KLASSENKÖRPERTHEORIE IM GROSSEN FÜR UNENDLICHE ALGEBRAISCHE ZAHLKÖRPER[1]

Von

Mikao MORIYA

INHALT

EINLEITUNG.

In einer vor kurzem erschienenen Arbeit von mir[2] musste ich eingestehen, dass ich damals keinen Anhalt hatte, die Klassenkörpertheorie im Grossen auf unendliche algebraische Zahlkörper als Grundkörper zu übertragen. Die Hauptschwierigkeit, die bei jener Übertragung mir aufstiess, lag darin, dass die Gesamtheit aller vom Nullideale verschiedenen Ideale aus dem Grundkörper allgemein keine multiplikative (abelsche) Gruppe bildet. Es ist aber wohl vermutlich, dass man doch durch Heranziehung der Ideale mit gewissen Eigenschaften ein Analogon zur Klassenkörpertheorie im Grossen entwickeln könnte. Es handelt sich dabei natürlich nur um diejenigen Ideale, welche in bezug auf die Idealmultiplikation Gruppe bilden, weil der Hauptzweck der Klassenkörpertheorie in der Charakterisierung der abelschen Oberkörper durch die Idealklassengruppen im Grundkörper liegt. Solche Ideale, welche hinsichtlich der Idealmultiplikation Gruppe bilden, sind schon einmal von Herrn KRULL[3] behandelt worden. Und zwar hat er folgende Frage gestellt: Welche Ideale in einem unendlichen algebraischen Zahlkörper k besitzen ihre Reziproken? Die Antwort auf diese Frage ist folgende:

(1) Eine vorläufige Mitteilung über diese Arbeit habe ich in Proc. Imp. Acad. Tôkyô, 1936 erscheinen lassen.
(2) MORIYA, Klassenkörpertheorie im Kleinen für die unendlichen algebraischen Zahlkörper, Journ. Fac. Science, Hokkaido, Vol. V (1936).
(3) KRULL, Idealtheorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern, II, Math. Zeitschr., Bd. 31 (1930).

Ein Ideal aus k besitzt dann und nur dann sein Reziprokes, wenn es endliche Basis hat, d.h. wenn es eine Erweiterung eines Ideals aus einem in k enthaltenen, endlichen algebraischen Zahlkörper ist. Diese Ideale mit endlicher Basis hat Herr KRULL die umkehrbaren Ideale genannt. Wie man sich dabei leicht überzeugt, bildet die Gesamtheit aller umkehrbaren Ideale aus k eine multiplikative abelsche Gruppe.

Wenn man nun nicht alle, sondern nur alle umkehrbaren Ideale in k heranzieht, so kann man dadurch tatsächlich ein Analogon zur Klassenkörpertheorie aufbauen, das ich in der vorliegenden Arbeit entwickeln will. Leider muss ich aber in dieser Theorie auf die Gültigkeit einiger bekannten Sätze aus der Klassenkörpertheorie—z.B. das Zerlegungs- und Reziprozitätsgesetz—verzichten, weil ich bloss einen Teil der Körperideale in Betracht ziehe.

Ich behandle im §1 die Idealmoduln in einem unendlichen algebraischen Zahlkörper k. Dabei führe ich wie üblich unendliche Primstellen ein, welche als Punkte eines metrischen Raumes betrachtet werden können. Hier werden einige einfache topologische Untersuchungen geleistet. Ich definiere im §2 den Strahl nach einem Idealmodul in k und danach wie üblich die nach diesem Idealmodul erklärten Idealgruppen, welche stets Untergruppen derjenigen Gruppe sind, die die Gesamtheit aller umkehrbaren Ideale aus k bildet. Im §3 betrachte ich einen endlichen Erweiterungskörper K über k. Ferner greife ich aus k einen Idealmodul $\mathfrak{m}$ heraus und fassen alle derjenigen Strahlklassen mod $\mathfrak{m}$, in die mindestens eine Norm eines zu $\mathfrak{m}$ primen, umkehrbaren Ideals aus K hineinfällt, in eine Idealgruppe $H^{(\mathfrak{m})}$ zusammen. Diese Idealgruppe $H^{(\mathfrak{m})}$ nenne ich die mod $\mathfrak{m}$ dem Körper K zugeordnete Idealgruppe in k. Die Idealgruppe $H^{(\mathfrak{m})}$ ist offenbar eine Untergruppe derjenigen Idealgruppe $A^{(\mathfrak{m})}$, welche alle zu $\mathfrak{m}$ primen umkehrbaren Ideale aus k bilden. Mit Hilfe des bekannten Abgrenzungssatzes der Klassenkörpertheorie schliesst man leicht, dass $[A^{(\mathfrak{m})}:H^{(\mathfrak{m})}]$ ein Teiler von $[K:k]=n$ ist. Hieraus folgt wie bekannt, dass es einen maximalen Index $h\,(\leqq n)$ gibt derart, dass alle Idealgruppen vom Index h, welche nach irgendwelchen Idealmoduln dem Körper K zugeordnet sind, einander gleich sind. Diese einander gleichen Idealgruppen nenne ich einfach die K zugeordnete Idealgruppe in k und bezeichne sie durch H. Der oben bestimmte maximale Index h heisse auch schlechthin der Index von H.

Im §3 behandle ich noch einen Spezialfall, wo K über k abelsch ist. Wenn der Grundkörper k von endlichem Grade ist, dann gilt bekanntlich der sogenannte Umkehrsatz, dass der Körpergrad $[K:k]$

dem Index der K zugeordneten Idealgruppe in k gleich ist. Durch diesen schönen Satz, der zum erstenmal von Herrn TAKAGI bewiesen worden ist, sind alle endlichen abelschen Körper über k den sogenannten Klassenkörpern untergeordnet, und dadurch ist eine klare Übersicht über den endlichen abelschen Körpern gegeben. Leider müssen wir in unserer Theorie auf die allgemeine Gültigkeit des Umkehrsatzes verzichten. Es tritt vielmehr der Fall auf, wo der Index von H echter Teiler von $[K:k]$ wird, obwohl K über k abelsch ist. Um den Sachverhalt noch klarer zu machen, führe ich den absoluten Grad von k ein, welcher als eine STEINITZsche G-Zahl dem Körper k eindeutig zugeordnet ist. Dieser absolute Grad von k besitzt den endlichen und unendlichen Bestandteil, deren letzteren ich vorläufig mit N^* bezeichnen will. Nun lautet das Hauptresultat im § 3 folgendermassen: *Der Index der K zugeordneten Idealgruppe in k ist gleich demjenigen maximalen Teiler von $[K:k]$, der zu N^* prim ist.* Offenbar fällt N^* immer aus, wenn k von endlichem Grade ist, d.h. es gilt also stets der Umkehrsatz. Mit Hilfe der Theorie im § 3 untersuche ich im § 4 noch näher allgemeine endliche Erweiterungskörper über k.

Im § 5 definiere ich Klassenkörper. Und zwar heisst ein endlicher Erweiterungskörper K vom Grade n über k ein Klassenkörper, wenn die K zugeordnete Idealgruppe in k den Index n besitzt. Damit ein endlicher Erweiterungskörper K über k ein Klassenkörper sei, ist notwendig und hinreichend, dass *K über k abelsch und $[K:k]$ zu N^* prim ist.* Dadurch ist erwiesen, dass die Klassenkörper nur einen Teil der abelschen Oberkörper bilden. Für die Klassenkörper kann ich wie üblich den Isomorphie-, Anordnungs-, Eindeutigkeits-, und Verschiebungssatz beweisen. Zum Existenzsatz betrachte ich eine spezielle Klasse der Idealgruppen in k, welche ich die K-Gruppen nenne. Dann gilt folgender Existenzsatz: *Zu einer K-Gruppe von endlichem Index in k existiert stets ein Klassenkörper.*

Zum Schluss möcht ich noch darauf aufmerksam machen, dass in der vorliegenden Arbeit die Klassenkörpertheorie im Grossen als bekannt vorausgesetzt ist. Für die Literatur der Klassenkörpertheorie im Grossen weise ich auf die Arbeiten der Herren CHEVALLEY(1), HASSE(2) und TAKAGI(3) hin.

(1) CHEVALLEY, Sur la théorie du corps de classes dans les corps finis et les corps locaux, Journ. Fac. Science, Tôkyô, Vol. II (1933).

(2) HASSE, Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper, Teil I, Ia, II, Jahresbericht d. D.M.V., (1930); Klassenkörpertheorie, Ausarbeitung einer Vorlesung vom Sommersemester 1932, Marburg.

(3) TAKAGI, Über eine Theorie des relativ-Abelschen Zahlkörpers, Journ. Coll. Science, Tôkyô, 41 (9) (1920).

§ 1. Idealmoduln in einem unendlichen algebraischen Zahlkörper.

Es sei k ein unendlicher algebraischer Zahlkörper. Dann kann man immer eine Kette von endlichen algebraischen Zahlkörpern $k_0 < k_1 < \dots < k_i < \dots$ finden, derart dass k als der Vereinigungskörper aller obigen Körper definiert ist, wobei k_0 den rationalen Zahlkörper bezeichnet. Im folgenden nenne ich k_i kurz einen Approximationskörper von k.

Betrachtet man nun die absoluten Beträge aller Zahlen aus k_0, so ist durch sie eine archimedische Bewertung φ_0 von k_0 bestimmt. Diese archimedische Bewertung φ_0 von k_0 besitzt bekanntlich ihre Fortsetzungen in k. Es sei φ eine Fortsetzung von φ_0 in k, d.h. φ eine Bewertung von k, welche im Körper k_0 die Bewertung φ_0 induziert. Dann ist φ eine archimedische Bewertung von k, und φ induziert in jedem Approximationskörper k_i von k eine einzige archimedische Bewertung φ_i von k_i, welche auch eine Fortsetzung von φ_0 ist. Bezeichnet man nun für einen Approximationskörper k_j die durch φ in k_j induzierte Bewertung mit φ_j, so induziert φ_j offenbar im Körper k_i die Bewertung φ_i, wenn $k_j > k_i$ ist. Damit ist gezeigt, dass durch φ eine Bewertungskette $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_i, \dots$ bestimmt ist, wo jedes φ_i eine Fortsetzung von φ_{i-1} ist ($i \geqq 1$).

Es sei umgekehrt eine Bewertungskette $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_i, \dots$ gegeben, wobei φ_i eine archimedische Bewertung von k_i und eine Fortsetzung von φ_{i-1} ist ($i \geqq 1$). Wir bezeichnen der Kürze wegen diese Kette durch φ und setzen für eine Zahl α aus k

$$\varphi(\alpha) = \varphi_i(\alpha) ,$$

falls α einem Approximationskörper k_i angehört. Ist nun k_I der erste Approximationskörper von k, derart dass α zu k_I, aber nicht zu k_{I-1} gehört, so bestätigt man leicht, dass $\varphi_I(\alpha) = \varphi_{I+1}(\alpha) = \dots = \varphi_i(\alpha) = \dots$ ist, weil für jedes $i \geqq I$ φ_i eine Fortsetzung von φ_I ist. Nach dem oben Bewiesenen ist $\varphi(\alpha)$ durch die obige Bewertungskette eindeutig bestimmt. Ferner kann man ohne Schwierigkeit verifizieren, dass φ den Postulaten der archimedischen Bewertung genügt. Auf obige Weise ist also durch die oben angegebene Bewertungskette stets eine Bewertung φ von k, welche eine Fortsetzung von φ_0 ist, bestimmt.

Ist nun φ_i eine archimedische Bewertung von k_i, welche eine Fortsetzung von φ_0 ist, so kann man bekanntlich im Körper k_{i+1} eine Fortsetzung φ_{i+1} von φ_i finden. Da aber φ_i in den Körpern k_1,

$k_2, \ldots, k_{i-1}$ resp. die Bewertungen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{i-1}$ induziert, so existiert sicher eine Bewertungskette $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_i, \varphi_{i+1}, \ldots$, in der jedes φ_i eine Fortsetzung von φ_{i-1} ist ($i \geqq 1$). Also ist durch diese Bewertungskette eine archimedische Bewertung von k bestimmt, welche im Körper k_i gerade die ursprüngliche Bewertung φ_i induziert. Damit ist gezeigt, dass es unter den sämtlichen archimedischen Bewertungen von k, welche Fortsetzungen von φ_0 sind, mindestens eine gibt, die in einem Approximationskörper eine beliebige archimedische Bewertung induziert, welche eine Fortsetzung von φ_0 ist.

Nun wollen wir einer archimedischen Bewertung φ von k, welche eine Fortsetzung von φ_0 ist, eine unendliche Primstelle $\mathfrak{p}_\infty$ zuordnen(1). Zwei unendliche Primstellen $\mathfrak{p}_\infty^{(1)}$, $\mathfrak{p}_\infty^{(2)}$ in k heissen gleich, wenn die $\mathfrak{p}_\infty^{(1)}$, $\mathfrak{p}_\infty^{(2)}$ entsprechenden Bewertungen $\varphi^{(1)}$, $\varphi^{(2)}$ äquivalent sind; sonst heissen sie voneinander verschieden. Da jede Bewertung φ von k in einem Approximationskörper k_i von k eine einzige Bewertung φ_i induziert, so kann man dem φ_i wie üblich eine unendliche Primstelle $\mathfrak{p}_{i\infty}$ in k_i zuordnen. Also bestimmt eine unendliche Primstelle $\mathfrak{p}_\infty$ in k wie oben eine einzige unendliche Primstelle $\mathfrak{p}_{i\infty}$ in k_i. Die unendliche Primstelle $\mathfrak{p}_{i\infty}$ heisst die durch $\mathfrak{p}_\infty$ bestimmte unendliche Primstelle in k_i.

Wenn also eine archimedische Bewertung φ von k durch eine Bewertungskette $\varphi_0, \ldots, \varphi_i, \ldots$ definiert ist, so bestimmt diese Kette in den Körpern $k_0, \ldots, k_i, \ldots$ resp. die unendlichen Primstellen $\mathfrak{p}_{0\infty}, \ldots, \mathfrak{p}_{i\infty}, \ldots$ Offenbar sind die obigen unendlichen Primstellen alle durch die unendliche Primstelle $\mathfrak{p}_\infty$ bestimmt, welche der archimedischen Bewertung φ entspricht. Ferner bestimmt $\mathfrak{p}_{j\infty}$ für $j > i$ die unendliche Primstelle $\mathfrak{p}_{i\infty}$. Ist umgekehrt eine Kette der unendlichen Primstellen $\mathfrak{p}_{1\infty}, \ldots, \mathfrak{p}_{i\infty}, \ldots$ gegeben, derart dass jedes $\mathfrak{p}_{i\infty}$ die unendlichen Primstellen $\mathfrak{p}_{i-1\infty}, \ldots, \mathfrak{p}_{1\infty}$ bestimmt, so definiert diese Kette offenbar eine unendliche Primstelle $\mathfrak{p}_\infty$ in k, welche in k_i die unendliche Primstelle $\mathfrak{p}_{i\infty}$ bestimmt.

Es seien $\mathfrak{p}_\infty^{(1)}$, $\mathfrak{p}_\infty^{(2)}$ unendliche Primstellen in k und $\mathfrak{p}_{i\infty}^{(1)}$, $\mathfrak{p}_{i\infty}^{(2)}$ resp. die durch $\mathfrak{p}_\infty^{(1)}$, $\mathfrak{p}_\infty^{(2)}$ bestimmten unendlichen Primstellen in k_i. Ist

(1) Zu einer archimedischen Bewertung φ von k, welche eine Fortsetzung von φ_0 ist, existiert stets ein zu k äquivalenter (über k_0) Körper k' derart, dass durch den Isomorphismus von k zu k' jedem Element a aus k ein Element a' aus k' mit $\varphi(a) = |a'|$ entspricht (Siehe CHEVALLY, loc. cit.).

Also entsprechen einer archimedischen Bewertung φ entweder ein (zu k äquivalenter) reeller Körper k' oder zwei einander konjugiert-komplexe Körper k^*, $\bar{k}^*$. Ist $\mathfrak{p}_\infty$ die φ entsprechende unendliche Primstelle in k, so kann man durch $\mathfrak{p}_\infty$ entweder einen Isomorphismus I' oder zwei verschiedene Isomorphismen I^*, $\bar{I}^*$ derart bestimen, dass aus k durch Anwendung von I', I^* und $\bar{I}^*$ resp. die Körper k', k^*, $\bar{k}^*$ entstehen.

dann $\mathfrak{p}_{i\infty}^{(1)} = \mathfrak{p}_{i\infty}^{(2)}$, aber $\mathfrak{p}_{i+1\infty}^{(1)} \neq \mathfrak{p}_{i+1\infty}^{(2)}$, so sagt man, dass die *Entfernung* von $\mathfrak{p}_\infty^{(1)}$ und $\mathfrak{p}_\infty^{(2)}$ gleich $\frac{1}{i+1}$ ist: im Zeichen dis $(\mathfrak{p}_\infty^{(1)}, \mathfrak{p}_\infty^{(2)}) = \frac{1}{i+1}$. Wenn aber $\mathfrak{p}_\infty^{(1)} = \mathfrak{p}_\infty^{(2)}$ ist, dann setzen wir dis $(\mathfrak{p}_\infty^{(1)}, \mathfrak{p}_\infty^{(2)}) = 0$. Aus Definition folgen sofort

$$(1) \quad \mathrm{dis}\,(\mathfrak{p}_\infty^{(1)}, \mathfrak{p}_\infty^{(2)}) = 0 \qquad \text{für} \quad \mathfrak{p}_\infty^{(1)} = \mathfrak{p}_\infty^{(2)},$$

und

$$(2) \quad \mathrm{dis}\,(\mathfrak{p}_\infty^{(1)}, \mathfrak{p}_\infty^{(2)}) = \mathrm{dis}\,(\mathfrak{p}_\infty^{(2)}, \mathfrak{p}_\infty^{(1)}) \geqq 0 \qquad \text{für} \quad \mathfrak{p}_\infty^{(1)} \neq \mathfrak{p}_\infty^{(2)}.$$

Ferner gilt für drei unendliche Primstellen $\mathfrak{p}_\infty^{(1)}, \mathfrak{p}_\infty^{(2)}, \mathfrak{p}_\infty^{(3)}$

$$(3) \quad \mathrm{dis}\,(\mathfrak{p}_\infty^{(1)}, \mathfrak{p}_\infty^{(2)}) + \mathrm{dis}\,(\mathfrak{p}_\infty^{(2)}, \mathfrak{p}_\infty^{(3)}) \geqq \mathrm{dis}\,(\mathfrak{p}_\infty^{(1)}, \mathfrak{p}_\infty^{(3)}).$$

Damit ist gezeigt, dass die Entfernungsaxiome erfüllt sind.

Eine Folge von unendlichen Primstellen in k $\mathfrak{p}_\infty^{(1)}, \ldots, \mathfrak{p}_\infty^{(n)}, \ldots$ heisst *konvergent*, wenn es eine unendliche Primstelle $\mathfrak{p}_\infty$ in k gibt, derart dass für eine beliebige postive Zahl ε dis $(\mathfrak{p}_\infty, \mathfrak{p}_\infty^{(n)}) < \varepsilon$ wird, falls n grösser ist als eine positive (von ε abhängige) Zahl. Dabei nennt man $\mathfrak{p}_\infty$ die Grenzprimstelle der obigen konvergenten Folge. Wie üblich beweist man leicht, dass eine konvergente Folge nur eine einzige Grenzprimstelle besitzt.

Es sei $\mathfrak{p}_\infty^{(1)}, \ldots, \mathfrak{p}_\infty^{(n)}, \ldots$ eine Folge der unendlichen Primstellen und ε eine beliebige positive Zahl. Existiert dann eine positive Zahl N, so dass für alle Indizes $n, m > N$ dis $(\mathfrak{p}_\infty^{(n)}, \mathfrak{p}_\infty^{(m)}) < \varepsilon$ sind, so heisse die obige Folge eine *Fundamentalfolge*.

Ist nun eine Fundamentalfolge $\mathfrak{p}_\infty^{(1)}, \ldots, \mathfrak{p}_\infty^{(n)}, \ldots$ gegeben, so bestimmen von einem passenden Index n_i ab alle unendlichen Primstellen $\mathfrak{p}_\infty^{(n_i)}, \ldots$ in einem Approximationskörper k_i ein und diesselbe unendliche Primstelle $\mathfrak{p}_{i\infty}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Für $j > i$ bestimmt $\mathfrak{p}_{j\infty}$ sicher $\mathfrak{p}_{i\infty}$. Somit definiert die Kette $\mathfrak{p}_{1\infty}, \ldots, \mathfrak{p}_{i\infty}, \ldots$ eine einzige unendliche Primstelle $\mathfrak{p}_\infty$ in k. Wie man sich leicht überzeugt, konvergiert dann die obige Fundamentalfolge zu $\mathfrak{p}_\infty$. Also besitzt jede Fundamentalfolge der unendlichen Primstellen in k stets ihre Grenzprimstelle in k, d.h. die Gesamtheit aller unendlichen Primstellen in k bildet einen vollständigen Raum.

Wir betrachten nun ein ganzes Ideal $\mathfrak{m}_0$ aus k und eine Menge von unendlichen Primstellen $\mathfrak{p}_\infty^{(1)}, \ldots, \mathfrak{p}_\infty^{(n)}, \ldots$ in k[1], und bilden ein Symbol

(1) Im folgenden gebrauche ich oft der Einfacheit halber diese Bezeichnungsweise. Dabei ist die aus $\mathfrak{p}_\infty^{(1)}, \ldots, \mathfrak{p}_\infty^{(n)}, \ldots$ bestehende Menge nicht notwendig abzählbar.

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0 \mathfrak{p}_\infty^{(1)} \ldots \mathfrak{p}_\infty^{(n)} \ldots,$$

wobei je zwei von $\mathfrak{p}_\infty^{(1)}, \ldots, \mathfrak{p}_\infty^{(n)}, \ldots$ voneinander verschieden sind. Das oben definierte Symbol wollen wir im folgenden einen *Idealmodul* in k und $\mathfrak{m}_0$ bzw. $\mathfrak{p}_\infty^{(1)} \ldots \mathfrak{p}_\infty^{(n)} \ldots$ den endlichen bzw. unendlichen Bestandteil von $\mathfrak{m}$ nennen. Unter dem Durchschnitt von $\mathfrak{m}$ mit einem Approximationskörper k_i von k verstehen wir denjenigen Idealmodul in k_i, welcher aus dem Ideal $\mathfrak{m}_0 \wedge k_i = \mathfrak{m}_{i0}$ aus k_i und den sämtlichen (verschiedenen) durch $\mathfrak{p}_\infty^{(1)}, \ldots, \mathfrak{p}_\infty^{(n)}, \ldots$ bestimmten unendlichen Primstellen in k_i zusammengesetzt ist. Den Durchschnitt von $\mathfrak{m}$ mit k_i bezeichne ich mit $\mathfrak{m} \wedge k_i$.

Ist $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{m}_{i0} \mathfrak{p}_{i\infty}^{(1)} \ldots \mathfrak{p}_{i\infty}^{(r)}$ ein Idealmodul mit $\mathfrak{m}_{i0}$ bzw. $\mathfrak{p}_{i\infty}^{(1)} \ldots \mathfrak{p}_{i\infty}^{(r)}$ als dem endlichen bzw. unendlichen Bestandteil, so existiert sicher in k ein Idealmodul $\mathfrak{m}$, dessen endlicher Bestandteil das Erweiterungsideal von $\mathfrak{m}_{i0}$ in k ist und dessen unendlicher Bestandteil aus allen derjenigen unendlichen Primstellen in k besteht, welche in k_i irgendeines von $\mathfrak{p}_{i\infty}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{p}_{i\infty}^{(r)}$ bestimmen. Den oben bestimmten Idealmodul $\mathfrak{m}$ nenne ich den *Erweiterungsidealmodul* von $\mathfrak{m}_i$ in k. Wie man leicht bestätigt, ist der Durchschnitt von $\mathfrak{m}$ mit k_i gerade der Idealmodul $\mathfrak{m}_i$ in k_i.

Es sei eine Kette von Idealmoduln

$$\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{m}_j, \ldots$$

gegeben, wobei $\mathfrak{m}_j$ ein Idealmodul im Körper k_j und ferner für $l > j$ $\mathfrak{m}_l \wedge k_j = \mathfrak{m}_j$ ist $(l, j = i, i+1, \ldots)$. Bezeichnet man nun mit $\mathfrak{m}_{j0}$ den endlichen Bestandteil von $\mathfrak{m}_j (j = i, i+1, \ldots)$, so bestimmt eine Kette der Ideale

$$\mathfrak{m}_{i0}, \mathfrak{m}_{i+10} \ldots, \mathfrak{m}_{j0} \ldots$$

das Vereinigungsideal $\mathfrak{m}_0$ in k. Ist $\mathfrak{p}_{i\infty}$ eine unendliche Primstelle in $\mathfrak{m}_i$, so gibt es in $\mathfrak{m}_{i+1}$ mindestens eine unendliche Primstelle $\mathfrak{p}_{i+1\infty}$, welche eine Fortsetzung von $\mathfrak{p}_{i\infty}$ ist. Allgemein kann man in $\mathfrak{m}_j$ eine unendliche Primstelle $\mathfrak{p}_{j\infty}$ finden, welche eine Fortsetzung von $\mathfrak{p}_{i\infty}$, $\mathfrak{p}_{i+1\infty}, \ldots, \mathfrak{p}_{j-1\infty}$ ist. Von einer beliebigen unendlichen Primstelle $\mathfrak{p}_{i\infty}$ ausgehend, kann man wie oben stets eine Kette der unendlichen Primstellen

$$\mathfrak{p}_{i\infty}, \mathfrak{p}_{i+1\infty}, \ldots, \mathfrak{p}_{j\infty}, \ldots$$

bestimmen. Diese Kette der unendlichen Primstellen definiert offenbar in k eine unendliche Primstelle $\mathfrak{p}_\infty$, welche in k_j die unendliche Primstelle $\mathfrak{p}_{j\infty}$ bestimmt ($j = i, \ldots$). Auf obige Weise kann man aus den sämtlichen unendlichen Primstellen in $\mathfrak{m}_i$ alle möglichen unendlichen Primstellen $\mathfrak{p}_\infty^{(1)}, \ldots, \mathfrak{p}_\infty^{(n)}, \ldots$ in k bilden, deren jede eine Fortsetzung irgendeiner unendlichen Primstelle in $\mathfrak{m}_i$ ist. Den Idealmodul $\mathfrak{m}_0 \mathfrak{p}_\infty^{(1)} \ldots \mathfrak{p}_\infty^{(n)} \ldots$ nenne ich den *Vereinigungsidealmodul* von $\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{m}_j, \ldots$ und bezeichne ihn durch $\lim\limits_{j\to\infty} \mathfrak{m}_j$. Offenbar ist der Durchschnitt von $\lim\limits_{j\to\infty} \mathfrak{m}_j$ mit k_j der Idealmodul $\mathfrak{m}_j$ in k_j.

Ein Idealmodul, dessen unendlicher Bestandteil eine abgeschlossene Punktmenge ist, heisst ein *abgeschlossener Idealmodul.* Man kann aus einem Idealmodul $\mathfrak{m}$ immer den durch $\mathfrak{m}$ eindeutig bestimmten, abgeschlossenen Idealmodul $\overline{\mathfrak{m}}$ bilden, indem man die abgeschlossene Hülle des unendlichen Bestandteiles von $\mathfrak{m}$ bildet. Dabei nennt man $\overline{\mathfrak{m}}$ die *abgeschlossene Hülle* von $\mathfrak{m}$.

Sind nun zwei Idealmoduln $\mathfrak{m}^{(1)}, \mathfrak{m}^{(2)}$ in k gegeben, so heissen $\mathfrak{m}^{(1)}$ und $\mathfrak{m}^{(2)}$ einander gleich, wenn die beiden Idealmoduln die gleichen endlichen bzw. unendlichen Bestandteile besitzen. Unter dem Produkt aus den Idealmoduln $\mathfrak{m}^{(1)}, \mathfrak{m}^{(2)}$ versteht man denjenigen Idealmodul, welcher aus dem Produkt vom endlichen Bestandteile von $\mathfrak{m}^{(1)}$ mit dem von $\mathfrak{m}^{(2)}$ und aus den sämtlichen unendlichen Primstellen, welche wenigtens einmal in $\mathfrak{m}^{(1)}$ oder $\mathfrak{m}^{(2)}$ aufgehen, zusammengesetzt ist. Ein Idealmodul $\mathfrak{m}^{(1)}$ heisst durch $\mathfrak{m}^{(2)}$ teilbar, wenn der endliche Bestandteil von $\mathfrak{m}^{(1)}$ durch den von $\mathfrak{m}^{(2)}$ teilbar ist und der unendliche Bestandteil von $\mathfrak{m}^{(1)}$ als eine Punktmenge den unendlichen Bestandteil von $\mathfrak{m}^{(2)}$ enthält: $\mathfrak{m}^{(2)} \mid \mathfrak{m}^{(1)}$. Wenn die Teilbarkeit der Idealmoduln wie oben definert ist, dann folgt die Definition der grössten gemeinsamen Teiler der Idealmoduln wie üblich.

Am Ende dieses Paragraphen will ich den Kongruenzbegriff nach einem Idealmodul einführen. Eine Zahl α aus k heisst nach einer unendlichen Primstelle $\mathfrak{p}_\infty$ *kongruent* 1, wenn bei Anwendung des $\mathfrak{p}_\infty$ entsprechenden Isomorphismus I auf α die entstandene Zahl α^I positiv ist[1], soweit k reeller Körper ist. Im Falle, wo k imaginär ist, heisse α stets kongruent 1 mod $\mathfrak{p}_\infty$. Wir gebrauchen wie gewöhnlich die Bezeichnung

$$\alpha \equiv 1 \quad \mod \mathfrak{p}_\infty .$$

Ist $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0 \mathfrak{p}_\infty^{(1)} \mathfrak{p}_\infty^{(2)} \ldots \mathfrak{p}_\infty^{(n)} \ldots$ ein Idealmodul mit dem endlichen Bestandteile $\mathfrak{m}_0$ und dem unendlichen Bestandteile $\mathfrak{p}_\infty^{(1)} \mathfrak{p}_\infty^{(2)} \ldots . \mathfrak{p}_\infty^{(n)} \ldots .$, so heissen zwei Zahlen α, β aus k mod $\mathfrak{m}$ *kongruent,* wenn

(1) Siehe Anm. (1) auf S. 67.

1. $$\frac{\alpha}{\beta} \equiv 1 \mod \mathfrak{m}_0 ,$$

2. $$\frac{\alpha}{\beta} \equiv 1 \mod \mathfrak{p}_\infty^{(n)} \quad (n = 1, \ldots .)$$

sind. Offenbar gelten dabei in einem α, β enthaltenden Approximationskörper k_i

$$\frac{\alpha}{\beta} \equiv 1 \mod \mathfrak{m}_0 \wedge k_i ,$$

$$\frac{\alpha}{\beta} \equiv 1 \mod \mathfrak{p}_{i\infty}^{(n)} \quad (n = 1 , \ldots .) ,$$

wobei $\mathfrak{p}_{i\infty}^{(n)}$ die durch $\mathfrak{p}_\infty^{(n)}$ in k_i bestimmte unendliche Primstelle bezeichnet.

Gelten aber umgekehrt folgende Kongruenzen

$$\frac{\alpha}{\beta} \equiv 1 \mod \mathfrak{m}_0 \wedge k_i ,$$

$$\frac{\alpha}{\beta} \equiv 1 \mod \mathfrak{p}_{i\infty}^{(n)} \quad (n = 1 , \ldots .)$$

für die Zahlen α, β aus k_i, so ist sicher

$$\alpha \equiv \beta \mod \mathfrak{m} .$$

§ 2. Idealgruppen in einem unendlichen algebraischen Zahlkörper.

Wir legen in diesem Paragraphen wieder den im § 1 angegebenen unendlichen algebraischen Zahlkörper k zugrunde. Die Hauptordnung $\mathfrak{o}$ von k ist offenbar die Vereinigungsmenge der Hauptordnungen $\mathfrak{o}_i$ der Approximationskörper k_i von $k (i = 1, \ldots, n, \ldots)$. Wir betrachten in k ein Ideal, welches durch endlich viele Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ erzeugt' ist, und nennen solches Ideal $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ Ideal mit endlicher Basis. Die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2. \ldots, \alpha_r$ gehören einem passenden Approximationskörper k_i an, wenn der Index i hinreichend gross gewählt ist. Dann ist $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \wedge k_i = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)_{k_i}$ ein Ideal aus k_i. Umgekehrt entsteht aber aus einem Ideal $(\beta_1, \ldots, \beta_s)_{k_i}$ in k_i ein Erweiterungsideal $(\beta_1, \ldots, \beta_s)_{k_i} \cdot \mathfrak{o} = (\beta_1. \ldots, \beta_s)$ mit endlicher Basis. Wie Herr

KRULL[1] schon gezeigt hat, bildet die Gesamtheit A aller Ideale[2] mit endlicher Basis aus k eine multiplikative abelsche Gruppe hinsichtlich der Idealmultiplikation. Offenbar enthält A alle Hauptideale aus k, welche ihrerseits eine Untergruppe von A bilden.

Wir greifen nun aus k einen beliebigen Idealmodul $\mathfrak{m}$ heraus. Dann existieren zu $\mathfrak{m}$ die Zahlen α aus k, welche folgender Kongruenz genügen:

$$\alpha \equiv 1 \mod \mathfrak{m}.$$

Die Gesamtheit der Hauptideale aus k, welche von den obigen α erzeugt sind, heisst der *Strahl* mod $\mathfrak{m}$ und ist durch $\mathfrak{S}^{(\mathfrak{m})}$ bezeichnet[3]. Bedeutet nun $A^{(\mathfrak{m})}$ die Gesamtheit aller zu $\mathfrak{m}$ primen Ideale[4] mit endlicher Basis in k, so ist $A^{(\mathfrak{m})}$ eine $\mathfrak{S}^{(\mathfrak{m})}$ enthaltende Untergruppe von A. Im folgenden verstehen wir unter *einer mod* $\mathfrak{m}$ *erklärten Idealgruppe* immer eine $\mathfrak{S}^{(\mathfrak{m})}$ enthaltende Untergruppe von $A^{(\mathfrak{m})}$.

Ist nun eine mod $\mathfrak{m}$ erklärte Idealgruppe $H^{(\mathfrak{m})}$ in k gegeben, so bezeichnen wir mit $H_i^{(\mathfrak{m})}$ die Gesamtheit aller derjenigen Ideale in k_i, deren Erweiterungen in k zu $H^{(\mathfrak{m})}$ gehören. Ferner bezeichnen wir den Durchschnitt von $\mathfrak{m}$ mit k_i durch $\mathfrak{m}_i$ und den endlichen bzw. unendlichen Bestandteil von $\mathfrak{m}_i$ durch $\mathfrak{m}_{i0}$ bzw. $\mathfrak{p}_{i\infty}^{(1)} \mathfrak{p}_{i\infty}^{(2)} \dots \mathfrak{p}_{i\infty}^{(r)}$. Dann zeige ich zuerst, dass $H_i^{(\mathfrak{m})}$ den Strahl $\mathfrak{S}_i^{(\mathfrak{m}_i)}$ aus k_i enthält. Denn wie im § 1 gezeigt, müssen die Hauptideale (α) aus k_i, welche der Kongruenz

$$\alpha \equiv 1 \mod \mathfrak{m}_i$$

genügen, immer zu $\mathfrak{S}^{(\mathfrak{m})}$ gehören, d.h. $\mathfrak{S}_i^{(\mathfrak{m}_i)}$ ist in $H_i^{(\mathfrak{m})}$ enthalten.

Ist nun $\mathfrak{p}$ ein beliebiger Primteiler des endlichen Bestandteiles $\mathfrak{m}_0$ von $\mathfrak{m}$, so ist $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p} \wedge k_i$ ein Primideal aus k_i und es ist offenbar

$$\mathfrak{p}_i \mid \mathfrak{m}_{i0}.$$

Bekanntlich besitzt $\mathfrak{m}_{i0}$ als Ideal aus k_i nur endlich viele verschiedene Primteiler. Es seien also $\mathfrak{p}_i^{(1)}, \dots, \mathfrak{p}_i^{(r)}$ diejenigen sämtlichen verschiedenen Primteiler von $\mathfrak{m}_{i0}$, die durch irgendeinen Primteiler von

(1) Vgl. Anm. (2) auf S. 63.
(2) In dieser Arbeit verstehen wir unter einem Ideal immer ein vom Nullideale verschiedenes Ideal.
(3) $\mathfrak{S}^{(\mathfrak{m})}$ ist eine Untergruppe von A.
(4) Ein Ideal aus k heisst prim zu einem Idealmodul $\mathfrak{m}$, wenn es zum endlichen Bestandteile von $\mathfrak{m}$ prim ist.

$\mathfrak{m}_0$ teilbar sind. Bezeichnet man dann mit $(\mathfrak{p}_i^{(t)})^{e_t} = \mathfrak{q}_i^{(t)}$ die Beiträge von $\mathfrak{p}_i^{(t)}$ in $\mathfrak{m}_{i0}$ $(t = 1, \ldots, r)$, so muss offenbar der Durchschnitt einer beliebigen Primärkomponente von $\mathfrak{m}_0$ mit k_i in irgendeinem von $\mathfrak{q}_i^{(1)}, \ldots, \mathfrak{q}_i^{(r)}$ aufgehen. Es ist also $(\mathfrak{q}_i^{(1)} \ldots \mathfrak{q}_i^{(r)}) = \mathfrak{q}_i^{(1)} \wedge \mathfrak{q}_i^{(2)} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{q}_i^{(r)} \leqq \mathfrak{m}_0$ und infolgedessen

$$\mathfrak{q}_i^{(1)} \ldots . \mathfrak{q}_i^{(r)} \leqq \mathfrak{m}_0 \wedge k_i = \mathfrak{m}_{i0} .$$

Da aber anderseits

$$\mathfrak{q}_i^{(1)} \ldots . \mathfrak{q}_i^{(r)} \geqq \mathfrak{m}_{i0}$$

ist, so muss unbedingt

$$\mathfrak{q}_i^{(1)} \ldots . \mathfrak{q}_i^{(r)} = \mathfrak{m}_{i0}$$

sein. Hieraus folgt noch, dass ein beliebiger Primteiler von $\mathfrak{m}_{i0}$ stets durch einen Primteiler von $\mathfrak{m}_0$ teilbar ist.

Ist nun $\mathfrak{a}_i$ ein Ideal aus $H_i^{(\mathfrak{m})}$, so ist $\mathfrak{a}_i$ sicher zu $\mathfrak{p}_i^{(1)}, \ldots, \mathfrak{p}_i^{(r)}$ prim, weil sonst $\mathfrak{a}_i \mathfrak{o}$ mindestens zu einem Primteiler von $\mathfrak{m}_0$ nicht prim wäre. Also ist $\mathfrak{a}_i$ zu $\mathfrak{m}_{i0}$ prim. Damit ist bewiesen: *$H_i^{(\mathfrak{m})}$ enthält den Strahl mod $\mathfrak{m}_i$ und jedes Ideal aus $H_i^{(\mathfrak{m})}$ ist prim zu $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{m} \wedge k_i$, ist also $H_i^{(\mathfrak{m})}$ eine mod $\mathfrak{m}_i$ erklärte Idealgruppe in k_i.*

Die oben bestimmte Idealgruppe $H_i^{(\mathfrak{m})}$ nennen wir im folgenden den Durchschnitt von $H^{(\mathfrak{m})}$ mit k_i und bezeichnen sie durch $H^{(\mathfrak{m})} \wedge k_i$. Zu einem Ideal $\mathfrak{a}$ aus $H^{(\mathfrak{m})}$ existiert ein Ideal $\mathfrak{a}_i$ aus einem passend gewählten Approximationskörper k_i, derart dass $\mathfrak{a}_i \mathfrak{o} = \mathfrak{a}$ ist. Da aber $\mathfrak{a}_i$ zu $H_i^{(\mathfrak{m})}$ gehört, so ist $H^{(\mathfrak{m})}$ die Vereinigungsmenge von $H_1^{(\mathfrak{m})}$, $H_2^{(\mathfrak{m})}$, $\ldots$, $H_i^{(\mathfrak{m})}$, $\ldots$, wenn die Ideale aus $H_1^{(\mathfrak{m})}, \ldots, H_i^{(\mathfrak{m})}, \ldots$ als die von k betrachtet werden. Im folgenden gebrauchen wir oft der Abkürzung halber den Ausdruck, dass $H^{(\mathfrak{m})}$ die Vereinigungsmenge von $H_1^{(\mathfrak{m})}, \ldots$, $H_i^{(\mathfrak{m})}, \ldots$ ist. Darunter versteht man immer die Vereinigungsmenge der Erweiterungsideale aus $H_1^{(\mathfrak{m})}, \ldots, H_i^{(\mathfrak{m})}, \ldots$ in k.

Nun ziehen wir einen Spezialfall in Betracht, wo die Faktorgruppe $A^{(\mathfrak{m})}/H^{(\mathfrak{m})}$ endlich von der Ordnung n ist. Wenn man dabei einen geeigneten Approximationskörper k_i von k wählt, dann kann man in k_i ein System von n Idealen $\mathfrak{a}_i^{(1)}, \ldots, \mathfrak{a}_i^{(n)}$ finden, derart dass

$$\mathfrak{a}_i^{(1)} \mathfrak{o}, \ldots ., \mathfrak{a}_i^{(n)} \mathfrak{o}$$

ein Repräsentantensystem der sämtlichen Klassen von $A^{(\mathfrak{m})}/H^{(\mathfrak{m})}$ bildet. Da aber $A^{(\mathfrak{m})}$ eine mod $\mathfrak{m}$ erklärte Idealgruppe ist, so sind nach dem oben Bewiesenen $\mathfrak{a}_i^{(1)}, \ldots, \mathfrak{a}_i^{(n)}$ alle zu $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{m} \wedge k_i$ prim. Aus einer Klasse $\mathfrak{a}_i^{(r)}\mathfrak{o} \cdot H^{(\mathfrak{m})}$ entsteht also eine Klasse $\mathfrak{a}_i^{(r)} \cdot H_i^{(\mathfrak{m})}$ $(1 \leq r \leq n)$, wobei $H_i^{(\mathfrak{m})}$ den Durchschnitt von $H^{(\mathfrak{m})}$ mit k_i bezeichnet. Wie man sich leicht überzeugt, entstehen aus zwei verschiedenen Klassen $\mathfrak{a}_i^{(r_1)}\mathfrak{o} \cdot H^{(\mathfrak{m})}$ und $\mathfrak{a}_i^{(r_2)}\mathfrak{o} \cdot H^{(\mathfrak{m})}$ auch zwei verschiedene Klassen $\mathfrak{a}_i^{(r_1)} \cdot H_i^{(\mathfrak{m})}$, $\mathfrak{a}_i^{(r_2)} \cdot H_i^{(\mathfrak{m})}$. Daher gibt es mindestens n verschiedene Klassen von $A_i^{(\mathfrak{m})}$ nach $H_i^{(\mathfrak{m})}$. Dabei bedeutet $A_i^{(\mathfrak{m})}$ die Gesamtheit aller derjenigen Ideale aus k_i, deren Erweiterungen in k zu $A^{(\mathfrak{m})}$ gehören. Aus Struktur von $A^{(\mathfrak{m})}$ folgt sofort, dass $A_i^{(\mathfrak{m})}$ auch die Gesamtheit aller zu $\mathfrak{m}_i$ primen Ideale aus k_i ist. Wir setzen also auch $A_i^{(\mathfrak{m})} = A_i^{(\mathfrak{m}_i)}$.

Ist $\mathfrak{a}_i H_i^{(\mathfrak{m})}$ eine beliebige Klasse von $A_i^{(\mathfrak{m})}$ nach $H_i^{(\mathfrak{m})}$, so gehört $\mathfrak{a}_i\mathfrak{o}$ sicher einer Klasse von $A^{(\mathfrak{m})}$ nach $H^{(\mathfrak{m})}$, etwa $\mathfrak{a}_i^{(1)}\mathfrak{o} \cdot H^{(\mathfrak{m})}$, an. Es gibt also in $H^{(\mathfrak{m})}$ ein Ideal $\mathfrak{b}$, so dass

$$\mathfrak{a}_i\mathfrak{o} = \mathfrak{a}_i^{(1)}\mathfrak{o} \cdot \mathfrak{b}$$

ist. Setzt man nun $\frac{\mathfrak{a}_i}{\mathfrak{a}_i^{(1)}} = \mathfrak{b}_i$, so gilt offenbar

$$\mathfrak{b}_i\mathfrak{o} = \mathfrak{b}\,,$$

d. h. $\mathfrak{b}_i$ gehört zu $H_i^{(\mathfrak{m})}$. Also ist

$$\mathfrak{a}_i H_i^{(\mathfrak{m})} = \mathfrak{a}_i^{(1)} H_i^{(\mathfrak{m})}\,.$$

Damit ist gezeigt, dass es genau n verschiedene Klassen von $A_i^{(\mathfrak{m})}$ nach $H_i^{(\mathfrak{m})}$ gibt.

Stellt man nun folgende eindeutige Zuordnung

$$\mathfrak{a}_i^{(r)}\mathfrak{o} \cdot H^{(\mathfrak{m})} \longleftrightarrow \mathfrak{a}_i^{(r)} H_i^{(\mathfrak{m})}$$

her, so ergibt sich ein Isomorphismus von $A^{(\mathfrak{m})}/H^{(\mathfrak{m})}$ zu $A_i^{(\mathfrak{m})}/H_i^{(\mathfrak{m})}$:

$$A^{(\mathfrak{m})}/H^{(\mathfrak{m})} \cong A_i^{(\mathfrak{m})}/H_i^{(\mathfrak{m})}\,.$$

Aus dem oben Bewiesenen schliesst man sofort folgenden

Satz 1. *Es sei $H^{(\mathfrak{m})}$ eine mod $\mathfrak{m}$ erklärte Idealgruppe und $A^{(\mathfrak{m})}/H^{(\mathfrak{m})}$ endlich von der Ordnung n. Dann existiert ein Approximationskörper k_I von k derart, dass für jeden Körper k_i mit $i \geq I$*

$$A^{(\mathfrak{m})}/H^{(\mathfrak{m})} \cong A_i^{(\mathfrak{m})}/H_i^{(\mathfrak{m})}$$

ist, wobei $H_i^{(\mathfrak{m})}$ den Durchschnitt von $H^{(\mathfrak{m})}$ mit k_i und $A_i^{(\mathfrak{m})}$ die Gesamtheit aller zu $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{m} \wedge k_i$ primen Ideale aus k bedeutet. Ferner kann man ein Repräsentantensystem von $A_i^{(\mathfrak{m})}$ nach $H_i^{(\mathfrak{m})}$ so wählen, dass die Erweiterungsideale aus solchem Repräsentantensystem in k auch ein Repräsentantensystem von $A^{(\mathfrak{m})}/H^{(\mathfrak{m})}$ bilden.

Nun wollen wir die Gleichheit der Idealgruppen definieren, welche im allgemeinen nach den verschiedenen Idealmoduln erklärt sind. Es seien $H^{(\mathfrak{m})}$ und $H^{(\mathfrak{n})}$ zwei Idealgruppen, welche resp. mod $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ erklärt sind, wobei $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ allgemein voneinander verschieden sein können. Existiert dann in k ein Idealmodul $\mathfrak{t}$ derart, dass die Idealgruppen $H^{(\mathfrak{m})(\mathfrak{t})} = A^{(\mathfrak{t})} \wedge H^{(\mathfrak{m})}$ und $H^{(\mathfrak{n})(\mathfrak{t})} = A^{(\mathfrak{t})} \wedge H^{(\mathfrak{n})}$ in k mengentheoretisch gleich sind(1), so heissen $H^{(\mathfrak{m})}$ und $H^{(\mathfrak{n})}$ *einander gleich*: $H^{(\mathfrak{m})} = H^{(\mathfrak{n})}$.

Dass diese Gleichheit der Idealgruppen reflexiv und symmetrisch ist, sieht man sofort aus Definition ein. Es seien nun

$$H^{(\mathfrak{m})} = H^{(\mathfrak{n})} \qquad \text{und} \qquad H^{(\mathfrak{n})} = H^{(\mathfrak{l})}.$$

Dann gibt es nach Definition der Gleichheit Idealmoduln $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, so dass mengentheoretisch $H^{(\mathfrak{m})(\mathfrak{t}_1)} = H^{(\mathfrak{n})(\mathfrak{t}_1)}$ und $H^{(\mathfrak{n})(\mathfrak{t}_2)} = H^{(\mathfrak{l})(\mathfrak{t}_2)}$ sind. Bezeichnet man nun mit $\mathfrak{t}$ ein gemeinschaftliches Vielfach von $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$, so folgen ohne weiteres

$$H^{(\mathfrak{m})(\mathfrak{t})} = H^{(\mathfrak{m})(\mathfrak{t}_1)(\mathfrak{t})} = H^{(\mathfrak{n})(\mathfrak{t}_1)(\mathfrak{t})} = H^{(\mathfrak{n})(\mathfrak{t})}$$

und

$$H^{(\mathfrak{n})(\mathfrak{t})} = H^{(\mathfrak{n})(\mathfrak{t}_2)(\mathfrak{t})} = H^{(\mathfrak{l})(\mathfrak{t}_2)(\mathfrak{t})} = H^{(\mathfrak{l})(\mathfrak{t})},$$

d.h. nach Definition ist

$$H^{(\mathfrak{m})} = H^{(\mathfrak{l})}.$$

Also ist die Gleichheit auch transitiv. Wir fassen daher alle Idealgruppen in k, welche nach der obigen Definition einander gleich sind, in eine Klasse zusammen. Eine Klasse der gleichen Idealgruppen in k bezeichnen wir im folgenden oft mit H und nennen H einfach eine Idealgruppe in k. Gehört eine mod $\mathfrak{m}$ erklärte Idealgruppe $H^{(\mathfrak{m})}$ zur Klasse H, so heisse die Idealgruppe H *mod* $\mathfrak{m}$ *erklärbar*.

---

(1) Wie man leicht bestätigt, besteht $H^{(\mathfrak{m})(\mathfrak{t})}$ bzw. $H^{(\mathfrak{n})(\mathfrak{t})}$ aus allen derjenigen Ideale aus $H^{(\mathfrak{m})}$ bzw. $H^{(\mathfrak{n})}$, die zu $\mathfrak{t}$ prim sind.

Wir bezeichnen nun mit $H_i^{(\mathfrak{m})}$, $H_i^{(\mathfrak{n})}$ resp. die Durchschnitte von $H^{(\mathfrak{m})}$, $H^{(\mathfrak{n})}$ mit k_i. Es fragt sich dann, wie sich $H_i^{(\mathfrak{m})}$ und $H_i^{(\mathfrak{n})}$ verhalten, wenn $H^{(\mathfrak{m})} = H^{(\mathfrak{n})}$ ist. Nach Definition existiert ein Idealmodul $\mathfrak{t}$ aus k, so dass mengentheoretisch $H^{(\mathfrak{m})(\mathfrak{t})} = H^{(\mathfrak{n})(\mathfrak{t})}$ wird. Durch $H_i^{(\mathfrak{m})(\mathfrak{t})}$ und $H_i^{(\mathfrak{n})(\mathfrak{t})}$ bezeichnen wir die Gesamtheit aller derjenigen Ideale aus k_i, deren Erweiterungen in k resp. zu $H^{(\mathfrak{m})(\mathfrak{t})}$ und $H^{(\mathfrak{n})(\mathfrak{t})}$ gehören. Aus $H^{(\mathfrak{m})(\mathfrak{t})} = H^{(\mathfrak{n})(\mathfrak{t})}$ folgt offenbar

$$H_i^{(\mathfrak{m})(\mathfrak{t})} = H_i^{(\mathfrak{n})(\mathfrak{t})} .$$

Da aber $H^{(\mathfrak{m})(\mathfrak{t})} \leqq H^{(\mathfrak{m})}$ ist, so folgt ohne weiteres

$$H_i^{(\mathfrak{m})(\mathfrak{t})} \leqq H_i^{(\mathfrak{m})}$$

und infolgedessen ist

$$H_i^{(\mathfrak{m})(\mathfrak{t})} \leqq (H_i^{(\mathfrak{m})})^{(\mathfrak{t})} .$$

Umgekehrt ist aber klar, dass

$$(H_i^{(\mathfrak{m})})^{(\mathfrak{t})} \leqq H_i^{(\mathfrak{m})}$$

und jedes Ideal aus $(H_i^{(\mathfrak{m})})^{(\mathfrak{t})}$ zu $\mathfrak{t}$ prim ist. Also folgt aus Definition von $H_i^{(\mathfrak{m})(\mathfrak{t})}$

$$(H_i^{(\mathfrak{m})})^{(\mathfrak{t})} \leqq H_i^{(\mathfrak{m})(\mathfrak{t})} .$$

Daher muss

$$H_i^{(\mathfrak{m})(\mathfrak{t})} = (H_i^{(\mathfrak{m})})^{(\mathfrak{t})}$$

sein. Ebenso ist

$$H_i^{(\mathfrak{n})(\mathfrak{t})} = (H_i^{(\mathfrak{n})})^{(\mathfrak{t})} .$$

Setzt man nun $\mathfrak{t}_i = \mathfrak{t} \wedge k_i$, so beweist man leicht

$$(H_i^{(\mathfrak{m})})^{(\mathfrak{t}_i)} = (H_i^{(\mathfrak{m})})^{(\mathfrak{t})} \quad \text{und} \quad (H_i^{(\mathfrak{n})})^{(\mathfrak{t}_i)} = (H_i^{(\mathfrak{n})})^{(\mathfrak{t})} .$$

Es folgt also

$$(H_i^{(\mathfrak{m})})^{(\mathfrak{t}_i)} = (H_i^{(\mathfrak{n})})^{(\mathfrak{t}_i)} ,$$

d.h. wie bekannt $H_i^{(\mathfrak{m})} = H_i^{(\mathfrak{n})}$.

Es gilt nun

Satz 2. *Gegeben seien zwei Idealgruppen $H^{(\mathfrak{m})}$ und $H^{(\mathfrak{n})}$ in k, welche resp. mod $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ erklärt sind. Ferner seien $H_i^{(\mathfrak{m})}$ und $H_i^{(\mathfrak{n})}$ resp. die Durchschnitte von $H^{(\mathfrak{m})}$ und $H^{(\mathfrak{n})}$ mit einem Approximationskörper k_i. Dann bedingen sich gegenseitig die Relationen $H^{(\mathfrak{m})} = H^{(\mathfrak{n})}$ und $H_i^{(\mathfrak{m})} = H_i^{(\mathfrak{n})}$ für jeden Approximationskörper k_i.*

Beweis. Dass aus $H^{(\mathfrak{m})} = H^{(\mathfrak{n})}$ für jeden Approximationskörper k_i

$$H_i^{(\mathfrak{m})} = H_i^{(\mathfrak{n})}$$

folgt, hat man schon oben gezeigt.

Wir bezeichnen nun mit $\mathfrak{m}_0$, $\mathfrak{n}_0$ resp. die endlichen und mit $\mathfrak{p}_\infty$, $\mathfrak{q}_\infty$ die unendlichen Bestandteile von $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$. Dann verstehen wir unter dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfach $\mathfrak{m} \wedge \mathfrak{n}$ von $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ den Idealmodul $(\mathfrak{m}_0 \wedge \mathfrak{n}_0) \cdot \mathfrak{r}_\infty$, wobei $\mathfrak{r}_\infty$ aus den sämtlichen, wenigstens einmal in $\mathfrak{p}_\infty$ oder $\mathfrak{q}_\infty$ auftretenden unendlichen Primstellen zusammengestzt ist. Da bekanntlich $\mathfrak{m} \wedge \mathfrak{n}$ durch $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ teilbar ist, so ist sicher $(\mathfrak{m} \wedge \mathfrak{n})_i = (\mathfrak{m} \wedge \mathfrak{n}) \wedge k_i$ durch $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{m} \wedge k_i$ und $\mathfrak{n}_i = \mathfrak{n} \wedge k_i$ teilbar, d.h.

$$(\mathfrak{m}_i \wedge \mathfrak{n}_i)^{(1)} \mid (\mathfrak{m} \wedge \mathfrak{n})_i .$$

Wir betrachten nun die Erweiterung $\overline{(\mathfrak{m}_i \wedge \mathfrak{n}_i)}$ von $\mathfrak{m}_i \wedge \mathfrak{n}_i$ in k. Dann ist offenbar $\overline{(\mathfrak{m}_i \wedge \mathfrak{n}_i)}$ durch $\mathfrak{m} \wedge \mathfrak{n}$ teilbar. Also ist

$$(\mathfrak{m} \wedge \mathfrak{n})_i \mid \overline{(\mathfrak{m}_i \wedge \mathfrak{n}_i)} \wedge k_i = \mathfrak{m}_i \wedge \mathfrak{n}_i .$$

Hieraus folgt ohne weiteres

$$(\mathfrak{m}_i \wedge \mathfrak{n}_i) = (\mathfrak{m} \wedge \mathfrak{n})_i .$$

Es sei nun für jeden Approximationskörper k_i

$$H_i^{(\mathfrak{m})} = H_i^{(\mathfrak{n})} .$$

Dann betrachten wir $H^{(\mathfrak{m})(\mathfrak{m} \wedge \mathfrak{n})}$ und $H^{(\mathfrak{n})(\mathfrak{m} \wedge \mathfrak{n})}$. Wie man sich dabei leicht überzeugt, sind $H^{(\mathfrak{m})(\mathfrak{m} \wedge \mathfrak{n})}$ und $H^{(\mathfrak{n})(\mathfrak{m} \wedge \mathfrak{n})}$ mod $\mathfrak{m} \wedge \mathfrak{n}$ erklärt. Ferner ist, wie schon bewiesen,

$$H_i^{(\mathfrak{m})(\mathfrak{m} \wedge \mathfrak{n})} = (H_i^{(\mathfrak{m})})^{(\mathfrak{m} \wedge \mathfrak{n})} = (H_i^{(\mathfrak{m})})^{(\mathfrak{m} \wedge \mathfrak{n})_i} = (H_i^{(\mathfrak{m})})^{(\mathfrak{m}_i \wedge \mathfrak{n}_i)}$$

(1) $\mathfrak{m}_i \wedge \mathfrak{n}_i$ bezeichnet das kleinste gemeinschaftliche Vielfach von $\mathfrak{m}_i$ und $\mathfrak{n}_i$.

und ebenso ist

$$H_i^{(\mathfrak{n})(\mathfrak{m} \wedge \mathfrak{n})} = (H_i^{(\mathfrak{n})})^{(\mathfrak{m}_i \wedge \mathfrak{n}_i)}.$$

Da $H_i^{(\mathfrak{m})}$ und $H_i^{(\mathfrak{n})}$ resp. mod $\mathfrak{m}_i$ und $\mathfrak{n}_i$ erklärt sind, so sind offenbar $(H_i^{(\mathfrak{m})})^{(\mathfrak{m}_i \wedge \mathfrak{n}_i)}$ und $(H_i^{(\mathfrak{n})})^{(\mathfrak{m}_i \wedge \mathfrak{n}_i)}$ mod $\mathfrak{m}_i \wedge \mathfrak{n}_i$ erklärt. Hiernach gilt mengentheoretisch

$$(H_i^{(\mathfrak{m})})^{(\mathfrak{m}_i \wedge \mathfrak{n}_i)} = (H_i^{(\mathfrak{n})})^{(\mathfrak{m}_i \wedge \mathfrak{n}_i)},$$

weil $H_i^{(\mathfrak{m})} = H_i^{(\mathfrak{n})}$ ist. Also gilt auch mengentheoretisch

$$H_i^{(\mathfrak{m})(\mathfrak{m} \wedge \mathfrak{n})} = H_i^{(\mathfrak{n})(\mathfrak{m} \wedge \mathfrak{n})}.$$

Wie wir schon bewiesen haben, ist $H^{(\mathfrak{m})(\mathfrak{m} \wedge \mathfrak{n})}$ bzw. $H^{(\mathfrak{n})(\mathfrak{m} \wedge \mathfrak{n})}$ die Vereinigungsmenge von

$$H_1^{(\mathfrak{m})(\mathfrak{m} \wedge \mathfrak{n})}, \ \ldots\ldots\ldots, \ H_i^{(\mathfrak{m})(\mathfrak{m} \wedge \mathfrak{n})}, \ \ldots\ldots$$

bzw.

$$H_1^{(\mathfrak{n})(\mathfrak{m} \wedge \mathfrak{n})}, \ \ldots\ldots\ldots, \ H_i^{(\mathfrak{n})(\mathfrak{m} \wedge \mathfrak{n})}, \ \ldots\ldots$$

Also ist offenbar mengentheoretisch

$$H^{(\mathfrak{m})(\mathfrak{m} \wedge \mathfrak{n})} = H^{(\mathfrak{n})(\mathfrak{m} \wedge \mathfrak{n})},$$

d.h. nach Definition

$$H^{(\mathfrak{m})} = H^{(\mathfrak{n})}.$$

Nach Satz 2 beweist man folgenden

Zusatz. Es seien $A^{(\mathfrak{m})}$, $A^{(\mathfrak{n})}$ resp. die Gesamtheiten aller zu $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ primen Ideale aus A und $H^{(\mathfrak{m})} = H^{(\mathfrak{n})}$ eine Idealgruppe in k. Dann ist

$$A^{(\mathfrak{m})}/H^{(\mathfrak{m})} \cong A^{(\mathfrak{n})}/H^{(\mathfrak{n})},$$

wenn die Faktorgruppen endlich sind.

Beweis. Nach Satz 1 existiert sicher ein Index I, derart dass für jeden Approximationskörper k_i mit $i \geqq I$

$$A^{(\mathfrak{m})}/H^{(\mathfrak{m})} \cong A_i^{(\mathfrak{m}_i)}/H_i^{(\mathfrak{m})} \quad \text{und} \quad A^{(\mathfrak{n})}/H^{(\mathfrak{n})} \cong A_i^{(\mathfrak{n}_i)}/H_i^{(\mathfrak{n})}$$

sind. Dabei bedeuten $A_i^{(\mathfrak{m}_i)}$, $A_i^{(\mathfrak{n}_i)}$ resp. die Gesamtheiten aller zu $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{m} \wedge k_i$, $\mathfrak{n}_i = \mathfrak{n} \wedge k_i$ primen Ideale aus k_i und es sind

$$H_i^{(\mathfrak{m})} = H^{(\mathfrak{m})} \wedge k_i\,, \quad H_i^{(\mathfrak{n})} = H^{(\mathfrak{n})} \wedge k_i\,.$$

Da aber nach Satz 2 $H_i^{(\mathfrak{m})} = H_i^{(\mathfrak{n})}$ ist, so folgt wie bekannt

$$A_i^{(\mathfrak{m}_i)}/H_i^{(\mathfrak{m})} \cong A_i^{(\mathfrak{n}_i)}/H_i^{(\mathfrak{n})}\,.$$

Es ist also

$$A^{(\mathfrak{m})}/H^{(\mathfrak{m})} \cong A^{(\mathfrak{n})}/H^{(\mathfrak{n})}\,.$$

Wir beweisen nun folgenden

Satz 3. *Es seien $\mathfrak{m}^{(1)}, \mathfrak{m}^{(2)}, \ldots, \mathfrak{m}^{(\nu)}, \ldots$ die sämtlichen abgeschlossenen Erklärungsmoduln einer Idealgruppe H in k. Dann existiert immer ein abgeschlossener Erklärungsmodul von H, welcher in jedem $\mathfrak{m}^{(\nu)}$ aufgeht.*

Beweis. Bezeichnet man die mod $\mathfrak{m}^{(\nu)}$ erklärte Idealgruppe in H mit $H^{(\mathfrak{m}^{(\nu)})}$ und setzt $H_i^{(\mathfrak{m}^{(\nu)})} = H_i^{(\mathfrak{m}^{(\nu)})} \wedge k_i$, so folgt aus Satz 2

$$H_i^{(\mathfrak{m}^{(1)})} = H_i^{(\mathfrak{m}^{(2)})} = \ldots\ldots\ldots = H_i^{(\mathfrak{m}^{(\nu)})} = \ldots\ldots\ldots\,.$$

Wie früher gezeigt, ist dabei $H_i^{(\mathfrak{m}^{(\nu)})}$ mod $\mathfrak{m}_i^{(\nu)} = \mathfrak{m}^{(\nu)} \wedge k_i$ erklärt. Nun bestimmen wir den grössten gemeinsamen Teiler $\mathfrak{d}_i$ von $\mathfrak{m}_i^{(1)}, \ldots, \mathfrak{m}_i^{(\nu)}, \ldots$. Dann ist bekanntlich $H_i^{(\mathfrak{d}_i)} = H_i^{(\mathfrak{m}^{(\nu)})}$. Für $j > i$ gilt aber

$$\mathfrak{d}_i^{(j)} = \mathfrak{d}_j \wedge k_i \mid \mathfrak{d}_i\,,$$

weil $\mathfrak{m}_i^{(\nu)} = \mathfrak{m}_j^{(\nu)} \wedge k_i$ ist.

Für einen beliebigen Index $l > j$ gilt also

$$\mathfrak{d}_j^{(l)} \mid \mathfrak{d}_j\,.$$

Hieraus folgt sofort

$$\mathfrak{d}_j^{(l)} \wedge k_i \mid \mathfrak{d}_j \wedge k_i = \mathfrak{d}_i^{(j)}\,.$$

Da aber

$$\mathfrak{d}_j^{(l)} \wedge k_i = \mathfrak{d}_l \wedge k_j \wedge k_i = \mathfrak{d}_l \wedge k_i = \mathfrak{d}_i^{(l)}$$

ist, so ist

$$\mathfrak{d}_i^{(l)} \mid \mathfrak{d}_i^{(j)} \mid \mathfrak{d}_i\,.$$

Wir erhalten also eine Folge der Idealmoduln in k_i

$$(1) \mid \cdots\cdot \mid \mathfrak{d}_i^{(j)} \mid \cdots\cdot \mid \mathfrak{d}_i^{(i+1)} \mid \mathfrak{d}_i = \mathfrak{d}_i^{(i)}\,.$$

Nach dem bekannten Teilerkettensatz existiert nun ein Index $I_i \geqq i$, so dass

$$\mathfrak{d}_i^{(I_i)} = \mathfrak{d}_i^{(I_i+1)} = \dots\dots\dots = \mathfrak{d}_i^*$$

wird. Ebenso gibt es für einen beliebigen Index $j > i$

$$\mathfrak{d}_j^{(I_j)} = \dots\dots\dots = \mathfrak{d}_j^* .$$

Aus Definition von $\mathfrak{d}_i^*$ und $\mathfrak{d}_j^*$ folgt ohne weiteres

$$\mathfrak{d}_j^* \wedge k_i = \mathfrak{d}_i^* .$$

Also definiert $\mathfrak{d}_1^*, \mathfrak{d}_2^*, \dots, \mathfrak{d}_i^*, \dots$ einen Idealmodul $\mathfrak{d}^* = \lim\limits_{i\to\infty} \mathfrak{d}^*$ in k, dessen unendlicher Bestandteil offenbar eine abgeschlossene Punktmenge ist.

Da nach Definition von $\mathfrak{d}_{I_i}$ im Approximationskörper k_{I_i} eine mod $\mathfrak{d}_{I_i}$ erklärte Idealgruppe $H_{I_i}^{(\mathfrak{d}_{I_i})}$ existiert, welche zu $H_{I_i}^{(\mathfrak{m}^{(1)})}$ gleich ist, so beweist man leicht

$$H_{I_i}^{(\mathfrak{d}_{I_i})} \wedge k_i = H_{I_i}^{(\mathfrak{m}^{(1)})} \wedge k_i = H_i^{(\mathfrak{m}^{(1)})} .$$

Offenbar ist $H_{I_i}^{(\mathfrak{d}_{I_i})} \wedge k_i$ mod $\mathfrak{d}_{I_i} \wedge k_i = \mathfrak{d}_i^{(I_i)} = \mathfrak{d}_i^*$ erklärt, d.h. es gibt in k_i eine mod $\mathfrak{d}_i^*$ erklärte Idealgruppe $H_i^{(\mathfrak{d}_i^*)}$, welche zu $H_i^{(\mathfrak{m}^{(1)})}$ gleich ist. Ebenso existiert zu einem beliebigen Index $j > i$ eine mod $\mathfrak{d}_j^*$ erklärte Idealgruppe $H_j^{(\mathfrak{d}_j^*)}$, welche zu $H_j^{(\mathfrak{m}^{(1)})}$ gleich ist. Man kann dann auch leicht beweisen, dass

$$H_i^{(\mathfrak{d}_i^*)} = H_i^{(\mathfrak{m}^{(1)})} = H_j^{(\mathfrak{m}^{(1)})} \wedge k_i = H_j^{(\mathfrak{d}_j^*)} \wedge k_i$$

ist. Da aber $H_j^{(\mathfrak{d}_j^*)} \wedge k_i$ mod $\mathfrak{d}_j^* \wedge k_i = \mathfrak{d}_i^*$ erklärt ist, so muss mengentheoretisch

$$H_i^{(\mathfrak{d}_i^*)} = H_j^{(\mathfrak{d}_j^*)} \wedge k_i$$

sein. Wir können also die Vereinigungsmenge H^* von $H_1^{(\mathfrak{d}_1^*)}, H_2^{(\mathfrak{d}_2^*)}, \dots, H_i^{(\mathfrak{d}_i^*)}, \dots$ bilden. Aus Konstruktion von $\mathfrak{d}^* = \lim\limits_{i\to\infty} \mathfrak{d}_i^*$ schliesst man sofort, dass jedes $\mathfrak{m}^{(\nu)}$ durch $\mathfrak{d}^*$ teilbar ist, weil $\mathfrak{d}_i^* \mid \mathfrak{m}_i^{(\nu)}$ $(i = 1, \dots)$ sind und $\mathfrak{m}^{(\nu)}$ abgeschlossen ist.

Ich behaupte nun, dass H^* mod $\mathfrak{d}^*$ erklärt ist. Nämlich zunächst ist klar, dass die Ideale aus H^* alle zu $\mathfrak{d}^*$ prim sind. Nun sei

$$\alpha \equiv 1 \mod \mathfrak{d}^* .$$

Dann ist sicher für einen geeigneten Index i

$$\alpha \equiv 1 \mod \mathfrak{d}_i^* ,$$

weil nach Struktur von $\mathfrak{d}^*$ $\mathfrak{d}^* \wedge k_i = \mathfrak{d}_i^*$ sein muss. Da aber (α) ein Ideal aus dem Strahl mod $\mathfrak{d}_i^*$ in k_i ist, so gehört (α) zu $H_i^{(\mathfrak{d}_i^*)}$. Es ist also $(\alpha)\mathfrak{o}$ in H^* enthalten. Damit ist gezeigt, dass der Strahl mod $\mathfrak{d}^*$ in H^* enthalten ist. Also ist H^* mod $\mathfrak{d}^*$ erklärt. Da aber für jeden Approximationskörper k_i

$$H^* \wedge k_i = H_i^{(\mathfrak{d}_i^*)} = H_i^{(\mathfrak{m}^{(\nu)})}$$

ist, so ist nach Satz 2

$$H^* = H^{(\mathfrak{m}^{(\nu)})} ,$$

w. z. b. w.

Unter Benutzung aller bisherigen Bezeichnungen beweise ich folgenden

Zusatz. $\mathfrak{d}^*$ ist der grösste gemeinsame Teiler von $\mathfrak{m}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{m}^{(\nu)}, \ldots$

Beweis. Es ist klar, dass $\mathfrak{d}^*$ ein gemeinsamer Teiler von $\mathfrak{m}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{m}^{(\nu)}, \ldots$ ist. Da aber $\mathfrak{d}^*$ abgeschlossener Idealmodul ist, nach dem H erklärbar ist, so tritt $\mathfrak{d}^*$ sicher in den $\mathfrak{m}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{m}^{(\nu)}, \ldots$ auf, d.h. $\mathfrak{d}^*$ ist der grösste gemeinsame Teiler von $\mathfrak{m}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{m}^{(\nu)}, \ldots$.

Es sei $\mathfrak{m}$ ein Erklärungsmodul einer Idealgruppe H in k: $H = H^{(\mathfrak{m})}$. Ist dann $\overline{\mathfrak{m}}$ die abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{m}$, so ist H mod $\overline{\mathfrak{m}}$ erklärbar und es ist noch mengentheoretisch

$$H^{(\mathfrak{m})} = H^{(\overline{\mathfrak{m}})} .$$

Zunächst ist klar, dass mengentheoretisch $H^{(\mathfrak{m})} \geqq H^{(\overline{\mathfrak{m}})}$ ist. Da nach Definition $\overline{\mathfrak{m}}$ ausser den sämtlichen unendlichen Primstellen von $\mathfrak{m}$ höchstens nur noch diejenigen unendlichen Primstellen, welche als Grenzprimstellen der konvergenten Folgen aus dem unendlichen Bestandteile von $\mathfrak{m}$ definiert sind, besitzt, so braucht man nur zu zeigen, dass für eine Zahl

$$\alpha \equiv 1 \mod \mathfrak{m}$$

die Kongruenz

$$\alpha \equiv 1 \mod \mathfrak{p}_\infty$$

erfüllt ist, wenn $\mathfrak{p}_\infty$ die Grenzprimstelle einer konvergenten Folge aus dem unendlichen Bestandteile von $\mathfrak{m}$ ist. Offenbar gehört α zu einem passenden Approximationskörper k_i. Es gibt aber in $\mathfrak{m}$ eine unendliche Primstelle $\mathfrak{p}'_\infty$, derart dass dis $(\mathfrak{p}_\infty, \mathfrak{p}'_\infty) < \frac{1}{i}$ ist. Da aber

$$\alpha \equiv 1 \quad \mod \quad \mathfrak{p}'_\infty \wedge k_i = \mathfrak{p}_\infty \wedge k_i$$

ist, so muss sicher

$$\alpha \equiv 1 \quad \mod \quad \mathfrak{p}_\infty$$

sein. Hieraus folgt sofort, dass mengentheoretisch $H^{(\mathfrak{m})} = H^{(\bar{\mathfrak{m}})}$ gilt. Wenn also eine Idealgruppe H gegeben ist, dann gibt es sicher die abgeschlossenen Erklärungsmoduln von H. Nach dem obigen Zusatz existiert dabei ein abgeschlossener Erklärungsmodul von H, welcher der grösste gemeinsame Teiler der sämtlichen algeschlossenen Erklärungsmoduln von H ist. Dieser grösste gemeinsame Teiler heisse im folgenden der *Führer von H*.

Es seien nun H, $\bar{H}$ Idealgruppen in k. Ist dann für einen gemeinsamen Erklärungsmodul $\mathfrak{m}$ mengentheoretisch

$$H^{(\mathfrak{m})} \leqq \bar{H}^{(\mathfrak{m})},$$

so heisse $\bar{H}$ eine Untergruppe von $\bar{H} : H \leqq H$. Da für die abgeschlossene Hülle $\bar{\mathfrak{m}}$ von $\mathfrak{m}$ mengentheoretisch

$$H^{(\mathfrak{m})} = H^{(\bar{\mathfrak{m}})} \quad \text{und} \quad \bar{H}^{(\mathfrak{m})} = \bar{H}^{(\bar{\mathfrak{m}})}$$

sind, so kann man der Kürze wegen annehmen, dass $\mathfrak{m}$ von vornherein ein abgeschlossener Idealmodul ist.

Bezeichnet man nun mit $\mathfrak{f}$ den Führer von H, so ist $\mathfrak{m}$ durch $\mathfrak{f}$ teilbar. Da aber $H^{(\mathfrak{m})} = H^{(\mathfrak{f})}$ ist, so erhält man aus $H^{(\mathfrak{m})}$ durch Auffüllung mit gewissen zu $\mathfrak{m}$ nicht primen Idealen die Idealgruppe $H^{(\mathfrak{f})}$. Durch die gleiche Auffüllung mit $H^{(\mathfrak{m})}$ erhält man aus $\bar{H}^{(\mathfrak{m})}$ eine mod $\mathfrak{f}$ erklärte Idealgruppe $\bar{H}^{(\mathfrak{f})}$. Die letzte Idealgruppe ist gleich der Idealgruppe $\bar{H}^{(\mathfrak{m})}$, weil man durch Befreiung der zu $\mathfrak{m}$ nicht primen Ideale von $\bar{H}^{(\mathfrak{f})}$ die Idealgruppe $\bar{H}^{(\mathfrak{m})}$ bekommt. Da aber $\mathfrak{f}$ als der Führer von H ein abgeschlossener Idealmodul ist, so muss $\mathfrak{f}$ nach Satz 3 durch den Führer $\bar{\mathfrak{f}}$ von $\bar{H}$ teilbar sein: $\bar{\mathfrak{f}} \mid \mathfrak{f}$.

Man kann auch leicht zeigen, dass für einen beliebigen gemeinsamen abgeschlossenen Erklärungsmodul $\mathfrak{n}$ stets mengentheoretsich

$$H^{(\mathfrak{n})} \leqq \bar{H}^{(\mathfrak{n})}$$

gilt, wenn $H \leqq \bar{H}$ ist.

§ 3. Die einem Erweiterungskörper zugeordneten Idealgruppen.

Über dem im § 1 angegebenen unendlichen algebraischen Zahlkörper k betrachten wir einen algebraischen Zahlkörper K vom Grade n. Eine primitive Zahl θ von K über k genügt dann einer irreduziblen Gleichung vom Grade n in einem passend gewählten Approximationskörper k_I von k. Also ist für jeden Index $i \geqq I$

$$[k_i(\theta) = K_i : k_i] = n .$$

Wir ordnen jetzt dem Körper k als den absoluten Grad eine STEINITZsche G-Zahl N zu, welche als der Grenzwert der Grade n_i von den k_i nach k_0 definiert ist $(i = 1, 2, \ldots.)$. Wir fassen alle derjenigen in N aufgehenden Primzahlpotenzen, deren Exponenten ∞ sind, in ein formales Produkt N^* zusammen und nennen dieses Produkt N^* den *unendlichen Bestandteil* von N.

Wir greifen nun aus dem Körper k einen Idealmodul $\mathfrak{m}$ heraus. Ist dann $\mathfrak{A}$ ein zu $\mathfrak{m}$ primes Ideal mit endlicher Basis in K, so kann man bereits in einem passenden Approximationskörper $k_i(\theta) = K_i$ von K ein Ideal $\mathfrak{A}_i$ finden, derart dass

$$\mathfrak{A}_i \mathfrak{O} = \mathfrak{A}$$

wird, wobei $\mathfrak{O}$ die Hauptordnung von K bedeutet. Unter der Norm $N_{Kk}(\mathfrak{A})$ von $\mathfrak{A}$ nach k versteht man wie üblich das Idealprodukt aller zu $\mathfrak{A}$ konjugierten Ideale. Es gilt dabei

$$N_{Kk}(\mathfrak{A}) = N_{K_i k_i}(\mathfrak{A}_i)\mathfrak{o} .$$

Da aber $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{m}$ prim ist, so ist offenbar $N_{Kk}(\mathfrak{A})$ auch zu $\mathfrak{m}$ prim.

Im Körper k fassen wir die sämtlichen Strahlklassen mod $\mathfrak{m}$, in die mindestens Norm eines zu $\mathfrak{m}$ primen Ideals mit endlicher Basis au K eintritt, in eine Idealgruppe $H^{(\mathfrak{m})}$ zusammen. Diese Idealgruppe $H^{(\mathfrak{m})}$ nennen wir im folgenden die *mod* $\mathfrak{m}$ K *zugeordnete Idealgruppe* in k. Für einen Approximationskörper k_i mit $i \geqq I$ enthält die Idealgruppe $H^{(\mathfrak{m})} = H^{(\mathfrak{m})} \wedge k_i$ mengentheoretisch die mod $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{m} \wedge k_i$ dem Körper K_i zugeordnete Idealgruppe $H_i^{(\mathfrak{m}_i)}$ in $k_i : H_i^{(\mathfrak{m})} \geqq H_i^{(\mathfrak{m}_i)}$. Ist aber $\mathfrak{A}$ ein zu $\mathfrak{m}$ primes Ideal mit endlicher Basis in K, so gibt es in einem passenden Approximationsköprer K_i von $K\,(i \geqq I)$ ein zu $\mathfrak{m}_i$ primes Ideal $\mathfrak{A}_i$, derart dass $\mathfrak{A}_i \mathfrak{O} = \mathfrak{A}$ wird. Da aber

$$N_{K_i k_i}(\mathfrak{A}_i) \in H_i^{(\mathfrak{m}_i)}$$

ist, so kann man leicht behaupten, dass die Vereinigungsmenge von $H_I^{(\mathfrak{m}_I)}, H_{I+1}^{(\mathfrak{m}_{I+1})}, \ldots, H_i^{(\mathfrak{m}_i)}, \ldots$ die Idealgruppe $H^{(\mathfrak{m})}$ ist.

Ich will nun zeigen, dass $A^{(\mathfrak{m})} / H^{(\mathfrak{m})}$ endlich und von kleinerer Ordnung als $n+1$ ist. Ist die Ordnung von $A^{(\mathfrak{m})} / H^{(\mathfrak{m})}$ grösser als n, so gibt es mindestens $n+1$ verschiedene Klassen nach $H^{(\mathfrak{m})}$ in $A^{(\mathfrak{m})}$. Es seien also

$$\mathfrak{a}^{(1)} H^{(\mathfrak{m})}, \quad \ldots\ldots\ldots, \quad \mathfrak{a}^{(n+1)} H^{\ \mathfrak{m})}$$

solche $n+1$ verschiedene Klassen. Wählt man dann einen passenden Approximationskörper $k_i\,(i \geqq I)$ von k, so kann man in k_i $n+1$ verschiedene Ideale $\mathfrak{a}_i^{(1)}, \ldots, \mathfrak{a}_i^{(n+1)}$ finden, derart dass die Erweiterungen solcher $n+1$ Ideale in k resp. $\mathfrak{a}^{(1)}, \mathfrak{a}^{(2)}, \ldots, \mathfrak{a}^{(n+1)}$ sind. Dann stellen offenbar

$$\mathfrak{a}_i^{(1)} H_i^{(\mathfrak{m})}, \quad \ldots\ldots\ldots, \quad \mathfrak{a}_i^{(n+1)} H_i^{(\mathfrak{m})}$$

$n+1$ verschiedene Klassen nach $H_i^{(\mathfrak{m})}$ in $A_i^{(\mathfrak{m}_i)}$ dar, wobei $A_i^{(\mathfrak{m}_i)}$ die Gesamtheit aller zu $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{m} \wedge k_i$ primen Ideale aus k_i bedeutet. Es ist also

$$n+1 \leqq [A_i^{(\mathfrak{m}_i)} : H_i^{(\mathfrak{m})}] = \frac{[A_i^{(\mathfrak{m}_i)} : H_i^{(\mathfrak{m}_i)}]}{[H_i^{(\mathfrak{m})} : H_i^{(\mathfrak{m}_i)}]},$$

wobei $H_i^{(\mathfrak{m}_i)}$ die mod $\mathfrak{m}_i$ K_i zugeordnete Idealgruppe bezeichnet. Nach dem bekannten Abgrenzungssatz ist aber $[A_i^{(\mathfrak{m}_i)} : H_i^{(\mathfrak{m}_i)}]$ ein Teiler von n. Daher ist

$$n+1 \leqq [A_i^{(\mathfrak{m}_i)} : H_i^{(\mathfrak{m})}] \leqq n,$$

was Widerspruch ist. Es muss also $A^{(\mathfrak{m})} / H^{(\mathfrak{m})}$ endlich und von kleinerer Ordnung als $n+1$ sein.

Weil aber $A^{(\mathfrak{m})} / H^{(\mathfrak{m})}$ endlich ist, so kann man nach Satz 1 sicher einen Index $j \geqq I$ finden, so dass

$$A^{(\mathfrak{m})}/H^{(\mathfrak{m})} \cong A_j^{(\mathfrak{m}_j)}/H_j^{(\mathfrak{m})}$$

gilt. Dabei sind $A_j^{(\mathfrak{m}_j)} = A^{(\mathfrak{m})} \wedge k_j$ und $H_j^{(\mathfrak{m})} = H^{(\mathfrak{m})} \wedge k_j$. Bezeichnet man nun mit $H_j^{(\mathfrak{m}_j)}$ die mod $\mathfrak{m}_j = \mathfrak{m} \wedge k_j$ dem Körper K_j zugeordnete Idealgruppe in k_j, so gilt

$$[A_j^{(\mathfrak{m}_j)} : H_j^{(\mathfrak{m})}] = \frac{[A_j^{(\mathfrak{m}_j)} : H_j^{(\mathfrak{m}_j)}]}{[H_j^{(\mathfrak{m})} : H_j^{(\mathfrak{m}_j)}]}.$$

Da aber $[A_j^{(\mathfrak{m}_j)} : H_j^{(\mathfrak{m}_j)}]$ ein Teiler von n ist, so ist es auch $[A_j^{(\mathfrak{m}_j)} : H_j^{(\mathfrak{m})}]$.

Es gilt folgender

Satz 4. *Es sei K ein beliebiger Erweiterungskörper vom Grade n über k und $\mathfrak{m}$ ein Idealmodul in k. Dann ist der Index von $A^{(\mathfrak{m})}$ nach der mod $\mathfrak{m}$ dem Körper K zugeordneten Idealgruppe $H^{(\mathfrak{m})}$ in k ein Teiler von n: $[A^{(\mathfrak{m})} : H^{(\mathfrak{m})}] \mid n$.*

Wir können nun ohne Schwierigkeit zeigen, dass für zwei Idealmoduln $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ in k

$$[A^{(\mathfrak{m})} : H^{(\mathfrak{m})}] \,\big|\, [A^{(\mathfrak{n})} : H^{(\mathfrak{n})}]$$

ist, falls $\mathfrak{m}$ ein Teiler von $\mathfrak{n}$ ist. Da für jeden Idealmodul $\mathfrak{m}$ $[A^{(\mathfrak{m})} : H^{(\mathfrak{m})}] \leqq n$ ist, so existiert sicher ein Idealmodul $\mathfrak{m}$ in k von der Art, dass die mod $\mathfrak{m}$ K zugeordnete Idealgruppe $H^{(\mathfrak{m})}$ in $A^{(\mathfrak{m})}$ den *maximalen Index* h angibt. Ist nun $\mathfrak{n}$ ein Idealmodul in k von der Art, dass $[A^{(\mathfrak{n})} : H^{(\mathfrak{n})}] = h$ wird, so kann man leicht beweisen, dass

$$H^{(\mathfrak{m})} = H^{(\mathfrak{n})}$$

ist. Die Klasse der Idealgruppen in k, zu der das obige $H^{(\mathfrak{m})}$ vom Index h gehört, ist also durch den Körper K eindeutig bestimmt. Wir bezeichnen diese Klasse durch H und nennen sie einfach die *K zugeordnete Idealgruppe* in k. Ferner nennen wir den Führer von H den *Führer von K in bezug auf k* (oder *nach k*). Im folgenden gebrauchen wir oft der Abkürzung halber statt $A^{(\mathfrak{m})}/H^{(\mathfrak{m})}$ und $[A^{(\mathfrak{m})} : H^{(\mathfrak{m})}]$ auch die Bezeichnungen

$$A/H \quad \text{und} \quad [A : H],$$

wenn kein Missverständnis eintritt.

Wir wollen vorläufig den Körper K besonders als über k *abelsch* voraussetzen, und weiterhin alle bisherigen Bezeichnungen festhalten. Wenn man den früher bestimmten Index I von vornherein hinreichend gross wählt, dann kann man ohne Beschädigung der Allgemeinheit annehmen, dass für jeden Index $i \geqq I$ der Körper $K_i = k_i(\theta)$ auch über k_i abelsch, also ein Klassenkörper, ist. Wir beweisen nun

Satz 5. *Es sei K ein abelscher Körper vom Grade n über k und $\mathfrak{m}$ ein Idealmodul* in k. *Dann ist der Index von $A^{(\mathfrak{m})}$ nach der mod $\mathfrak{m}$ K zugeordneten Idealgruppe $H^{(\mathfrak{m})}$ prim zum unendlichen Bestandteile N^* des absoluten Grades von k.*

Beweis. Wir nehmen an, dass ein Primteiler l von N^* im Index $[A^{(\mathfrak{m})} : H^{(\mathfrak{m})}]$ aufgeht. Unter allen Klassen von $A^{(\mathfrak{m})}$ nach $H^{(\mathfrak{m})}$ existiert dann eine, deren Ordnung gleich l ist. Es sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal aus einer solchen Klasse. Wählt man dann einen passenden Approximationskörper k_i von k, so findet man in k_i ein Ideal $\mathfrak{a}_i$, dessen Erweiterung in k gleich $\mathfrak{a}$ ist. Dabei kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass i grösser ist als der früher bestimmte Index I und nach Satz 1

$$A^{(\mathfrak{m})}/H^{(\mathfrak{m})} \cong A_i^{(\mathfrak{m}_i)}/H_i^{(\mathfrak{m})}$$

gilt, wobei $H_i^{(\mathfrak{m})} = H^{(\mathfrak{m})} \wedge k_i$ ist. Nach der obigen Isomorphierelation ist die Ordnung der Klasse $\mathfrak{a}_i H_i^{(\mathfrak{m})}$ nach $H_i^{(\mathfrak{m})}$ gleich l. Die Idealgruppe $H_i^{(\mathfrak{m})}$ enthält aber bekanntlich mengentheoretisch die mod $\mathfrak{m}_i$ dem Körper K_i zugeordnete Idealgruppe $H_i^{(\mathfrak{m}_i)}$, wobei $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{m} \wedge k_i$ ist. Ist nun $\mathfrak{f}_i$ der Führer von K_i nach k_i und H_i die mod $\mathfrak{f}_i$ dem Körper K_i zugeordnete Idealgruppe in k_i, so gilt allgemein

$$H_i \leqq H_i^{(\mathfrak{m}_i)} \leqq H_i^{(\mathfrak{m})}.$$

Da es aber in $\mathfrak{a}_i H_i^{(\mathfrak{m})}$ unendlich viele zu $\mathfrak{f}_i$ prime Ideale gibt, so kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\mathfrak{a}_i$ von vornherein zu $\mathfrak{f}_i$ prim ist. Es existiert also sicher eine Klasse $\mathfrak{a}_i H_i$ unter den sämtlichen Klassen A_i nach H_i, wobei A_i die Gesamtheit aller zu $\mathfrak{f}_i$ primen Ideale aus k_i bezeichnet. Da H_i eine Untergruppe von $H_i^{(\mathfrak{m})}$ ist, so kann man leicht bestätigen, dass die Ordnung m von $\mathfrak{a}_i H_i$ nach H_i durch l teilbar ist.

Ist nun m genau durch l^e teilbar, so kann man nach Annahme über l einen Approximationskörper $k_j > k_i$ so wählen, dass

$$[k_j : k_i] = g$$

durch l^e teilbar ist. Da aber

$$N_{k_j k_i}(\mathfrak{a}_i^{\frac{m}{l^e}}) = \mathfrak{a}_i^{g\frac{m}{l^e}} = (\mathfrak{a}_i^m)^{\frac{g}{l^e}} \in H_i$$

ist, so gehört das Ideal $\mathfrak{a}_i^{\frac{m}{l^e}}$ nach dem bekannten Verschiebungssatz zu $H_j^{(\mathfrak{f}_i)}$, wobei $H_j^{(\mathfrak{f}_i)}$ die mod $\mathfrak{f}_i$ K_j zugeordnete Idealgruppe in k_j ist. Da der Führer $\mathfrak{f}_j$ von K_j nach k_j ein Teiler von $\mathfrak{f}_i$ ist, so beweist man leicht, dass die mod $\mathfrak{f}_j$ K_j zugeordnete Idealgruppe H_j mengentheoretisch $H_j^{(\mathfrak{f}_i)}$ enthält: $H_j \geqq H_j^{(\mathfrak{f}_i)}$. Also ist $\mathfrak{a}_i^{\frac{m}{l^e}}$ in H_j enthalten. Wir zeigen aber, dass $H_j^{(\mathfrak{m})} = H^{(\mathfrak{m})} \wedge k_j$ das Ideal $\mathfrak{a}_i^{\frac{m}{l^e}}$ enthält. Da nämlich $H_j \leqq H_j^{(\mathfrak{m})}$ ist, so erhält man durch Befreiung aller zu $\mathfrak{m}_j \mathfrak{f}_j$ nicht primen Ideale von H_j und $H_j^{(\mathfrak{m})}$ folgende mengentheoretische Ungleichung

$$H_j^{(\mathfrak{m}_j \mathfrak{f}_j)} \leqq H_j^{(\mathfrak{m})(\mathfrak{m}_j \mathfrak{f}_j)} .$$

Offenbar ist $\mathfrak{a}_i^{\frac{m}{l^e}}$ in $H_j^{(\mathfrak{m}_j \mathfrak{f}_j)}$ enthalten, ist also

$$\mathfrak{a}_i^{\frac{m}{l^e}} \in H_j^{(\mathfrak{m})} .$$

Daher ist

$$\mathfrak{a}^{\frac{m}{l^e}} = \mathfrak{a}_i^{\frac{m}{l^e}} \mathfrak{o} \in H^{(\mathfrak{m})} .$$

Da aber nach Annahme $\mathfrak{a}^l \in H^{(\mathfrak{m})}$ und $\left(l, \frac{m}{l^e}\right) = 1$ ist, so ist $\mathfrak{a}$ selbst ein Ideal aus $H^{(\mathfrak{m})}$, was aber Widerspruch ist. Es muss also l zu $[A^{(\mathfrak{m})} : H^{(\mathfrak{m})}]$ prim sein, w.z.b.w.

Bezeichnent man nun mit n_0 denjenigen maximalen Teiler von n, welcher zu N^* prim ist, so folgt aus Sätzen 4 und 5

Zusatz. Der Index $[A^{(\mathfrak{m})} : H^{(\mathfrak{m})}]$ ist ein Teiler von n_0.

Wir betrachten weiter einen abelschen Erweiterungskörper K vom Grade n über k. Für einen Index $i \geqq I$ ist dann K_i über k_i abelsch. Bezeichnet man nun mit $\mathfrak{f}_i$ den Führer von K_i nach k_i und mit H_i die mod $\mathfrak{f}_i$ K_i zugeordnete Idealgruppe in k_i, so gilt bekanntlich

$$[A_i : H_i] = n ,$$

wobei A_i die Gesamtheit aller zu $\mathfrak{f}_i$ primen Ideale aus k_i bedeutet. Für einen beliebigen Index $j > i$ gilt nach dem bekannten Verschiebungssatz mengenthoretisch

$$H_i \leqq H_j^{(\mathfrak{f}_i)} ,$$

wobei $H_j^{(\mathfrak{f}_i)}$ die mod $\mathfrak{f}_i$ dem Körper K_j zugeordnete Idealgruppe in k_j bedeutet. Wir bezeichnen nun mit $\mathfrak{f}_j$ den Führer von K_j nach k_j und mit H_j die mod $\mathfrak{f}_j$ dem Körper K_j zugeordnete Idealgruppe in k_j. Dann gilt mengentheoretisch

$$H_j^{(\mathfrak{f}_i)} \leqq H_j .$$

Es ist also mengentheoretisch

$$H_I \leqq H_{I+1} \leqq \ldots\ldots\ldots\ldots \leqq H_i \leqq \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Daher können wir die Vereinigungsmenge H von $H_I, \ldots, H_i, \ldots$ bilden.

Wenn man insbesondere n als zu N^* prim annimmt, dann gilt folgender

Satz 6. *Es sei K ein endlicher abelscher Körper über k, dessen Grad n zu N^* prim ist. Dann ist die K zugeordnete Idealgruppe in k vom Index n in A.*

Beweis. Wenn man den früher bestimmten Index I von vornherein hinreichend gross wählt, dann kann man nach Voraussetzung annehmen, dass für jeden Approximationskörper $k_i > k_I$ der Grad $[k_i : k_I]$ zu n prim ist. Wir bezeichnen nun mit $\mathfrak{f}_i$ den Führer von K_i nach k_i und mit H_i die mod $\mathfrak{f}_i$ K_i zugeordnete Idealgruppe in k_i. Dann kann man, wie oben gezeigt, die Vereinigungsmenge H von $H_I, \ldots, H_i, \ldots$ bilden.

Es sei $\mathfrak{a}_i$ ein zu $\mathfrak{f}_i$ primes Ideal aus k_i, welches in einem Approximationskörper $k_j > k_i$ zu H_j gehört. Dann gehört $\mathfrak{a}_i$ der mod $\mathfrak{f}_i$ K_j zugeordneten Idealgruppe $H_j^{(\mathfrak{f}_i)}$ an, weil $H_j^{(\mathfrak{f}_i)}$ aus H_j durch Befreiung aller zu $\mathfrak{f}_i$ nicht primen Ideale entsteht. Nach dem bekannten Verschiebungssatz muss dann $N_{k_j k_i}(\mathfrak{a}_i)$ zu H_i gehören. Bezeichnet man mit g den Grad von k_j nach k_i, so ist

$$\mathfrak{a}_i^g \in H_i .$$

Da aber nach Annahme $(n, g) = 1$ ist, so ist $\mathfrak{a}_i$ bereits ein Ideal aus H_i, d. h.

$$H_j \cap k_i = H_j^{(\mathfrak{f}_i)} \cap k_i = H_i .$$

Hieraus folgt sofort, dass die K_i zugeordnete Idealgruppe in k_i mod $\mathfrak{f}_j \cap k_i$ erklärbar ist. Da aber $\mathfrak{f}_i$ der Führer von K_i nach k_i ist, so ist

$$\mathfrak{f}_i \mid \mathfrak{f}_j \cap k_i .$$

Anderseits ist aber in k_j

$$\mathfrak{f}_j \mid \mathfrak{f}_i .$$

Hieraus folgt also

$$\mathfrak{f}_i = \mathfrak{f}_j \wedge k .$$

Wie bekannt ist $H_j \wedge k_i$ mod $\mathfrak{f}_j \wedge k_i = \mathfrak{f}_i$ erklärt. Aus $H_j \wedge k_i = H_i$ folgt also, dass mengenthoretisch $H_j \wedge k_i = H_i$ ist. Ebenso gilt mengentheoretisch $H \wedge k_i = H_i$. Nun können wir in k den Vereinigungsidealmodul $\mathfrak{f}$ von $\mathfrak{f}_I, \ldots, \mathfrak{f}_i, \ldots$ bilden, weil $\mathfrak{f}_j \wedge k_i = \mathfrak{f}_i$ $(j, i \geqq I)$ ist. Wie auf S. 81 gezeigt, ist dann H mod $\mathfrak{f}$ erklärt. Da aber nach Konstruktion $\mathfrak{f} \wedge k_i = \mathfrak{f}_i$ ist, so schliesst man aus dem vorher Bemerkten, dass H die mod $\mathfrak{f}$ dem Körper K zugeordnete Idealgruppe ist[1].

Aus $H_i = H \wedge k_i$ folgt nach Satz 1

$$A^{(\mathfrak{f})} / H \cong A_i / H_i ,$$

falls der Index i hinreichend gross ist. Dabei bedeutet A_i die Gesamtheit aller zu $\mathfrak{f}_i$ primen Ideale aus k_i. Da aber nach dem Umkehrsatz $[A_i : H_i] = n$ ist, so gilt

$$[A : H] = n .$$

Da H in $A^{(\mathfrak{f})}$ den maximalen Index n angibt, so ist die K zugeordnete Idealgruppe vom Index n in A. Damit ist der Beweis beendet.

Im Beweis von Satz 6 haben wir gezeigt, dass H mod $\mathfrak{f}$ erklärt ist. Bezeichnet man nun mit $\bar{\mathfrak{f}}$ den Führer von K nach k, so gibt es bekanntlich die mod $\bar{\mathfrak{f}}$ K zugeordnete Idealgruppe $\bar{H}$ in k, derart dass $H = \bar{H}$ wird. Nach Satz 2 ist aber

$$\bar{H}_i = \bar{H} \wedge k_i = H \wedge k_i = H_i$$

wobei $i \geqq I$ ist. Bekanntlich ist $\bar{H}_i$ mod $\bar{\mathfrak{f}}_i = \bar{\mathfrak{f}} \wedge k$ erklärt. Also ist $\bar{\mathfrak{f}}_i$ durch $\mathfrak{f}_i$ teilbar, weil $\mathfrak{f}_i$ den Führer von K_i nach k_i bedeutet und $\bar{H}_i = H_i$ ist. Anderseits ist aber $\bar{\mathfrak{f}} \mid \mathfrak{f}$, weil $\mathfrak{f}$ nach Konstruktion ein abgeschlossener Idealmodul ist. Also ist

$$\bar{\mathfrak{f}}_i \mid \mathfrak{f}_i .$$

Hieraus folgt ohne weiteres

$$\mathfrak{f}_i = \bar{\mathfrak{f}}_i .$$

---

(1) Nach dem auf S. 84 Gezeigten ist die mod $\mathfrak{f}$ K zugeordnete Idealgruppe die Vereinigungsmenge von $H_I, H_{I+1}, \ldots, H_i, \ldots$, weil H_i $(i \geqq I)$ die mod $\mathfrak{f}_i$ K_i zugeordnete Idealgruppe ist. Da aber nach Definition H die Vereinigungsmenge von $H_I, H_{I+1}, \ldots, \ldots$ ist, so ist H die mod $\mathfrak{f}$ K zugeordnete Idealgruppe in k.

Wie man sich leicht überzeugt, ist

$$\lim_{i\to\infty} \bar{\bar{\mathfrak{f}}}_i = \bar{\bar{\mathfrak{f}}}\,.$$

Also muss

$$\mathfrak{f} = \lim_{i\to\infty} \mathfrak{f}_i = \lim_{i\to\infty} \bar{\bar{\mathfrak{f}}}_i = \bar{\bar{\mathfrak{f}}}$$

sein, d.h. $\mathfrak{f}$ ist der Führer von H.

Zusatz. Es sei K ein endlicher abelscher Körper über k, dessen Grad zu N^* prim ist, und $\mathfrak{f}$ der Führer von K nach k. Dann ist der Durchschnitt von $\mathfrak{f}$ mit k_i der Führer von K_i nach k_i, falls i hinreichend gross ist. Es gilt noch

$$\lim_{i\to\infty} \mathfrak{f}_i = \mathfrak{f}\,.$$

Nun betrachten wir wieder einen beliebigen endlichen abelschen Körper K über k. Dann enthält K denjenigen maximalen Teilkörper $K^{(0)}$ über k, dessen Grad n_0 nach k zum unendlichen Bestandteile des absoluten Grades von k prim ist. Wir bezeichnen nun durch $\mathfrak{f}^{(0)}$ den Führer von $K^{(0)}$ nach k und mit $H^{(0)}$ die mod $\mathfrak{f}^{(0)}$ dem Körper $K^{(0)}$ zugeordnete Idealgruppe in k. Betrachten wir dann die mod $\mathfrak{f}^{(0)}$ K zugeordnete Idealgruppe H in k, so ist offenbar mengentheoretisch

$$H \leqq H^{(0)}, \qquad \text{d.h.} \qquad [A^{(0)} : H] \geqq [A^{(0)} : H^{(0)}]\,,$$

wobei $A^{(0)}$ die Gesamtheit aller zu $\mathfrak{f}^{(0)}$ primen Ideale aus A ist. Nach Zusatz zu Satz 5 gilt aber einerseits $[A^{(0)} : H] \leqq n_0$ und nach Satz 6 anderseits $[A^{(0)} : H^{(0)}] = n_0$. Es muss also $[A^{(0)} : H] = n_0$ und infolgedessen mengentheoretisch $H = H^{(0)}$ sein.

Hieraus folgt ohne Schwierigkeit

Satz 7. *Es sei K ein abelscher Körper vom Grade n über k und n_0 derjenige maximale Teiler von n, der zum unendlichen Bestandteile des absoluten Grades von k prim ist. Dann ist die K zugeordnete Idealgruppe in k vom Index n_0 in A.*

§ 4. Endliche Erweiterungskörper über einem unendlichen algebraischen Zahlkörper.

Mit Hilfe der Theorie der endlichen abelschen Erweiterungen können wir jetzt beliebige endliche Erweiterungen über dem im § 1 definierten Körper k näher untersuchen. Wie im § 3 gezeigt, existiert zu einem endlichen algebraischen Erweiterungskörper K vom Grade n über k eine primitive Zahl θ in K, so dass für einen Index $i \geqq I$ $K_i = k_i(\theta)$ auch vom Grade n über k_i ist, falls I passend gross gewählt ist. Im folgenden bezeichne ich mit $K^{(1)}$ den maximalen abelschen Teilkörper von K über k und mit θ_1 eine primitive Zahl von $K^{(1)}$ über $k : K^{(1)} = k(\theta_1)$. Wenn man den oben bestimmten Index I von vornherein hinreichend gross wählt, dann kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass für jeden Index $i \geqq I$

$$[K^{(1)} : k] = [k_i(\theta_1) : k_i]$$

und $K_i^{(1)} = k_i(\theta_1)$ über k_i *abelsch* ist. Wie man sich leicht überzeugt, wird dabei $k_i(\theta_1)$ der maximale abelsche Teilkörper von K_i über k_i.

Wir bezeichnen nun mit $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}^{(1)}$ resp. die Führer von K, $K^{(1)}$ nach k und mit H, $H^{(1)}$ resp. die mod $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}^{(1)}$ den Körpern K, $K^{(1)}$ zugeordneten Idealgruppen in k. Für ein beliebiges gemeinsames Multiplum $\bar{\mathfrak{f}}$ von $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}^{(1)}$ gelten also

$$H = H^{(\bar{\mathfrak{f}})} \quad \text{und} \quad H^{(1)} = H^{(1)(\bar{\mathfrak{f}})},$$

wobei $H^{(\bar{\mathfrak{f}})}$, $H^{(1)(\bar{\mathfrak{f}})}$ resp. die mod $\bar{\mathfrak{f}}$ den Körpern K, $K^{(1)}$ zugeordneten Idealgruppen in k bedeuten. Aus $K \geqq K^{(1)}$ folgt ohne weiteres, dass mengentheoretisch

$$H^{(\bar{\mathfrak{f}})} \leqq H^{(1)(\bar{\mathfrak{f}})}$$

ist. Bisher konnte $\bar{\mathfrak{f}}$ ein beliebiges gemeinsames Multiplum von $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}^{(1)}$ sein. Wir wollen aber später $\bar{\mathfrak{f}}$ auf einen speziellen Idealmodul beschränken.

Es sei nun $\mathfrak{a}$ ein Ideal aus $H^{(1)(\bar{\mathfrak{f}})}$. Dann kann man sicher einen passenden Approximationskörper $K_j^{(1)}$ $(j \geqq I)$ von $K^{(1)}$ und darin ein Ideal $\mathfrak{A}_j$ finden, derart dass $(\mathfrak{A}_j, \bar{\mathfrak{f}}_j) = 1$ und $N_{K_j^{(1)}k_j}(\mathfrak{A}_j)\mathfrak{o} = \mathfrak{a}(\alpha)$ ist, wobei $\bar{\mathfrak{f}}_j$ den Durchschnitt von $\bar{\mathfrak{f}}$ mit k_j und (α) ein Ideal aus dem Strahl mod $\bar{\mathfrak{f}}$ bedeutet. Wir wollen also von nun an annehmen, dass der Idealmodul $\bar{\mathfrak{f}}$ von vornherein so gewählt ist, dass $\bar{\mathfrak{f}}_j$ durch den Führer $\mathfrak{f}_j^{(1)}$ von $K_j^{(1)}$ nach k_j teilbar ist.(1) Wir bezeichnen mit $H_j^{(1)}$ die mod $\mathfrak{f}_j^{(1)}$ $K_j^{(1)}$ zugeordnete Idealgruppe in k_j. Dann enthält $H_j^{(1)}$ nach Definition das Ideal $N_{K_j^{(1)}k_j}(\mathfrak{A}_j)$. Da $\bar{\mathfrak{f}}_j$ durch $\mathfrak{f}_j^{(1)}$ teilbar ist, so folgt aus dem bekannten Abgrezungssatz

$$H_j^{(1)} = H_j^{(\bar{\mathfrak{f}}_j)},$$

(1) Dies ist stets möglich, wenn man als $\bar{\mathfrak{f}}$ das Produkt von $\mathfrak{f}$ mit dem Erweiterungsideal von $\mathfrak{f}_I^{(1)}$ (dem Führer von $K_I^{(1)}$ nach k_I) in k nimmt.

wobei $H_j^{(\mathfrak{f}_j)}$ die mod $\mathfrak{f}_j$ dem Körper K_j zugeordnete Idealgruppe in k_j bedeutet. Offenbar entsteht $H_j^{(\mathfrak{f}_j)}$ aus $H_j^{(1)}$ durch Befreiung aller zu $\mathfrak{f}_j$ nicht primen Ideale. Da aber $\mathfrak{A}_j$ zu $\mathfrak{f}_j$ prim ist, so gehört $N_{K_j^{(1)}k_j}(\mathfrak{A}_j)$ sicher zu $H_j^{(\mathfrak{f}_j)}$. Nach der mengentheoretischen Relation $H_j^{(\mathfrak{f}_j)} \leqq H^{(\mathfrak{f})} \wedge k_j$ muss dann $N_{K_j^{(1)}k_j}(\mathfrak{A}_j)\cdot \mathfrak{o}$ in $H^{(\mathfrak{f})}$ enthalten sein. Damit ist gezeigt, dass aus $\mathfrak{a}\,(a) = N_{K_j^{(1)}k_j}(\mathfrak{A}_j)\cdot \mathfrak{o}$ mengentheoretisch

$$H^{(\mathfrak{f})} \geqq H^{(1)(\mathfrak{f})}$$

folgt. Aus dem früher Bewiesenen gilt also mengentheoretisch

$$H^{(\mathfrak{f})} = H^{(1)(\mathfrak{f})}, \qquad \text{d. h.} \qquad H = H^{(1)}.$$

Wenn man nun mit $K^{(0)}$ denjenigen maximalen abeslchen Teilkörper von K über k bezeichnet, dessen Grad n_0 zum unendlichen Bestandteile N^* des absoluten Grades von k prim ist, so ist nach Satz 7 $H^{(1)}$ auch die $K^{(0)}$ zugeordnete Idealgruppe in k. Es gilt besonders

$$[A^{(\mathfrak{f}^{(1)})} : H^{(1)}] = n_0 .$$

Damit ist bewiesen:

Satz 8. *Es sei K ein endlicher algebraischer Erweiterungskörper über k und $K^{(0)}$ derjenige maximale abelsche Teilkörper von K über k, dessen Grad n_0 nach k zum unendlichen Bestandteile des absoluten Grades von k prim ist. Dann wird die K zugeordnete Idealgruppe H in k gleichzeitig die $K^{(0)}$ zugeordnete Idealgruppe in k und es gilt besonders*

$$[A : H] = n_0 .$$

Ich betrachte nun für die weitere Untersuchung eine spezielle Klasse der Idealgruppen in k, welche ich im folgenden *K-Gruppen* nennen will. Und zwar heisst eine Idealgruppe H in k eine K-Gruppe, wenn es in k einen Teilkörper k_* endlichen Grades mit folgender Eigenschaft gibt:

Es existiert ein Erklärungsmodul $\mathfrak{m}$ von H derart, dass für die mod $\mathfrak{m}$ erklärte Idealgruppe $H^{(\mathfrak{m})}$ in H der Durchschnitt $H_\nu^{(\mathfrak{m})}$ von $H^{(\mathfrak{m})}$ mit einem beliebigen endlichen, k_* enthaltenden Teilkörper k_ν von k gleich ist der aus allen derjenigen zu $\mathfrak{m}_*$ primen Idealen bestehenden Idealgruppe, deren Normen nach k_* zu $H_*^{(\mathfrak{m})} = H^{(\mathfrak{m})} \wedge k_*$ gehören, wobei $\mathfrak{m}_* = \mathfrak{m} \wedge k_*$ ist.

Aus Definition der K-Gruppen folgt nun

Satz 9. *Es sei K ein endlicher algebraischer Erweiterungskörper über k, und H die K zugeordnete Idealgruppe in k. Dann ist H eine K-Gruppe.*

Beweis. Wir bezeichnen mit $K^{(0)}$ denjenigen maximalen abelschen Teilkörper von K über k, dessen Grad n_0 nach k zu N^* prim ist. Dann ist nach Satz 8 die K zugeordnete Idealgruppe gleich der $K^{(0)}$ zugeordneten Idealgruppe in k. Ferner bezeichnen wir mit $\mathfrak{f}^{(0)}$ den Führer von $K^{(0)}$ nach k und mit $H^{(0)}$ die mod $\mathfrak{f}^{(0)}$ $K^{(0)}$ zugeordnete Idealgruppe in k. Ist θ_0 eine primitive Zahl von $K^{(0)}$ über k, so existiert ein passender Index I, so dass für jeden Index $i \geqq I$ der Körper $K_i^{(0)} = k_i(\theta_0)$ über k_i *abelsch vom Grade* n_0 ist. Wählt man nun den Index I hinreichend gross, so ist nach Zusatz zu Satz 6 $\mathfrak{f}_i^{(0)} = \mathfrak{f}^{(0)} \wedge k_i$ der Führer von $K_i^{(0)}$ nach k_i $(i \geqq I)$. Da aber

$$K_i^{(0)} = k_i K_I^{(0)}$$

ist, so besteht die mod $\mathfrak{f}_I^{(0)}$ dem Körper $K_i^{(0)}$ zugeordnete Idealgruppe H'_i in k_i nach dem Verschiebungssatz aus allen derjenigen zu $\mathfrak{f}_I^{(0)}$ primen Ideale, deren Normen nach k_I in $H_I^{(0)}$ hineinfallen, wobei $H_I^{(0)}$ die mod $\mathfrak{f}_I^{(0)}$ dem Körper $K_I^{(0)}$ zugeordnete Idealgruppe in k_I bedeutet. Offenbar gilt noch, dass $H'_i = H_i^{(0)}$ ist, wobei $H_i^{(0)}$ die mod $\mathfrak{f}_i^{(0)}$ dem Körper $K_i^{(0)}$ zugeordnete Idealgruppe in k_i bedeutet. Wenn aber der Index I hinreichend gross gewählt ist, dann ist nach Satz 6 und seinem Zusatz für jeden Index $i \geqq I$ stets

$$H_i^{(0)} = H^{(0)} \wedge k_i, \qquad \text{d. h.} \qquad H^{(0)} \wedge k_i = H'_i.$$

Wenn man also als den Körper k_* in der Definition der K-Gruppen den Körper k_I nimmt, so wird H sicher eine K-Gruppe, weil ein beliebiger Oberkörper von k_I immer als ein Approximationskörper k_i von k betrachtet werden kann.

§ 5. Klassenkörper.

Wir legen in diesem Paragraphen den im § 1 definierten Körper k zugrunde und untersuchen spezielle abelsche Erweiterungskörper — Klassenkörper — über k. Ein Erweiterungskörper vom Grade n über k heisse ein *Klassenkörper*, wenn der Index der K zugeordneten Idealgruppe H in k gleich n ist: $[A:H] = n = [K:k]$.

Für einen Klassenkörper beweise ich zunächst

Satz 10. *Ein Erweiterungskörper K vom Grade n über k ist dann und nur dann Klassenkörper, wenn K über k abelsch und n zum unendlichen Bestandteile N^* des absoluten Grades von k prim ist.*

Beweis. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{f}$ den Führer von K nach k und mit $H^{(\mathfrak{f})}$ die mod $\mathfrak{f}$ dem Körper K zugeordnete Idealgruppe in k. Dann ist nach Satz 8 $H^{(\mathfrak{f})}$ gleichzeitig die mod $\mathfrak{f}$ dem Körper $K^{(0)}$ zugeordnete Idealgruppe in k, wobei $K^{(0)}$ denjenigen maximalen abelschen Teilkörper von K über k bezeichnet, dessen Grad n_0 nach k zu N^* prim ist. Ferner gilt noch $[A^{(\mathfrak{f})}: H^{(\mathfrak{f})}] = n_0$.

Wenn also K ein Klassenkörper ist, so folgt aus Definition

$$[A^{(\mathfrak{f})}: H^{(\mathfrak{f})}] = n\,,$$

d.h. $n = n_0$. Daher ist $K^{(0)} = K$, weil $K^{(0)} \subseteqq K$ ist. K ist also ein abelscher Körper vom Grade n über k, und es ist $(n\,,\ N^*) = 1$.

Ist umgekehrt $(n\,,\ N^*) = 1$ und K über k abelsch, so folgt aus Satz 6 $[A^{(\mathfrak{f})}: H^{(\mathfrak{f})}] = n$, ist also K ein Klassenkörper.

Wir wollen hier einen Hilfssatz beweisen, welcher im folgenden oft benutzt wird:

Hilfssatz. Es sei K ein Klassenkörper vom Grade n über k. Dann gilt:

1.) Es existiert eine primitive Zahl θ von K über k und ein Index I, derart dass für jeden Index $i \geqq I$

$$K_i = k_i(\theta)$$

über k_i abelsch vom Grade n ist.

2.) Ist die K zugeordnete Idealgruppe H nach einem Idealmodul $\mathfrak{m}$ erklärbar, d.h. $H = H^{(\mathfrak{m})}$, so ist $H_i^{(\mathfrak{m})} = H^{(\mathfrak{m})} \wedge k_i$ gleich der K_i zugeordneten Idealgruppe in k_i, wobei $i \geqq I$ ist.

Beweis. Dass zu einer primitiven Zahl θ von K über k ein in 1.) verlangter Index existiert, hat man schon oft gesehen.

Wir wollen nun den in 1.) bestimmten Index I hinreichend gross wählen, so dass nach Satz 1 für jeden Index $i \geqq I$

$$\mathrm{A}^{(\mathfrak{m})}/H^{(\mathfrak{m})} \cong A_i^{(\mathfrak{m})}/H_i^{(\mathfrak{m})}$$

gilt. Dabei sind $H_i^{(\mathfrak{m})} = H^{(\mathfrak{m})} \wedge k_i$ und $A_i^{(\mathfrak{m})} = A^{(\mathfrak{m})} \wedge k_i$. Da nach Voraussetzung K Klassenkörper ist, so ist

$$n = [A^{(\mathfrak{m})} : H^{(\mathfrak{m})}] = [A_i^{(\mathfrak{m})} : H_i^{(\mathfrak{m})}]\,.$$

Offenbar ist die mod $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{m} \wedge k_i$ dem Körper K_i zugeordnete Idealgruppe in k_i mengentheoretisch in $H_i^{(\mathfrak{m})}$ enthalten. Es ist also

$$n = [A_i^{(\mathfrak{m})} : H_i^{(\mathfrak{m})}] = \frac{[A_i^{(\mathfrak{m})} : H_i^{(\mathfrak{m}_i)}]}{[H_i^{(\mathfrak{m})} : H_i^{(\mathfrak{m}_i)}]} .$$

Aus $[A_i^{(\mathfrak{m})} : H_i^{(\mathfrak{m}_i)}] \leqq n$ folgt ohne weiteres $[H_i^{(\mathfrak{m})} : H_i^{(\mathfrak{m}_i)}] = 1$, d. h. es gilt mengentheoretisch

$$H_i^{(\mathfrak{m})} = H_i^{(\mathfrak{m}_i)} .$$

Ferner folgt noch, dass die K_i zugeordnete Idealgruppe in k_i mod $\mathfrak{m}_i$ erklärbar ist, weil $[A_i^{(\mathfrak{m}_i)} : H_i^{(\mathfrak{m}_i)}] = n$ ist. $H_i^{(\mathfrak{m})}$ ist also gleich der K_i zugeordneten Idealgruppe in k_i, w. z. b. w.

Satz 11. Isomorphiesatz. *Es sei K ein Klassenkörper vom Grade n über k und H die K zugeordnete Idealgruppe in k. Dann ist die Faktorgruppe A/H isomorph zur galois·chen Gruppe von K nach k.*

Beweis. Nach dem obigen Hilfssatz existieren eine primitive Zahl θ und ein passender Index I, derart dass für jedes $i \geqq I$ $K_i = k_i(\theta)$ abelsch vom Grade n über k_i ist. Dann ist offenbar die galoissche Gruppe $\mathfrak{G}$ von K nach k isomorph zu der glaoisschen Gruppe $\mathfrak{G}_i$ von K_i nach k_i $(i \geqq I)$:

$$\mathfrak{G} \cong \mathfrak{G}_i .$$

Es sei nun $\mathfrak{m}$ ein Erklärungsmodul von H. Dann ist die mod $\mathfrak{m}$ K zugeordnete Idealgruppe $H^{(\mathfrak{m})}$ vom Index n in $A^{(\mathfrak{m})}$: $[A^{(\mathfrak{m})} : H^{(\mathfrak{m})}] = n$. Wählt man hierbei den Index I hinreichend gross, so wird für $i \geqq I$

$$A^{(\mathfrak{m})}/H^{(\mathfrak{m})} \cong A_i^{(\mathfrak{m})}/H_i^{(\mathfrak{m})} ,$$

wobei $A_i^{(\mathfrak{m})} = A^{(\mathfrak{m})} \wedge k_i$ und $H_i^{(\mathfrak{m})} = H^{(\mathfrak{m})} \wedge k_i$ sind. Offenbar ist $A_i^{(\mathfrak{m})}$ die Gesamtheit aller zu $\mathfrak{m} \wedge k_i$ primen Ideale aus k_i und $H_i^{(\mathfrak{m})}$ nach dem Hilfssatz gleich der K_i zugeordneten Idealgruppe in k_i. Also gilt nach dem bekannten Isomorphiesatz

$$A_i^{(\mathfrak{m})}/H_i^{(\mathfrak{m})} \cong \mathfrak{G}_i .$$

Hieraus folgt ohne weiteres

$$A/H \cong A^{(\mathfrak{m})}/H^{(\mathfrak{m})} \cong A_i^{(\mathfrak{m})}/H_i^{(\mathfrak{m})} \cong \mathfrak{G}_i \cong \mathfrak{G} ,$$

d. h.

$$A/H \cong \mathfrak{G} .$$

Satz 12. Anordnungs- und Eindeutigkeitssatz. *Es seien K, K' Klassenkörper über k und H, H' resp. die K, K' zugeordneten Idealgruppen in k. Dann bedingen sich die Relationen*

$$K \leqq K' \quad \textit{und} \quad H \geqq H'$$

gegenseitig. Insbesondere ist dann und nur dann $K = K'$, wenn $H = H'$ ist.

Beweis. Wir nehmen einen gemeinsamen abgeschlossenen Erklärungsmodul $\mathfrak{f}$ von H und H' und bezeichen mit $H^{(\mathfrak{f})}$, $H'^{(\mathfrak{f})}$ resp. die mod $\mathfrak{f}$ erklärten Idealgruppen in H und H',

Ist zuerst $K \leqq K'$, so folgt leicht aus Definition mengentheoretisch $H^{(\mathfrak{f})} \geqq H'^{(\mathfrak{f})}$, d. h.

$$H \geqq H'.$$

Ist aber umgekehrt $H \geqq H'$, so ist nach Definition mengentheoretisch $H^{(\mathfrak{f})} \geqq H'^{(\mathfrak{f})}$. Nach dem Hilfssatz können wir einen Index I mit folgenden Eigenschaften bestimmen:

a) Zu einer primitiven Zahl θ bzw. θ' von K bzw. K' existiert ein passender Index I, derart dass für jeden Index $i \geqq I$ $K_i = k_i(\theta)$, $K'_i = k_i(\theta')$ über k *abelsch* und $[K_i : k_i] = [K : k]$, $[K'_i : k] = [K' : k]$ sind.

b) $H_i^{(\mathfrak{f})} = H^{(\mathfrak{f})} \wedge k_i$ bzw. $H_i'^{(\mathfrak{f})} = H'^{(\mathfrak{f})} \wedge k_i$ ist gleich der K_i bzw. K'_i zugeordneten Idealgruppe in k_i.

Nach $H^{(\mathfrak{f})} \geqq H'^{(\mathfrak{f})}$ ist mengentheoretisch

$$H_i^{(\mathfrak{f})} \geqq H_i'^{(\mathfrak{f})}.$$

Nach dem bekannten Anordnungssatz gilt also $K_i \leqq K_i'$. Da offenbar $K = K_i k$ und $K' = K_i' k$ sind, so folgt ohne weiteres

$$K \leqq K'.$$

Nach dem obigen Anordnungsatz beweist man sofort den Eindeutigkeitssatz.

Satz 13. Verschiebungssatz. *Es sei K ein Klassenkörper über k und H die K zugeordnete Idealgruppe in k. Ferner sei k' ein beliebiger endlicher Erweiterungskörper über k. Dann ist das Kompositum Kk' von K und k' ein Klassenkörper über k' und die Kk' zugeordnete Idealgruppe $\overline{H}$ in k' besteht aus allen derjenigen (zu einem Erklärungsmodul von H primen) Ideale mit endlicher Basis, deren Normen nach k in H hineinfallen.*

Beweis. Wir bezeichnen mit N^* den unendlichen Bestandteil des absoluten Grades von k. Da K über k Klassenkörper ist, so ist nach Satz 10 $[K:k]$ prim zu N^* und K über k abelsch. Hieraus folgt sofort, dass Kk' auch über k' abelsch und der Grad von Kk' nach k' zum unendlichen Bestandteile N'^* des absoluten Grades von k' prim ist. Denn $[Kk':k']$ ist ein Teiler von n, ist also prim zu N'^*, weil $N^* = N'^*$ ist.

Wir bezeichnen nun mit $\mathfrak{m}$ einen Erklärungsmodul von H und mit $H^{(\mathfrak{m})}$ die mod $\mathfrak{m}$ K zugeordnete Idealgruppe in $k: H = H^{(\mathfrak{m})}$. Ferner bedeutet $\bar{J}^{(\mathfrak{m})}$ die Gesamtheit aller derjenigen zu $\mathfrak{m}$ primen Ideale mit endlicher Basis in k', deren Normen nach k in $H^{(\mathfrak{m})}$ hineinfallen. Ist dann $\mathfrak{A}$ ein zu $\mathfrak{m}$ primes Ideal aus Kk', so gilt

$$N_k(\mathfrak{A}) = N_{k'k}(N_{k'}(\mathfrak{A})) = N_{Kk}(N_K(\mathfrak{A})) \in H^{(\mathfrak{m})},$$

wobei $N_k(\mathfrak{A})$, $N_{k'}(\mathfrak{A})$, $N_K(\mathfrak{A})$ resp. Normen von $\mathfrak{A}$ aus Kk' nach k, k', K bedeuten. Hieraus folgt sofort, dass $\bar{J}^{(\mathfrak{m})}$ mengentheoretisch die mod $\mathfrak{m}$ Kk' zugeordnete Idealgruppe $\bar{H}^{(\mathfrak{m})}$ enthält, weil $N_{k'}(\mathfrak{A}) \in \bar{H}^{(\mathfrak{m})}$ ist.

Ich will aber umgekehrt zeigen, dass ein Ideal aus $\bar{J}^{(\mathfrak{m})}$ zu $\bar{H}^{(\mathfrak{m})}$ gehört. Nämlich wir bezeichnen mit θ, θ' resp. primitive Zahlen von K, k' über $k: K = k(\theta)$, $k' = k(\theta')$. Dann kann man nach dem Hilfssatz einen passenden Index I mit folgenden Eigenschaften finden:

1.) Für jeden Index $i \geqq I$ sind
   a) $K_i = k_i(\theta)$ über k_i abelsch und $[K_i:k_i] = [K:k]$,
   b) K_ik_i' über k_i' abelsch und $[K_ik_i':k_i'] = [Kk':k']$.

2.) $H^{(\mathfrak{m})}$ ist die Vereinigungsmenge von $H_I^{(\mathfrak{m})}, H_{I+1}^{(\mathfrak{m})}, \ldots, H_i^{(\mathfrak{m})}, \ldots$. Dabei ist $H_i^{(\mathfrak{m})}$ mod $\mathfrak{m} \wedge k_i = \mathfrak{m}_i$ erklärt und gleich der K_i zugeordneten Idealgruppe in k_i.

Wir betrachten nun ein Ideal $\mathfrak{a}'$ aus $\bar{J}^{(\mathfrak{m})}$. Dann kann man in einem passenden Approximationskörper k_i' mit $i \geqq I$ ein Ideal $\mathfrak{a}_i'$ finden, derart dass die Erweiterung von $\mathfrak{a}_i'$ in k' gleich $\mathfrak{a}'$ wird, und $\mathfrak{a}_i'$ zu $\mathfrak{m}_i$ prim ist. Da aber

$$N_{k_i'k_i}(\mathfrak{a}_i')\mathfrak{o} = N_{k'k}(\mathfrak{a}') \in H^{(\mathfrak{m})}$$

ist, so ist nach 2.) $N_{k_i'k_i}(\mathfrak{a}_i')$ Ideal aus $H_i^{(\mathfrak{m})}$. Da $H_i^{(\mathfrak{m})}$ die mod $\mathfrak{m}_i$ K_i zugeordnete Idealgruppe in k_i ist, so besteht nach dem bekannten Verschiebungssatz die mod $\mathfrak{m}_i$ K_ik_i' zugeordnete Idealgruppe $\bar{H}_i^{(\mathfrak{m}_i)}$ in k_i' aus allen derjenigen zu $\mathfrak{m}_i$ primen Ideale aus k_i', deren Normen nach k_i in $H_i^{(\mathfrak{m})}$ hineinfallen. Also gehört das obige Ideal $\mathfrak{a}_i'$ zu $\bar{H}_i^{(\mathfrak{m}_i)}$.

Wie man schon auf S. 84 gesehen hat, ist die Idealgruppe $\overline{H}^{(\mathfrak{m})}$ die Vereinigungsmenge von $\overline{H}_I^{(\mathfrak{m}_I)}, \ldots, \overline{H}_i^{(\mathfrak{m}_i)}, \ldots$. Damit ist gezeigt, dass $\mathfrak{a}'$ zu $\overline{H}^{(\mathfrak{m})}$ gehört, d.h.

$$\overline{J}^{(\mathfrak{m})} \leqq \overline{H}^{(\mathfrak{m})}.$$

Es gilt also mengentheoretisch

$$\overline{H}^{(\mathfrak{m})} = \overline{J}^{(\mathfrak{m})}, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Satz 14. Existenzsatz. *Es sei H eine K-Gruppe von endlichem Index in k. Dann existiert ein H zugeordneter Klassenkörper.*

Beweis. Nach Definition der K-Gruppe kann man sicher in einer passend gewählten Körperkette von k einen Approximationskörper k_I finden, derart dass für jeden Index $i \geqq I$ und einen passenden Erklärungsmodul $\mathfrak{m}$ von H

$$H_i^{(\mathfrak{m})} = H^{(\mathfrak{m})} \wedge k_i$$

gleich ist derjenigen Idealgruppe in k_i, die aus allen zu $\mathfrak{m} \wedge k_I = \mathfrak{m}_I$ primen Ideale aus k_i besteht, deren Normen nach k_I in $H_I^{(\mathfrak{m})}$ hineinfallen. Dabei ist $H^{(\mathfrak{m})}$ die mod $\mathfrak{m}$ erklärte Idealgruppe in H.

Nach dem bekannten Existenzsatz kann man über k_I den $H_I^{(\mathfrak{m})}$ zugeordneten Klassenkörper K_I bilden.[1] Betrachtet man nun das Kompositum $K_i = K_I k_i$ von K_I und k_i, so ist K_i nach dem bekannten Verschiebungssatz und Eindeutigkeitssatz der Klassenkörper zu $H_i^{(\mathfrak{m})}$. Wir bilden nun den Vereinigungskörper K von $K_I, \ldots, K_i, \ldots$. Dann kann man sicher einen passenden Index $I_0 \geqq I$ finden, derart dass für jeden Index $i \geqq I_0$ $[K_i : k_i] = [K : k]$ und $A^{(\mathfrak{m})}/H^{(\mathfrak{m})} \cong A_i^{(\mathfrak{m})}/H_i^{(\mathfrak{m})}$ ist, wobei $A_i^{(\mathfrak{m})} = A^{(\mathfrak{m})} \wedge k_i$ ist. Es ist also

$$[A^{(\mathfrak{m})} : H^{(\mathfrak{m})}] = [K : k].$$

Für jeden Index $i \geqq I_0$ ist aber $H_i^{(\mathfrak{m})}$ mod $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{m} \wedge k_i$ erklärt und infolgedessen die mod $\mathfrak{m}_i$ K_i zugeordnete Idealgruppe in k_i mengentheoretisch gleich zu $H_i^{(\mathfrak{m})}$. Bezeichnet also $\overline{H}^{(\mathfrak{m})}$ die mod $\mathfrak{m}$ K zugeordnete Idealgruppe in k, so ist $\overline{H}^{(\mathfrak{m})}$ offenbar die Vereinigungsmenge von $H_{I_0}^{(\mathfrak{m})}, \ldots, H_i^{(\mathfrak{m})}, \ldots$, d. h. $\overline{H}^{(\mathfrak{m})} = H^{(\mathfrak{m})}$. $H^{(\mathfrak{m})}$ ist also die mod

(1) Genauer gesagt, ist K_I der Klassenkörper von der Art, dass die K_I zugeordnete Idealgruppe in k_I zu $H_I^{(\mathfrak{m})}$ gleich ist.

m K zugeordnete Idealgruppe in k. Da aber $[A^{(\mathfrak{m})}: H^{(\mathfrak{m})}] = [K: k]$ ist, so ist nach Definition K ein Klassenkörper zu H.

Es sei K ein Klassenkörper vom Grade n über k und $\mathfrak{f}$ der Führer von K nach k. Dann kann man für eine primitive Zahl θ von K über k einen Approximationskörper k_I finden, derart dass für jeden Index $i \geqq I$ $K_i = k_i(\theta)$ über k_i abelsch vom Grade n ist. Wählt man hierbei den Index I von vornherein hinreichend gross, so kann man nach dem Zusatz zu Satz 6 annehmen, dass für $i \geqq I$ $\mathfrak{f}_i = \mathfrak{f} \wedge k_i$ der Führer von K_i nach k_i ist.

Ist nun $\mathfrak{p}$ eine in $\mathfrak{f}$ aufgehende Primstelle (d.h. $\mathfrak{p}$ ist entweder ein Primideal aus k oder eine unendliche Primstelle in k), so ist offenbar $\mathfrak{f}_i = \mathfrak{f} \wedge k_i$ durch $\mathfrak{p} \wedge k_i = \mathfrak{p}_i$ teilbar ($i \geqq I$).

Zunächst sei $\mathfrak{p}$ eine unendliche Primstelle in k. Dann ist offenbar $\mathfrak{p}_i$ eine unendliche Primstelle in k_i. Da aber $\mathfrak{p}_i$ im Führer von K_i nach k_i aufgeht, so ist nach dem bekannten Führer-Verzweigungssatz $\mathfrak{p}_i$ in K_i verzweigt, d.h. es existieren n konjugierte komplexe Zahlkörper $K_i^{(1)}, \ldots, K_i^{(\frac{n}{2})}, \ldots, K_i^{(n)}$ über dem $\mathfrak{p}_i$ entsprechenden konjugierten Körper von k_i. Dabei bedeutet $K_i^{(\frac{n}{2}+j)}$ den zu $K^{(j)}$ konjugierten konjugiert-komplexen Körper $\left(\frac{n}{2} \geqq j \geqq 1\right)$. Wir bezeichnen nun mit $k^{\mathfrak{p}}$ den $\mathfrak{p}$ entsprechenden konjugierten Körper zu k. Dann sind

$$k^{(\mathfrak{p})}K_i^{(1)}, \quad \ldots\ldots, \quad k^{(\mathfrak{p})}K_i^{(\frac{n}{2})}, \quad \ldots\ldots, \quad k^{(\mathfrak{p})}K_i^{(n)}$$

alle vom Grade n über k. Denn sonst würde K vom kleineren Grade als n sein. Da aber $k^{(\mathfrak{p})}K_i^{(j)}$ der zu $k^{(\mathfrak{p})}K_i^{(j+\frac{n}{2})}$ konjugierte konjugiert-komplexe Körper ist, so ist offenbar $\mathfrak{p}$ in K verzweist.

Ist aber $\mathfrak{p}$ ein Primideal aus k, welches in $\mathfrak{f}$ aufgeht, so findet in K folgende Primidealzerlegung statt:

$$\mathfrak{p}_i = (\mathfrak{P}_{i1} \ldots\ldots \mathfrak{P}_{ir})^{e_i} \qquad \text{mit } e_i > 1\,.$$

Nach HERBRAND[1] muss dann e_i für hinreichend grosses i stets einer bestimmten Zahl e gleich sein, welche als der Exponent eines Primteilers von $\mathfrak{p}$ in K erwiesen wird. Da aber $e_i > 1$ ist, so muss auch $e > 1$ sein, d.h. $\mathfrak{p}$ ist in K verzweigt. Damit ist bewiesen, dass jede Primstelle, welche im Führer von K nach k aufgeht, in K verzweigt ist.

(1) HERBRAND, Théorie arithmetique des corps de degré infini. Extensions algébriques finies des corps infinis, Math. Ann., Bd. 106 (1932).

Ist umgekehrt in K eine unendliche Primstelle $\mathfrak{p}$ in k verzweigt, so kann man leicht zeigen, dass für jeden hinreichend grossen Index i $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p} \wedge k_i$ im Führer $\mathfrak{f}_i = \mathfrak{f} \wedge k_i$ von K_i nach k_i aufgehen muss. Da aber $\mathfrak{f} = \lim_{i \to \infty} \mathfrak{f}_i$ ist, so geht $\mathfrak{p} = \lim_{i \to \infty} \mathfrak{p}_i$ in $\mathfrak{f}$ auf.

Ist aber $\mathfrak{p}$ ein Primideal aus k, welches in K verzweigt ist, so kann man auch leicht zeigen, dass für hinreichend grosses i stets $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p} \wedge k_i$ in $\mathfrak{f}_i$ aufgehen muss. Hieraus folgt auch, dass $\mathfrak{f}$ durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist. Hiernach beweist man leicht folgenden

Satz 15. Führer-Verzweigungssatz. *Alle Primstellen, welche im Führer eines Klassenkörpers K über k aufgehen, und nur solche, sind verzweigt in K. Besonders besteht die Diskriminante von K nach k aus allen derjenigen Primideale, welche im Führer von K nach k aufgehen.*

Beweis. Die erste Hälfte dieses Satzes ist schon oben bewiesen. Die letzte Hälfte folgt aber aus der von HERBRAND[1] bewiesenen Tatsache, dass dann und nur dann ein Primideal aus k in K verzweigt ist, wenn es ein Diskriminantenteiler von K nach k ist.

Es ist wohl bekannt, dass allgemein in k Ideale ohne endliche Basis existieren. Solche Ideale sind aber bisher aus unserer Betrachtung ausgelassen worden. Wenn wir also Primideale ohne endliche Basis betrachten, dann können wir für solche Ideale das Zerlegungsgesetz nicht mehr wie üblich formulieren. Trotzdem kann ich doch im folgenden einen Satz angeben, welcher einigermassen die Zerlegung der Primideale aus k in einem Klassenkörper bestimmt. Der Satz lautet folgendermassen:

Satz 16. *Es sei $\mathfrak{f}$ der Führer eines Klassenkörpers K über k und $H^{(\mathfrak{f})}$ die mod $\mathfrak{f}$ K zugeordnete Idealgruppe. Ferner sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal, welches in der Diskriminante D von K nach k nicht aufgeht. Ist dann für fast alle Indizes i f die früheste Potenz von $\mathfrak{p}_i$, derart dass die $\mathfrak{p}_i^f$ erst nach $H_i^{(\mathfrak{f})}$ fallen, so ist der Grad jedes Primteilers von $\mathfrak{p}$ in K gleich f, und umgekehrt. Dabei ist $\mathfrak{p}_i$ das durch $\mathfrak{p}$ teilbare Primideal in einem Approximationskörper k_i von k und $H_i^{(\mathfrak{f})}$ der Durchschnitt von $H^{(\mathfrak{f})}$ mit k_i.*

Beweis. Ist θ eine primitive Zahl von K über k, so kann man einen passenden Index I finden, derart dass für jeden Index $i \geqq I$ $K_i = K_i(\theta)$ über k_i abelsch und $[K_i : k_i] = [K : k]$ ist. Da $\mathfrak{p}$ in der Diskriminante von K nach k nicht aufgeht, so besitzt $\mathfrak{p}$ bekanntlich in K

(1) HERBRAND, loc. cit.

lauter Primteiler vom Exponenten 1. Wenn man also den oben bestimmten Index I von vornherein hinreichend gross wählt, dann kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass folgende Tatsachen gelten:

1.) Für jedes $i \geqq I$ ist $\mathfrak{f}_i = \mathfrak{f} \wedge k_i$ der Führer von K_i nach k_i, und $H_i^{(\mathfrak{f})} = H^{(\mathfrak{f})} \wedge k_i$ ist gleich der K_i zugeordneten Idealgruppe in k_i uud mod $\mathfrak{f}_i$ erklärt.

2.) Für $i \geqq I$ findet in K_i folgende Primidealzerlegung statt:

$$\mathfrak{p}_i = \mathfrak{P}_{i1} \cdots\cdots \mathfrak{P}_{ir},$$

wobei $\mathfrak{P}_{i1}, \ldots, \mathfrak{P}_{ir}$ verschiedene Primideale aus K_i bedeuten und r von i unabhängig ist.

3.) Die Ordnung der Klasse $\mathfrak{p}_i H_i^{(\mathfrak{f})}$ nach $H_i^{(\mathfrak{f})}$ ist gleich f, falls $i \geqq I$ ist.

Aus 2.) folgt ohne weiteres, dass $\mathfrak{p}_i$ in der Diskriminante von K_i nach k_i nicht aufgeht, also zum Führer von K_i nach k_i prim ist. Dann schliesst man aus 3.) nach dem bekannten Zerlegungsgesetz, dass

$$N_{K_i k_i}(\mathfrak{P}_{ij}) = \mathfrak{p}_i^f$$

ist, wobei $1 \leqq j \leqq r$ ist. Dies bedeutet nach Definition des Grades, dass jeder Primteiler von $\mathfrak{p}$ vom Grade f ist.

Besitzt umgekehrt $\mathfrak{p}$ Primteiler vom Grade f in K, so gilt nach 2.) in K_i

$$\mathfrak{p}_i = \mathfrak{P}_{i1} \cdots\cdots \mathfrak{P}_{ir},$$

weil $\mathfrak{p}$ kein Diskriminantenteiler ist. Ferner kann man annehmen, dass für jedes j

$$N_{K_i k_i}(\mathfrak{P}_{ij}) = \mathfrak{p}_i^f$$

ist. Also geht $\mathfrak{p}_i$ in der Diskriminante von K_i nach k_i nicht auf, und jeder Primteiler von $\mathfrak{p}_i$ in K_i ist vom Grade f. Hieraus folgt nach dem bekannten Zerlegungsgesetz, dass die Ordnung von $\mathfrak{p}_i H_i^{(\mathfrak{f})}$ nach $H_i^{(\mathfrak{f})}$ gleich f ist. Damit ist der Beweis beendet.

Man kann noch einige bekannte Sätze aus der Klassenkörperpertheorie im Grossen auch in unserem Fall beweisen. Auf Näheres will ich aber hier nicht eingehen.