_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ ne serait pas un système d'unicité. Si $q \neq q'$, comme $(p, q) \in \prod_{k=1}^{\infty} M_{n_1, n_2, \dots, n_k} \subseteq M$ et $(p, q') \in \prod_{k=1}^{\infty} M_{m_1, m_2, \dots, m_k} \subseteq M$, la projection de M sur R ne serait pas univalente.

C. Q. F. D.

Du théorème 4, se déduit immédiatement un théorème connu: Soient R un espace de HAUSDORFF et S un espace métrique, complet et séparable. Alors, toute image B dans R , univoque et continue d'un ensemble analytique A dans S est également analytique dans R . En effet, désignons par $r = f(s)$ la fonction donnée univoque et continue qui transforme A en B . L'image M de l'équation $r = f(s)$ est fermée

dans l'espace $R \times S$, d'après le théorème 3. Comme $R \times S$ est un espace quasi-accessible, il existe un ensemble fermé F dans $R \times S$, tel que $M = (R \times A) \cdot F$. Donc M est un ensemble analytique dans $R \times S$. Comme projection de M sur R , B est un ensemble analytique dans R .

§ 3.

LES CRIBLES DE M. LUSIN.

Soient R un espace quasi-accessible et S l'ensemble de tous les nombres réels. On sait que tout ensemble analytique dans R peut être criblé au moyen d'un crible fermé dans $R \times S^{(1)}$. Mais le théorème 4 et la méthode de démonstration due à M. W. SIERPIŃSKI⁽²⁾ nous permettent d'établir la proposition inverse :

Théorème 8. *Soient R un espace quasi-accessible, et S l'ensemble de tous les nombres réels s entre 0 et 1 : $0 \leq s \leq 1$. Tout ensemble dans R criblé au moyen d'un crible analytique dans $R \times S$, au sens de M. LUSIN, est un ensemble analytique dans $R^{(3)}$.*

Démonstration. Soit E un ensemble analytique dans l'espace $R \times S$. Désignons par $\Gamma(E)$ l'ensemble criblé dans R au moyen de E . Posons de plus, $\Delta(E, p) = E \cdot (p \times S)$. Alors, pour qu'un point p appartienne à $\Gamma(E)$, il faut et il suffit que $\Delta(E, p)$ contienne une suite de points (p, t_n) tels que $t_n > t_{n+1}$. Donc, dans ce cas, il existe un t_0 tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t_0$.

Considérons l'ensemble $E \times S$ dans l'espace $R \times S \times S$. C'est un ensemble analytique dans $R \times S \times S$. Désignons par (x, y, z) un point de $R \times S \times S$. L'ensemble O_n de tous les points (y, z) tels que $z < y < z + \frac{1}{n}$ est un ensemble ouvert de $S_y \times S_z$, et par suite un ensemble analytique dans $S_y \times S_z$. Donc $(R \times O_n) \cdot (E \times S_z)$ est un ensemble analytique dans $R \times S_y \times S_z$. Projetons cet ensemble sur $R \times S_z$.

(1) Voir W. SIERPIŃSKI (2).

(2) Voir W. SIERPIŃSKI (3).

(3) Voir N. LUSIN (1) p. 180 ; H. HAHN (1) p. 393 ; la proposition 44-2-1 s'énonce pour les espaces métriques, complets et séparables.

Nous obtenons, d'après le théorème 4, un ensemble analytique A_n dans $R \times S_z$. Le produit $A = \prod_{n=1}^{\infty} A_n$ est aussi un ensemble analytique dans $R \times S_z$. La projection de A sur l'espace R est, d'après le théorème 4, un ensemble analytique dans R . Cet ensemble coïncide avec $\Gamma(E)$, comme nous avons vu plus haut. $\Gamma(E)$ est donc un ensemble analytique dans R .
C. Q. F. D.

§ 4.

LES PRINCIPES DE SÉPARATION DE M. LUSIN.

Nous disons que, dans un espace R , le premier principe de M. LUSIN s'applique à la famille d'ensembles \mathfrak{F} , si :

E et H étant deux ensembles disjoints de \mathfrak{F}_A , il existe toujours deux ensembles disjoints E^* et H^* de $\mathfrak{F}_B^{(1)}$ tels que $E \subseteq E^*$ et $H \subseteq H^*$.

Nous disons que, dans un espace R , le deuxième principe de M. LUSIN s'applique à la famille d'ensembles \mathfrak{F} , si :

E et H étant deux ensembles de \mathfrak{F}_A , il existe toujours deux ensembles disjoints E^* et H^* de $\mathfrak{F}_{AC}^{(2)}$ tels que $E - H \subseteq E^*$ et $H - E \subseteq H^*$.

M. W. SIERPIŃSKI a montré que ces deux principes ne sont pas applicables aux espaces abstraits sans aucune restriction⁽³⁾, et il a trouvé une restriction pour que le premier principe s'applique⁽⁴⁾. Ici nous allons en trouver une pour le deuxième. M. W. SIERPIŃSKI a remarqué que ce deuxième principe peut être relativisé à l'ensemble d'un espace euclidien. Mais le théorème 4 et une méthode de démonstration due à M M. N. LUSIN et C. KURATOWSKI⁽⁵⁾ nous permettent d'établir le

(1) \mathfrak{F}_B est la famille de tous les ensembles qu'on obtient en partant des ensembles de la famille \mathfrak{F} et en effectuant un nombre fini ou une infinité dénombrable d'additions et de soustractions.

(2) \mathfrak{F}_C est la famille de tous les ensembles complémentaires des ensembles de \mathfrak{F} .

(3) W. SIERPIŃSKI (1) p. 2.

(4) W. SIERPIŃSKI (5) p. 265, (7) p. 29.

(5) N. LUSIN (1) p. 211-217; C. KURATOWSKI (1) p. 257.

Théorème 9. Soit R un espace quasi accessible où tout ensemble ouvert est un ensemble analytique. Pour deux ensembles analytiques quelconques A et B , il existe deux ensembles complémentaires analytiques D et H tels que

$$A - B \subseteq D; B - A \subseteq H; D \cdot H = 0.$$

Donc le deuxième principe de M. LUSIN s'applique à un espace métrique arbitraire sans aucune restriction. La même méthode avec le théorème 6 (au lieu du théorème 4) nous donne un théorème plus général :

Théorème 10. Soit \mathfrak{F} une famille d'ensembles telle que $\mathfrak{F}_C \subseteq \mathfrak{F}_A$. Alors pour deux ensembles quelconques A et B de \mathfrak{F}_A , il existe deux ensembles D et H de \mathfrak{F}_{AC} tels que

$$(1) \quad A - B \subseteq D; B - A \subseteq H; D \cdot H = 0.$$

Démonstration. M. W. SIERPIŃSKI a démontré un lemme suivant⁽¹⁾ :
Lemme. Soit T l'ensemble de tous les nombres réels $0 \leq t \leq 1$ qui ont la forme :

$$t_{n_1, n_2, \dots, n_k} = 1 - \left(\frac{1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_1+n_2}} + \dots + \frac{1}{2^{n_1+n_2+\dots+n_k}} \right),$$

où n_ν ($\nu = 1, 2, \dots$) sont des nombres naturels. Si \mathfrak{F} est une famille multiplicative d'ensembles d'un espace R , tout ensemble Γ de \mathfrak{F}_A peut être criblé au moyen d'un ensemble E contenu dans l'espace $R \times T$. E peut être un ensemble défini comme il suit :

$$E = \sum_k \sum_{n_1, n_2, \dots, n_k} \{ \Gamma_{n_1, n_2, \dots, n_k} \times (t_{n_1, n_2, \dots, n_k}) \},$$

$$\text{où } \Gamma = \sum_{\nu} \prod_k \Gamma_{n_1, n_2, \dots, n_k}, \Gamma_{n_1, n_2, \dots, n_k} \in \mathfrak{F}, \text{ et}$$

$$\Gamma_{n_1, n_2, \dots, n_k} \supseteq \Gamma_{n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1}}, k = 1, 2, 3, \dots$$

Cela posé, maintenant soit \mathfrak{F}^* la plus petite famille multiplicative qui contient \mathfrak{F} . Puisque $(\mathfrak{F}^*)_A = \mathfrak{F}_A$, et que $\mathfrak{F}_C \subseteq \mathfrak{F}_A$ entraîne

(1) W. SIERPIŃSKI (4).

$(\mathfrak{F}^*)_C \subseteq (\mathfrak{F}^*)_A$, nous pouvons supposer, sans restreindre la généralité, que \mathfrak{F} soit elle-même multiplicative. Par suite, nous pouvons supposer que deux ensembles A et B de \mathfrak{F}_A soient des noyaux des schèmes monotones: $A = \sum_k \prod A_{n_1, n_2, \dots, n_k}$; $B = \prod_k \prod B_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ où $A_{n_1, n_2, \dots, n_k}, B_{n_1, n_2, \dots, n_k} \in \mathfrak{F}$ et $A_{n_1, n_2, \dots, n_k} \supseteq A_{n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1}}, B_{n_1, n_2, \dots, n_k} \supseteq B_{n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1}}$ pour $k = 1, 2, 3, \dots$.

D'après le lemme mentionné plus haut, nous pouvons considérer A et B comme les ensembles criblés au moyen des ensembles

$$A^* = \sum_k \prod_{n_1, n_2, \dots, n_k} (A_{n_1, n_2, \dots, n_k} \times t_{n_1, n_2, \dots, n_k}),$$

$$B^* = \sum_k \prod_{n_1, n_2, \dots, n_k} (B_{n_1, n_2, \dots, n_k} \times t_{n_1, n_2, \dots, n_k})$$

respectivement. Désignons par $\mathcal{A}(A^*, x)$ et $\mathcal{A}(B^*, x)$ les projections des $A^* \cdot (x \times T)$ et $B^* \cdot (x \times T)$ sur l'espace T . Et, posons $\mathcal{A}(A^*, x) \leq \mathcal{A}(B^*, x)$, lorsque $\mathcal{A}(A^*, x)$ est semblable à une partie de $\mathcal{A}(B^*, x)$. Soit P l'ensemble de tous les points x tels que $\mathcal{A}(A^*, x) \leq \mathcal{A}(B^*, x)$, et de la même manière soit Q l'ensemble de tous les points x tels que $\mathcal{A}(B^*, x) \leq \mathcal{A}(A^*, x)$. Posons de plus $D = CB \cdot CP$ et $H = CA \cdot CQ$. D et H sont des ensembles qui satisfont à (1).

En effet, soit d'abord x un point de $A-B$. $\mathcal{A}(B^*, x)$ est un ensemble bien ordonné, tandis que $\mathcal{A}(A^*, x)$ n'en est pas un. Donc $\mathcal{A}(A^*, x)$ ne peut être semblable à aucune partie de $\mathcal{A}(B^*, x)$. Par suite, x n'appartient pas à P . x appartient à $CB \cdot CP$. Ainsi nous avons $A-B \subseteq D$; et de la même manière, nous pouvons conclure $B-A \subseteq H$.

D'autre part, soit x un point de $CA \cdot CB$. Dans ce cas $\mathcal{A}(A^*, x)$ et $\mathcal{A}(B^*, x)$ sont tous les deux bien ordonnés. Ils sont comparables. Nous avons donc ou bien $\mathcal{A}(A^*, x) \leq \mathcal{A}(B^*, x)$, ou bien $\mathcal{A}(A^*, x) \geq \mathcal{A}(B^*, x)$. D'où, $x \in P+Q$. Ainsi nous avons

$$D \cdot H = CA \cdot CB \cdot CP \cdot CQ = 0.$$

Reste à démontrer que D et H sont des ensembles de \mathfrak{F}_{AC} . Pour cela il suffit de constater que P et Q sont des ensembles de \mathfrak{F}_A .

$\mathcal{A}(A^*, x) \leq \mathcal{A}(B^*, x)$ ($\mathcal{A}(A^*, x)$ supposé non vide) est équivalent à l'existence d'une suite Γ de points de $\mathcal{A}(B^*, x)$: $\eta^1, \eta^2, \eta^3, \dots$ telle que l'ensemble $\mathcal{A}(A^*, x)$ soit semblable à Γ . Ainsi, pour qu'un point x appartienne à P , il faut et il suffit qu'il existe deux suites de points de T : $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \dots$ et $\eta^1, \eta^2, \eta^3, \dots$ telles que

- 1° les points $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \dots$ constituent $\mathcal{A}(A^*, x)$,
- 2° les points $\eta^1, \eta^2, \eta^3, \dots$ soient contenus dans $\mathcal{A}(B^*, x)$,
- 3° pour chaque paire d'indices i et j , $\xi^i > \xi^j$ entraîne $\eta^i > \eta^j$.

Soit $E_\omega = (\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, \dots)$ un espace à une infinité de dimensions⁽¹⁾ (au sens de M. FRÉCHET). Considérons dans l'espace $R \times E_\omega \times E_\omega$, un ensemble ψ de points (x, ξ, η) , $\xi = (\xi^1, \xi^2, \xi^3, \dots)$, $\eta = (\eta^1, \eta^2, \eta^3, \dots)$ défini par: $\psi = \Pi [E(x \in CW_t) + \sum_{n=1}^{\infty} E(t = \xi^n)] \cdot \Pi_{k=1}^{\infty} [\sum_t E(t = \eta^k) \cdot E(x \in Z_t)] \cdot \Pi_{i,j=1}^{\infty} [E(\xi^i \leq \xi^j) + E(\eta^i > \eta^j)]$; $t \in T$.⁽²⁾

L'existence d'un point (x, ξ, η) de ψ veut dire que, pour x , il existe deux points ξ et η de E_ω , tels que: 1°) ξ possède des coordonnées $\xi^n (n = 1, 2, 3, \dots)$ telles que x appartienne ou non à W_t suivant que $t = \xi^n$ pour un n , ou $t \neq \xi^n$ pour tout $n = 1, 2, 3, \dots$; que 2°) pour chaque coordonnée η^n de η , η^n soit un nombre de T et $x \in Z_{\eta^n}$; et enfin que 3°) $\xi^i > \xi^j$ entraîne $\eta^i > \eta^j$. L'ensemble P est donc précisément la projection de ψ sur l'espace R , si nous posons $W_t = A_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ et $Z_t = B_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ pour $t = t_{n_1, n_2, \dots, n_k}$.

Or, l'ensemble $E(t = \xi^n)$ est un ensemble fermé dans E_ω ; $E(t = \eta^n)$ l'est également. $E(x \in Z_t) = Z_t \in \mathfrak{F}$. $E(\xi^i \leq \xi^j)$ est un ensemble fermé, et $E(\eta^i > \eta^j)$ est un ensemble ouvert, et par suite un F_σ dans E_ω . Enfin, d'après l'hypothèse, $E(x \in CW_t) = CW_t$ appartient également à \mathfrak{F}_A .

L'espace T ne contient qu'une infinité dénombrable de points, et $E_\omega \times E_\omega$ est un espace métrique, complet et séparable. Le théorème 6 dit alors que P est un ensemble de \mathfrak{F}_A . De même, nous pouvons établir que $Q \in \mathfrak{F}_A$.

C. Q. F. D.

(1) M. FRÉCHET (1) p. 81.

(2) $E(\varphi(x, \xi, \eta))$ est l'ensembles de tous les points (x, ξ, η) qui satisfont à la condition φ .

Dans §2, nous avons défini les ensembles d'unicité (page 15). Faute de premier principe de séparation, nous ne pouvons pas affirmer les coïncidences de la famille de ces ensembles, ni avec celle des ensembles mesurables (B), ni avec celle des ensembles simultanément analytiques et complémentaires analytiques. Voici quelques exemples pour éclaircir leurs différences.

Nous construirons d'abord un espace K et un ensemble A (contenu dans K) non mesurable (B) dans K , tels que A et $K-A$ soient des ensembles d'unicité dans K . Nous avons un tel espace K et un tel ensemble A avec l'exemple donné par M. LUSIN⁽¹⁾, en changeant un peu son raisonnement. Considérons d'abord le domaine Q dans le plan $(x, t) = X \times N$ défini par $0 < x < 1$, $t \in N$, où x sont des nombres irrationnels et t est un point quelconque de l'espace N de BAIRE à zéro dimension. Comme nous savons, il existe une fonction $\varphi(x, t)$, qui satisfait à deux conditions suivantes :

1°) $\varphi(x, t)$ est définie pour tous les points de Q , et rentre dans la classe 2 de la classification de M. BAIRE.

2°) Quelle que soit une fonction univoque $f(t)$, définie partout dans N et continue en chaque point de N , il existe un nombre irrationnel x_0 tel que nous avons l'identité : $\varphi(x_0, t) \equiv f(t)$.

Considérons maintenant, dans l'espace $X \times Y \times N$, l'image M de l'équation $y = \varphi(x, t)$, Y étant l'ensemble de tous les nombres réels. M est évidemment mesurable (B), et uniforme par rapport à l'axe X (c.-à-d. toute droite parallèle à X coupe M par un point au plus).

On sait que les points de N sont représentés par les nombres irrationnels entre 0 et 1. Désignons par N_1 et N_2 l'ensemble de tous les points de N représentés par les nombres irrationnels $< \frac{1}{2}$ et $> \frac{1}{2}$ respectivement. N est donc la somme de deux parties disjointes N_1 et N_2 . Soient, maintenant, E l'ensemble de tous les points (x_0, y_0, t_0) de M tels que $(x_0 \times y_0 \times N) \cdot M$ soit un et un seul point, et K sa projection sur le plan $X \times Y$. Désignons, de même, par E_1 et E_2 la projection des ensembles $E \cdot (X \times Y \times N_1)$ et $E \cdot (X \times Y \times N_2)$ sur le plan

(1) N. LUSIN (1) p. 263.

$X \times Y$. M. LUSIN a montré que E_1 et E_2 sont des ensembles disjoints, non séparables (B).

Considérons K comme un espace métrique, la distance de deux points coïncidant avec celle qu'ils ont dans le plan; (donc K est un espace métrique séparable). D'abord nous avons $E_1 + E_2 = K$; $E_1 \cdot E_2 = 0$. E_1 et E_2 étant des ensembles non séparables (B), ils ne sont pas mesurables (B) dans K . En effet si l'un des deux, soit E_1 , est ainsi, l'espace $X \times Y$ étant métrique, il existe un ensemble E_1^* mesurable (B) dans $X \times Y$, tel que $E_1 = E_1^* \cdot K$; par suite $CE_1^* \supseteq E_2$. E_1^* et CE_1^* serait donc deux ensembles mesurables (B) dans $X \times Y$ tels que $E_1^* \cdot CE_1^* = 0$; $E_1^* \supseteq E_1$; $CE_1^* \supseteq E_2$. Ceci est impossible, puisque E_1 et E_2 sont non séparables (B).

Je dis que E_1 et E_2 sont des ensembles d'unicité dans K . Pour le voir, considérons l'espace $K \times N$. Les ensembles $E \cdot (X \times Y \times N_1)$ et $E \cdot (X \times Y \times N_2)$ sont justement égaux à $E \cdot (K \times N_1)$ et à $E \cdot (K \times N_2)$ respectivement. E , $K \times N_1$ et $K \times N_2$ sont des ensembles mesurables (B) dans l'espace $K \times N$. D'après un théorème de M. W. SIERPIŃSKI⁽¹⁾, $E \cdot (K \times N_1)$ et $E \cdot (K \times N_2)$ sont donc des ensembles d'unicité dans $K \times N$. K est un espace métrique et N est métrique, complet et séparable.

De plus, la projection de $E \cdot (K \times N_1)$ et de $E \cdot (K \times N_2)$ sur l'espace K est univalente (d'après la définition de K). Nous en concluons que, d'après le théorème 7, E_1 et E_2 sont des ensembles d'unicité dans K .
C. Q. F. D.

Nous allons donner maintenant un autre exemple: *un espace K , et un ensemble A qui est simultanément analytique et complémentaire analytique dans K , mais qui n'est pas un ensemble d'unicité dans K .*

Soient R l'ensemble de tous les nombres réels, A un ensemble analytique dans R qui est non mesurable (B). Posons $\Gamma = R - A$. Γ est un complémentaire analytique non mesurable (B).

Définition de l'espace K . Appelons des ensembles fermés tous les ensembles fermés F dans R et tous les ensembles de R de la forme $\Gamma \cdot F$ (Γ étant fixe). K est l'ensemble de tous les nombres

(1) W. SIERPIŃSKI (5).

réels, dont la dérivation, définition des points d'accumulation est changée ainsi. K est un espace quasi-accessible. En effet, ici, les ensembles fermés satisfont aux conditions :

- (1) L'espace K est un ensemble fermé.
- (2) L'ensemble vide est un ensemble fermé.
- (3) Le produit d'un nombre quelconque des ensembles fermés est fermé.

Appelons des ensembles ouverts tous les ensembles complémentaires des ensembles fermés, et considérons comme voisinages d'un point donné p tous les ensembles ouverts qui le contiennent. Nous pouvons voir ainsi que K est un espace quasi-accessible¹⁾.

Or, tous les ensembles ouverts dans K est analytique dans K . En effet, soit O un ensemble ouvert dans K . L'ensemble fermé CO est ou bien un ensemble fermé F dans R , ou bien de la forme $\Gamma \cdot F$. Si $CO = F$, O est ouvert dans R , par suite un F_σ dans R . Il est un F_σ également dans K . Si $CO = \Gamma \cdot F$, on a $O = A + CF$; donc O est analytique dans R . Par suite, O est analytique dans K .

L'ensemble A est simultanément analytique et complémentaire analytique dans K , puisque Γ est un ensemble fermé dans K . Mais A n'est pas un ensemble d'unicité dans K .

En effet, supposons par impossible $A = \sum_{\nu} \prod_k A_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ où $\{A_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ est un système d'unicité dans K . A_{n_1, n_2, \dots, n_k} sont des ensembles fermés dans K . Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer que $A_{n_1, n_2, \dots, n_k} \supseteq A_{n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1}}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$). Définissons maintenant un schème de SOUSLIN $\{F_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ dans R , comme il suit: Si A_{n_1, n_2, \dots, n_k} est un ensemble fermé dans R , posons $F_{n_1, n_2, \dots, n_k} = A_{n_1, n_2, \dots, n_k}$. Si A_{n_1, n_2, \dots, n_k} est de la forme $\Gamma \cdot F$, posons $F_{n_1, n_2, \dots, n_k} = 0$. Alors F_{n_1, n_2, \dots, n_k} sont des ensembles fermés dans R . Nous avons d'abord $A = \sum_{\nu} \prod_k F_{n_1, n_2, \dots, n_k}$. En effet, puisque nous avons toujours $A_{n_1, n_2, \dots, n_k} \supseteq F_{n_1, n_2, \dots, n_k}$, $A \supseteq \sum_{\nu} \prod_k F_{n_1, n_2, \dots, n_k}$. D'autre

(1) Voir p. ex. W. SIERPIŃSKI (8) p. 3.

part, puisque $A \cdot A_{n_1, n_2, \dots, n_k} \subseteq F_{n_1, n_2, \dots, n_k}$, nous avons $A = \sum_{\nu} \prod_k A \cdot A_{n_1, n_2, \dots, n_k} \subseteq \sum_{\nu} \prod_k F_{n_1, n_2, \dots, n_k}$.

Deuxièmement $\{F_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ est un système d'unicité dans R . En effet F_{n_1, n_2, \dots, n_k} sont des ensembles fermés dans R , et $A_{n_1, n_2, \dots, n_k} \supseteq F_{n_1, n_2, \dots, n_k}$. Comme $\{A_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ est un système d'unicité dans K , $\{F_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ l'est également dans R .

Or, ceci est impossible, car, d'après un théorème de M. LUSIN, l'ensemble A d'unicité dans R est nécessairement mesurable (B), contrairement à notre hypothèse. C. Q. F. D.

Dans un espace métrique, tout ensemble d'unicité est simultanément un ensemble analytique et un complémentaire analytique, comme le montre le théorème suivant :

Théorème 11. Soit \mathfrak{F} une famille quelconque, telle que $\mathfrak{F}_C \subseteq \mathfrak{F}_A$. Les ensembles d'unicité obtenus⁽¹⁾ de la famille \mathfrak{F} appartient à \mathfrak{F}_A et \mathfrak{F}_{AC} en même temps.

Démonstration. Soit E un ensemble d'unicité obtenu de \mathfrak{F} : $E = \sum_{\nu} \prod_k E_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ où $E_{n_1, n_2, \dots, n_k} \in \mathfrak{F}$ et $\{E_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ est un schème d'unicité. Posons

$$E^{a_1, a_2, \dots, a_s} = \sum_{\nu} \prod_k E_{a_1, a_2, \dots, a_s, n_1, n_2, \dots, n_k}.$$

$\{E_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ étant un schème d'unicité, pour deux suites finies différentes: (a_1, a_2, \dots, a_s) , (b_1, b_2, \dots, b_s) on a $E_{a_1, a_2, \dots, a_s} \cdot E^{b_1, b_2, \dots, b_s} = 0$. D'après le théorème 10, il existe deux ensembles de \mathfrak{F}_{AC} : $E^{*a_1, a_2, \dots, a_s}$ et $E^{*b_1, b_2, \dots, b_s}$ tels que $E^{a_1, a_2, \dots, a_s} \subseteq E^{*a_1, a_2, \dots, a_s}$; $E^{b_1, b_2, \dots, b_s} \subseteq E^{*b_1, b_2, \dots, b_s}$; $E^{*a_1, a_2, \dots, a_s} \cdot E^{*b_1, b_2, \dots, b_s} = 0$.

Posons pour n naturel $S_n = \sum_{r_1, r_2, \dots, r_n} E_{r_1, r_2, \dots, r_n} \cdot E^{*r_1} \cdot E^{*r_2} \cdot \dots \cdot E^{*r_n}$. Comme $CE_{r_1, r_2, \dots, r_n}$ est un ensemble de \mathfrak{F}_A (d'après notre hypothèse) on voit que S_n est un ensemble de \mathfrak{F}_{AC} . Par suite $E^{*} = \prod_{k=1}^{\infty} S_k$ est un ensemble de \mathfrak{F}_{AC} . Nous allons montrer que $E = E^{*}$.

(1) Nous appelons ainsi tout ensemble qui est un noyau d'un schème de SOUSLIN $\{A_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ d'unicité, tel que $A_{n_1, n_2, \dots, n_k} \in \mathfrak{F}$. La famille de tous les ensembles d'unicité obtenus de la famille \mathfrak{F} sera désignée par \mathfrak{F}_U .

1) $E \subseteq E^*$. En effet, soit p un point de E . Il existe alors une suite d'indices m_1, m_2, m_3, \dots tel que $p \in E_{m_1, m_2, \dots, m_k}$. De là, $p \in E^{m_1, m_2, \dots, m_k}$, et par suite $p \in E^*_{m_1, m_2, \dots, m_k}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$). Donc $p \in S_n$ pour tout $n = 1, 2, 3, \dots$ et enfin $p \in E^*$.

2) $E \supseteq E^*$. Soit p un point quelconque de E^* . Pour tout $n = 1, 2, 3, \dots$, nous avons $p \in S_n$. Donc il existe des indices $m_1^{(n)}, m_2^{(n)}, \dots, m_n^{(n)}$ tels que

$$\text{a) } p \in E_{m_1^{(n)}, m_2^{(n)}, \dots, m_n^{(n)}}$$

$$\text{et b) } p \in E^*_{m_1^{(n)}, m_2^{(n)}, \dots, m_k^{(n)}} \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n).$$

D'après b) si $j > i$, nous avons

$$p \in E^*_{m_1^{(i)}, m_2^{(i)}, \dots, m_i^{(i)}} \quad \text{et} \quad p \in E^*_{m_1^{(j)}, m_1^{(j)}, m_2^{(j)}, \dots, m_i^{(j)}}.$$

Par conséquent la propriété de $E^*_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ montre que $m_k^i = m_k^j$ ($k=1, 2, \dots, i$), $i < j$, ou bien que $m_k^{(k)} = m_k^{(j)}$ ($j \geq k$). Posons $m_k^{(k)} = m_k$; alors d'après a), nous avons $p \in E_{m_1, m_2, \dots, m_k}$ ($k=1, 2, \dots$) c.-à-d. $p \in \prod_{k=1}^{\infty} E_{m_1, m_2, \dots, m_k} \subseteq E$. Ainsi nous avons démontré que $E \in \mathfrak{F}_{AC}$. Par définition même, nous avons d'autre part, $E \in \mathfrak{F}_A^{(1)}$.

C. Q. F. D.

Il serait intéressant de chercher la condition à laquelle doit satisfaire l'espace K pour qu'on ait $\mathfrak{F}_U = \mathfrak{F}_A \cdot \mathfrak{F}_{AC}$ (\mathfrak{F} étant la famille des ensembles fermes dans K).

§ 5.

L'ORDRE DE LA PROJECTION.

Étant donné un ensemble M dans l'espace $R \times S$ et sa projection P sur R , nous disons qu'un point p de P est un point d'ordre α de la projection, si $(p \times S) \cdot M$ contient la puissance α de points. Cette projection est dite univalente (voir p. 15), si tous les points de P sont d'ordre 1. La projection est dite semi-régulière, si tous les points de P sont d'ordre au plus dénombrable. Nous allons considérer les

(1) Voir W. SIERPIŃSKI (5) p. 269. Notre démonstration n'est qu'une transposition de celle de M. W. SIERPIŃSKI.

parties de P de tous les points d'ordre 1, d'ordre au plus n (n fini et fixe), et d'ordre au plus \aleph_0 ; elles sont désignées par $P^{[1]}$, $P^{[n]}$ et $P^{[\aleph_0]}$ resp. . . . Commençons par étudier le cas d'ordre 1.

Théorème 12. *Soient R un espace quasi-accessible et S un espace métrique, complet et séparable. M étant un ensemble analytique dans $R \times S$, l'ensemble A de points p de R d'ordre au moins n (n fini et fixe) est un ensemble analytique dans R .*

Démonstration. Nous nous bornerons au cas où $n = 2$. S étant un espace métrique séparable, S possède un système déterminant au plus dénombrable de voisinages: O_1, O_2, O_3, \dots . Donc il y a au plus une infinité dénombrable de paires (O_m, O_n) de ces voisinages telles que $O_m \cdot O_n = 0$. Nous les rangeons en une suite: $(O_m, O_n)_\nu, \nu = 1, 2, 3, \dots$, et désignons cet indice ν par (m, n) . La projection P_n de $(R \times O_m) \cdot M$ sur R est un ensemble analytique dans R , d'après le théorème 4. Donc l'ensemble $A = \sum_{(m,n)} P_m \cdot P_n$ l'est également. A est précisément l'ensemble de points d'ordre au moins 2. C. Q. F. D.

Théorème 13. *Soient R un espace quasi-accessible et S un espace métrique, complet et séparable. Si M est un ensemble analytique et complémentaire analytique dans $R \times S$, l'ensemble A de tous les points (p, q) de M , tels que $(p \times S) \cdot M$ ne contienne qu'un point, est nécessairement un ensemble complémentaire analytique dans $R \times S$.*

Démonstration. $M - A$ est un ensemble de points (p, q) de M , tels que $(p \times S) \cdot M$ contienne au moins deux points. D'après le théorème 12, la projections P de $M - A$ sur R est un ensemble analytique dans R .

$R - P$ est un ensemble complémentaire analytique dans R . Or, l'ensemble A sera donné par la formule: $A = \{(R - P) \times S\} \cdot M$. $(R - P) \times S$ étant un ensemble complémentaire analytique dans $R \times S$, A lui-même l'est également. C. Q. F. D.

Comme une application du deuxième principe de séparation, nous allons démontrer maintenant un théorème fondamental dû à M. LUSIN:

Théorème 14. *Soient R un espace quasi-accessible où tout ensemble ouvert est un ensemble analytique, et S un espace métrique, complet et séparable. Alors la partie $P^{[1]}$ d'ordre 1 de la projection P d'un*

ensemble d'unicité M dans $R \times S$ sur R est un ensemble complémentaire analytique dans $R^{(1)}$.

Démonstration. Comme on sait, tout ensemble analytique M^* , dans un espace (v) , soit R^* , est une projection d'un ensemble fermé de l'espace $R^* \times N$ sur R^* (N étant l'espace de Baire à zéro dimension)⁽²⁾. De même, tout ensemble d'unicité M^* dans un espace (v) quelconque R^* , est une projection univalente d'un ensemble fermé dans $R^* \times N$. M est donc une projection univalente d'un ensemble fermé dans l'espace $R \times S \times N$. $S \times N$ est un espace métrique, complet et séparable, et l'ordre de la projection de cet ensemble sur R est entièrement égal à celui de la projection de M sur R . Donc sans restreindre la généralité, il nous suffit de considérer le cas où M lui-même est un ensemble fermé.

Or, S étant un espace métrique, complet et séparable, S est une somme d'un ensemble S_1 au plus dénombrable et une partie S_2 qui est ou bien vide, ou bien une image biunivoque et continue de l'espace N de BAIRE à zéro dimension: $S = S_1 + S_2$; $S_1 \cdot S_2 = 0$. Désignons par Q_1 et Q_2 la projection des ensembles $(R \times S_1) \cdot M$ et $(R \times S_2) \cdot M$ resp. sur R , et par $Q_2^{[1]}$ la partie d'ordre 1 de Q_2 .

Considérons d'abord la partie commune de Q_1 et de $P^{[1]}$. Soit $S_1 = \sum_{n=1}^{(\infty)} (a_n)$. L'ensemble $Q_1 \cdot P^{[1]}$ est égal à la projection de $(P^{[1]} \times S_1) \cdot M$ sur R . La projection de $(P^{[1]} \times S_1) \cdot M$ sur R est égal à la somme des projections des $(P^{[1]} \times a_n) \cdot M = (R \times a_n) \cdot (P^{[1]} \times S) \cdot M$. D'après le théorème 13, $(P^{[1]} \times S) \cdot M$ est un ensemble complémentaire analytique dans $R \times S$. $(R \times a_n) \cdot (P \times S) \cdot M$ est donc un ensemble complémentaire analytique dans $R \times a_n$, et par suite, sa projection l'est également dans R . Comme leur somme, l'ensemble $Q_1 \cdot P^{[1]}$ est un complémentaire analytique dans R .

Considérons deuxièmement l'ensemble $Q_2^{[1]}$. $(R \times S_2) \cdot M$ est fermé dans $R \times S_2$, et S_2 (supposé non vide) est une image biunivoque et continue de l'espace N : $S_2 = g(N)$. Transformons S à l'espace N par la fonction inverse de $g(N)$. Nous avons ainsi l'espace $R \times N$ (au lieu

(1) Voir N. LUSIN (1) p. 257-259.

(2) p. ex. L. KANTOROVITCH and E. LIVENSON (1) p. 236-238.

de $R \times S_2$) et un ensemble M^* fermé dans $R \times N$ (au lieu de l'ensemble $(R \times S_2) \cdot M$). $Q_2^{[1]}$ est égal à l'ensemble de tous les points d'ordre 1 de la projection de M^* sur R .

Dès maintenant, nous pouvons suivre la marche de la démonstration due à M. C. KURATOWSKI⁽¹⁾. Désignons par $f(E)$, la projection d'un ensemble E de l'espace $R \times N$ sur R . D'après que nous avons dit plus haut,

$$(1) \quad Q_2^{[1]} = \sum_{q \in N} \left[f \{ (R \times q) \cdot M^* \} - f \{ (R \times (N - q)) \cdot M^* \} \right]$$

comme $q = \prod_{k=1}^{\infty} N_{n_1, n_2, \dots, n_k}$, nous avons

$$\begin{aligned} (R \times q) \cdot M^* &= (R \times \prod_k N_{n_1, n_2, \dots, n_k}) \cdot M^* \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \{ (R \times N_{n_1, n_2, \dots, n_k}) \cdot M^* \}. \end{aligned}$$

$\{ (R \times N_{n_1, n_2, \dots, n_k}) \cdot M^* \} (k = 1, 2, 3, \dots)$ étant une suite monotone des ensembles fermés dans $R \times N$, dont la projection sur N a un diamètre tendant vers 0, nous avons

$$f \left\{ \prod_k (R \times N_{n_1, n_2, \dots, n_k}) \cdot M^* \right\} = \prod_k f \{ (R \times N_{n_1, n_2, \dots, n_k}) \cdot M^* \}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \{ R \times (N - q) \} \cdot M^* &= \{ R \times (N - \prod_k N_{n_1, n_2, \dots, n_k}) \} \cdot M^* \\ &= \{ (R \times N) - (R \times \prod_k N_{n_1, n_2, \dots, n_k}) \} \cdot M^* \\ &= \{ (R \times N) - \prod_k (R \times N_{n_1, n_2, \dots, n_k}) \} \cdot M^* \\ &= \sum_k \{ (R \times N) - (R \times N_{n_1, n_2, \dots, n_k}) \} \cdot M^* \\ &= \sum_k \{ (R \times (N - N_{n_1, n_2, \dots, n_k})) \} \cdot M^*. \end{aligned}$$

(1) Voir C. KURATOWSKI (1) p. 259.

fermé; par suite, d'après notre hypothèse, c'est un ensemble complémentaire analytique. Donc $C^{*n_1, n_2, \dots, n_k}$ est un ensemble complémentaire analytique dans R . On a évidemment

$$(3) \quad C^{*n_1, n_2, \dots, n_k} \cdot C^{*m_1, m_2, \dots, m_k} = 0$$

pour $(n_1, n_2, \dots, n_k) \neq (m_1, m_2, \dots, m_k)$,

$$(4) \quad A_{n_1, n_2, \dots, n_k} - B_{n_1, n_2, \dots, n_k} \subseteq C^{*n_1, n_2, \dots, n_k} \subseteq \bar{A}_{n_1, n_2, \dots, n_k} - B_{n_1, n_2, \dots, n_k}.$$

D'après la définition, $B_{n_1, n_2, \dots, n_k} \supseteq B_{n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1}}$ et par suite

$$(5) \quad C^{*n_1, n_2, \dots, n_k} \supseteq C^{*n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1}}; \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Or, l'inégalité (4) entraîne

$$Q_2^{[1]} \subseteq \sum_k C^{*n_1, n_2, \dots, n_k} \subseteq \sum_k (\bar{A}_{n_1, n_2, \dots, n_k} - B_{n_1, n_2, \dots, n_k}).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} & \bigcap_{k=1}^{\infty} (\bar{A}_{n_1, n_2, \dots, n_k} - B_{n_1, n_2, \dots, n_k}) \\ &= \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\{ (R \times N_{n_1, n_2, \dots, n_k}) \cdot M^* \}} \cdot \bigcap_{k=1}^{\infty} C B_{n_1, n_2, \dots, n_k}. \end{aligned}$$

Mais je dis que $\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\{ (R \times N_{n_1, n_2, \dots, n_k}) \cdot M^* \}} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\{ (R \times N_{n_1, n_2, \dots, n_k}) \cdot M \}}$. En effet, il nous suffit de montrer que $\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\{ (R \times N_{n_1, n_2, \dots, n_k}) \cdot M^* \}} \subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\{ (R \times N_{n_1, n_2, \dots, n_k}) \cdot M \}}$. Soit p un point quelconque de $\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\{ (R \times N_{n_1, n_2, \dots, n_k}) \cdot M^* \}}$. Pour tout voisinage $V(p)$ de p , et pour tout k , il existe un point p_k de $\overline{\{ (R \times N_{n_1, n_2, \dots, n_k}) \cdot M^* \}} \cdot V(p)$. Donc $(p_k \times N_{n_1, n_2, \dots, n_k}) \cdot M^*$ n'est pas vide. Posons $q = \bigcap_k N_{n_1, n_2, \dots, n_k}$, et soit $V(q)$ un voisinage quelconque du point q . $V(p, q) = V(p) \times V(q)$ contiendra alors un point (p_k, q_k) de $(R \times N_{n_1, n_2, \dots, n_k}) \cdot M^*$ dès que $N_{n_1, n_2, \dots, n_k} \subseteq V(q)$. Donc il existe un k_0 tel que $(R \times N_{n_1, n_2, \dots, n_k}) \cdot M^* \cdot V(p, q) \neq 0$ pour $k \geq k_0$. Comme la suite des ensembles $R \times N_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ étant monotone décroissante, $(R \times N_{n_1, n_2, \dots, n_k}) \cdot M^* \cdot V(p, q) \neq 0$ pour tout $k = 1, 2, 3, \dots$. Donc la fermeture de $(R \times N_{n_1, n_2, \dots, n_k}) \cdot M^*$

contient le point (p, q) . L'ensemble $(R \times N_{n_1, n_2, \dots, n_k}) \cdot M^*$ étant fermé, (p, q) appartient à cet ensemble pour tout $k = 1, 2, 3, \dots$. Par conséquent p est un point de $f\{(R \times N_{n_1, n_2, \dots, n_k}) \cdot M^*\}$. ($k = 1, 2, 3, \dots$), et par suite de $\prod_k^{\infty} \{(R \times N_{n_1, n_2, \dots, n_k}) \cdot M^*\}$.

C. Q. F. D.

Revenons à la démonstration du théorème 14. Ainsi nous avons

$$\begin{aligned} & \prod_{k=1}^{\infty} f\{(R \times N_{n_1, n_2, \dots, n_k}) \cdot M^*\} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} CB_{n_1, n_2, \dots, n_k} \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} f\{(R \times N_{n_1, n_2, \dots, n_k}) \cdot M^*\} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} CB_{n_1, n_2, \dots, n_k} \\ &= \prod_{h=1}^{\infty} (A_{n_1, n_2, \dots, n_k} - B_{n_1, n_2, \dots, n_k}). \end{aligned}$$

Par conséquent $Q_2^{[1]} = \sum_{\nu} \prod_k C^*_{n_1, n_2, \dots, n_k}$. Or, (3) et (5) entraînent

$$\sum_{\nu} \prod_k C^*_{n_1, n_2, \dots, n_k} = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{n_1, n_2, \dots, n_k} C^*_{n_1, n_2, \dots, n_k}.$$

Celui-ci montre que $Q_2^{[1]}$ est un ensemble complémentaire analytique dans R . Enfin la formule évidente : $P^{[1]} = Q_1 \cdot P^{[1]} + Q_2^{[1]}(R - Q_1)$ montre que $P^{[1]}$ est un ensemble complémentaire analytique dans R , puisque Q_1 est un ensemble analytique dans R .

C. Q. F. D.

Du théorème 14 se déduit immédiatement le

Théorème 15. Soient R un espace quasi-accessible où tout ensemble ouvert est analytique et S un espace métrique, complet et séparable. M étant un ensemble d'unicité dans l'espace $R \times S$, l'ensemble A de tous les points p de R tels que $(p \times S) \cdot M$ contienne (au moins) un point isolé est un ensemble complémentaire analytique.

Démonstration. Soit $O_1, O_2, O_3, \dots, O_n, \dots$ un système dénombrable de voisinages ouverts de l'espace S , qui forment sa base. $(R \times O_n) \cdot M$ sont alors des ensembles d'unicité dans $R \times S$. L'ensemble A_n de tous les points p d'ordre 1 de la projection de $(R \times O_n) \cdot M$ sur R est un ensemble complémentaire analytique dans R , d'après le théorème 14. $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ est aussi un ensemble complémentaire analytique dans R .

C. Q. F. D.

Le théorème de M. M. S. MAZURKIEWICZ et W. SIERPIŃSKI (sur l'ordre indénombrable) dans notre forme est également indépendant de la condition que l'espace R est complet et séparable :

Théorème 16. *Soient R un espace quasi-accessible et S un espace métrique, complet et séparable. M étant un ensemble analytique dans $R \times S$, l'ensemble E de tous les points d'ordre indénombrable de la projection de M sur R est un ensemble analytique dans $R^{(1)}$.*

Démonstration. L'ensemble M est une projection (voir p. 28) d'un ensemble fermé F de l'espace $R \times S \times N$ sur $R \times S$ (où N est l'espace de BAIRE à zéro dimension). Pour que l'ensemble $(p \times S) \cdot M$ soit indénombrable, il faut et il suffit qu'il existe dans $(p \times S \times N) \cdot F$ une suite de points ξ_n dense en soi et telle que la projection de $\sum_n (\xi_n)$ sur $p \times S$ soit univalente.

Considérons d'abord l'espace $(S \times N)^{\aleph_0(2)}$. L'ensemble A_{ij} de tous les points $(s_1, n_1, s_2, n_2, s_3, n_3, \dots)$ de cet espace $(S \times N)^{\aleph_0}$, tels que $s_i = s_j$ (pour i et j fixes, $i \neq j$), est fermé. Donc la somme $\sum_{i,j} A_{ij}$ ($i \neq j$) est un F_σ . Son complément A par rapport à $(S \times N)^{\aleph_0}$ est, par suite, un ensemble G_δ dans $(S \times N)^{\aleph_0}$. D'autre part comme nous savons, les suites denses en soi des points ξ_n de $S \times N$ forment un ensemble G_δ dans l'espace $(S \times N)^{\aleph_0}$. Nous le désignerons par B . Enfin, construisons, dans l'espace $R \times (S \times N)^{\aleph_0} = R \times (S_{(1)} \times N_{(1)}) \times (S_{(2)} \times N_{(2)}) \times \dots$ (où $S = S_{(1)} = S_{(2)} = \dots$ et $N = N_{(1)} = N_{(2)} = \dots$) l'ensemble fermé

$$F_n = (S_{(1)} \times N_{(1)}) \times (S_{(2)} \times N_{(2)}) \times \dots \\ \times (S_{(n-1)} \times N_{(n-1)}) \times F \times (S_{(n+1)} \times N_{(n+1)}) \times \dots$$

Alors $\Gamma = \prod_{n=1}^{\infty} F_n$ est un ensemble fermé dans $R \times (S \times N)^{\aleph_0}$. Ainsi l'ensemble $(R \times A) \cdot (R \times B) \cdot \Gamma$ est analytique dans $R \times (S \times N)^{\aleph_0}$. Sa projection sur R est un ensemble analytique dans R , d'après le théorème 4. Comme nous avons vu plus haut, cette projection est précisément l'ensemble E .

C. Q. F. D.

(1) Cf. S. MAZURKIEWICZ et W. SIERPIŃSKI (1) ; C. KURATOWSKI (1) p. 262. (2) p. 261 ; S. SAKS (1) p. 218 ; C. KURATOWSKI et E. SZPILRAJN (1).

(2) Voir C. KURATOWSKI (1) p. 7.

Les théorèmes 15 et 16 nous permettent de généraliser un théorème de S. BRAUN :

Théorème 17. *Soient R un espace quasi-accessible où tout ensemble ouvert est analytique, et S un espace métrique, complet et séparable. M étant un ensemble d'unicité dans $R \times S$, l'ensemble A de tous les points d'ordre au plus dénombrable est un ensemble complémentaire analytique dans $R^{(1)}$.*

Démonstration. M étant un ensemble d'unicité dans $R \times S$, M est une projection univalente d'un ensemble fermé F de l'espace $R \times S \times N$ (où N est l'espace de BAIRE à zéro dimension). Sans restreindre la généralité, il nous suffit de démontrer le théorème pour le cas où M est un ensemble fermé. Or, l'ensemble $(p \times S) \cdot M$ est fermé dans $p \times S$. Si $p \in A$, $(p \times S) \cdot M$ est au plus dénombrable ; il ne peut contenir aucun sous-ensemble parfait non vide. Donc cet ensemble contient au moins un point isolé. Désignons par B l'ensemble de tous les points p tels que $(p \times S) \cdot M$ contienne au moins un point isolé, et par P la projection de M sur R . L'ensemble B est un complémentaire analytique dans R d'après le théorème 15, et l'ensemble $P - A$ est analytique dans R d'après le théorème 16. Alors la formule évidente :

$$A = B \cdot \{R - (P - A)\}$$

montre que A lui-même est un ensemble complémentaire analytique dans R . C. Q. F. D.

Corollaire. *Soient R un espace quasi-accessible où tout ensemble ouvert est analytique, et S un espace métrique, complet et séparable. Alors la projection d'un ensemble d'unicité dans $R \times S$ sur R est un ensemble simultanément analytique et complémentaire analytique dans R , si cette projection est sémi-régulière.⁽²⁾*

(1) S. BRAUN (1) p. 169.

(2) N. LUSIN (1) p. 171.

§ 6.

LES POINTS INFÉRIEURS.

Soient R un espace arbitraire et S l'ensemble de tous les nombres réels. Etant donné un ensemble M dans $R \times S$, nous disons qu'un point (p, q) de M est un point inférieur de l'ensemble M , s'il n'existe aucun point (p, q') de M ayant l'ordonnée q' inférieure à q . L'ensemble de tous les points inférieurs de M sera désigné par $M^{(m)}$.

Le théorème suivant est dû à M. S. MARZURKIEWICZ :

Théorème 18. *Soient R un espace quasi-accessible, et S l'ensemble de tous les nombres réels. M étant un ensemble analytique dans $R \times S$, l'ensemble $M - M^{(m)}$ est analytique dans $R \times S$.*

Démonstration. Pour qu'un point $(p, q) \in M$ appartienne à $M - M^{(m)}$, il faut et il suffit qu'il existe un nombre rationnel $r < q$ et un point (p, q') de M tel que $q' < r$. Désignons par M_r et M'_r l'ensemble de tous les points (p, q') de M tels que $q' < r$ et $q' > r$ respectivement : $M_r = M \cdot (R \times [q' < r])$ et $M'_r = M \cdot (R \times [q' > r])$, en désignant par $[q' < r]$ l'intervalle $-\infty < q' < r$ et par $[q' > r]$ celui de $\infty > q' > r$.

On voit bien que M_r et M'_r sont des ensembles analytiques dans $R \times S$. Soit P_r la projection de M_r sur R . D'après le théorème 4, P_r est un ensemble analytique dans R . Or, nous avons une formule évidente : $M - M^{(m)} = \sum_r M'_r \cdot (P_r \times S)$, la sommation s'étendant à tous les nombres rationnels ; et cette formule montre bien que $M - M^{(m)}$ est un ensemble analytique dans $R \times S$. C. Q. F. D.

Corollaire 1. *Soient R un espace quasi-accessible, S l'ensemble de tous les nombres réels. M étant un ensemble simultanément analytique et complémentaire analytique dans $R \times S$, l'ensemble $M^{(m)}$ est un complémentaire analytique dans $R \times S$.*

Démonstration. En effet, nous avons montré dans le théorème 18 que $M - M^{(m)}$ est un ensemble analytique. M étant un ensemble complémentaire analytique, $(R \times S) - M$ est un ensemble analytique dans $R \times S$. Alors la formule $(R \times S) - M^{(m)} = (M - M^{(m)}) + \{(R \times S) - M\}$

montre bien que $M^{(m)}$ est un ensemble complémentaire analytique dans $R \times S$. C. Q. F. D.

Corollaire 2. Soient R un espace quasi-accessible où tout ensemble ouvert est analytique, et S l'ensemble de tous les nombres réels. M étant un ensemble d'unicité dans $R \times S$, dont la projection sur R est sémi-régulière, l'ensemble $M^{(m)}$ est un ensemble simultanément analytique et complémentaire analytique dans $R \times S$.

Démonstration. Posons $M_r = M \cdot (R \times [q' < r])$ et $M'_r = M \cdot (R \times [q' > r])$ où $[q' < r]$ et $[q' > r]$ sont des ensembles de tous les nombres réels q' tels que $q' < r$ et $q' > r$ respectivement. M_r est un ensemble d'unicité dans $R \times S$. D'après le corollaire du théorème 17, la projection sémi-régulière P_r de M_r sur R est un ensemble simultanément analytique et complémentaire analytique dans R . M'_r étant un ensemble d'unicité, il est simultanément analytique et complémentaire analytique dans $R \times S$ (d'après le théorème 11). Donc $M - M^{(m)} = \sum_r M'_r \cdot (P_r \times S)$ est un ensemble analytique et complémentaire analytique dans $R \times S$. Comme le corollaire 1, nous achevons la démonstration. C. Q. F. D.

Enfin nous remarquons que le théorème de M. S. MAZURKIEWICZ et la généralisation due à M. W. SIERPIŃSKI peuvent être considérés également dans notre cadre.

Théorème 19. Soient R un espace quasi-accessible, S un espace métrique, complet, séparable et indénombrable⁽¹⁾. Tout ensemble analytique A dans R est la projection univalente d'un ensemble complémentaire analytique dans $R \times S$ sur R ⁽²⁾.

Démonstration. L'espace S étant un espace métrique, complet, séparable et indénombrable, il existe un ensemble L de S , qui est un G_δ dans S et qui est homéomorphe à l'ensemble N de tous les nombres irrationnels. Pour l'espace $R \times N$, nous pouvons suivre la démonstration de M. S. MAZURKIEWICZ (voir p. ex. LUSIN (1) p. 284). Soit E

(1) Ici, il nous suffit de supposer que S est un espace complet dont le noyau dense en soi n'est pas vide. Voir p. ex. C. KURATOWSKI (1) p. 228. et H. HAHN (1) 24·2·41, p. 174.

(2) S. MAZURKIEWICZ (1).

l'ensemble complémentaire analytique dans $R \times N$ dont la projection univalente sur R est A . Transformons $R \times N$ en $R \times L$. Cette transformation étant homéomorphe, l'ensemble E' transformé de E est un complémentaire analytique dans $R \times L$. La projection de E' sur R est également univalente et égale à A . $R \times S$ étant un espace quasi-accessible, il existe un ensemble E^* complémentaire analytique dans $R \times S$, tel que $E' = E^* \cdot (R \times L)$, L étant un ensemble G_δ dans S , E' est un ensemble complémentaire analytique dans $R \times S$.

C. Q. F. D.

Théorème 20. *Soient R un espace quasi-accessible et S un espace métrique, complet, séparable et indénombrable. Tout ensemble qui peut être obtenu, à partir des ensembles analytiques et de leurs complémentaires au moyen des deux opérations: somme et partie commune d'un nombre au plus dénombrable des ensembles, est la projection univalente d'un complémentaire analytique dans $R \times S$ sur $R^{(1)}$.*

Démonstration. Nous établirons un lemme, et renvoyons tout le reste de la démonstration à un mémoire de M. W. SIERPIŃSKI⁽¹⁾ (Cf. N. LUSIN (1) p. 282-285).

Lemme. *Soient R un espace quasi-accessible et S un espace métrique, complet et séparable. La partie commune $E = E_1 \cdot E_2 \cdot \dots \cdot E_n \cdot \dots$ à une infinité dénombrable d'ensembles E_n de R , dont chacun est la projection univalente d'un ensemble complémentaire analytique A_n dans $R \times S$ est encore de la même nature.*

En effet S étant un espace métrique séparable, d'après un théorème connu⁽²⁾, S est homéomorphe à une partie T de l'espace E_ω . D'autre part, comme S est un espace complet, d'après un théorème de M. ALEXANDROFF⁽³⁾, cet ensemble T est un G_δ dans E_ω .

L'espace $R \times S$ est donc homéomorphe à $R \times T$, et $R \times T$ est un G_δ dans $R \times E_\omega$. Par cette transformation de $R \times S$ en $R \times T$, l'ensemble A_n de $R \times S$ sera transformé en A'_n de $R \times T$, et A'_n doit être

(1) W. SIERPIŃSKI (6).

(2) Voir p. ex. M. FRÉCHET (1) p. 82-84.

(3) Voir p. ex. C. KURATOWSKI (1) § 31, III, p. 215.

un ensemble complémentaire analytique dans $R \times T$. L'espace $R \times E_\omega$ étant quasi-accessible, il existe un ensemble complémentaire analytique B_n dans $R \times E_\omega$ tel que $A'_n = (R \times T) \cdot B_n$. Donc A'_n est un ensemble complémentaire analytique dans $R \times E_\omega$. Or, la projection de A'_n sur R est univalente, et cette projection est précisément l'ensemble E_n . Donc pour démontrer notre lemme, nous pouvons supposer, sans restreindre la généralité, que $S = E_\omega$.

Construisons dans l'espace $R \times E_\omega^{\mathbb{S}_0} = R \times E_\omega^{(1)} \times E_\omega^{(2)} \times E_\omega^{(3)} \times \dots$ où $E_\omega = E_\omega^{(1)} = E_\omega^{(2)} = E_\omega^{(3)} = \dots$, un ensemble $\Gamma_n = E_\omega^{(1)} \times E_\omega^{(2)} \times \dots \times E_\omega^{(n-1)} \times A_n \times E_\omega^{(n+1)} \times \dots$. C'est un ensemble complémentaire analytique dans $R \times E_\omega^{\mathbb{S}_0}$, tel que, pour chaque point p de R , la projection de $(p \times E_\omega^{\mathbb{S}_0}) \cdot \Gamma_n$ sur $p \times E_\omega^{(n)}$ ne contienne qu'un point au plus.

L'ensemble $\Gamma = \prod_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$ est donc un ensemble complémentaire analytique dans $R \times E_\omega^{\mathbb{S}_0}$. Γ jouit de la propriété suivante : pour chaque point p de R , la projection de $(p \times E_\omega^{\mathbb{S}_0}) \cdot \Gamma$ sur $p \times E_\omega^{(n)}$ ne contient qu'un point au plus, et cela pour tout $n = 1, 2, 3, \dots$. Donc la projection de Γ sur R est univalente. Cette projection est précisément l'ensemble $E = E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 \dots$. L'espace E_ω étant un produit cartésien d'une infinité dénombrable de l'espace linéaire (de tous les nombres réels), $E_\omega^{\mathbb{S}_0}$ est homéomorphe⁽¹⁾ à E_ω . Par cette transformation de $E_\omega^{\mathbb{S}_0}$ en E_ω , l'espace $R \times E_\omega^{\mathbb{S}_0}$ sera transformé en $R \times E_\omega$, l'ensemble Γ dans $R \times E_\omega^{\mathbb{S}_0}$ en un ensemble Δ dans $R \times E_\omega$. Cet ensemble Δ est encore un complémentaire analytique dans $R \times E_\omega$, et la projection de Δ sur R , qui est univalente, est précisément l'ensemble E .

C. Q. F. D.

Liste des Travaux Cités.

S. BRAUN

- (1) Quelques théorèmes sur les cribles boreliens. Fund. Math. XX (1933), p. 166-172.

M. FRÉCHET

- (1) Les espaces abstraits. Paris, 1928.

(1) C. KURATOWSKI (1), § 24. V. p. 148.

H. HAHN

- (1) Reelle Funktionen, erster Teil, Punktfunktionen. Leipzig 1932.

F. HAUSDORFF

- (1) Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig 1914.
- (2) Mengenlehre. Berlin u. Leipzig 1927.

L. KANTOROVITCH and E. LIVENSON

- (1) Memoir on the analytical operations and projective sets I. Fund. Math. XVIII, (1932), p. 214-279.

C. KURATOWSKI

- (1) Topologie I. Espaces métrisables, Espaces complets. Waszawa-Lwów. 1933.
- (2) Évaluation de la classe borélienne ou projective d'un ensemble de points à l'aide des symboles logiques. Fund. Math. XVII (1931), p. 249-272.

C. KURATOWSKI et E. SZPILRAJN

- (1) Sur les cribles fermés et leurs applications. Fund. Math. XVIII, (1932), p. 160-170.

N. LUSIN

- (1) Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications. Paris, 1930.

S. MAZURKIEWICZ

- (1) Sur une propriété des ensembles $C(A)$. Fund. Math. X, (1927), p. 172-174.

S. MAZURKIEWICZ et W. SIERPIŃSKI

- (1) Sur un problème concernant les fonctions continues. Fund. Math. VI, (1924), p. 161-169.

S. SAKS

- (1) On the functions of Bescovitch in the space of continuous functions. Fund. Math. XIX, (1932), p. 211-219.

W. SIERPIŃSKI

- (1) Les deux principes de M. Lusin et les espaces abstraits, C. R. de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie XXIV, (1932), p. 1-5.
- (2) Les ensembles analytiques comme criblés au moyen des ensembles fermés. Fund. Math. XVII, (1931), p. 77-91.
- (3) Sur les cribles projectifs. Fund. Math. XVII, (1931), p. 30-31.
- (4) Le crible de M. Lusin et l'opération (A) dans les espaces abstraits. Fund. Math. XI, (1928), p. 16-18.
- (5) Le théorème d'unicité de M. Lusin pour les espaces abstraits. Fund. Math. XXI, (1933), p. 250-275.
- (6) Sur les images continues et biunivoques des complémentaires analytiques. Fund. Math. XII, (1928), p. 211-213.
- (7) Le théorème de Souslin dans la théorie générale des ensembles. Fund. Math. XXV, (1935), p. 29-32.
- (8) Introduction to general topology. Toronto 1934.

M. SOUSLIN

- (1) Sur une définition des ensembles mesurables B sans nombres transfinis.
C. R. A. S. de Paris. t. 164, p. 88-91.

G. STEINBACH

- (1) Beiträge zur Mengenlehre, Inaugural Dissertation, Bonn, 1930.

H. TIETZE

- (1) Ueber Analysis Situs, Abhandlungen aus dem Math. Seminar der
Hamburgischen Universität. Bd. 2, (1923), p. 37-68.

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
Introduction	
§ 1. Théorèmes préliminaires	2
§ 2. Théorèmes de projection	6
§ 3. Les cribles de M. Lusin	17
§ 4. Les principes de séparation de M. Lusin.	18
§ 5. L'ordre de la projection	26
§ 6. Les points inférieurs	35
Liste des travaux cités.	38
