ÜBER DIE DIFFERENTIALGEOMETRIE VON KEGELSCHNITTEN IM DREIDIMENSIONALEN PROJEKTIVEN RAUME

Von

Akitsugu KAWAGUCHI

Neuerdings hat die Untersuchung über die projektive Differentialgeometrie bedeutende Fortschritte gemacht, besonders italienischen Mathematikern(1) müssen wir für ihre grossen und achtungswerten Bemühungen danken. Aber es scheint mir doch so, als ob sie sich alle nur von solchem Gesichtspunkte damit beschäftigen, dass die Raumelemente Punkt, Gerade oder Ebene sein sollen, mit anderen Worten, die betreffenden Mannigfaltigkeiten sind nur Kurven, Flächen, Geradenkomplexe und Geradenkongruenze. Diese Beschränkung der Raumelemente ist aber nicht notwendig, sondern wir können natürlich durch Annahme anderer Raumelemente viel wichtigere Resultate erreichen, zudem sind die Resultate auch geometrisch sehr interessant. Vor allem eignen sich der Kegelschnitt und die Fläche zweiter Ordnung hierzu, da sie durch eine projektive Transformation auch noch Kegelschnitt oder Fläche zweiter Ordnung bleiben, d.h. sie haben eine projektiv invariante Eigenschaft. Ausserdem habe ich früher bewiesen(2), dass jede eineindeutige, stetige Punkttransformation eine projektive Transformation sein muss, wenn dabei jeder Kegelschnitt oder jede Fläche zweiter Ordnung auch ein Kegelschnitt oder eine Fläche zweiter Ordnung bleibt, und dass jede eineindeutige stetige Berührungskegelschnittstransformation eine projektive Transformation ist. Aus diesem Grund habe

(1) G. FUBIMI, E. BOMPIANI, G. SANNIA, A. TERRACINI, usw. und E. CARTAN, in Paris, E. ČECH, in Brün, G. TZITEICA in Bucarest haben ebenfalls wichtige Untersuchungen gemacht.

(2) A. KAWAGUCHI: On collineation and correlation, Japanese Journal of Mathematics, Bd. 3, 1927, S. 139–144.

ich schon die Kegelschnittsgeometrie in der Ebene. ferner die Geometrie von Hyperflächen zweiter Ordnung im n-dimensionalen Raume begründet[3]. Andererseits ist bis jetzt die Differentialgeometrie von Kegelschnitten im dreidimensionalen projektiven Raume noch nicht behandelt worden, obgleich sie schon von F. KLEIN in seinem Erlanger Programm als ein Problem hingestellt wurde, das uns einen guten Untersuchungsstoff geben könnte. Der algebraische Teil der Kegelschnittsgeometrie wurde jedoch von einigen Mathematikern[4] ziemlich eingehend behandelt, da er eine von der Belgischen Akademie herausgebrachte Preisaufgabe ist[5]. Dieser Preis scheint bisheute noch nicht erworben zu sein. Die dieser Untersuchung im Wege stehende Schwierigkeit dürfte darin seinen Ursprung gefunden haben, dass man kein einigermassen bequemes Koordinatensystem eines Kegelschnittes[6] finden konnte.

In dieser Abhandlung möchte ich die Differentialgeometrie von Kegelschnittsystemen im projektiven dreidimensionalen Raume E_3 mit Hilfe eines sehr bequemen Koordinatensystems behandeln[7], indem man meine Theorie über Kegelschnittsgeometrie in der Ebene und die Flächentheorie von G. FUBINI[8] oder die Kurventheorie von G. SANNIA[9] passend zusammensetzt.

Die Theorie von Kegeln im Raume E_3 ist bekanntlich zu der jetzigen Theorie dual, da der Kegel sich zu einem Kegelschnitt genau so verhält.

---

(3) Ueber projektive Differentialgeometrie I–V, Tohoku Mathematical Journal, Bd. 28–30, 1927–28.

(4) z. B. R. A. JOHNSON: The conics as a space element, Transactions of the American Mathematical Society, Bd. 15, 1914; und C. G. F. JAMES: Analytic representation of congruences of conics, Proceedings of the Cambrige Philosophical Society, Bd. 21, 1922–23.

(5) 1908.

(6) Ueber Koordinatensysteme eines Kegelschnittes im Raume siehe: REYE: Crelles Journal, Bd. 82, 1876, S. 54–83; SPOTTISWOODE: Proceedings of the London Mathematical Society, 1878, S. 185–196; P. VAN GEER: Archieves Néerlandaises, 1888, S. 58–90; GODEAUX: Bulletin de 1' Acad. de Bélgique, 1908, S. 896–902.

(7) Einen Teil dieser Untersuchung fand ich bereits in einem kurzen Bericht des Internationalen Kongresses von Mathematikern in Bologna (1928) und auch in den "Proceedings of the Imperial Academy," Japan, Bd. 4, 1928 publiziert.

(8) Siehe FUBICI-ČECH: Geometria proiettiva differenziale, Bd. I u. II, Bologna, 1926–27.

(9) Siehe G. SANNIA: Nuova trattazione della geometria proiettivo-differenziale delle curve sghembe I, II, Annali di Matematica, ser. 4, Bd. 1 u. 3, 1923–25.

Im allgemeinen ergibt sich, dass die folgenden vier Fälle über die Arten der Kegelschnittsysteme im Raume E_3 betrachtet werden können : Alle Ebenen, auf der je ein Kegelschnitt des Systems sich legt, haben

(1) keinen gemeinsamen festen Punkt, d.h. kein Punkt gehört zu allen solcher Ebenen,

(2) einen und nur einen gemeinsamen festen Punkt,

(3) eine und nur eine Gerade ;

(4) alle solche Ebenen fallen aufeinander zusammen, d.h. alle Kegelschnitte des Systems liegen auf einer Ebene.

Das Kegelschnittsystem des vierten Falles ist nichts anderes als das Kegelschnittsystem auf einer Ebene ; dieses System habe ich bereits in einer anderen meiner Arbeiten untersucht.[10]

Über die Kegelschnittsysteme des zweiten und dritten Falles möchte ich in einer späteren Abhandlung sprechen ; in dieser Abhandlung sind nur die Kegelschnittsysteme des ersten Falles, als allgemeinsten Fall, der Gegenstand der Untersuchung.

Auch diejenigen Kegelschnittsysteme, welche irgendeine der folgenden zwei Eigenschaften haben, lasse ich jetzt ausserhalb meiner Untersuchung dieser Abhandlung :

(1) Die Gratlinie der abwickelbaren Fläche, die durch die obengenannten Ebenen eines ein-parametrigen Kegelschnittsystems umgehüllt ist, ist eine Kurve dritter Ordnung im Raume E_3 ;

(2) Die Fläche, die durch die obengenannten Ebenen eines zweiparametrigen Kegelschnittsystems umgehüllt ist, ist eine abwickelbare Fläche.

Diese Systeme gehören natürlich zu dem obengenannten vierten Falle und ich möchte sie auch als Gegenstand einer späteren Untersuchung hier unbehandelt lassen.

Bemerkt möge noch werden, dass in dieser Abhandlung nur einund zwei-parametrige Systeme erörtert werden, weshalb die Theorie

---

(10) A. KAWAGUCHI : Ueber projektive Differentialgeometrie I, Theorie der Kegelschnittsscharen in der Ebene, Tohoku Mathematical Journal, Bd. 28, 1927, S. 126–148, und Differential geometry of conics in the projective space of three dimensions II, Proceedings of the Imperial Academy, Bd. 4, 1928, S. 337–340.

von r-parametrigen Kegelschnittsystemen hier ununtersucht bleiben (wobei $r=3, 4, \ldots, 7$).

In §1 erklärt man die doppelt homogenen Koordinaten eines Kegelschnittes im dreidimensionalen Raume E_3, die die Gesamtheit von Koordinaten der Ebene des Kegelschnittes und von Koeffizienten a_{ik} in der Gleichung des Kegelschnittes:

$$\sum_{i,k}^{1,3} a_{ik} x^i x^k = 0 ,$$

in bezug auf ein passend gewähltes Koordinatensystem auf der Ebene ist.

Mit Hilfe dieser doppelt homogenen Koordinaten kann die Theorie von ein-parametrigen Kegelschnittsystemen in §2 untersucht werden, ebenso die Theorie von zwei-parametrigen Kegelschnittsystemen in §3.

In §2 werden sieben projektive absolute Invarianten des ein-parametrigen Kegelschnittsystems berechnet, von denen zwei die projektive Krümmung und Windung im Sinne von SANNIA sind, und diese Invarianten geben uns die natürlichen Gleichungen für das System, d.h. sie charakterisieren zusammen ein ein-parametriges Kegelschnittsystem für die projektive Transformationsgruppe.

Ähnlich in §3 führt man einen projektiv absolut invarianten Vektor t_r, drei derselben Tensoren zweiter Stufe g_{rs}, q_{rs}, s_{rs} und einen Tensor dritter Stufe a_{rst} eines zwei-parametrigen Kegelschnittsystems ein, von denen drei Tensoren g_{rs}, q_{rs}, a_{rst} die Fundamentalgrössen der Fläche, die die obengenannnten Ebenen des Systems umhüllt, im Sinne von FUBINI sind. Und die Gesamtheit dieser Tensoren und dieses Vektors bestimmt umgekehrt ein zwei-parametriges Kegelschnittensystem bis auf die projektive Transformationen eindeutig, wenn sie einigen Bedingungen genügen.

Die vielen projektiven absoluten Invarianten eines zwei-parametrigen Kegelschnittsystems so wie verschiedene Kegelschnittsscharen, die in einem zwei-parametrigen Kegelschnittsystem enthalten sind, werden in §4 untersucht, wobei man durch geometrische Betrachtung sehr interessante Resultate erzielt.

Wir führen also in §3 den Begriff „Tripelverhältnis" ein, worunter eine Verallgemeinerung des Doppelverhältnisses gemeint ist und das in einem speziellen Falle in Doppelverhältnis ausarten kann. Mit Hilfe dieses Tripelverhältnis können wir in unserer Theorie die Analogen definieren, mit der Hauptkrümmung und Krümmungslinien in der Flächentheorie im dreidimensionalen metrischen Raume.

§ 1. DIE DOPPELT HOMOGENEN KOORDINATEN EINES KEGELSCHNITTES IM RAUME

1. *Beziehung zwischen den beiden (im Raume E_3 und auf einer Ebene E_2) Koordinaten eines Punktes.* Betrachtet man eine Ebene E_2 im dreidimensionalen projektiven Raume E_3 und ein homogenes Punktkoordinatensystem (y^ν, $\nu=1, 2, 3, 4$) in gewöhnlichem Sinne im Raume E_3, wobei wir das Koordinatentetraeder mit T bezeichnen. Wir erhalten dann eine vollständige Vierseite auf der Ebene E_2, die das Schnittgebilde des Koordinatentetraeders T und der Ebene E_2 ist, und daraus können wir ein Dreieck D eindeutig ableiten, indem seine drei Seiten je drei Diagonalen der vollständigen Vierseite sein sollen. Nun werden wir ein homogenes Punktkoordinatensystem auf der Ebene einführen, dabei das Dreieck D als das Koordinatendreieck in diesem Falle angenommen wird. Wir nehmen auch eine der vier Seiten der vollständigen Vierseite als die Einheitsgerade[11] des Koordinatensystems auf der Ebene E_2 an und lassen die Koordinaten eines Punktes, der auf der Ebene E_2 liegt, in bezug auf dieses System (x^i, $i=1, 2, 3$) sein. Andererseits sei die Koordinaten dieses Punktes in bezug auf das vorerwähnte Koordinatensystem im Raume E_3 y^ν, dann folgt daraus

$$(1) \qquad l_1y^1+l_2y^2+l_3y^3+l_4y^4=0$$

oder in abgekurzter Bezeichnung, wie in dem Tensor-Kalkül

$$l_\nu y^\nu=0\ ,$$

(11) Wir dürfen natürlich auch anstatt dieser Gerade die Schnittgerade der Einheitsebene (im Raume E_3) und der Ebene E_2 als die Einheitsgerade annehmen, aber dies kompliziert die Resultaten ausserordentlich.

wobei l_ν die Ebenenkoordinaten der Ebene E_2 bezeichnen.

(1) ist nicht anderes als die Gleichung der Ebene E_2, wenn wir y^ν als die verlaufenden Koordinaten ansehen. Wir werden nun die Beziehung zwischen x^i ($i=1, 2, 3$) und y^ν festlegen. Zu diesem Zweck benutzen wir zuerst die Gleichung der Ebene A, die durch den Schnittpunkt der drei Ebenen: $y^1=0$, $y^2=0$, E_2 und auch durch den Schnittpunkt der drei Ebenen: $y^3=0$, $y^4=0$, E_2 hindurchgeht. Nach der ersten Bedingung muss die Gleichung die Form

$$ay^1+by^2+cL=0 \tag{2}$$

haben, nach der zweiten Bedingung muss sie

$$a'y^3+b'y^4+c'L=0 \tag{3}$$

sein, wobei a, b, c, a', b', c' unbekannten Grössen sind; wir setzen dabei einfachhalber

$$L\equiv l_1y^1+l_2y^2+l_3y^3+l_4y^4 . \tag{4}$$

Da (2) und (3) dieselben Gleichungen sein sollen, muss jeder Werten von y^ν identisch

$$ay^1+by^2-a'y^3-b'y^4+(c-c')L\equiv 0 \tag{5}$$

werden. Daraus erhalten wir die Beziehungen

$$\begin{cases} a\ +(c-c')l_1=0 , \\ b\ +(c-c')l_2=0 , \\ a'+(c'-c)l_3=0 , \\ b'+(c'-c)l_4=0 , \end{cases} \tag{6}$$

indem wir jeden Koeffizienten von y^ν in die Gleichung (5) einzeln Null setzen. Die von (6) bestimmten Werten für a und b in die Gleichung (2) eingesetzt, ergibt für (2) die Form

$$c'(l_1y^1+l_2y^2)+c(l_3y^3+l_4y^4)=0 . \tag{7}$$

Nun setzen wir voraus, dass der Punkt, dessen Koordinaten y^ν sind, immer auf der Ebene E_2 liegt, d.h. $l_1y^1+l_2y^2+l_3y^3+l_4y^4=0$, dann wird die Gleichung (7) wegen $\frac{1}{2}(c'-c)L\equiv 0$

$$(8) \qquad \frac{c'-c}{2}(l_1y^1+l_2y^2-l_3y^3-l_4y^4)=0.$$

Andererseits, unter der Voraussetzung, dass der betreffende Punkt auf der Ebene E_2 liegt, müssen die Koordinaten y^ν durch die Koordinaten x^i linear dargestellt werden[12] d.h. etwa

$$(9) \qquad y^\lambda=a_k^\lambda x^k \text{ (13)}.$$

(8) gibt uns die Gleichung einer Seite des Dreiecks D unter der Beschränkung $L=0$, die Gleichung der Seite ist aber wieder z.B. $x^1=0$ in bezug auf das Koordinatensystem auf der Ebene E_2. Damit muss (8) $x^1=0$ werden, wenn die Beziehungen (9) in (8) ersetzt. Also erhalten wir

$$\rho_1x^1=l_1y^1+l_2y^2-l_3y^3-l_4y^4$$

und ähnlich

$$\rho_2x^2=l_1y^1-l_2y^2+l_3y^3-l_4y^4\,,$$

$$\rho_3x^3=l_1y^1-l_2y^2-l_3y^3+l_4y^4\,,$$

---

(12) Wir können durch eine projektive Transformation das Koordinatensystem solchermassen transformieren, dass die Ebene E_2 eine Seitenfläche z. B. $\bar{y}^4=0$ des neuen Koordinatentetraeders und auch das Dreieck D das Schnittgebilde von den drei anderen Seitenflächen auf der Ebene sein soll. Dann ersehen wir die Richtigkeit unserer Behauptung, da wir $\bar{y}^1=x^1$, $\bar{y}^2=x^2$, $\bar{y}^3=x^3$, $\bar{y}^4=0$ setzen dürfen.

(13) Wobei das Summationszeichen $\sum_{k=1}^{3}$ einfachhalber ausgelassen wird, wie im Tensor-Kalkül (od. Ricci-Kalkül)

wobei ρ_i beliebige Grössen sind, aber wir erkennen sehr leicht, dass

$$\rho_1=\rho_2=\rho_3\ (\equiv\rho)$$

sein müssen, wenn die Einheitsgerade wie in der Voraussetzung der Schnittgerade der zwei Ebenen $y^1=0$ und E_2 ist. Dies gibt schliesslich als Beziehung zwischen den beiden Koordinatensystemen

$$(10)\qquad \begin{cases} \rho x^1=l_1y^1+l_2y^2-l_3y^3-l_4y^4\,, \\ \rho x^2=l_1y^1-l_2y^2+l_3y^3-l_4y^4\,, \\ \rho x^3=l_1y^1-l_2y^2-l_3y^3+l_4y^4\ {}^{(14)}\,, \end{cases}$$

wobei ρ eine Grösse ist, die man beliebig wählen kann.

Aus (10) folgt ferner umgekehrt

$$(11)\qquad \begin{cases} \sigma y^1=l_2l_3l_4(x^1+x^2+x^3)\,, \\ \sigma y^2=l_1l_3l_4(x^1-x^2-x^3)\,, \\ \sigma y^3=l_1l_2l_4(-x^1+x^2-x^3)\,, \\ \sigma y^4=l_1l_2l_3(-x^1-x^2+x^3) \end{cases}$$

unter der Voraussetzung $l_1l_2l_3l_4\neq 0$[15], ferner unter Auflösung von y^ν in dem Gleichungssystem (10) und $L=0$, wobei

$$\rho\sigma=4l_1l_2l_3l_4\,.$$

2. *Gleichungen für Punktmannigfaltigkeiten.* Nun können wir zwei Klassen der homogenen Koordinaten (l_1, l_2, l_3, l_4) (x^1, x^2, x^3) in Nr. 1 betrachten und sein vereinigtes System (l_ν, x^i) (das ist doppelt homogen) bestimmt ein Paar, das aus einer Ebene und einem Punkte im Raume E_3 besteht. Auch sehen wir sehr leicht von (11), dass die zwei

(14) Wir können (10) in anderer Form ausdrücken, z.B.

$$(11)_1 \qquad \rho^*x^1=l_1y^1+l_2y^2,\quad \rho^*x^2=l_1y^1+l_3y^3,\quad \rho^*x^3=l_1y^1+l_4y^4,$$

wodurch aber nichts Wesentliches geändert wird, ausserdem fehlt ihm die Symmetrie.

(15) Wenn $l_1\,l_2\,l_3\,l_4=0$ ist, müssen wir das Koordinatensystem im Raume E_3 in ein anderes transformieren, um mit (11) ähnliche Ausdrücke zu führen.

durch (l_ν, x^i) bezw. $(\bar{l}_\nu, \bar{x}^i)$ bestimmten Punkte sich miteinander zusammensetzen, wenn

$$\frac{x^1+x^2+x^3}{l_1} : \frac{x^1-x^2-x^3}{l_2} : \frac{-x^1+x^2-x^3}{l_3} : \frac{-x^1-x^2+x^3}{l_4}$$

$$= \frac{\bar{x}^1+\bar{x}^2+\bar{x}^3}{\bar{l}_1} : \frac{\bar{x}^1-\bar{x}^2-\bar{x}^3}{\bar{l}_2} : \frac{-\bar{x}^1+\bar{x}^2-\bar{x}^3}{l_3} : \frac{-\bar{x}^1-\bar{x}^2+\bar{x}^3}{l_4} .$$

Daraus können wir die Gleichung für einen Punkt in E_3 erhalten:

$$\text{(12)} \quad \frac{x^1+x^2+x^3}{l_1} : \frac{x^1-x^2-x^3}{l_2} : \frac{-x^1+x^2-x^3}{l_3} : \frac{-x^1-x^2+x^3}{l_4}$$

$$=\alpha : \beta : \gamma : \delta ,$$

wobei l_ν und x^i als die laufenden Koordinaten aufzufassen sind. Dagegen sind alle α, β, γ, δ Konstanten. Setzen wir einfachheitswegen

$$\text{(13)} \quad x^1+x^2+x^3=z^1,\ x^1-x^2-x^3=z^2,\ -x^1+x^2-x^3=z^3,\ -x^1-x^2+x^3=z^4,$$

dann geht (12) in die Form über

$$\text{(14)} \qquad \frac{\alpha l_1}{z^1}=\frac{\beta l_2}{z^2}=\frac{\gamma l_3}{z^3}=\frac{\delta l_4}{z^4} .$$

Die folgende Beziehung zwischen z^λ ergibt sich hierdurch ohneweiters

$$\text{(15)} \qquad \sum_{\lambda}^{1,4} z^\lambda = 0 .$$

Aus (12) folgt auch die Gleichung für eine Ebene:

$$\text{(16)} \qquad \frac{\alpha z^1}{l_1}+\frac{\beta z^2}{l_2}+\frac{\gamma z^3}{l_3}+\frac{\delta z^4}{l_4}=0$$

und die für eine Gerade:

$$\text{(17)} \qquad \frac{(\alpha+\bar{\alpha}p)l_1}{z^1}=\frac{(\beta+\bar{\beta}p)l_2}{z^2}=\frac{(\gamma+\bar{\gamma}p)l_3}{z^3}=\frac{(\delta+\bar{\delta}p)l_4}{z^4} ,$$

wobei p ein Parameter bedeutet. Eliminieren wir aus (17) das Parameter p, dann bekommen wir die Gleichungen der Geraden

$$\frac{\begin{vmatrix} \alpha l_1 & z^1 \\ \beta l_2 & z^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \bar{\alpha} l_1 & z^1 \\ \bar{\beta} l_2 & z^2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \beta l_2 & z^2 \\ \gamma l_3 & z^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \bar{\beta} l_2 & z^2 \\ \bar{\gamma} l_3 & z^3 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \gamma l_3 & z^3 \\ \delta l_4 & z^4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \bar{\gamma} l_3 & z^3 \\ \bar{\delta} l_4 & z^4 \end{vmatrix}}, \tag{18}$$

die keine andere Bedeutung als (17) besitzen.

In analoger Weise können wir auch weiter die Gleichungen für Kurven, Flächen, Linienkongruenze und Linienkomplexe finden.

Bemerkung. Offenbar dürfen wir nach dem Dualitätsprinzipe l_ν als Punktkoordinaten und x^i als Linienkoordinaten einer durch den Punkt l_ν hindurchgehenden Ebene ansehen, das gibt (16) uns die Gleichung für den Punkt.

3. *Die doppelt homogenen Koordinaten eines Kegelschnittes in* E_3. Auf der Ebene E_2 betrachten wir einen Kegelschnitt K, der in bezug auf das auf der Ebene E_2 eingeführte Koordinatensystem durch eine homogene quadratische Gleichung folgendermassen dargestellt wird :

$$a_{ik}x^i x^k = 0\ , \tag{19}$$

wobei wir das wie in Nr. 1 betrachtete Dreieck D auch als das Koordinatendreieck auf dieser Ebene annehmen. Es kommen dabei offenbar nur Verhältnisse zwischen a_{ik} im Frage, d.h. eine Gleichung, welche als ihre Koeffizienten die mit einem gemeinschaftlichen Faktor ρ multiplizierten a_{ik} besitzt :

$$\rho a_{ik}x^i x^k = 0$$

stellt denselben Kegelschnitt K wie die Gleichung (19) vor. Deswegen können wir die Koeffizienten a_{ik} in der Gleichung (19) als die homogenen Koordinaten des Kegelschnittes K auf der Ebene E_2 ableiten.

Im allgemeinen wird ein Kegelschnitt in E_3 durch die den Kegelschnitt enthaltende Ebene und eine homogene quadratische Gleichung, wie (19), eindeutig bestimmt, daher entspricht ein vereinigtes System von Ebenenkoordinaten der Ebene E_2: l_ν und von Koordinaten des Kegelschnittes a_{ik} einem nicht ausgearteten Kegelschnitt eineindeutig. Aus diesem Grund nennen wir ein doppelt homogenes System (l_ν, a_{ik}) *das doppelt homogene Kegelschnittskoordinatensystem in* E_3.

Durch eine projektive Transformation

$$\bar{y}^\lambda = \alpha^\lambda_\nu y^\nu \text{ [16]}, \tag{20}$$

$$\bar{l}_\nu = \beta^\lambda_\nu l_\lambda, \tag{21}$$

wobei

$$\alpha^\nu_\lambda \alpha^\lambda_\mu = \delta_{\nu\mu},$$

verändert sich z.B. x^1 wegen (10) und (11) folgendermassen:

$$\begin{aligned}
\rho\bar{x}^1 &= \beta^\nu_1 l_\nu(\alpha^1_\lambda y^\lambda) + \beta^\nu_2 l_\nu(\alpha^2_\lambda y^\lambda) - \beta^\nu_3 l_\nu(\alpha^3_\lambda y^\lambda) - \beta^\nu_4 l_\nu(\alpha^4_\lambda y^\lambda) \\
&= \beta^\nu_1 l_\nu\left\{\alpha^1_1 p^1(x^1+x^2+x^3) + \alpha^1_2 p^2(x^1-x^2-x^3) + \alpha^1_3 p^3(-x^1+x^2-x^3)\right. \\
&\quad \left. + \alpha^1_4 p^4(-x^1-x^2+x^3)\right\} + \cdots\cdots\cdots \\
&= l_\nu\left\{\beta^\nu_1(\alpha^1_1 p^1 + \alpha^1_2 p^2 - \alpha^1_3 p^3 - \alpha^1_4 p^4) + \beta^\nu_2(\alpha^2_1 p^1 + \alpha^2_2 p^2 - \alpha^2_3 p^3 - \alpha^2_4 p^4) - \cdots\right\} x^1 \\
&\quad + l_\nu\left\{\beta^\nu_1(\alpha^1_1 p^1 - \alpha^1_2 p^2 + \alpha^1_3 p^3 - \alpha^1_4 p^4) + \cdots\cdots\right\} x^2 \\
&\quad + l_\nu\left\{\beta^\nu_1(\alpha^1_1 p^1 - \alpha^1_2 p^2 - \alpha^1_3 p^3 + \alpha^1_4 p^4) + \cdots\cdots\right\} x^3 \\
&= \gamma^1_i x^i,
\end{aligned}$$

wobei wir

$$\frac{\rho}{l_\lambda} = p^\lambda$$

---

(16) Wir setzen hier voraus, dass die griechischen Indizes $\lambda, \mu, \nu, \omega, \ldots$ die Werte 1, 2, 3, 4 und dagagen die lateinischen Indizes $i, j, k, \ldots$ die Werte 1, 2, 3 durchlaufen.

setzen. In analoger Weise erhalten wir im allgemeinen

$$\rho \bar{x}^j = \gamma_i^j x^i \,. \tag{22}$$

Diese Beziehungen bestimmen bekanntlich auf der Ebene eine projektive Transformation, aber es ist wichtig zu beachten, dass alle γ_i^j im allgemeinen nicht nur von a_ν^λ sondern auch von l_ν abhängig sind. Die Ausdrücke (21) und (22) geben uns damit eine allgemeine projektive Transformation für Kegelschnitte in E_3.

§ 2. DAS EIN-PARAMETRIGE KEGELSCHNITTSYSTEM S_1

4. *Die begleitende abwickelbare Fläche.* Wir denken uns ein einparametriges Kegelschnittsystem S_1 in E_3, das durch Funktionen mit einem Parameter u

$$l_\nu = l_\nu(u) \,, \qquad a_{ik} = a_{ik}(u)$$

gegeben ist. Bei diesen Funktionen setzen wir, um allen funktionentheoretischen Schwierigkeiten zu entgehen, fest, dass nur stetige und hinreichend oft differenzierbare Funktionen zur Betrachtung gelangen.

Durch die Gleichungen $l_\nu = l_\nu(u)$ definieren sich eine abwickelbare Fläche F, die von der Ebenenschar l_ν umgehüllt ist, d.h. jede Schnittgerade zweier benachbarten Ebenen der Ebenenschar ist eine Erzeugende der abwickelbaren Fläche F. Die abwickelbare Fläche F ist eineindeutig zu einem ein-parametrigen Kegelschnittsystem zugeordnet.

5. *Die kovariante Ableitung.* Wir denken uns ein Differential $\varPsi = g du$, wobei g eine eindeutige stetige und hinreichend oft differenzierbare Funktion von dem Parameter u ist, und setzen

$$g \delta^r u = d^{r-1} \psi \,, \tag{23}$$

d.h.

$$(24) \qquad \begin{cases} \delta^1 u = du\,, \\ \delta^2 u = d^2u + \dfrac{g_u}{g} du^2\,, \\ \delta^3 u = d\delta^2 u + \dfrac{g_u}{g} du\,\delta^2 u\,, \quad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Es sei $b_{/n}$ eine Funktion von u, wenn n eine positive ganze Zahl ist und $B_n = b_{/n} du^n$, dann folgt

$$(25) \qquad dB_n = d(b_{/n} du^n) = b_{/n+1} du^{n+1} + n b_{/n} du^{n-1} \delta^2 u\,,$$

wobei

$$(26) \qquad \delta b_{/n} = b_{/n+1} du = \left(\frac{db_{/n}}{du} - n \frac{g_u}{g} b_{/n} \right) du\,;$$

diese $b_{/n+1}$ wird die *kovariante Ableitung* von $b_{/n}$ durch u[17] genannt. Im allgemeinen ergibt sich z.B.

$$(27) \qquad d\left\{ b_{/n} du^r (\delta^2 u)^s (\delta^3 u)^t \right\} = b_{/n+1} du^{r+1} (\delta^2 u)^s (\delta^3 u)^t + r b_{/n} du^{r-1} (\delta^2 u)^{s+1} (\delta^3 u)^t$$
$$+ s b_{/n} du^r (\delta^2 u)^{s-1} (\delta^3 u)^{t+1} + t b_{/n} du^r (\delta^2 u)^s (\delta^3 u)^{t-1} \delta^4 u\,,$$

für jede positive ganze Zahl r, s, t, zwischen denen die Beziehung $r + 2s + 3t = n$ besteht. Wir können von (27) als einen speziellen Fall die folgende Ausdrücke erhalten:

$$(28) \qquad x_{/1} = \frac{dx}{du} = x_u\,, \quad x_{/2} = \frac{dx_{/1}}{du} - \frac{g_u}{g} x_{/1} = x_{uu} - \frac{g_u}{g} x_u\,, \quad \text{u. s. w.}$$

Daraus folgen ohneweiters

$$(29) \qquad \begin{cases} dx = x_{/1} du\,, \\ d^2 x = x_{/2} du^2 + x_{/1} \delta^2 u\,, \\ d^3 x = x_{/3} du^3 + 3x_{/2} du\,\delta^2 u + x_{/1} \delta^3 u\,, \\ d^4 x = x_{/4} du^4 + 6x_{/3} du^2 \delta^2 u + 3x_{/2} (\delta^2 u)^2 + 4x_{/2} du\,\delta^3 u + x_{/1} \delta^4 u\,, \quad \text{u.s.w.} \end{cases}$$

---

(17) Wenn $g=1$ ist, reduziert sich die kovariante Ableitung zur gewöhnlichen Ableitung d. h. $\delta^r u = d^r u$. Siehe z. B. FUBINI-ČECH, a.a.O., Band I, S. 27.

Die kovariante Ableitung von g hat immer den Wert Null, wie wir sehr leicht ersehen können.

6. *Die projektiven Invarianten, welche nur von der begleitenden abwickelbaren Fläche abhängen.* Für eine unimoduläre projektive Transformation

$$\bar{l}_\nu = a_\nu^\mu l_\mu , \tag{30}$$

wobei die Determinante $|a_\nu^\mu|$ den Wert 1 hat, sind alle Determinanten von dem Typus wie

$$|l_\nu \quad dl_\nu \quad d^2 l_\nu \quad d^r l_\nu| \qquad r=3,4,\ldots\ldots \tag{31}$$

offenbar invariant. Im Falle $r=3$ setzen wir

$$(\Psi_3)^2 = (g\,du)^6 = \epsilon\,|l_\nu \quad dl_\nu \quad d^2 l_\nu \quad d^3 l_\nu| , \tag{32}$$

wobei ϵ das Vorzeichen von $|l_\nu\, dl_\nu\, d^2 l_\nu\, d^3 l_\nu|$ darstellt, daraus folgt

$$\begin{aligned}(g\,du)^6 &= \epsilon\,|l_\nu \quad \delta l_\nu \quad \delta^2 l_\nu \quad \delta^3 l_\nu| \\ &= \epsilon\,|l_\nu \quad l_{\nu/1} \quad l_{\nu/2} \quad l_{\nu/3}|\,du^6 .\end{aligned} \tag{33}$$

In diesem Falle verwenden wir die kovariante Differenzierung über l_ν durch Annahme von

$$g\,du = (\epsilon\,|l_\nu \quad dl_\nu \quad d^2 l_\nu \quad d^3 l_\nu|)^{\frac{1}{6}} \tag{34}$$

statt von Ψ im vorigen Paragraph;

$$\begin{aligned} g &= \left(\epsilon \left| l_\nu \ \frac{dl_\nu}{du} \ \frac{d^2 l_\nu}{du^2} \ \frac{d^3 l_\nu}{du^3} \right|\right)^{\frac{1}{6}} \\ &= (\epsilon\,|l_\nu \quad l_{\nu/1} \quad l_{\nu/2} \quad l_{\nu/3}|)^{\frac{1}{6}} .\end{aligned} \tag{35}$$

Durch kovariante Differenzierung von (35) erhalten wir

$$|l_\nu \quad l_{\nu/1} \quad l_{\nu/2} \quad l_{\nu/4}| = 0 , \tag{36}$$

da die kovariante Ableitung von g den Wert Null besitzt, davon gilt es

$$(37) \qquad |l_\nu \quad dl_\nu \quad d^2l_\nu \quad d^4l_\nu| = 6\,|l_\nu \quad l_{\nu/1} \quad l_{\nu/2} \quad l_{\nu/3}|\, du^5 \delta^2 u$$

$$= 6\epsilon\, g^6 du^5 \delta^2 u\,.$$

In analoger Weise erhalten wir

$$(38) \qquad |l_\nu \quad dl_\nu \quad d^2l_\nu \quad d^5l_\nu| = |l_\nu \quad l_{\nu/1} \quad l_{\nu/2} \quad l_{\nu/5}|\, du^8 - \frac{10}{3}\, \Psi_3 d^2 \Psi_3 - \frac{5}{9}(d\Psi_3)^2\,,$$

und noch weiter analoge Ausdrücke für

$$|l_\nu \quad dl_\nu \quad d^2l_\nu \quad d^rl_\nu|\,,$$

wobei $r=6, 7, \ldots\ldots$

Die Koordinaten y^λ eines Punktes der Gratlinie der abwickelbaren Fläche F sind mit $(l_\nu \;\; l_{\nu,u} \;\; l_{\nu,uu})$ proportional, wobei wir kurz $\frac{dl_\nu}{du}$ bezw. $\frac{d^2l_\nu}{du^2}$ mit $l_{\nu,u}$ bezw. $l_{\nu,uu}$ bezeichnen. Hierbei verstehen wir ferner unter $(l_\nu \;\; m_\nu \;\; n_\nu)$ vier Determinanten:

$$\begin{vmatrix} l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \\ l_4 & m_4 & n_4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} l_3 & m_3 & n_3 \\ l_4 & m_4 & n_4 \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} l_4 & m_4 & n_4 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}.$$

Nun können die Koordinaten y^λ folgendermassen in bezug auf die Fläche F normiert werden:

$$(39) \qquad y^\lambda = \frac{\epsilon}{g^3}(l_\nu \quad l_{\nu,u} \quad l_{\nu,uu}) = \frac{\epsilon}{g^3}(l_\nu \quad l_{\nu/1} \quad l_{\nu/2})\,,$$

daraus folgen sofort

$$(40) \qquad \Psi_3 \equiv y^\lambda d^3 l_\lambda = -l_\nu d^3 x^\nu\,,$$

$$(41) \qquad \Psi_4 \equiv \epsilon\,|l_\nu \quad l_{\nu/1} \quad l_{\nu/2} \quad l_{\nu/4}|\, du^4 = 0\,,$$

$$(42)\qquad \Psi_5 \equiv \epsilon \,|\, l_\nu \;\; l_{\nu/1} \;\; l_{\nu/2} \;\; l_{\nu/5} \,|\, \frac{du^5}{g^3}$$

$$= y^\lambda d^5 l_\lambda - \frac{10}{3} d^2 \Psi_3 + \frac{5}{9} \frac{(d\Psi_3)^2}{\Psi_3}$$

und wir setzen auch

$$\Psi_6 \equiv d^3 y^\lambda d^3 l_\lambda \,.$$

y^λ bezw. m_ν seien die Koordinaten eines Punktes bezw. einer Ebene, die folgenden Bedingungen genügen sollen:

$$(43)\qquad \begin{cases} z^\lambda l_\lambda \;= 1\,, & z^\lambda dl_\lambda = z^\lambda d^2 l_\lambda = z^\lambda d^3 l_\lambda = 0\,, \\ y^\lambda m_\lambda = 1\,, & dy^\lambda m_\lambda = d^2 y^\lambda m_\lambda = d^3 y^\lambda m_\lambda = 0\,, \end{cases}$$

und wir setzen

$$(44)\qquad \Psi_3 = a du^3\,, \qquad \frac{\Psi_6}{\Psi_3} = -\theta du^3\,, \qquad \frac{\Psi_5}{\Psi_3} = -q du^2\,,$$

dann werden $y^\lambda{}_{/3}$ und $l_{\nu/3}$ durch a, θ, q dargestellt, d.h.

$$(45)\qquad \begin{cases} l_{\nu/3} = \theta l_\nu - q l_{\nu/1} + a m_\nu\,, \\ y^\lambda{}_{/3} = -\theta y^\lambda - q y^\lambda{}_{/1} - a z^\lambda\,, \end{cases}$$

und ferner

$$(46)\qquad m_{\nu/1} = c l_\nu\,, \qquad z^\lambda{}_{/1} = \gamma y^\lambda\,,$$

wobei c und γ auch Funktionen von u sind, und

$$(47)\qquad c + \gamma = -\left(\frac{\theta}{a}\right)_u \text{(18)}\,.$$

Von dieser Beziehung können zwei Funktionen c und γ durch a, θ, q und p dargestellt werden, wenn wir setzen:

$$(48)\qquad \Psi^7 \equiv d^3 y^\lambda d^4 l_\lambda = p du^7\,.$$

(18) Siehe FUBINI-ČECH, a.a.O., S. 33.

Nun werden wir denjenigen Fall weglassen, bei denen die Gratlinie der abwickelbaren Fläche F eine Kurve dritter Ordnung ist, für die $\theta=0$ und $\pi=0$ sind, wenn

$$(49) \qquad \pi \equiv \frac{3}{2}q'' + \frac{5}{2}\theta' + 5c + \frac{9}{20}q^2 = \frac{3}{2}q'' - \frac{5}{2}\theta' - 5\gamma + \frac{9}{20}q^2,$$

wobei die Striche die Ableitungen nach einem neuen Parameter u^* andeuten ; für u^* sei $a=1$, d.h.

$$(50) \qquad a du^3 = du^{*3}.$$

Wir verstehen dann unter den *normierten Koordinaten* einer abwickelbaren Fläche F diejenige, für die $\theta=1$ oder, wenn $\theta=0$[19], $\pi=1$ besteht. Nämlich, aus einer beliebigen homogenen Koordinaten lassen sich die normierten durch

$$(51) \qquad l_\nu^* = \theta^{-\frac{1}{2}} l_\nu$$

ableiten.

Das Parameter $u^*=\sigma$, das durch Verwendung der normierten Koordinaten erhalten wird, heisst *die projektive Länge* der abwickelbaren Fläche F, welche für jede projektive Transformation invariant bleibt. q und c sind dabei auch für jede projektive Transformation invariant und wenn beide q und c einzeln als Funktionen von der projektiven Länge σ gegeben sind, dann bestimmt sich eindeutig die abwickelbare Fläche F bis auf die projektiven Transformationen. q bezw. c ist daher nicht anders von der projektiven Krümmung bezw. Torsion (oder Windung) der abwickelbaren Fläche F[20].

7. *Drei mit der abwickelbaren Fläche F projektiv invariant verknüpfende Geraden, die auf jeder umhüllenden Ebene liegen.* Die Tangente T der Gratlinie K der abwickelbaren Fläche F an einem

(19) In diesem Falle gehört die abwickelbare Fläche F zu einem linearen Linienkomplexe, in anderen Worten, alle Tangenten ihrer Gratlinie gehören zu einem linearen Linienkomplexe.

(20) Siehe FUBINI-ČECH, a.a.O., S. 37.

Punkte P, welcher dem Wert σ_0 von der projektiven Länge σ entspricht, ist die Schnittgerade der zwei Ebenen, welche Koordinaten bezw. $l_\nu(\sigma_0)$ und $l_\nu{}'(\sigma_0)$ sind. Unter der projektiven Normalengeraden N der Gratlinie K, die mit der Fläche F projektiv invariant verknüpft ist, verstehen wir andererseits ähnlich die Schnittgerade der zwei Ebenen, die als ihre Koordinaten bezw. $l_\nu(\sigma)$ und $\xi_\nu(\sigma) = \frac{q}{2} l_\nu(\sigma) + l_\nu''(\sigma)$ erhalten[21]. Wir werden noch eine für die projektive Transformation invariant mit der abwickelbaren Fläche F verbundene Gerade auf jeder Umhüllungsebene $l_\nu(\sigma)$ einführen, damit wir je eine invariante Ebene, die als ihre Koordinaten $\eta_\nu(\sigma) = \frac{\theta}{2} l_\nu(\sigma) + \frac{q}{2} l_\nu'(\sigma) + l_\nu'''(\sigma)$ hat, entsprechend zu jeder Ebene $l_\nu(\sigma)$ in Betracht nehmen, d.h. die Schnittgerade C von zwei Ebenen $l_\nu(\sigma)$ und $\eta_\nu(\sigma)$. Auf diese Weise lassen sich drei invariante Geraden[22], die alle auf einer Ebene $l_\nu(\sigma)$ liegen, für jeden Wert der projektiven Länge σ zu der Umhüllungsebene $l_\nu(\sigma)$ aufstellen.

Wir betrachten nun ein Koordinatensystem auf der Ebene $l_\nu(\sigma)$, wie es in §1 erwähnten Weise angenommen wird und es sollen diese drei Geraden als ihre Koordinaten in bezug auf dieses Koordinatensystem

$$(52)\qquad \begin{cases} \lambda_1^{(1)} = \tau\,(l_1' l_2 l_3 l_4 + l_1 l_2' l_3 l_4 - l_1 l_2 l_3' l_4 - l_1 l_2 l_3 l_4') \\ \lambda_2^{(1)} = \tau\,(l_1' l_2 l_3 l_4 - l_1 l_2' l_3 l_4 + l_1 l_2 l_3' l_4 - l_1 l_2 l_3 l_4') \\ \lambda_3^{(1)} = \tau\,(l_1' l_2 l_3 l_4 - l_1 l_2' l_3 l_4 - l_1 l_2 l_3' l_4 + l_1 l_2 l_3 l_4')\,; \end{cases}$$

$$(53)\qquad \begin{cases} \lambda_1^{(2)} = \tau\,(\xi_1 l_2 l_3 l_4 + l_1 \xi_2 l_3 l_4 - l_1 l_2 \xi_3 l_4 - l_1 l_2 l_3 \xi_4) \\ \lambda_2^{(2)} = \tau\,(\xi_1 l_2 l_3 l_4 - l_1 \xi_2 l_3 l_4 + l_1 l_2 \xi_3 l_4 - l_1 l_2 l_3 \xi_4) \\ \lambda_3^{(2)} = \tau\,(\xi_1 l_2 l_3 l_4 - l_1 \xi_2 l_3 l_4 - l_1 l_2 \xi_3 l_4 + l_1 l_2 l_3 \xi_4)\,; \end{cases}$$

$$(54)\qquad \begin{cases} \lambda_1^{(3)} = \tau\,(\eta_1 l_2 l_3 l_4 + l_1 \eta_2 l_3 l_4 - l_1 l_2 \eta_3 l_4 - l_1 l_2 l_3 \eta_4) \\ \lambda_2^{(3)} = \tau\,(\eta_1 l_2 l_3 l_4 - l_1 \eta_2 l_3 l_4 + l_1 l_2 \eta_3 l_4 - l_1 l_2 l_3 \eta_4) \\ \lambda_3^{(3)} = \tau\,(\eta_1 l_2 l_3 l_4 - l_1 \eta_2 l_3 l_4 - l_1 l_2 \eta_3 l_4 + l_1 l_2 l_3 \eta_4) \end{cases}$$

(21) Siehe G. SANNIA, a.a.O. § 4.

(22) Diese drei Geraden haben im allgemeinen keinen gemeinsamen Punkt. Wenn sie immer einen gemeinsamen Punkt haben, soll die abwickelbare Fläche ein allgemeiner Kegel sein.

haben. Hierbei werden wir τ einen festen Wert geben, also

$$\tau = (2l_1 l_2 l_3 l_4)^{-\frac{2}{3}}. \tag{55}$$

8. *Projektive Invarianten, welche vom Kegelschnittsystem S_1 selbst abhängen.* Denken wir uns die doppelt homogenen Koordinaten von Kegelschnitten des Systems S_1: $a_{ik}=a_{ik}(\sigma)$, so besteht die Möglichkeit, diese Koordinaten $a_{ik}(\sigma)$ derart zu normieren, wenn wir voraussetzen, dass die Determinante $|a_{ik}(\sigma)|$ nicht mit Null identisch ist, d.h. dass die Kegelschnitte im allgemeinen nicht ausgeartet sind.

$$|a_{ik}(\sigma)| = 1. \tag{56}$$

Wir nehmen d.h. als neue Koordinaten

$$a^*_{ik} = a_{ik}(\sigma)\,|a_{jm}(\sigma)|^{-\frac{1}{3}} \text{ [23]}. \tag{57}$$

Wir werden in Folgenden diesen Stern der Kürze halber auslassen und die in dieser Weise normierten Koordinaten immer mit $a_{ik}(\sigma)$ bezeichnen.

Um aus diesen Koordinaten $a_{ik}(\sigma)$ einige projektive Invarianten, die mit dem System S_1 verknüpft sind, abzuleiten, ändern wir das Koordinatendreieck und das neue Koordinatendreieck wird von den drei eben genannten invarianten Geraden T, N, C gebildet. Dann werden die neuen Koordinaten der Kegelschnitte des Systems S_1 folgendermassen ausgedrückt:

$$I^{ab}(\sigma) = A^{ik}\lambda_i^{(a)}\lambda_k^{(b)} \qquad a, b=1, 2, 3, \tag{58}$$

wobei $A^{ik}(\sigma)$ die dualen Koordinaten des Kegelschnittes a_{ik}, d.h. die durch die Determinante $|a_{ik}|$ dividierten algebraischen Minordeterminanten von Elementen a_{ik} in bezug auf die Determinante $|a_{ik}|$ bezeichnen. Diese Grössen $I^{ab}(\sigma)$ sind für jede projektive Transformation invariant, da das betreffende Koordinatendreieck, wie wir eben gesehen haben, mit dem

(23) Siehe A. KAWAGUCHI: Über projektive Differentialgeometrie, a.a.O.

System S_1 projektiv invariant gebunden ist und da diese Grössen I^{ab} für jede projektive Transformation auf der Ebene unverändert bleiben.

Diese sechs Invarianten I^{ab} sind voneinander nicht unabhängig, sondern es besteht zwischen denselben die Beziehung

$$|I^{ab}| = 1 . \tag{59}$$

Weil, aus der Determinantentheorie ersehen wir unter Berücksichtung von (52) - (55) folgendes:

$$\begin{aligned}
|I^{ab}| &= |A^{ij}|\,|\lambda_k^{(m)}|^2 = |\lambda_k^{(m)}|^2 \\
&= \tau^6 (2l_1 l_2 l_3 l_4)^4 \begin{vmatrix} l_1 & l_1' & \xi_1 & \eta_1 \\ l_2 & l_2' & \xi_2 & \eta_2 \\ l_3 & l_3' & \xi_3 & \eta_3 \\ l_4 & l_4' & \xi_4 & \eta_4 \end{vmatrix}^2 \\
&= \begin{vmatrix} l_1 & l_1' & l_1'' & l_1''' \\ l_2 & l_2' & l_2'' & l_2''' \\ l_3 & l_3' & l_3'' & l_3''' \\ l_4 & l_4' & l_4'' & l_4''' \end{vmatrix}^2 \\
&= 1 .
\end{aligned}$$

Deshalb wird eine Invariante von dieser sechs I^{ab} durch anderes ausgedrückt.

9. *Der fundamentale Satz.* In dieser Weise erhalten wir nun sieben voneinander unabhängige projektive Invarianten q, c, I^{ab} $(a, b = 1,2,3)$[24], die von dem System S_1 abhängig sind, und durch diese sieben Invarianten werden alle anderen von dem System S_1 abhängigen projektiven Invarianten dargestellt, wie wir sofort ersehen können.

Nun können wir den folgenden fundamentalen Satz beweisen:

---

(24) Von den sechs I^{ab} lassen wir dabei irgendeines aus, da die Beziehung (59) zwischen den I^{ab} besteht.

Die sieben Invarianten q, c, I^{ab}[24] seien alle als stetige und hinreichend oft differenzierbare Funktionen von σ gegeben, dann lässt sich ein ein-parametriges Kegelschnittsystem S_1 bis auf die projektiven Transformationen eindeutig bestimmen, so dass das System S_1 diese sieben Invarianten bezw. σ als seine Invarianten bezw. projektive Länge hat.

Beweis: Erstens wollen wir beweisen, dass mindestens ein System S_1 sich ergibt, das als seine Invarianten die vorgegebenen Funktionen q, c, I^{ab} besitzt. Es ist nicht nötig, hier zu beweisen, dass $q=q(\sigma)$ und $c=c(\sigma)$ zusammen eine abwickelbare Fläche bis auf die projektiven Transformationen bestimmen, d.h. dass sie die natürlichen Gleichungen einer abwickelbaren Flächen F für projektive Transformationsgruppe vorstellen. In jeder Tangentenebene dieser Fläche kann ein Dreieck abgeleitet werden, das von den drei oben besprochenen Geraden T, N, C gebildet ist, und durch Verwendung des Dreiecks als Koordinatendreieck auf jener Ebene können wir einen solchen Kegelschnitt einführen, dass seine Koordinaten I^{ab} sein sollen. In dieser Weise kann man die Existenz desjenigen ein-parametrigen Kegelschnittsystems erkennen, das als seine Invarianten die vorgegebenen Funktionen besitzt. Nächstens muss man sehen, ob zwei derjenigen Systeme mit passender Zuordnung vom Werte der Länge σ eben derselben Invarianten existieren, welche durch keine projektive Transformation zueinander übertragbar sein können. Es ist aber nicht so schwer zu zeigen, dass wir zwei Systeme mit passender Zuordnung vom Werte der Länge σ derselben Invarianten durch geeignete projektive Transformation immer zueinander übertragen können. In der Tat, sollen zwei der Systeme zugehörige abwickelbare Flächen durch geeignete projektive Transformation zueinander übertragen sein, da sie dieselben q und c für entsprechenden Wert der Länge σ haben, folglich müssen dann die entsprechenden Geraden T, N, C der beiden Flächen auch zusammenfallen. Andererseits, sind die übrigen Invarianten I^{ab} der beiden Systeme ganz gleich, daraus folgt es, dass die der gleichwertigen Länge σ entsprechenden Kegelschnitte der beiden Systeme auch durch solche Übertragung zusammenfallen müssen, da I^{ab} die Koordinaten des Kegelschnittes in bezug auf das durch jene drei Geraden T, N, C gebildete Dreieck sind. Wir ersehen daraus die Richtigkeit der Behauptung unseres Satzes.

10. *W-Kegelschnittsystem.* Unter dem W-Kegelschnittsystem verstehen wir ein solches, bei dem alle Invarianten konstant sind, und bezeichnen das System mit W_1. Es ergeben sich ∞^1 projektive Transformationen, bei denen ein W_1 im Ganzen unverändert bleibt, und die zu einem W_1 zugehörige abwickelbare Fläche ist offensichtlich auch selbst eine projektiv abwickelbare W-Fläche. Bildet man irgendeine beliebige Tangentenebene der einem W_1 zugehörigen abwickelbaren Fläche auf eine anderes in solcher Weise durch eine projektive Transforamtion ab, dass jede entsprechende von je drei auf beiden Ebenen liegenden Geraden T, N, C zusammenfallen, dann fallen auch zwei Kegelschnitte des W_1 auf beiden Ebenen zusammen. Diese Eigenschaft hat nicht nur W_1, sondern auch dasjenige System, von denen die Invarianten I^{ab} alle konstant sind.

11. *T-System.* Betrachtet man den Fall I^{11}=konst., dann hat das betreffende System folgende Eigenschaft; wir nennen es *T-System.*

Bezeichnen wir mit I_{ab} die zu I^{ab} duale Koordinaten des Kegelschnittes, dann ist jede I_{ab} die algebraische Minordeterminante von I^{ab} in bezug auf die Determinante $|I^{ab}|$, und

$$I^{11}=I_{22}I_{33}-(I_{23})^2\,. \tag{60}$$

Durch Differenzierung erhalten wir daraus für das T-System

$$I'_{22}I_{33}+I_{22}I'_{33}-2I_{23}I'_{23}=0\,. \tag{61}$$

Wir denken uns zwei benachbarte Kegelschnitte des Systems und die Schnittgerade T zweier je einen dieser Kegelschnitte enthaltenden Ebenen, dann werden die Schnittpunkte dieser zwei Kegelschnitte und T durch die Gleichungen

$$I_{22}(x^2)^2+2I_{23}x^2x^3+I_{33}(x^3)^2=0\,, \tag{62}$$

$$(I_{22}+dI_{22})(x^2)^2+2(I_{23}+dI_{23})x^2x^3+(I_{33}+dI_{33})(x^3)^2=0 \tag{63}$$

bestimmt. Aus dieser Betrachtung geht ein Punktepaar, welches durch

$$I'_{22}(x^2)^2+2I'_{23}x^2x^3+I'_{33}(x^3)^2=0 \tag{64}$$

definiert wird, hervor und (61) zeigt uns, dass die beiden Punktpaare (62) und (64) voneinander harmonisch geteilt sind. Diese Eigenschaft ist für das T-System charakteristisch.

§ 3. DAS ZWEI-PARAMETRIGE KEGELSCHNITTSYSM S_2

12. *Die begleitende Fläche.* Wir betrachten nun ein zweiparametriges Kegelschnittsystem S_2 in E_3, das durch Funktionen mit zwei Parametern u^r $(r=1, 2)$

$$l_\nu=l\ (u^1, u^2), \qquad a_{ik}=a_{ik}(u^1, u^2)$$

gegeben ist, ähnlich wie in § 2. Über diese Funktionen machen wir auch dieselbe Voraussetzungen, wie in Nr. 4. Die Ebenen l_ν (u^1, u^2) umhüllen eine Fläche F_2, u^r gilt als veränderlich, und die Fläche F_2 entspricht dem System S_2 eineindeutig. Den Fall wollen wir jetzt weglassen, bei denen alle l_ν von irgendeinem von zwei Parametern u^r unabhängig sind, d.h. die Fläche abwickelbar ist.

13. *Fundamentale Differentialformen, welche der begleitenden Fläche F_2 zugehörigen sind.* Wir setzen erstens

$$\left| l_\nu \quad \frac{\partial l_\nu}{\partial u^1} \quad \frac{\partial l_\nu}{\partial u^2} \quad d^2 l_\nu \right| \equiv b_{rs}du^r du^s \qquad r, s=1, 2$$

und können dann daraus eine Differentialform

$$\Psi_2 \equiv g_{rs}du^r du^s \equiv B^{-\frac{1}{4}} \left| l_\nu \quad \frac{\partial l_\nu}{\partial u^1} \quad \frac{\partial l_\nu}{\partial u^2} \quad d^2 l_\nu \right| \tag{65}$$

ableiten, wobei B den absolute Betrag von $(b_{11}\, b_{22} - b^2_{12})$ bedeutet. Die Form (65) ist für jede projektive Transformation und auch für jede beliebige Transformation von Parametern

$$\bar{u}^1 = \bar{u}^1(u^1, u^2), \qquad \bar{u}^2 = \bar{u}^2(u^1, u^2) \tag{66}$$

invariant, d.h.

$$\bar{g}_{rs} d\bar{u}^r d\bar{u}^s = g_{rs} du^r du^s,$$

daraus folgt

$$\bar{g}_{rs} = g_{pq} \frac{\partial u^p}{\partial \bar{u}^r} \frac{\partial u^q}{\partial \bar{u}^s}. \tag{67}$$

Von (67) kann man erkennen, dass g_{rs} ein Tensor ist. Wir werden daher g_{rs} als Fundamentaltensor für die Massbestimmung annehmen und führen eine RIEMANNsche Übertragung, folglich die kovariante Differenzierung im Sinne von RIEMANNscher Geometrie, in unsere Theorie ein. Die kovariante partielle Ableitung eines kovarianten Vektors v_r ist dann durch

$$v_{rs} = \frac{dv_r}{du^s} - \Gamma^t_{rs} v_t \tag{68}$$

definiert, wobei

$$\Gamma^t_{rs} = g^{tp} \left(\frac{\partial g_{rt}}{\partial u^s} + \frac{\partial g_{ps}}{\partial u^r} - \frac{\partial g_{rs}}{\partial u^p} \right), \tag{69}$$

g^{tp} die kontravarianten Bestimmungszahlen des Tensors g_{rs} sei, d.h.

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{G}, \qquad g^{12} = -\frac{g_{12}}{G}, \qquad g^{22} = \frac{g_{11}}{G}, \qquad G = g_{11} g_{22} - g^2_{12}.$$

Setzt man ferner

$$\Psi_3 \equiv a_{rst} du^r du^s du^t \equiv B^{-\frac{1}{4}} \left| l_\nu \quad \frac{\partial l_\nu}{\partial u^1} \quad \frac{\partial l_\nu}{\partial u^2} \quad l_{\nu/rst} \right| du^r du^s du^t, \tag{70}$$

die für eine unimoduläre projektive Transformation unverändert bleibt, so gibt uns die Gleichung $\Psi_3 = 0$ die DARBOUXschen Richtungen der

Fläche F_2, und $\Psi_2=0$ die asymptotischen Richtungen. Die beiden Formen Ψ_2, Ψ_3 sind zueinander apolar, d.h.

$$g^{rs}a_{rst}=0^{(25)} . \tag{71}$$

14. *Die normierten Koordinaten.* Wenn man

$$I=G^{-2}\begin{vmatrix} a_{111} & a_{121} & a_{221} \\ a_{112} & a_{122} & a_{222} \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} \tag{72}$$

setzt, so ist die Diskriminante der Form Ψ_3

$$D=G^3I^2$$

und I ist offenbar eine absolute Invariante für eine unimoduläre projektive Transformation.

Wir setzen nun voraus, dass I nicht identisch verschwindend ist, d.h. lassen den Fall weg, bei denen Fläche geradlinig ist. Für die Proportionalfaktorsänderung

$$\bar{l}_\nu=\rho l_\nu ,$$

verändert sich I so, dass

$$\bar{I}=\rho^{-2}I^{(26)}.$$

Unter normierte Koordinaten l_ν verstehen wir dann solche, für die

$$I=-1 \tag{73}$$

d.h. wir wählen $\rho=(-I)^{\frac{1}{2}}$. Wir setzen im Folgenden fest, dass die Koordinaten l_ν immer die normierten bedeuten, auch wenn es nicht ausdrücklich ausgesprochen ist.

---

(25) Siehe z.B. FUBINI-ČECH, a.a.O., S. 66.
(26) Siehe FUBINI-ČECH, a.a.O., S. 85.

15. *Die Ableitungsgleichungen für die begleitende Fläche.* Da ein auf der Fläche F_2 liegender Punkt als Schnittpunkt der drei Tangentenebenen betrachtet werden kann, sind seine Koordinaten durch

$$y^{\lambda}=\sigma\,(l_{\nu}\;\; l_{\nu/1}\;\; l_{\nu/2}) \tag{74}$$

gegeben und umgekehrt in analoger Weise

$$l_{\nu}=\bar{\sigma}\,(y^{\lambda}\;\; y^{\lambda}{}_{/1}\;\; y^{\lambda}{}_{/2})\,.$$

Wir setzen dabei

$$\sigma=\epsilon\bar{\sigma}=B^{-\frac{1}{2}}, \tag{75}$$

um y^{λ} für jede Parameternänderung invariant sein zu lassen, wobei

$$\epsilon=-sgn(b_{11}b_{22}-b_{12}^2)\,.$$

Dann folgt

$$\Psi_2=y^{\nu}l_{\nu/rs}du^r du^s\,, \tag{76}$$

$$\begin{aligned}\Psi_3&=y^{\nu}l_{\nu/rst}du^r du^s du^t\\ &=-y^{\nu}{}_{/rst}l_{\nu}du^r du^s du^t\\ &=\frac{1}{2}(l_{\nu/r}\,y^{\nu}{}_{/st}-y^{\nu}{}_{/r}\,l_{\nu/st})du^r du^s du^t\,.\end{aligned} \tag{77}$$

Wenn man

$$\left\{\begin{aligned} m_{\nu}&=\frac{1}{2}g^{rs}\,l_{\nu/rs}\,,\\ z^{\nu}&=\frac{1}{2}g^{rs}\,y^{\nu}{}_{/rs}\end{aligned}\right. \tag{78}$$

setzt, dann können $l_{\nu/rs}$ und $y^{\nu}{}_{/rs}$ folgendermassen dargestellt werden:

$$\left\{\begin{aligned} l_{\nu/rs}&=a_{rs}^{\cdot\cdot p}l_{\nu/p}+g_{rs}m_{\nu}+p_{rs}l_{\nu}\,,\\ y^{\nu}{}_{/rs}&=-a_{rs}^{\cdot\cdot p}y^{\nu}{}_{/p}+g_{rs}z^{\nu}+\pi_{rs}y^{\nu}\,,\end{aligned}\right. \tag{79}$$

daraus kommen zwei neue Tensoren p_{rs} und π_{rs} hervor, die beide mit g_{rs} apolar sind:

$$g^{rs}p_{rs}=0\,,\qquad g^{rs}\pi_{rs}=0\,. \tag{80}$$

In (79) haben wir gesetzt:

$$a_{rs}^{\cdot\cdot\,p}=a_{rsq}g^{qp}\,. \tag{81}$$

Von (79) erhält man gleich

$$l_{\nu/rs}y^{\nu}{}_{/pq}=a_{rs}^{\cdot\cdot\,h}a_{pqh}+p_{rs}g_{pq}+g_{rs}\pi_{pq}+g_{rs}g_{pq}m_{\nu}z^{\nu}\,,$$

daraus folgt

$$l_{\nu/rs}y^{\nu}{}_{/pq}-l_{\nu/pq}y^{\nu}{}_{/rs}=g_{pq}(p_{rs}-\pi_{rs})+g_{rs}(\pi_{pq}-p_{pq})\,. \tag{82}$$

Andererseits wissen wir schon aus dem Tensor-Kalkül, dass

$$l_{\nu/s[tu]}=\frac{1}{2}K_{tus}^{\cdot\cdot\cdot\,p}l_{\nu/p}\,{}^{(27)}\,, \tag{83}$$

wenn man die Krümmungsgrösse mit $K_{tus}^{\cdot\cdot\cdot\,p}$ bezeichnet[28]. Da

$$a_{rst}=-y^{\nu}{}_{/r}l_{\nu/st}\,,$$

erhält man durch kovariante Differenzierung

$$a_{rstp}=-y^{\nu}{}_{/rp}l_{\nu/st}-y^{\nu}{}_{/r}l_{\nu/stp}\,. \tag{84}$$

Deshalb können wir von (83) erhalten:

$$\begin{aligned} a_{rs[tp]}&=-l_{\nu/s[t}y^{\nu}{}_{/|r|p]}-y^{\nu}{}_{/r}l_{\nu/s[tp]}\\ &=-l_{\nu/s[t}y^{\nu}{}_{/|r|p]}-\frac{1}{2}K_{tps}^{\cdot\cdot\cdot\,q}l_{\nu/q}y^{\nu}{}_{/r}\\ &=-l_{\nu/s[t}y^{\nu}{}_{/|r|p]}+\frac{1}{2}K_{tps}^{\cdot\cdot\cdot\,q}g_{qr}\,. \end{aligned} \tag{85}$$

(27) Wir setzen dabei symbolisch

$$l_{\nu/s[tu]}=\frac{1}{2}(l_{\nu/stu}-l_{\nu/sut})\,.$$

(28) Einige Mathematiker nennen $K_{tus}^{\cdot\cdot\cdot\,p}$ auch Krümmungstensor.

Da a_{rstp} in bezug auf r und s symmetrisch ist, d.h.

$$a_{rstp} = a_{srtp} ,$$

folgt aus (85)

$$(86) \qquad 4a_{rs[tp]}4 = a_{(rs)[tp]} {}^{(29)}$$

$$= -(l_{\nu/st}y^{\nu}{}_{/rp} - l_{\nu/rp}y^{\nu}{}_{/st}) + (l_{\nu/sp}y^{\nu}{}_{/rt} - l_{\nu/rt}y^{\nu}{}_{/sp}) + 2K_{tp(sr)}$$

$$= g_{st}(p_{rp} - \pi_{rp}) + g_{rp}(\pi_{st} - p_{st}) + g_{rt}(p_{sp} - \pi_{sp})$$

$$+ g_{sp}(\pi_{rt} - p_{rt}) + 2K_{tp(sr)} .$$

Aus (86) erhält man sogleich von (80)

$$(87) \qquad 2g^{rp}a_{rs[tp]} = \pi_{st} - p_{st} ,$$

da

$$(88) \qquad g^{rp}g_{rt}(p_{sp} - \pi_{sp}) = p_{st} - \pi_{st}$$

und

$$K_{tp(sr)} = 0 .$$

Aus (87) kann man sehen, dass $\pi_{st} - p_{st}$ durch g^{rp} und a_{rstp} ausgedrückt wird:

$$(89) \qquad \pi_{st} - p_{st} = 2g^{rp}a_{rs[tp]} = 2a^{p}{}_{s[tp]} = a^{p}{}_{stp} ,$$

d.h. zwei Tensoren p_{st} und π_{st} werden durch g_{rs}, a_{rst} und

$$(90) \qquad q_{rs} = p_{rs} + \pi_{rs}$$

dargestellt.

---

(29) $a_{(rs)[tp]}$ bedeutet $\frac{1}{2}(a_{rs[tp]} + a_{sr[tp]})$.

Setzt man ferner

$$
(91) \qquad \begin{cases} m_{\nu/p} = h_p l_\nu + k_{pr} g^{rs} l_{\nu/s} \, , \\ z^\nu{}_{/p} = \lambda_p y^\nu + \mu_{pr} g^{rs} y^\nu{}_{/s} \, , \end{cases}
$$

dann werden auch alle h_p, λ_p, k_{pr}, μ_{pr} durch drei Tensoren g_{rs}, a_{rst}, q_{rs} dargestellt.

16. *Integrabilitätsbedingungen.* Dafür, dass die Differentialgleichungen (79) und (91) in bezug auf l_ν, y^λ und m_ν, z^λ integrabel sein sollen, müssen die folgenden Bedingungen zwischen den Differentialgleichungen bestehen:

$$
(92) \qquad \begin{cases} l_{\nu/r[st]} = \dfrac{1}{2} K_{str}{}^{\cdot\cdot\cdot p} l_{\nu/p} \, , \\ y^\nu{}_{/r[st]} = \dfrac{1}{2} K_{str}{}^{\cdot\cdot\cdot r} y^\nu{}_{/p} \, ; \end{cases}
$$

$$
(93) \qquad \begin{cases} m_{\nu/[pq]} = 0 \, , \\ z^\nu{}_{/[pq]} = 0 \, . \end{cases}
$$

Durch Berechnung können wir aus (92) mit Berücksichtung von (79) und (91) die folgenden Ausdrücke ableiten:

$$
(94) \qquad \begin{cases} a_{rp[st]} + a_{r[s}{}^{\cdot\cdot q} a_{t]qp} + g_{r[s} k_{t]p} + p_{r[s} g_{t]p} = \dfrac{1}{2} K_{strp} \, , \\ -a_{rr[st]} + a_{r[s}{}^{\cdot\cdot q} a_{t]qp} + g_{r[s} \mu_{t]p} + \pi_{r[s} g_{t]p} = \dfrac{1}{2} K_{strp} \, ; \end{cases}
$$

$$
(95) \qquad \begin{cases} a_{r[s}{}^{\cdot\cdot p} p_{t]p} + g_{r[s} h_{t]} + p_{r[st]} = 0 \, , \\ -a_{r[s}{}^{\cdot\cdot p} \pi_{t]p} + g_{r[s} \lambda_{t]} + \pi_{r[st]} = 0 \, . \end{cases}
$$

Von (94) und (95) erhält man die Ausdrücke von h_r, λ_r, k_{rs}, μ_{rs} durch andere Tensoren, ersetzend p_{rs} und π_{rs} durch (89) und (90):

$$(96)\quad \begin{cases} k_{tp}=a^{r}_{\cdot ptr}+a^{r}_{\cdot t}{}^{;q}a_{rqp}+\dfrac{1}{2}(q_{tq}-2a^{r}_{\cdot t[pr]})+K^{r}_{\cdot trp}\,, \\ \mu_{tp}=-a^{r}_{\cdot ptr}+a^{r}_{\cdot t}{}^{;q}a_{rqp}+\dfrac{1}{2}(q_{tp}+2a^{r}_{\cdot t[pr]})+K^{r}_{\cdot trp}\,; \end{cases}$$

$$(97)\quad \begin{cases} h_t\ =\dfrac{1}{2}\left\{a^{r}_{\cdot t}{}^{;p}(q_{rp}-2a^{s}_{\cdot r[ps]})+q^{r}_{\cdot tr}-a^{sr}_{\cdot\cdot[ts]r}\right\}, \\ \lambda_t\ =\dfrac{1}{2}\left\{-a^{r}_{\cdot t}{}^{;p}(q_{rp}+2a^{s}_{\cdot r[ps]})+q^{r}_{\cdot tr}+a^{sr}_{\cdot\cdot[ts]r}\right\}. \end{cases}$$

Andererseits, bekommen wir aus (93)

$$(98)\quad \begin{cases} h_{[pq]}+k_{[p}{}^{;s}p_{q]s}=0\,, \\ \lambda_{[pq]}+\mu_{[p}{}^{;s}\pi_{q]s}=0\,; \end{cases}$$

$$(99)\quad \begin{cases} h_{[p}g_{q]r}+k_{r[pq]}+k_{[p}{}^{;s}a_{q]sr}=0\,, \\ \lambda_{[p}g_{q]r}+\mu_{r[pq]}-\mu_{[p}{}^{;s}a_{q]sr}=0\,. \end{cases}$$

k_{rs}, μ_{rs}, h_r, λ_r ersetzend durch (96) und (97), sind (98) und (99) die gesuchten Integrabilitätsbedingungen, die den drei Tensoren g_{rs}, a_{rst}, q_{rs} genügen sollen.

Drei Tensoren g_{rs}, a_{rst}, q_{rs} seien als diejenigen Funktionen von Parametern u^r gegeben, dass zwischen ihnen die Bedingungen (98) und (99) bestehen, und auch dass a_{rst} und q_{rs} für g_{rs} apolar sind, dann wird eine Fläche bis auf die projektive Transformation eindeutig bestimmt; die für die Fläche berechneten drei Tensoren sind mit den vorgegebenen drei Tensoren g_{rs}, a_{rst}, q_{rs} identisch.

17. *Die anderen Differentialformen, die dem System S_2 angehören.* Wir denken uns zwei Geraden auf jeder Tangentenebene l_ν, bei denen zwei benachbarte Tangentenebenen, $l_\nu+\dfrac{\partial l_\nu}{\partial u^1}du^1$ und $l_\nu+\dfrac{\partial l_\nu}{\partial u^2}du^2$ die Ebene l_ν schneiden. Die Geraden dieser zwei Geraden auf der Ebene l_ν sind durch

$$(100)\qquad \begin{cases} \lambda_{1,r} = \rho\,(l_{1/r}\,l_2\,l_3\,l_4 + l_1\,l_{2/r}\,l_3\,l_4 - l_1\,l_2\,l_{3/r}\,l_4 - l_1\,l_2\,l_3\,l_{4/r})\,, \\ \lambda_{2,r} = \rho\,(l_{1/r}\,l_2\,l_3\,l_4 - l_1\,l_{2/r}\,l_3\,l_4 + l_1\,l_2\,l_{3/r}\,l_4 - l_1\,l_2\,l_3\,l_{4/r})\,, \\ \lambda_{3,r} = \rho\,(l_{1/r}\,l_2\,l_3\,l_4 - l_1\,l_{2/r}\,l_3\,l_4 - l_1\,l_2\,l_{3/r}\,l_4 + l_1\,l_2\,l_3\,l_{4/r})\,, \end{cases}$$

$$i = 1,\ 2,\ 3\,, \qquad r = 1,\ 2$$

gegeben. Die zweite projektive Normalengerade der Fläche F_2, die auf einer Tangentenebene l_ν liegt, wird als Schnittgebilde der Ebene l_ν und

$$(101)\qquad m_\nu = \frac{1}{2} l_{\nu/rs}\,g^{rs}$$

definiert. Ihre Koordinaten in bezug auf unseres Koordinatensystem auf der Ebene werden, wie wir sogleich ersehen können,

$$(102)\qquad \begin{cases} \mu_1 = \rho\,(m_1\,l_2\,l_3\,l_4 + l_1\,m_2\,l_3\,l_4 - l_1\,l_2\,m_3\,l_4 - l_1\,l_2\,l_3\,m_4)\,, \\ \mu_2 = \rho\,(m_1\,l_2\,l_3\,l_4 - l_1\,m_2\,l_3\,l_4 + l_1\,l_2\,m_3\,l_4 - l_1\,l_2\,l_3\,m_4)\,, \\ \mu_3 = \rho\,(m_1\,l_2\,l_3\,l_4 - l_1\,m_2\,l_3\,l_4 - l_1\,l_2\,m_3\,l_4 + l_1\,l_2\,l_3\,m_4)\,. \end{cases}$$

Diese zweite projektive Normalengerade schneidet sich nicht mit den zwei Geraden (100) gleichzeitig an einem Punkte, d.h. diese drei Geraden bilden ein Dreieck.

Jetzt betrachten wir die dualen Koordinaten der Kegelschnitte des Systems S_2: A^{ij}, von ihnen führen einige Invarianten folgendermassen:

$$(103)\qquad \begin{cases} s_{rs} = A^{ij}\,\lambda_{i,r}\,\lambda_{j,s}\,, \\ t_r = A^{ij}\mu_i\,\lambda_{j,r}\,, \\ U = A^{ij}\mu_i\,\mu_j\,. \end{cases}$$

s_{rs}, t_r, U sind zusammen nichts anderes von den Koordinaten des Kegelschnittes A^{ij} in bezug auf dasjenige Koordinatendreieck, das durch die drei eben betrachteten Geraden gebildet ist. Zwischen diesen Grössen gilt eine Beziehung, die mit der Beziehung (59) für Invarianten I^{ab} im vorigen Paragraphen analog ist:

$$\frac{1}{G}\begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & t_1 \\ s_{21} & s_{22} & t_2 \\ t_1 & t_2 & U \end{vmatrix} = 1\,, \tag{104}$$

da

$$\frac{1}{G}\begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & t_1 \\ s_{21} & s_{22} & t_2 \\ t_1 & t_2 & U \end{vmatrix} = \frac{1}{G}|A^{ij}|\begin{vmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \mu_1 \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \mu_2 \\ \lambda_{3,1} & \lambda_{3,2} & \mu_3 \end{vmatrix}^2$$

$$= G^{-1}\rho^6(2l_1 l_2 l_3 l_4)^4 \left| l_\nu \quad l_{\nu/1} \quad l_{\nu/2} \quad \frac{1}{2} l_{rs} g^{rs} \right|^2$$

$$= \frac{1}{4} G^{-1}(|l_\nu \quad l_{\nu/1} \quad l_{\nu/2} \quad l_{rs}| g^{rs})^2$$

$$= \frac{1}{4}(g_{rs} g^{rs})^2 = 1\,,$$

wobei wir setzen:

$$\rho^{-3} = (2l_1 l_2 l_3 l_4)^2\,.$$

Weil, aus (65) folgt sofort

$$|l_\nu \quad l_{\nu/1} \quad l_{\nu/2} \quad l_{rs}| = B^{\frac{1}{4}} g_{rs} = G^{\frac{1}{2}} g_{rs}\,.$$

Wegen der Beziehung (104) kann man die Invariante U durch andere Tensoren s_{rs}, g_{rs} und t_r darstellen.

18. *Der fundamentale Satz für S_2.* In dieser Weise haben wir vier Tensoren g_{rs}, a_{rst}, q_{rs}, s_{rs}, und einen Vektor t_r erhalten, die dem System S_2 zugehörig sind. Auch können wir jetzt den folgenden fundamentalen Satz für das Kegelschnittsystem S_2 in E_3 beweisen.

Die vier Tensoren g_{rs}, a_{rst}, q_{rs}, s_{rs} und ein Vektor t_r seien als stetige und hinreichend oft differenzierbare Funktionen von zwei Parametern u^r ($r=1,2$) gegeben, zwischen drei von denen die sogenannten Integrabilitätsbedingungen (98), (99) und auch die Beziehungen zwischen den Tensoren:

(105) $$g^{rs} a_{rst} = 0 ,$$

(106) $$g^{rs} q_{rs} = 0 ,$$

(107) $$(g_{11} g_{22} - g_{12}^2)^2 = \begin{vmatrix} a_{111} & a_{121} & a_{221} \\ a_{112} & a_{122} & a_{222} \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \end{vmatrix}$$

bestehend sind, dann wird ein Kegelschnittsystem S_2 im Raume E_3, dem die vorgegebenen Tensoren sowie der Vektor angehören, bis auf die projektive Transformation eindeutig bestimmt.

Beweis: Genau so, wie in Nr. 9, können wir zuerst beweisen, dass mindestens ein System S_2 sich ergibt, das als seine Tensoren und Vektor die vorgegebenen vier Tensoren und einen Vektor besitzt, da, wie aus Nr. 16 ersehen wurde, durch die drei Tensoren g_{rs}, a_{rst}, q_{rs}, zwischen denen die sogenannten Integrabilitätsbedingungen (98), (99) sowie (105)-(107) bestehen, eine Fläche bis auf die projektive Transformation eindeutig bestimmt wird, und auch da für die in solcher Weise erhaltene Fläche ein einziger Kegelschnitt auf jeder ihren Tangentenebene durch die vorgegebenen s_{rs} und t_r eingeführt werden kann. Es seien diejenigen zwei Systeme betrachtet, die dieselben Tensoren und Vektor haben, dann sollen die beiden begleitenden Flächen dieser Systeme durch eine geeignete projektive Transformation aufeinander zusammengesetzt werden, aus demselben Grund wie in der eben verwandten Beweisführung. Für die zusammengesetzten Flächen muss ein einziges Kegelschnittsystem durch dieselben s_{rs} und t_r bestimmt werden. Wir können damit schliessen, dass zwei Systeme durch eine projektive

Transformation aufeinander zusammengesetzt werden müssen, wenn sie dieselben Tensoren g_{rs}, a_{rst}, q_{rs}, s_{rs} und den Vektor t_r haben. Damit sehen wir die Richtigkeit der Behauptung unseres Satzes.

Von diesem Satze erkennen wir, in der Tat, dass diese vier Tensoren und ein Vektor die für ein System charakteristischen Grössen sind.

§ 4. VERSCHIEDENE KEGELSCHNITTSSCHAREN ANGEHÖREND EINEM SYSTEM S_2

19. *Die K-asymptotischen Kegelschnittsscharen.* Wir beschäftigen uns nun mit den verschiedenen Kegelschnittsscharen, angehörend einem System S_2, die durch irgendeine geometrische Eigenschaft sich kennzeichnen. Diese Scharen sind zu verschiedenen Kurven einer Fläche in der gewöhnlichen Flächentheorie, z. *B.* zu den asymptotischen Linien oder Krümmungslinien u.s.w. analog.

Zuerst wollen wir den Tensor s_{rs} untersuchen; die zwei Richtungen, welche durch die Werte von $du^1 : du^2$ der Gleichung

$$s_{rs}\, du^r\, du^s = 0 \tag{108}$$

bestimmt sind, heissen *die K-asymptotischen Richtungen.*

Wenn man (108) als die Differentialgleichung betrachtet, so definieren ihre zwei Lösungen $f\,(u^1, u^2)=c_1$ und $f\,(u^1, u^2)=c_2$, die zueinander unabhängig sind, zwei Systeme von Kegelschnittsscharen, welche im System S_2 vollständig enthalten sind. Jede solche Kegelschnittsschar nennen wir *eine K-asymptotische Kegelschnittsschar.* Es gibt immer zwei K-asymptotische Kegelschnittsscharen, welche jeden Kegelschnitt des Systems enthaltend sind.

Für die K-asymptotischen Kegelschnittscharen lautet die geometrische Interpretation folgendermassen:

Jeder Kegelschnitt der K-asymptotischen Kegelschnittsschar berührt stets die in derselben Ebene liegende Erzeugende der der Schar zuge-

hörigen abwickelbaren Fläche, die durch die jeden Kegelschnitt enthaltende Ebene umhüllt wird.

Weil,

$$\begin{aligned} s_{rs}\, du^r\, du^s &= A^{ij}\lambda_{i,\,r}\lambda_{j,\,s}\, du^r\, du^s \\ &= A^{ij}(\lambda_{i,\,r}\, du^r)(\lambda_{j,\,s}\, du^s) \\ &= 0 \end{aligned}$$

zeigt uns, dass die Gerade, welche Geradenkoordinaten auf der Ebene $\lambda_{i,r}\, du^r$ sind, den entsprechenden Kegelschnitt berührt.

Es ist klar, die Gerade $\lambda_{i,\,r}\, du^r$ durch den betreffenden Punkt y^ν auf der begleitenden Fläche F_2 des Systems S_2 hinzuführen. Die zwei K-asymptotischen Richtungen sind also diejenigen, längs der die Schnittgeraden der benachbarten Ebenen die zwei durch den Punkt y^ν Tangentengeraden des Kegelschnittes sind. Die beiden Geraden wollen wir *die K-asymptotischen Geraden* nennen.

20. *Die K-Windungskegelschnittsscharen.* Eine für ein festes Wertepaar von u^r durch die Gleichung

$$t_r\, du^r = 0 \tag{109}$$

bestimmte Richtung $du^1 : du^2$ ist auch für die projektive Transformation invariant, genau so wie die K-asymptotischen Richtungen, und diese Richtung wollen wir *die erste K-Windungsrichtung* am Punkte $y^\nu\,(u^r)$ nennen. Da

$$t_r\, du^r = A^{ij}\mu_i\lambda_{j,\,r}\, du^r\,,$$

ist die zu der ersten K-Windungsrichtung entsprechende Gerade, welche Geradenkoordinaten $\lambda_{j,\,r}\, du^r$ sind, bezugnehmend auf den Kegelschnitt mit der zweiten projektiven Normalengerade der begleitenden Fläche F_2 harmonisch konjugiert. Die Gerade heisst *die erste K-Windungsgerade* am Punkte y^ν. Die erste K-Windungsgerade wird rein geometrisch konstruiert, damit wir eine Gerade durch den Punkt y^ν mit der zweiten projektiven Normalengerade der Fläche $F_2 : \mu_i$ in bezug auf den Kegelschnitt des Systems harmonisch konjugiert ziehen.

Andererseits kommt ein System von Kegelschnittsscharen mit der Hilfe von Lösungen der Differentialgleichung (109) hervor. Jede in solcher Weise definierte Kegelschnittsschar, die wir jetzt *die erste K-Windungskegelschnittsschar* nennen wollen, hat eine solche geometrische Eigenschaft, *dass die Schnittgerade jeder zwei benachbarten Ebenen, die je einen Kegelschnitt der ersten K-Windungskegelschnittsschar enthaltet, d.h. jede Erzeugende der der Schar zugehörigen abwickelbaren Fläche mit der enstprechenden zweiten projektiven Normalengerade der begleitenden Fläche des Systems S_2 in bezug auf den Kegelschnitt der Schar harmonisch konjugiert ist.*

Zunächst betrachten wir eine durch den Punkt y^ν hindurchgehende Gerade auf der Ebene l_ν, die mit der ersten K-Windungsgerade in bezug auf die K-asymptotischen Geraden, folglich den Kegelschnitt des Systems S_2, harmonisch konjugiert ist. Diese Gerade heisst *die zweite K-Wingungsgerade* auf der Ebene l_ν. Die der zweiten K-Windungsgerade zugeordnete Richtung nennen wir also *die zweite K-Windungsrichtung*, welche durch die Lösung $du^1 : du^2$ der Gleichung

$$\hat{t}_r \, du^r = 0 \tag{110}$$

bestimmt ist, wobei der kovariante Vektor $\hat{t}_r$ aus der Gleichung

$$s_{11} t_2 \hat{t}_2 - s_{12}(t_1 \hat{t}_2 + t_2 \hat{t}_1) + s_{22} t_1 \hat{t}_1 = 0 \tag{111}$$

sich erklärt.

Unter *der zweiten K-Windungskegelschnittsschar* des Systems S_2 verstehen wir dann diejenige, die durch die Differentialgleichung (110) festgesetzt wird. Ihre geometrische Eigenschaft erklärt sich folgendermassen: *Schnittgerade jeder zwei benachbarten Ebenen, auf die je ein Kegelschnitt der zweiten Windungskegelschnittsschar liegt, d.h. jede Erzeugende der der Schar zugehörigen abwickelbaren Fläche ist* *die zweite K-Windungsgerade, die mit der ersten K-Windungsgerade in bezug auf den Kegelschnitt der Schar harmonisch konjugiert ist.*

21. *Die projektiven Invarianten.* Die in Nr. 17 gedachte Invariante U hat eine bemerkenswerte Eigenschaft und spielt eine wichtige Rolle in unserer Theorie, daher wollen wir jetzt ihr einen besonderen Namen, *die Hauptinvariante des Systems* S_2, geben.

Gemäss der Beziehung (104) soll die Hauptinvariante U

$$U = \frac{G}{S} + \frac{s_{11} t_2 t_2 - 2 s_{12} t_1 t_2 + s_{22} t_1 t_1}{S} \tag{112}$$

sein, wenn man mit S die Determinante des Tensors s_{rs} bezeichnet, d.h.

$$S = s_{11} s_{22} - s_{12}^2 \,. \tag{113}$$

Setzt man ferner bequemlichkeitshalber

$$\bar{t}^1 = t_2 \,, \qquad \bar{t}^2 = - t_1 \,, \tag{114}$$

dann wird (112) in folgender Weise umändert:

$$U = \frac{G}{S} + \frac{s_{rs} \bar{t}^r \bar{t}^s}{S} \,. \tag{115}$$

Nun wollen wir das erste Glied $\frac{G}{S}$ der rechten Seite von (115) überlegen. Wenn man g_{rs} bezw. s_{rs} als die erste bezw. zweite Fundamentalgrösse in der Flächentheorie im euklidischen Raume auffasst, so stellt $\frac{S}{G}$ die Totalkrümmung der Fläche dar. Auf diesem Grund nennen wir auch in unserer Theorie die absolute Invariante $\frac{S}{G}$ *die Totalkrümmung des Systems* S_2 und bezeichnen sie mit dem Symbole H:

$$H = \frac{S}{G} \,. \tag{116}$$

Analogerweise nennt man die absolute Invariante

$$(117)\qquad M=g^{rs}s_{rs}=\frac{g_{22}s_{11}-2g_{12}s_{12}+g_{11}s_{22}}{G}$$

die Mittelkrümmung des Systems S_2. Die geometrische Bedeutung von $M=0$ lautet folgendermassen:

Wenn die Mittelkrümmung eines Kegelschnittsystems S_2 *verschwindet, dann sind die beiden asymptotischen Richtungen der begleitenden Fläche* F_2 *des Systems und die beiden K-asymptotischen Richtungen des Systems voneinander harmonisch geteilt.*

Wir können eine noch exaktere geometrische Eigenschaft der Mittelkrümmung M finden, wenn man das Doppelverhältnis der zwei K-asymptotischen Richtungen des Systems in bezug auf die zwei asymptotischen Richtungen der begleitenden Fläche F_2 mit λ bezeichnet:

$$(118)\qquad \frac{M}{\sqrt{H}}=\frac{\lambda+1}{\lambda-1}.$$

Die andere Invariante in (115) wollen wir mit W^{-1} bezeichnen:

$$(119)\qquad \frac{1}{W}=\frac{s_{rs}\bar{t}^r\bar{t}^s}{S}$$

und W heisst *die Hauptwindung des Kegelschnittsystems* S_2, dann folgt aus (115)

$$(120)\qquad U=\frac{1}{H}+\frac{1}{W}.$$

Wenn die Hauptinvariante U Null ist, d. h., geometrisch ausgedrückt, wenn die zweite projektive Normalengerade der begleitenden Fläche F_2 des Systems S_2 den entsprechenden Kegelschnitt des Systems berührt, so ist die Totalkrümmung des Systems mit der Hauptwindung bis auf das Vorzeichen gleich:

$$H=-W. \tag{121}$$

22. *Andere Invarianten und ihre Beziehungen.* Wir setzen den Vektor $\hat{t}_r$, der in Nr. 20 bei der Definierung der zweiten Windungsrichtung eingeführt ist, unter Vergleich mit (111) folgendermassen fest, da er noch nicht genügend bestimmt war:

$$\left\{\begin{aligned} \hat{t}_1&=S^{-\frac{1}{2}}(s_{11}t_2-s_{12}t_1)=S^{-\frac{1}{2}}s_{1r}\bar{t}^r, \\ \hat{t}_2&=S^{-\frac{1}{2}}(s_{21}t_2-s_{22}t_1)=S^{-\frac{1}{2}}s_{2r}\bar{t}^r. \end{aligned}\right. \tag{122}$$

Setzen wir, so wie in (114), auch

$$\breve{t}^1=\hat{t}_2, \qquad \breve{t}^2=-\hat{t}_1, \tag{123}$$

dann wird die von dem Vektor $\hat{t}_r$ gebildete, mit (119) analoge Invariante durch einfache Berechnung

$$\begin{aligned} \frac{s_{11}\hat{t}_2\hat{t}_2-2s_{12}\hat{t}_1\hat{t}_2+s_{22}\hat{t}_1\hat{t}_1}{S}&=\frac{s_{rs}\breve{t}^r\breve{t}^s}{S} \\ &=\frac{s_{rs}\bar{t}^r\bar{t}^s}{S} \\ &=\frac{1}{W}. \end{aligned} \tag{124}$$

Wir erhalten noch eine andere absolute Invariante:

$$T=g^{rs}t_r t_s, \tag{125}$$

die *die erste Windung* des Systems S_2 heisst. Die analoge Invariante, die von $\hat{t}_r$ gebildet ist, heisst *die zweite Windung* des Systems S_2:

$$T'=g^{rs}\hat{t}_r\hat{t}_s, \tag{126}$$

aber für sie ergibt sich folgende Beziehung:

$$T' = \frac{M}{W} + T, \tag{127}$$

wie aus (122) folgt

$$g^{rs}\hat{t}_r\hat{t}_s = \frac{(g^{rs}s_{rp}s_{sq}\bar{t}^p\bar{t}^q)}{S}$$

$$= \frac{(g^{rs}s_{rs})(s_{pq}\bar{t}^p\bar{t}^q) + g^{rs}t_rt_sS}{S}.$$

23. *Spezielle Auswahl der Parameterscharen.* Nimmt man die beiden Systeme der K-asymptotischen Kegelschnittsscharen als Parameterscharen an, d.h. derartig, dass u^1=konst., sowie u^2=konst. beide die K-asymptotischen Kegelschnittscharen geben, so wird von (108) unmittelbar

$$s_{11} = s_{22} = 0 \tag{128}$$

und im allgemeinen

$$s_{12} \neq 0\ ^{(30)}. \tag{129}$$

Die Hauptinvariante nimmt dann folgende einfache Form an:

$$U = -\frac{G}{s_{12}^2} + \frac{2t_1t_2}{s_{12}}, \tag{130}$$

daraus folgt

$$H = -\frac{s_{12}^2}{G}, \qquad W = \frac{s_{12}}{2t_1t_2}, \qquad M = -\frac{2g_{12}s_{12}}{G}. \tag{131}$$

(30) Wenn s_{12} in diesem Falle Null ist, so fallen die beiden K-asymptotischen Geraden des Kegelschnittsystems S_2 zusammen und der Punkt y^ν der begleitenden Fläche F_2 legt sich auf dem Kegelschnitt des Systems S_2. Für die allgemeine Auswahl der Parameterscharen ist dann die Determinante S des Tensors s_{rs} verschwindend.

Ähnlich, wenn man die beiden Systeme der K-Windungskegelschnittsscharen als Parameterscharen annimmt, erhalten wir aus (109), (110) und (111) ohneweiters

$$(132)\qquad t_2=0\,,\qquad \hat{t}_1=0\,,\qquad s_{12}=0$$

und daraus erhält man wieder

$$(133)\qquad H=\frac{s_{11}s_{22}}{G}\,,\qquad W=\frac{t_1 t_1}{s_{11}}\,,$$

sowie

$$(134)\qquad T=\frac{g_{22}t_1 t_1}{G}\,,\qquad T'=\frac{g_{11}\hat{t}_2\hat{t}_2}{G}\,.$$

24. *Das Tripelverhältnis.* Es seien vier Punkte P_a ($a=1, 2, 3, 4$) auf einer Gerade, von denen jede zwei nicht übereinstimmen und jeder durch die homogenen Koordinaten $\lambda^1_{(a)}$, $\lambda^2_{(a)}$ bestimmt ist, und betrachtet man noch einen anderen Punkt auf derselben Gerade, welche homogene Koordinaten λ^1, λ^2 sind, so kann man den folgenden Ausdruck in bezug auf diese fünf Punkte herleiten, ohne für die projektiven Transformationen ihren Wert zu verändern:

$$(135)\qquad (P\,;\,P_1,\,P_2,\,P_3,\,P_4)\equiv\frac{\lambda^1_{(1)}\lambda^2-\lambda^2_{(1)}\lambda^1}{\lambda^1_{(3)}\lambda^2-\lambda^2_{(3)}\lambda^1}\cdot\frac{\lambda^1_{(2)}\lambda^2-\lambda^2_{(2)}\lambda^1}{\lambda^1_{(4)}\lambda^2-\lambda^2_{(4)}\lambda^1}\cdot\frac{\lambda^1_{(3)}\lambda^2_{(4)}-\lambda^2_{(3)}\lambda^1_{(4)}}{\lambda^1_{(1)}\lambda^2_{(2)}-\lambda^2_{(1)}\lambda^1_{(2)}}\,.$$

Weil, für die projektive Transformation

$$(136)\qquad \bar{\lambda}^r=\alpha^r_s\lambda^s$$

geht $\lambda^1_{(a)}\lambda^2_{(b)}-\lambda^2_{(a)}\lambda^1_{(b)}$ folgendermassen über:

$$(137)\qquad \bar{\lambda}^1_{(a)}\bar{\lambda}^2_{(b)}-\bar{\lambda}^2_{(a)}\bar{\lambda}^1_{(b)}=|\alpha^r_s|\,(\lambda^1_{(a)}\lambda^2_{(b)}-\lambda^2_{(a)}\lambda^1_{(b)})\,.$$

Den Wert von $(P\,;\,P_1,\,P_2,\,P_3,\,P_4)$ nennen wir *das Tripelverhältnis des Punktes P in bezug auf die vier Punkte P_a* ($a=1, 2, 3, 4$) auf einer

Gerade, welche geometrische Interpretation in dem metrischen Raume folgenderweise lautet: Wir nehmen einen festen Ursprungspunkt O auf derselben Gerade an und bezeichnen die gerichtete Entfernung von O bis P_a mit $\lambda_{(a)}$, so wird das Tripelverhältnis

$$(138) \qquad (P\,;\,P_1,\,P_2,\,P_3,\,P_4)=\frac{\lambda_{(1)}-\lambda}{\lambda_{(3)}-\lambda}\cdot\frac{\lambda_{(2)}-\lambda}{\lambda_{(4)}-\lambda}\cdot\frac{\lambda_{(3)}-\lambda_{(4)}}{\lambda_{(1)}-\lambda_{(2)}}\,,$$

da man

$$(139) \qquad \lambda_{(a)}=\lambda^1_{(a)}:\lambda^2_{(a)}$$

auffassen kann. Wenn der Punkt O dabei mit dem Punkte P zusammenfällt, dann nimmt das Tripelverhältnis eine noch einfachere Form an:

$$(140) \qquad (P\,;\,P_1,\,P_2,\,P_3,\,P_4)=\frac{\lambda_{(1)}\lambda_{(2)}(\lambda_{(3)}-\lambda_{(4)})}{\lambda_{(3)}\lambda_{(4)}(\lambda_{(1)}-\lambda_{(2)})}\,.$$

Das Tripelverhältnis $(P; P_1, P_2, P_3, P_4)$ hat den Wert Null, wenn der Punkt P entweder mit dem Punkte P_1 oder P_2 zusammenfällt, dagegen wird es unendlich zunehmen, wenn der Punkt P dem Punkte P_3 oder P_4 unendlich sich nähert.

Es sei P_1 und P_3 derselbe Punkt, so artet das Tripelverhältnis $(P: P_1, P_2, P_3, P_4)$ in das Doppelverhältnis aus, d.h.

$$(141) \qquad (P\,;\,P_1,\,P_2,\,P_1,\,P_4)=(P,\,P_1\,;\,P_2,\,P_4).$$

Ähnlich wir können ersehen:

$$(142) \qquad \begin{cases} (P\,;\,P_1,\,P_2,\,P_3,\,P_1)=-(P,\,P_1\,;\,P_2,\,P_3)\,, \\ (P\,;\,P_1,\,P_2,\,P_2,\,P_4)=-(P,\,P_2\,;\,P_1,\,P_4)\,, \\ (P\,;\,P_1,\,P_2,\,P_3,\,P_2)=(P,\,P_2\,;\,P_1,\,P_3)\,. \end{cases}$$

Definiert man die zwei Punkte P_1 und P_2 durch eine quadratische Gleichung

$$Q_{rs}\lambda^r\lambda^s=0\ ,$$

und ähnlich P_3 und P_4 durch

$$R_{rs}\lambda^r\lambda^s=0\ ,$$

dann wird das Tripelverhältnis in folgender Weise dargestellt, wie man aus der Berechnung sehr leicht erkennen kann:

$$(143)\qquad (P\,;\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4)=\frac{Q_{rs}\lambda^r\lambda^s}{R_{rs}\lambda^r\lambda^s}\,\frac{R_{11}R_{22}-R_{12}^2}{Q_{11}Q_{22}-Q_{12}^2}.$$

Das Tripelverhältnis einer Gerade in bezug auf vier Geraden, die alle durch einen festen Punkt hindurchgehen, kann man auch unmittelbar in analoger Weise definieren, damit man von einem beliebigen, aber nicht auf der Gerade L liegenden Punkte die Figur, die aus fünf Punkten auf der Gerade L besteht, projektiert, und damit man das Tripelverhältnis über die Punkte als dasselbe über diejenige Geraden definiert, die fünf durch obengenannte Frojektion erhaltenen, durch einen Punkt hindurchgehenden Geraden sind. Und wir erhalten einen analogen Ausdruck für das Tripelverhältnis über die Geraden.

25. *Die K-Hauptkrümmung einer Kegelschnittsschar des Systems S_2 und die K-Krümmungskegelschnittsscharen.* Für eine beliebige Kegelschnittsschar S' zugehörend einem Kegelschnittsystem S_2, die durch eine Gleichung in den Parametern $f(u^1, u^2)=0$ bestimmt werden soll, betrachten wir die begleitende abwickelbare Fläche, wobei die Erzeugenden in bezug auf das in §1 eingeführte Koordinatensystem auf der die Erzeugende enthaltenden Tangentenebene der Fläche die Koordinaten $\lambda_{i,r}\,du^r$ haben. Dabei sollen zwei Differentiale du^1 und du^2 den folgenden Gleichungen genügen:

$$(144)\qquad \frac{\partial f}{\partial u^1}du^1+\frac{\partial f}{\partial u^2}du^2=0\ .$$

Das Tripelverhältnis $\tau(du^r)$ dieser Erzeugenden in bezug auf die zwei K-asymptotischen Geraden des Systems S_2 und der Tangentengeraden der zwei asymptotischen Linien auf der begleitenden Fläche F_2 hat den Wert

$$\tau(du^r) = \frac{s_{rs}du^r du^s}{g_{rs}du^r du^s}\left(\frac{G}{S}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{145}$$

wie aus (143) leicht ersehen werden kann. $\tau(du^r)$ ist bekanntlich eine Funktion der Differentiale du^1 und du^2, und für einen festen Wert von $du^1 : du^2$ ist $\tau(du^r)$ eine Ortfunktion d.h. eine Funktion von u^r. Wir nennen

$$K_{S'} = \tau(du^r)\left(\frac{S}{G}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{146}$$

die *K-Hauptkrümmung der Kegelschnittsschar* S', wenn du^r aus (146) bestimmt sind. Nach Vergleich von (145) und (146) folgt für

$$K_{S'} = \frac{s_{rs}du^r du^s}{g_{rs}du^r du^s}. \tag{147}$$

Der extreme Wert K der K-Hauptkrümmung bei Änderung des Wertes $du^1 : du^2$ muss den beiden Beziehungen genügen :

$$(Kg_{rs} - s_{rs})du^r du^s = 0 \qquad s = 1, 2, \tag{148}$$

da für den extremen Wert K neben der Gleichung (147) in $du^1 : du^2$ noch jener gelten muss, den man aus (147) durch Ableitung nach $du^1 : du^2$ erhält. Daraus folgt für K die Gleichung

$$|Kg_{rs} - s_{rs}| = 0. \tag{149}$$

Somit ergeben sich für die zwei extremen Werte K_1 und K_2

$$\begin{cases} K_1 K_2 = H, \\ K_1 + K_2 = M. \end{cases} \tag{150}$$

Die Gleichung (148) ergibt, wenn man K herauswirft, für *die K-Krümmungsrichtungen* des Systems S_2, die den extremen Werten der K-Hauptkrümmungen entsprechen, in $du^1 : du^2$ die quadratische Gleichung

$$\begin{vmatrix} g_{r1}\, du^r & g_{r2}\, du^r \\ s_{s1}\, du^s & s_{s2}\, du^s \end{vmatrix} = 0 . \tag{151}$$

Eine Kegelschnittsschar des Systems S_2, für die die Erzeugende der begleitenden abwickelbaren Fläche die mit einer zugehörigen K-Krümmungsrichtung zusammenfallende Richtung hat, nennt man *die K-Krümmungskegelschnittsschar* des Systems S_2. Da die Gleichung (151) in $du^1 : du^2$ uns im allgemeinen zwei Lösungen gibt, so ergeben sich im allgemeinen zwei K-Krümmungskegelschnittsscharen, die beide einen Kegelschnitt des Systems S_2 enthalten.

Aus (151) können wir ferner den folgenden Satz ableiten:

Die zwei K-Krümmungsrichtungen eines zwei-parametrigen Kegelschnittsystems teilen die zwei K-asymptotischen Richtungen des Systems und die zwei asymptotischen Richtungen der begleitenden Fläche des Systems harmonisch.

Sapporo, Juli 1930.