

L'algèbre de Cohomologie du Complément, dans un Espace Affine, d'une Famille Finie de Sous-espaces Affines

P. DELIGNE, M. GORESKY, & R. MACPHERSON

This paper is dedicated to W. Fulton in admiration for his mathematical achievements and his broad influence on the field of algebraic geometry

0. Introduction

Soit X le complément dans un espace affine réel V d'un ensemble localement fini E de sous-espaces affines propres de V . Les *plats* de E sont V et les intersections non vides d'éléments de E . Dans [GM] (part III), Goresky et MacPherson appliquent la théorie de Morse à une fonction "distance à $v_0 \in V$ " pour (a) décomposer l'homologie de X en facteurs indexés par les plats et (b) donner une description combinatoire de chaque facteur. Au §1, nous retrouvons ces résultats par des techniques faisceautiques. Elles mettent en évidence de quoi dépend la décomposition de [GM], et s'appliquent aussi à la détermination de la cohomologie ℓ -adique du complément d'une famille finie de sous-espaces affines dans un espace affine sur un corps algébriquement clos.

Par dualité, ces résultats en homologie se transposent en cohomologie. Pour E fini, on a une décomposition indexée par les plats

$$H^*(X) = \bigoplus h^*(A). \tag{0.1}$$

Soit $\text{coor}(A)$ le \mathbb{Z} -module libre de rang 1, de bases $\pm e$ les coorientations de A dans V , et mettons-le en degré $\text{codim}(A)$: on a

$$\text{coor}(A) = H_A^*(V, \mathbb{Z}). \tag{0.2}$$

Le facteur direct $h^*(A)$ est le produit tensoriel de $\text{coor}(A)$ par un groupe ne dépendant que de la combinatoire de l'arrangement, i.e., que de l'ensemble \mathcal{A}^+ des plats, ordonné par inclusion. La décomposition (0.1) dépend du choix pour chaque plat A d'un point

$$x_A \in A^0 := A - \bigcup \{\text{plats plus petits}\}.$$

Seule importe la composante connexe de A^0 où se trouve x_A . En particulier, si l'hypothèse de connexité (CONN) suivante est vérifiée, la décomposition (0.1) ne dépend d'aucun choix.

$$\begin{aligned} \text{Si un plat } B \text{ est contenu dans un plat } A, \\ A = B \text{ ou } \dim(A) - \dim(B) \geq 2. \end{aligned} \tag{CONN}$$

Received December 7, 1999. Revision received March 29, 2000.
The second author was partially supported by NSF Grant no. 9900324.

Au §4.2, sous l'hypothèse (CONN), nous calculons le cup produit de $H^*(X)$, en terme de la décomposition (0.1). Le point essentiel est que la composante $h(A) \otimes h(B) \rightarrow h(C)$ du cup produit ne peut être non nulle que pour $C = A \cap B$, l'intersection étant transverse. Nous le montrons en interprétant le cup produit comme le produit externe suivi d'une restriction à la diagonale $X \rightarrow X \times X$, et en traitant cette restriction comme un cas particulier d'un morphisme de restriction $H^*(X) \rightarrow H^*(X')$, pour $X' = V' \cap X$ la trace de X sur un sous-espace affine.

Sous l'hypothèse (CONN), il résulte de ce calcul que l'algèbre de cohomologie $H^*(X)$ ne dépend à isomorphisme unique près que des données (a) à (d) suivantes:

- (a) l'ensemble \mathcal{A}^+ des plats, ordonné par inclusion;
- (b) la fonction $A \mapsto \text{codim}(A)$;
- (c) pour chaque plat A , le \mathbb{Z} -module libre de rang 1 $\text{coor}(A)$;
- (d) pour $C = \inf(A, B)$ et $\text{codim}(C) = \text{codim}(A) + \text{codim}(B)$ (i.e., pour une intersection transverse $C = A \cap B$), l'isomorphisme naturel de $\text{coor}(A) \otimes \text{coor}(B)$ avec $\text{coor}(C)$.

M. de Longueville et C. Schultz ont indépendamment déterminé l'algèbre de cohomologie entière du complément d'un arrangement central vérifiant (CONN) [dS]. Voir aussi [FZ].

REMERCIEMENTS. Notre intérêt a été attiré sur ces questions par le preprint [Y] de Yuzvinsky. Dans le cas des arrangements complexes, Yuzvinsky détermine à isomorphisme près, à l'aide des résultats de Morgan [M], l'algèbre de cohomologie rationnelle du complément d'un arrangement.

1. Décomposition de la Cohomologie

1.1. Nous prendrons la notation de stratification au sens faible suivant: une *stratification* d'un espace topologique T , indexée par un ensemble ordonné fini I , est une décomposition indexée par I de T en parties non vides disjointes S_i , les *strates*, telle que pour tout i dans I la réunion $T_i := \bigcup_{j \leq i} S_j$ soit fermée. Les T_i sont les *strates fermées*. Noter que $i \leq j$ si et seulement si $T_i \subset T_j$, et que les T_i déterminent les S_i par

$$S_i = T_i - \bigcup_{j < i} T_j. \quad (1.1.1)$$

Soit φ l'application de T dans I valant i sur S_i . Si I est muni de la topologie pour laquelle l'adhérence d'un point i est l'intervalle

$$[\cdot, i] := \{ j \mid j \leq i \},$$

dire que les T_i sont fermés équivaut à dire que l'application φ est continue.

1.2. On notera encore I la catégorie d'objets les éléments de I , avec une flèche de i à j pour $i \leq j$.

Chaque point i de l'espace topologique I a un plus petit voisinage: l'intervalle $[i, \cdot] := \{ j \mid i \leq j \}$. Pour \mathcal{F} un faisceau sur I , la fibre \mathcal{F}_i de \mathcal{F} en i coïncide

donc avec $\mathcal{F}([i, \cdot])$. Pour $i \leq j$, la restriction de $[i, \cdot]$ à $[j, \cdot]$ est un morphisme de \mathcal{F}_i dans \mathcal{F}_j , et cette construction identifie faisceaux de groupes abéliens sur I et foncteurs de I dans (Ab) .

Si I a un plus petit élément 0, le foncteur $\Gamma(I, \mathcal{F}) = \mathcal{F}_0$ est exact et les H^i supérieurs sont nuls. Si I a un plus grand élément 1, tout faisceau constant est flasque et ses H^i supérieurs sont donc nuls: l'espace I est *acyclique*, i.e., sa cohomologie à coefficients constants est celle d'un point.

Autre Preuve. Calculant la cohomologie par la résolution flasque canonique, on vérifie que la cohomologie à coefficients constants de I coïncide avec celle de l'espace classifiant $|I|$ de la catégorie I . En particulier, elle est la même pour I et pour I muni de l'ordre opposé, et on a déjà vu que tout I ayant un plus petit élément est acyclique.

LEMMA DE DÉVISSAGE 1.3. *Soit \mathcal{C} une classe de faisceaux sur I . Si \mathcal{C} contient le faisceau 0, contient tout faisceau constant sur un fermé $[\cdot, i]$ prolongé par 0 sur I et si pour toute suite exacte courte $0 \rightarrow \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2 \rightarrow \mathcal{F}_3 \rightarrow 0$ de faisceaux sur I , si deux des \mathcal{F}_i sont dans \mathcal{C} , le troisième l'est aussi, alors \mathcal{C} contient tous les faisceaux sur I .*

Preuve. On procède par récurrence sur le nombre d'éléments de I . Pour $i: J \hookrightarrow I$ un fermé de I distinct de I , appliquant l'hypothèse de récurrence à la classe des faisceaux sur J tels que $i_1\mathcal{F}$ soit dans \mathcal{C} , on voit que tout faisceaux de support $\neq I$ est dans \mathcal{C} . Si I est vide, le lemme est clair. Sinon, soient x un élément maximal de I et j l'inclusion de $\{x\}$ dans I . Prenant pour \mathcal{F}_1 (resp. $\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$) un faisceau constant sur $\{x\}$ (resp. $[\cdot, x], [\cdot, x[$) prolongé par zéro, on voit que pour tout groupe abélien Λ , $j_1\Lambda$ est dans \mathcal{C} . Pour \mathcal{F} sur I , on conclut en observant que le support de $\mathcal{F}/j_!j^*\mathcal{F}$ est contenu dans le fermé $I - \{x\}$. \square

PROPOSITION 1.4. *Si les strates fermées sont acycliques, alors, pour tout faisceau \mathcal{F} sur I , on a*

$$H^*(I, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^*(T, \varphi^*\mathcal{F}). \tag{1.4.1}$$

Preuve. Si \mathcal{F} est un faisceau constant sur un fermé $[\cdot, i]$, prolongé par zéro sur I , $\varphi^*\mathcal{F}$ est constant sur T_i , prolongé par zéro sur T , et (1.4.1) résulte de ce que $[\cdot, i]$ et T_i sont acycliques.

Le cas général en résulte par dévissage: pour $0 \rightarrow \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2 \rightarrow \mathcal{F}_3 \rightarrow 0$ une suite exacte courte de faisceaux sur I , les deux membres de (1.4.1) donnent lieu à suite exacte longue de cohomologie, et si (1.4.1) est un isomorphisme pour deux des \mathcal{F}_i , il l'est donc aussi pour le troisième. On conclut par 1.3. \square

REMARQUE 1.5. Si $|I|$ est l'espace classifiant de la catégorie I , on définit une application continue de $|I|$ dans I en envoyant l'intérieur du simplexe $[i_0, \dots, i_n]$ ($i_0 < i_1 < \dots < i_n$) sur i_n . Par cette application, l'image inverse de $[\cdot, i]$ est $[[\cdot, i]]$, un cône de sommet i . L'hypothèse de 1.4 est donc vérifiée et prenant pour \mathcal{F} un faisceau constant, on retrouve que I et $|I|$ ont même cohomologie.

1.6. Supposons T localement compact, séparé et dénombrable à l'infini, et que les strates fermées T_i sont des variétés (sans bord) acycliques. Etant acyclique, T_i est orientable et connexe.

Pour toute variété orientable et connexe V , notons $\text{or}(V)$ le \mathbb{Z} -module gradué libre de rang un, purement en degré $\dim(V)$, de générateurs $\pm e$ correspondant aux deux orientations de V . Pour tout groupe abélien Λ et tout point $x \in V$,

$$\Lambda \otimes \text{or}(V) = H_{\{x\}}^*(V, \Lambda) \xrightarrow{\sim} H_c^{\dim(V)}(V, \Lambda), \quad (1.6.1)$$

et, si V est acyclique, la dualité de Poincaré donne

$$\Lambda \otimes \text{or}(V) \xrightarrow{\sim} H_c^*(V, \Lambda). \quad (1.6.2)$$

Ecrivons simplement or_i pour $\text{or}(T_i)$.

Choisissons dans chaque strate S_i un point x_i . Pour tout faisceau \mathcal{F} sur I , on dispose d'une image inverse en cohomologie à support

$$\varphi^*: H_{\{i\}}^*([i, \cdot], \mathcal{F}) \rightarrow H_{S_i}^*\left(\bigcup_{i \leq j} S_j, \varphi^* \mathcal{F}\right). \quad (1.6.3)$$

Noter que $U_i := \bigcup_{i \leq j} S_j$ est un ouvert de S , et que S_i est fermé dans U_i . On dispose d'un cup-produit

$$H_{S_i}^*(U_i, \varphi^* \mathcal{F}) \otimes H_{\{x_i\}}^*(S_i, \mathbb{Z}) \rightarrow H_{\{x_i\}}^*(U_i, \varphi^* \mathcal{F}). \quad (1.6.4)$$

Dans le langage des catégories dérivées, $H_{S_i}^*(U_i, \varphi^* \mathcal{F})$ est un Hom^* , dans $D(U_i)$, de \mathbb{Z}_{S_i} dans $\varphi^* \mathcal{F}$, $H_{\{x_i\}}^*(S_i, \mathbb{Z})$ est un Hom^* de $\mathbb{Z}_{\{x_i\}}$ dans \mathbb{Z}_{S_i} , et le cup-produit est simplement la composition. Le composé

$$H_{S_i}^*(U_i, \varphi^* \mathcal{F}) \otimes \text{or}_i \xrightarrow[1.6.4]{} H_{\{x_i\}}^*(U_i, \varphi^* \mathcal{F}) \rightarrow H_c^*(U_i, \varphi^* \mathcal{F}) \quad (1.6.5)$$

ne dépend que de la composante connexe de S_i dans laquelle se trouve x_i . On a en effet une factorisation via le produit tensoriel par $H_{S_i}^*(U_i, \varphi^* \mathcal{F})$ du morphisme

$$\text{or}_i = H_{\{x_i\}}^*(S_i, \mathbb{Z}) \rightarrow H_c^*(S_i, \mathbb{Z}).$$

Composant (1.6.3) et (1.6.5), on obtient des morphismes

$$H_{\{i\}}^*([i, \cdot], \mathcal{F}) \otimes \text{or}_i \rightarrow H_c^*(U_i, \varphi^* \mathcal{F}) \quad (1.6.6)$$

qui, composés avec $H_c^*(U_i, \varphi^* \mathcal{F}) \rightarrow H_c^*(T, \varphi^* \mathcal{F})$, donnent

$$\bigoplus_i H_{\{i\}}^*([i, \cdot], \mathcal{F}) \otimes \text{or}_i \rightarrow H_c^*(T, \varphi^* \mathcal{F}). \quad (1.6.7)$$

THÉORÈME 1.7. *Avec les hypothèses et notations de 1.6, le morphisme (1.6.7) est un isomorphisme.*

Preuve. Pour $0 \rightarrow \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2 \rightarrow \mathcal{F}_3 \rightarrow 0$ une suite exacte courte, les deux membres de (1.6.7) donnent lieu à une suite exacte longue de cohomologie. Appliquant 1.3, on se ramène à vérifier (1.7.1) pour $\mathcal{F} = \Lambda_{[\cdot, i]}$: le faisceau constant Λ sur un fermé $[\cdot, i]$, prolongé par 0 sur I .

Calculons $H_{\{j\}}^*([j, \cdot], \Lambda_{[\cdot, i]})$. Si j n'est pas $\leq i$, $\Lambda_{[\cdot, i]}$ est nul sur $[j, \cdot]$ et on trouve 0. Supposons que $j \leq i$. On dispose d'une suite exacte longue

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & H_{\{j\}}^*([j, \cdot], \Lambda_{[\cdot, i]}) & \rightarrow & H^*([j, \cdot], \Lambda_{[\cdot, i]}) & \rightarrow & H^*([j, \cdot], \Lambda_{[\cdot, i]}) & \rightarrow \\ & \parallel & & \parallel & & \parallel & \\ \rightarrow & H_{\{j\}}^*([j, i], \Lambda) & \rightarrow & H^*([j, i], \Lambda) & \rightarrow & H^*([j, i], \Lambda) & \rightarrow . \end{array}$$

Pour $j < i$, tant $[j, i]$ que $]j, i]$ sont acycliques, et $H_{\{j\}}^*([j, i], \Lambda) = 0$. Pour $i = j$, $]j, k] = \phi$, $[j, i] = \{j\}$, et $H_{\{j\}}^*([j], \Lambda) = \Lambda$ en degré 0. L'application (1.6.7) se réduit donc à l'isomorphisme (1.6.2) pour T_i . \square

COROLLAIRE 1.8. *Avec les hypothèses et notations de 1.6, supposons que I ait un plus grand élément 1 et soit S_1 la strate correspondante. Soient j_1 l'inclusion de $\{1\}$ dans I et $j_{1!}\Lambda$ le faisceau constant Λ sur l'ouvert $\{1\}$, prolongé par zéro sur I . Alors, le choix d'une composante connexe de chaque S_i définit un isomorphisme*

$$\bigoplus_i H_{\{i\}}^*([i, 1], j_{1!}\Lambda) \otimes \text{or}_i \xrightarrow{\sim} H_c^*(S_1, \Lambda). \tag{1.8.1}$$

Preuve. Soit j l'inclusion de S_1 dans T . L'image inverse de $j_{1!}\Lambda$ sur T est $j_!\Lambda$: le faisceau constant Λ sur S_1 , prolongé par 0 sur T . On a

$$H_c^*(S_1, \Lambda) \xrightarrow{\sim} H_c^*(T, j_!\Lambda)$$

et 1.8 résulte de 1.7 appliqué à $j_{1!}\Lambda$. \square

CONSTRUCTION 1.9. *Soient I un ensemble ordonné fini ayant un plus grand élément 1 et j_1 l'inclusion de l'ouvert $\{1\}$ dans I . On a*

$$H_{\{i\}}^*([i, 1], j_{1!}\Lambda) = \begin{cases} \Lambda \text{ en degré } 0 & \text{si } i = 1, \\ \tilde{H}^{*-2}([i, 1[, \Lambda) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $]i, 1[$ est vide, la cohomologie réduite \tilde{H}^* est Λ en degré -1 .

CONSTRUCTION. Le cas $i = 1$ est clair. Supposons que $i < 1$ et posons $\mathcal{F} := j_{1!}\Lambda$. Les $H^p([i, 1], \mathcal{F})$ sont alors tous nuls. Si $p > 0$ parce que $[i, 1]$ a un plus petit élément, si $p = 0$ parce que $\mathcal{F}([i, 1]) = \mathcal{F}_i = 0$. La suite exacte longue

$$\rightarrow H_{\{i\}}^*([i, 1], \cdot) \rightarrow H^*([i, 1], \cdot) \rightarrow H^*([i, 1], \cdot) \rightarrow$$

se réduit donc pour \mathcal{F} à un isomorphisme

$$\partial: H^p([i, 1], \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H_{\{i\}}^{p+1}([i, 1], \mathcal{F}). \tag{1.9.1}$$

Soit $\Lambda_{]i, 1]}$ le faisceau constant Λ sur le fermé $]i, 1]$ de $]i, 1]$, prolongé par zéro sur $]i, 1]$. L'espace $]i, 1]$ étant acyclique (car $]i, 1]$ a un plus grand élément), la suite exacte longue de cohomologie définit par la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \Lambda \rightarrow \Lambda_{[i, 1]} \rightarrow 0$$

de faisceaux sur $]i, 1]$ se réduit à un isomorphisme

$$\partial: \tilde{H}^p([i, 1[, \Lambda) \xrightarrow{\sim} H^{p+1}([i, 1], \mathcal{F}). \tag{1.9.2}$$

L'isomorphisme de 1.9 est le composé (1.9.1)◦(1.9.2).

1.10. VARIANTES. Homologie et cohomologie de S_1 .

Si V est une variété orientée purement de dimension n , le cap-produit avec la classe fondamentale est un isomorphisme de la cohomologie à support compact de V avec l'homologie de V :

$$H_c^i(V, \Lambda) \xrightarrow{\sim} H_{n-i}(V, \Lambda).$$

Sous les hypothèses de 1.8, et à une renumérotation et à un twist par $or(T)$ près, (1.8.1) calcule donc aussi l'homologie de S_1 .

Les résultats obtenus en cohomologie à support compact ou, ce qui revient ici au même, en homologie, fournissent par dualité (entre homologie et cohomologie, ou de Poincaré entre cohomologie et cohomologie à support compact) des résultats analogues en cohomologie.

Pour la cohomologie à coefficients dans un corps k , on a simplement

$$H^i = \text{Hom}_k(H_i, k)$$

(resp. $H^i = \text{Hom}_k(H_c^{n-i}, k)$), et ces espaces vectoriels sont dans notre cas de dimension finie. Le même énoncé vaut pour $k = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Pour Λ fini, de \mathbb{Q}/\mathbb{Z} -dual Λ' , on a de même

$$H^i(\cdot, \Lambda') = \text{Hom}(H_i(\cdot, \Lambda), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

(resp. $H^i(\cdot, \Lambda') = \text{Hom}(H_c^{n-i}(\cdot, \Lambda), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$). Plus généralement, on peut utiliser la dualité de Pontrjagin, à valeurs dans \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

Une autre méthode, pour Λ de type fini sur \mathbb{Z} , est de travailler systématiquement dans les catégories dérivées, prenant pour coefficient Λ un objet de $D^b(\mathbb{Z})$ à cohomologie de type fini sur \mathbb{Z} . Si Λ' est le dual $R\underline{\text{Hom}}(\Lambda, \mathbb{Z})$ de Λ , on a encore

$$R\Gamma(S_1, \Lambda') = \underline{\text{Hom}}(R\Gamma_c(S_1, \Lambda), \mathbb{Z}) \otimes or(T).$$

NOTATION. Nous noterons $h_c^*(i)$ les groupes $H_{[i]}^*([i, 1], \mathcal{F}) \otimes or_i$ qui apparaissent dans la décomposition (1.8.1) de $H_c^*(S_1, \Lambda)$. Les facteurs des décompositions correspondantes de $H_*(S_1, \Lambda)$ et $H^*(S_1, \Lambda)$ seront notés $h_*(i)$ et $h^*(i)$.

Le \mathbb{Z} -module gradué libre de rang un de coorientation de T_i dans T , noté $coor(T_i)$, ou simplement $coor_i$ est défini par

$$or(T_i) \otimes coor(T_i) \xrightarrow{\sim} or(T).$$

Par dualité, on déduit de 1.8 et 1.9 que

$$h^*(i) = \begin{cases} \Lambda & \text{en degré zéro pour } i = 1, \\ \tilde{H}_*([i, 1[, \Lambda)[2] \otimes coor_i & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.10.1}$$

En seconde ligne, on identifie “degré homologique p ” à “degré cohomologique $-p$ ”: pour $i \neq 1$,

$$h^p(i) = \tilde{H}_{\text{codim}(T_i)-p-2}(]i, 1[, \Lambda) \otimes \text{coor}_i.$$

EXEMPLE 1.11. Soient V dénoter un espace affine réel et \mathcal{A} un ensemble fini de sous-espaces affines $A \neq \emptyset$, V de V , tel que si l'intersection de deux éléments de \mathcal{A} est non vide, cette intersection est dans \mathcal{A} ; soit

$$\mathcal{A}^+ := \mathcal{A} \cup \{V\} \quad \text{et} \quad X := V - \bigcup \mathcal{A}.$$

Nous appellerons \mathcal{A}^+ (resp. \mathcal{A}) l'ensemble des *plats* (resp. *plats propres*) de l'arrangement \mathcal{A} . Les plats sont les strates fermées d'une stratification de V , indexée par l'ensemble \mathcal{A}^+ ordonné par inclusion. On note $\varphi: V \rightarrow \mathcal{A}^+$ l'application correspondante. On notera parfois A^0 la strate correspondant au plat A :

$$A^0 := \varphi^{-1}(A) = A - \bigcup \{\text{plats plus petit}\} \tag{1.11.1}$$

(cf. 1.1.1).

Les plats sont des variété acycliques. Appliquons 1.8: le choix dans chaque strate A^0 d'un point x_A définit un isomorphisme

$$H_c^*(X, \Lambda) = \bigoplus_A h_c^*(A) \quad (\text{somme sur les plats}), \tag{1.11.2}$$

avec $h_c^*(A) = H_{[A]}^*([A, V], j_V! \Lambda) \otimes \text{or}(A)$, j_V étant l'inclusion de $\{V\}$ dans \mathcal{A}^+ .

Dans [GM], Goresky et MacPherson obtiennent une telle décomposition de l'homologie de X en appliquant la théorie de Morse à une fonction “distance à $v_0 \in V$ ”. La structure Euclidienne de V et le point v_0 sont choisis génériquement, au sens que:

- (a) pour chaque plat A , le point critique sur A de la fonction distance $d(v_0, \cdot)$, i.e., le pied x_A de la perpendiculaire abaissée de v_0 sur A , est dans A^0 ;
- (b) les valeurs critiques $d(v_0, x_A)$ sont distinctes.

Noter que pour le plat V , $x_V = v_0$.

Soit $B(r)$ la boule ouverte de centre v_0 et de rayon r . Munissons-la de la stratification induite par celle de V , de strates fermées les traces sur $B(r)$ des plats qui rencontrent $B(r)$. Les hypothèse de 1.8 sont encore vérifiées. Si le plat A rencontre $B(r)$, tout plat $B \supset A$ rencontre également $B(r)$, et le groupe $h_c^*(A)$ est le même pour $B(r)$ et pour V . Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{A \cap B(r) \neq \emptyset} h_c(A) & \longrightarrow & \bigoplus_A h_c(A) \\ \downarrow \sim & & \downarrow \end{array} \tag{1.11.3}$$

$$H_c(X \cap B(r), \Lambda) \longrightarrow H_c(X, \Lambda)$$

est commutatif. Orientons V , et identifions homologie et cohomologie à support compact comme en 1.10. Quand r , croissant, passe une valeur critique $r_A := d(v_0, x_A)$, le groupe de Morse (en homologie) qui mesure le changement de

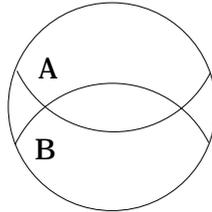
$H_*(B(r_A - \varepsilon), \Lambda)$ à $H_*(B(r_A + \varepsilon), \Lambda)$ est, d'après (1.11.3), le groupe $h(A)$. Notre définition de l'application

$$h(A) \rightarrow H_c^*(X \cap B(r_A + \varepsilon), \Lambda) \rightarrow H_c^*(X, \Lambda)$$

correspondant au choix de x_A comme point marqué dans A^0 est inspirée par la preuve, dans [GM], de ce que la fonction de Morse $d(v_0, \cdot)$ est parfaite. La décomposition selon les plats de $H_*(X, \Lambda)$ implicite dans [GM] coïncide donc avec la décomposition (1.11.1) de $H_c^*(X, \Lambda)$, pour le choix des x_A comme points marqués.

EXEMPLE 1.12. Si T est un ouvert convexe de \mathbb{R}^n et E un ensemble fini de traces sur T de sous-espaces affines, les intersections $\bigcap F$ pour $F \subset E$ qui sont non vides sont les strates fermées d'une stratification de T vérifiant les hypothèses de 1.8. Plus généralement, on peut prendre pour T une partie convexe d'un espace à courbure négative et pour E un ensemble de sous-espaces totalement géodésiques.

EXEMPLE 1.13. Dans les exemples 1.11 et 1.12, l'ensemble ordonné I indexant les strates est tel que si i et j dans I admettent un minorant, ils admettent une borne inférieure $\inf(i, j)$. Ce n'est pas nécessairement le cas dans les applications de 1.8. Exemple:



où les strates fermées sont le disque ouvert, les deux courbes A et B et chacun des deux points d'intersection.

EXEMPLE 1.14. Notre démonstration de 1.8 est faisceautique. Elle n'utilise pas la théorie de Morse. Elle s'applique donc en cohomologie ℓ -adique. La seule différence est que pour V une variété algébrique lisse et connexe de dimension n sur un corps algébriquement clos k , le groupe $\text{or}(V)$ de 1.6 est à remplacer par le module de Tate $\mathbb{Z}_\ell(-n)$ placé en degré $2n$.

Soient V un espace affine sur k , \mathcal{A} un ensemble fini de sous-espaces affines, et \mathcal{A}^+ et X comme en 1.11. On a

$$\bigoplus H_{\{A\}}^*([A, V], j_{V!} \mathbb{Z}_\ell)(-\dim A)[-2 \dim A] \xrightarrow{\sim} H_c^*(X, \mathbb{Z}_\ell). \quad (1.14.1)$$

Noter que les A^0 étant ici connexes, (1.14.1) ne dépend pas du choix de points marqués dans les strates.

Si $k = \mathbb{C}$, la même décomposition vaut en théorie de Hodge mixte: dans la décomposition (1.11.2) de $H_c^*(X, \mathbb{Z})$, le facteur $h_c^*(A)$ est purement de type de

Hodge $(\dim_{\mathbb{C}}(A), \dim_{\mathbb{C}}(A))$. Dualement, $h^*(A)$ est purement de type de Hodge $(\text{codim}(A), \text{codim}(A))$.

Dans le cas complexe, le cup produit est compatible à la structure de Hodge mixte. En géométrie algébrique, l'arrangement \mathcal{A} peut être défini sur un sous-corps k_0 de k de type fini sur son sous-corps premier, le groupe de Galois $\text{Gal}(\bar{k}_0/k_0)$ agit sur la cohomologie et le cup-produit est compatible à l'action de Galois. Sous les hypothèses ci-dessus et en cohomologie rationnelle (resp. \mathbb{Q}_ℓ -cohomologie), la composante $h^*(A) \otimes h^*(B) \rightarrow h^*(C)$ du cup produit ne peut donc être non nulle que pour $\text{codim}(C) = \text{codim}(A) + \text{codim}(B)$.

2. Functorialité en l'Arrangement

2.1. Soient $V, \mathcal{A}, \mathcal{A}^+ := \mathcal{A} \cup \{V\}, X := V - \bigcup \mathcal{A}$, et $\varphi: V \rightarrow \mathcal{A}^+$ comme en 1.11. Soit $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ vérifiant les mêmes hypothèses que \mathcal{A} et notons par un $'$ les objets correspondants. La stratification de V définie par \mathcal{A} raffine celle définie par \mathcal{A}' : si $\alpha: \mathcal{A}^+ \rightarrow \mathcal{A}'^+$ attache à un plat de \mathcal{A} le plus petit plat de \mathcal{A}' le contenant, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & V & \\ \varphi \swarrow & & \searrow \varphi' \\ \mathcal{A}^+ & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{A}'^+ \end{array}$$

est commutatif. Noter que si les ensembles ordonnés \mathcal{A}^+ et \mathcal{A}'^+ sont vus comme des catégories, α est l'adjoint à gauche de l'inclusion incl de \mathcal{A}'^+ dans \mathcal{A}^+ . En effet,

$$\alpha(A) \subset A' \iff A \subset \text{incl}(A').$$

Marquons chaque plat A de \mathcal{A}^+ par un point $x_A \in A^0$ (notation (1.11.1)), et marquons A' dans \mathcal{A}'^+ par $x_{A'} := x_{\text{incl}(A)}$. Ces points définissent des décomposition (1.11.2) de $H_c^*(X, \Lambda)$ et $H_c^*(X', \Lambda)$.

NOTATION. Ci-dessous, si un plat A de \mathcal{A}^+ est dans \mathcal{A}'^+ , nous le noterons A' quand il doit être considéré comme un élément de \mathcal{A}'^+ . Par exemple, l'intervalle $[A, V]$ de \mathcal{A}'^+ sera noté $[A', V]$, et A'^0 est $A - \bigcup \{\text{plats de } \mathcal{A}' \text{ plus petit}\}$.

L'inclusion de X dans X' induit un morphisme

$$H_c^*(X, \Lambda) \rightarrow H_c^*(X', \Lambda). \tag{2.1.1}$$

PROPOSITION 2.2. Soit A un plat de \mathcal{A}^+ .

- (i) Si A n'est pas un plat de \mathcal{A}'^+ , (2.1.1) est nul sur $h_c^*(A)$.
- (ii) Si A est un plat de \mathcal{A}'^+ : $A = \text{incl}(A')$, le morphisme (2.1.1) envoie $h_c^*(A)$ dans $h_c^*(A')$. Le morphisme induit par (2.1.1) de $h_c^*(A)$ dans $h_c^*(A')$ est le torde par $\text{or}(A)$ de

$$\text{incl}^*: H_{\{A\}}([A, V], j_{V!}\Lambda) \rightarrow H_{\{A'\}}([A', V], j'_{V!}\Lambda). \tag{2.2.1}$$

Noter que $\text{incl}^{-1}(A)$ est réduit à $\{A'\}$, et que $j'_{V!}\Lambda$ est l'image inverse sur $[A', V]$ de $j_{V!}\Lambda$, de sorte que (2.2.1) est défini. L'inclusion de X (resp. X') dans V sera notée j_X (resp. $j_{X'}$).

Preuve de (ii). Dans la définition du morphisme $h_c^*(A') \rightarrow H_c^*(X', \Lambda)$, on interprète $H_c^*(X', \Lambda)$ comme $H_c^*(V, j_{X'!}\Lambda)$ et on prend le cup produit d'un élément de

$$\text{or}_A = H_{\{x_A\}}^*(\varphi'^{-1}(A'), \mathbb{Z})$$

par une classe dans $H_{A'}^*(\varphi'^{-1}([A', V]), j_{X'!}\Lambda)$. Puisqu'on en prend le produit avec une classe à support dans x_A , elle n'importe que par sa restriction à un voisinage de x_A . Prenons pour voisinage l'ouvert $U := \varphi^{-1}([A, V])$: le morphisme du $h_c^*(A')$ dans $H_c^*(X', \Lambda)$ est déduit de

$$\varphi'^*: H_{\{A'\}}^*([A', V], j_{V'!}\Lambda) \rightarrow H_{A^0}(U, j_{X'!}\Lambda).$$

Notons encore α la restriction $[A, V] \rightarrow [A', V]$ de α à $[A, V]$. L'image inverse de A' dans $[A, V]$ est réduite à A , et α induit

$$\alpha^*: H_{\{A'\}}^*([A', V], j_{V'!}\Lambda) \rightarrow H_{\{A\}}([A, V], \alpha^*j_{V'!}\Lambda). \tag{2.2.2}$$

Le morphisme α^* est un isomorphisme: par la suite exacte longue de cohomologie à support, il suffit de vérifier que pour tout faisceau \mathcal{F} sur $[A', V]$, on a

$$\begin{aligned} H^*([A', V], \mathcal{F}) &\xrightarrow{\sim} H^*([A, V], \alpha^*\mathcal{F}), \\ H^*([A', V], \mathcal{F}) &\xrightarrow{\sim} H^*([A, V], \alpha^*\mathcal{F}). \end{aligned}$$

C'est une application de 1.4, pour α vu comme une stratification de $[A, V]$ ou $]A, V[$: l'image inverse de $[\cdot, x]$ est $[\cdot, \text{incl}(x)]$, acyclique comme ayant un plus grand élément.

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} H_{\{A\}}^*([A, V], j_{V!}\Lambda) & \longrightarrow & H_{\{A\}}^*([A, V], \alpha^*j_{V'!}\Lambda) & \xleftarrow{\sim} & H_{\{A'\}}^*([A', V], j_{V'!}\Lambda) \\ \downarrow & & \downarrow & \swarrow & \\ H_{\varphi^{-1}(A)}(U, j_{X!}\Lambda) & \longrightarrow & H_{\varphi^{-1}(A)}(U, j_{X'!}\Lambda) & & \end{array} \tag{2.2.3}$$

Il définit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} h_c^*(A) & \longrightarrow & h_c^*(A') \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_c^*(X, \Lambda) & \longrightarrow & H_c^*(X', \Lambda) \end{array}$$

de première ligne le tordu par $\text{or}(A)$ de la première ligne de (2.2.3). Le comparé $\alpha \circ \text{incl}$ est l'identité de \mathcal{A}^+ , et le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} H_{\{A\}}^*([A, V], j_{V!}\Lambda) & \longrightarrow & H_{\{A\}}^*([A, V], \alpha^*j_{V'!}\Lambda) & \xleftarrow{\sim} & H_{\{A'\}}^*([A', V], j_{V'!}\Lambda) \\ \nwarrow \text{incl} & & \uparrow \text{incl} & & // \\ & & H_{\{A'\}}^*([A', V], j_{V'!}\Lambda) & & \end{array}$$

montre que cette première ligne coïncide avec l'image inverse par incl utilisée dans l'énoncé (ii).

Preuve de (i) si $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup \mathcal{A}'$. Sous l'hypothèse que $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup \mathcal{A}'$, on a $X = X'$. Nous montrerons plus précisément que $h_c^*(A) = 0$ si le plat A de \mathcal{A}^+ n'est pas dans \mathcal{A}'^+ . C'est clair sur l'interprétation (1.10) de $h_c^*(A)$ comme groupe de Morse: le "point critique" correspondant à A est superflu, son passage ne correspondant pas à un changement de la topologie de $X' \cap B(r)$. *Autre preuve:* l'image inverse de V par $\alpha: [A, V] \rightarrow [A', V]$ est réduite à V et par (2.2.2), $h_c^*(A) \rightarrow h_c^*(A')$ est un isomorphisme. Du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_A h_c^*(A) & \longrightarrow & \bigoplus_{A'} h_c^*(A') \\ \sim \searrow & & \swarrow \sim \\ & H_c^*(X, \Lambda) & \end{array}$$

résulte alors que $h_c^*(A) = 0$ pour A dans \mathcal{A} et non dans \mathcal{A}' .

Preuve de (i) si $A \neq V$ et $A \notin \bigcup \mathcal{A}'$. On a $\varphi^{-1}(A) \subset X'$. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_{\{A\}}^*([A, V], j_V! \Lambda) \otimes \text{or}(A) & \longrightarrow & H_{\{A\}}^*([A, V], \Lambda) \otimes \text{or}(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_c(X, \Lambda) & \longrightarrow & H_c^*(X', \Lambda) \end{array}$$

est commutatif et $H_{\{A\}}^*([A, V], \Lambda) = 0$, $[A, V]$, et $]A, V]$ étant tous deux acycliques.

Preuve de (i), Cas Général. Soit \mathcal{A}'' l'ensemble des plats de \mathcal{A} contenus dans $\bigcup \mathcal{A}'$. On a $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}'' \subset \mathcal{A}$ et il suffit de traiter séparément des inclusions de \mathcal{A}' dans \mathcal{A}'' et de \mathcal{A}'' dans \mathcal{A} , toutes deux conséquences des cas déjà traités. \square

2.3. Supposons que l'arrangement \mathcal{A} vérifie l'hypothèse de connexité (CONN) de l'introduction. Soient A un plat, x_A un point de la strate A^0 correspondante et U une boule ouverte de centre x_A , assez petite pour ne reconstruire d'autres plats que ceux qui contiennent A . Comme on l'a vu en 1.12, on peut appliquer 1.8 à U , muni de la stratification induite par \mathcal{A} , indexée par $[A, V]$. L'inclusion de $U - \bigcup [A, V]$ dans $V - \bigcup [A, V]$ est une équivalence d'homotopie et, par 2.2, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \bigoplus_{B \in [A, V]} h_c(B) & \longrightarrow & \bigoplus h_c(B) & \longrightarrow & \bigoplus_{B \in [A, V]} h_c(B) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} \tag{2.3.1}$$

$$H_c^*(U - \bigcup [A, V], \Lambda) \longrightarrow H_c^*(X, \Lambda) \longrightarrow H_c^*(V - \bigcup [A, V], \Lambda).$$

Le morphisme composé en seconde ligne est un isomorphisme, faisant de $H_c^*(U - \bigcup [A, V])$ un facteur direct de $H_c^*(X, \Lambda)$, et l'idempotent correspondant p_A s'identifie par 2.2 à la projection de $\bigoplus_{B \in \mathcal{A}^+} h(B)$ sur la somme partielle $\bigoplus_{B \in [A, V]} h(B)$. Les idempotents p_A ($A \in \mathcal{A}^+$) définis par la seconde ligne de (2.3.1) commutent donc entre eux. Ils permettent de retrouver la décomposition de $H_c^*(X, \Lambda)$ indexée par les plats. La décomposition duale de $H^*(X, \Lambda)$ peut de même être reconstruite à partir des idempotents définis par

$$H^*(V - \bigcup[A, V], \Lambda) \rightarrow H^*(X, \Lambda) \rightarrow H^*(U - \bigcup[A, V], \Lambda),$$

de composé un isomorphisme.

3. Restriction à un Sous-espace Linéaire

3.1. Reprenons les notations $V, \mathcal{A}, \mathcal{A}^+, X$, et $\varphi: V \rightarrow \mathcal{A}^+$ de 1.11. Soient V' un sous-espace affine de V non contenu dans $\bigcup \mathcal{A}$, \mathcal{A}' l'ensemble des intersections non vides de V' avec un plat $A \in \mathcal{A}$, et $X' := V' - \bigcup \mathcal{A}' = X \cap V'$. Choisissons une coorientation de V' dans V . Elle définit un morphisme de Gysin

$$H_c^*(X', \Lambda) \rightarrow H_c^*(X, \Lambda). \tag{3.1.1}$$

THÉORÈME 3.2. *Supposons que (V, \mathcal{A}) et (V', \mathcal{A}') vérifient l'hypothèse de connexité CONN. Alors, pour A dans \mathcal{A} et A' dans \mathcal{A}' , la composante*

$$h_c^*(A') \rightarrow h_c^*(A) \tag{3.2.1}$$

du morphisme (3.1.1), dans les décompositions (1.11.1), ne peut être non nulle que si $A' = A \cap V'$ et que l'intersection de A et V' est transverse. Dans ce cas, le choix de la coorientation de V' dans V définit un isomorphisme $\varepsilon: \text{or}(A') \xrightarrow{\sim} \text{or}(A)$, l'application "trace sur V' ": $\alpha: [A, V] \rightarrow [A', V']$ est injective, et (3.2.1) est le produit tensoriel de ε avec

$$\alpha^*: H_{\{A'\}}^*([A', V'], j_{V'}! \Lambda) \rightarrow H_{\{A\}}^*([A, V], j_V! \Lambda). \tag{3.2.2}$$

Soient A dans \mathcal{A} , $\mathcal{A}_A := [A, V] \subset \mathcal{A}$, $X_A := V - \bigcup \mathcal{A}_A$, \mathcal{A}'_A l'ensemble des intersections non vides de V' avec un plat $B \in \mathcal{A}_A$ et $X'_A := V' - \bigcup \mathcal{A}'_A = V' \cap X_A$. Le groupe $h_c^*(A)$ est le même pour (V, \mathcal{A}) et pour (V, \mathcal{A}_A) . Le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} H_c^*(X', \Lambda) & \longrightarrow & H_c^*(X, \Lambda) & \longrightarrow & h_c^*(A) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_c^*(X'_A, \Lambda) & \longrightarrow & H_c^*(X_A, \Lambda) & \longrightarrow & h_c^*(A) \end{array}$$

est commutatif. Pour le carré de droite, appliquer 2.2. La première flèche verticale a été calculée en 2.2. Il reste à calculer la flèche composée en deuxième ligne. En d'autres termes, pour calculer $H_c^*(X', \Lambda) \rightarrow h_c^*(A)$, nous nous sommes ramenés au cas où A est le plus petit élément de \mathcal{A} .

LEMMA 3.3. *Si A est le plus petit élément de \mathcal{A} et que l'intersection de A et V' est vide ou n'est pas transverse, l'application composée $H_c^*(X') \rightarrow H_c^*(X) \rightarrow h_c^*(A)$ est nulle.*

Preuve. Choisissons une structure Euclidienne. Si A et V' sont disjoint, pour ε assez petit, l'ensemble U des points de V à distance $< \varepsilon$ de V' est disjoint de A . Le morphisme de Gysin se factorise par $H_c^*(U \cap X', \Lambda)$. Appliquant (1.8) à U ,

muni de la stratification induite par celle de V , on voit que $H_c^*(U \cap X, \Lambda)$ s'envoie dans $\bigoplus_{B \cap U \neq \emptyset} h(B) \subset H_c^*(X, \Lambda)$, donc a une projection nulle sur $h(A)$.

Si A rencontre V' et que l'intersection est non transverse, il existe un hyperplan H contenant A et V' . Soit U un des deux demi-espaces définis par H . L'application de $H_c^*(X', \Lambda)$ dans $H_c^*(X, \Lambda)$ se factorise alors par $H_c^*(U \cap X)$. C'est clair si, appliquant 1.10, on remplace H_c^* par l'homologie H_* , le morphisme de Gysin devenant une image directe en homologie. En effet, X' est au bord de U , dans une partie de la frontière de U , à savoir $H \cap X$, où l'adhérence \tilde{U} de U est une variété à bord. Ceci permet de pousser tout cycle tracé sur X' dans l'intérieur de U .

Comme précédemment, l'image de $H_c^*(U \cap X)$ dans $H_c^*(X)$ est contenue dans la somme des $h_c^*(B)$ pour $B \cap U \neq \emptyset$, donc a une projection nulle sur $h(A)$. \square

3.4. Reste à traiter du cas où A est le plus petit élément de V , où $A \cap V' \neq \emptyset$ et où l'intersection de A et V' est transverse. Pour des espaces affines V_1 et V_2 , un système \mathcal{A}_1 de plats de V_1 et un point 0 de V_2 , (V, V', \mathcal{A}) est isomorphe à $(V_1 \times V_2, V_1 \times \{0\}, \{B \times V_2 \mid B \in \mathcal{A}_1\})$. Si $X_1 = V_1 - \bigcup \mathcal{A}_1$, on a $X = X_1 \times V_2$, $X' = X_1 \times \{0\}$, le morphisme de Gysin est l'isomorphisme de Künneth

$$H_c^*(X_1, \Lambda) \otimes H_c^{\dim V_2}(V_2, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H_c^*(X, \Lambda).$$

Il envoie isomorphiquement chaque $h_c^*(B_1)$ sur $h_c^*(B_1 \times V_2)$, par l'application indiquée en 3.2.

3.5. Considérons dualement le morphisme de restriction

$$H^*(X, \Lambda) \rightarrow H^*(X', \Lambda). \tag{3.5.1}$$

En terme des décomposition 1.10 indexée par \mathcal{A} (resp. \mathcal{A}') $H^*(X, \Lambda) = \bigoplus_{h(A)} h^*$ (resp. $H^*(X, \Lambda) = \bigoplus_{h(A')}$), 3.2 implique par dualité que les seules composantes non nulles du morphisme de restriction (3.5.1) sont les

$$h_A \rightarrow h_{A'}$$

pour $A' = A \cap X'$, l'intersection étant transverse, et ils sont déduits par dualité de (3.2.2).

4. Application au Cup-Produit

4.1. Soient (V_1, \mathcal{A}_1) et (V_2, \mathcal{A}_2) vérifiant les hypothèses de (1.11) et V l'espace affine $V_1 \times V_2$. On reprend les notations de 1.11 pour V_1 et V_2 ainsi que pour V muni de la stratification produit, de strates (resp. strates fermées) les produits de strates (resp. strates fermées) de V_1 et V_2 . Pour V_1 (resp. V_2), ces notations seront affectées d'un indice 1 (resp. 2). L'ensemble ordonné \mathcal{A}^+ s'identifie naturellement au produit des ensembles ordonnés \mathcal{A}_1^+ et \mathcal{A}_2^+ et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} V & = & V_1 \times V_2 \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi_1 \times \varphi_2 \\ \mathcal{A}^+ & = & \mathcal{A}_1^+ \times \mathcal{A}_2^+ \end{array}$$

est commutatif. On suppose chaque strate A^0 de V_i munie d'un point marqué x_A , et on marque la strate $A^0 \times B^0$ de $V_1 \times V_2$ par le point (x_A, x_B) .

Prenons comme coefficients Λ un anneau commutatif. La cohomologie de $X = X_1 \times X_2$ est donnée par la formule de Künneth, qu'il nous sera commode d'écrire dans la catégorie dérivée. Seul importe le cas $\Lambda = \mathbb{Z}$, le cas général s'en déduisant par une extension des scalaires $\overset{\mathbb{L}}{\otimes} \Lambda$ (produit tensoriel dérivé). Avec les notations et sous les hypothèses de 1.6, l'isomorphisme (1.6.7) se précise en un isomorphisme dans la catégorie dérivée

$$\bigoplus_i R\Gamma_{\{i\}}([i, \cdot], \mathcal{F}) \otimes \text{or}_i \xrightarrow{\sim} R\Gamma_c(T, \varphi^* \mathcal{F}). \tag{4.1.1}$$

La définition de la flèche est la même qu'en 1.6, et qu'elle soit un isomorphisme résulte de 1.7.

Cas particulier: pour V_i ($i = 1, 2$),

$$\bigoplus R\Gamma_{\{A\}}([A, V_i], j_{V_i!} \Lambda) \otimes \text{or}(A) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_c(X_i, \Lambda) \tag{4.1.2}$$

et de même pour V . Un avantage de la catégorie dérivée est que les formules de Künneth prennent la forme simple que la cohomologie d'un produit est le produit tensoriel dérivé des cohomologies des facteurs. Les morphismes (4.1.2) sont compatibles aux trois formules de Künneth suivantes: pour les $[A_i, V_i]$,

$$R\Gamma_{\{A_1\}}([A_1, V_1], j_{V_1!} \Lambda) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} R\Gamma_{\{A_2\}}([A_2, V_2], j_{V_2!} \Lambda) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_{\{A_1 \times A_2\}}([A_1 \times A_2, V], j_{V!} \Lambda); \tag{4.1.3}$$

pour les A_i , $\text{or}(A_1) \otimes \text{or}(A_2) \xrightarrow{\sim} \text{or}(A_1 \times A_2)$ et pour $X_1 \times X_2$. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (R\Gamma_{\{A_1\}}([A_1, V_1], j_{V_1!} \Lambda) \otimes \text{or}(A_1)) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} (R\Gamma_{\{A_2\}}([A_2, V_2], j_{V_2!} \Lambda) \otimes \text{or}(A_2)) & \rightarrow & R\Gamma_c(X_1, \Lambda) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} R\Gamma_c(X_2, \Lambda) \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ R\Gamma_{\{A_1 \times A_2\}}([A_1 \times A_2, V], j_{V!} \Lambda) \otimes \text{or}(A_1 \times A_2) & \rightarrow & \Gamma_c(X, \Lambda) \end{array} \tag{4.1.4}$$

est commutatif. La décomposition (4.1.2) de $R\Gamma_c(X, \Lambda)$ est donc simplement le produit tensoriel dérivé des décompositions (4.1.2) des facteurs $R\Gamma_c(X_i, \Lambda)$ ($i = 1, 2$). Passons au dual, noté $D(\cdot \cdot \cdot) := R\text{Hom}_{\Lambda}(\cdot \cdot \cdot, \Lambda)$. Sous des hypothèses de finitude vérifiées ici, c'est dans la catégorie dérivée une opération involutive commutant au produit tensoriel, et la dualité de Poincaré dit que $R\Gamma(X_i, \Lambda)$ est le dual de $R\Gamma_c(X_i, \Lambda)$, tordu par $\text{or}(V_i)$:

$$R\Gamma(X_i, \Lambda) = D(R\Gamma_c(X_i, \Lambda)) \otimes \text{or}(V_i).$$

De même pour X .

L'isomorphisme (4.1.2) se dualise donc en un isomorphisme

$$R\Gamma(X_i, \Lambda) \xrightarrow{\sim} \bigoplus D(R\Gamma_{\{A\}}([A_i, V_i], j_{V_i!} \Lambda)) \otimes \text{coor}(A)$$

et, par compatibilité entre formule de Künneth et dualité de Poincaré, le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 R\Gamma(X_1, \Lambda) \otimes_{\mathbb{L}} R\Gamma(X_2, \Lambda) & \rightarrow & (D(R\Gamma_{\{A_1\}}([A_1, V_1], j_{V_1!}\Lambda)) \otimes \text{coor}(A_1)) \otimes (D(R\Gamma_{\{A_2\}}([A_2, V_2], j_{V_2!}\Lambda)) \otimes \text{coor}(A_2)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 R\Gamma(X, \Lambda) & \rightarrow & D(R\Gamma_{\{A_1 \times A_2\}}([A_1 \times A_2, V], j_{V!}\Lambda)) \otimes \text{coor}(A_1 \times A_2)
 \end{array}$$

est commutatif. L'isomorphisme en seconde colonne, est le produit tensoriel d'un isomorphisme $\text{coor}(A_1 \times A_2) = \text{coor}(A_1) \otimes \text{coor}(A_2)$ avec l'isomorphisme déduit par dualité de (4.1.3).

4.2. Soit maintenant (V, \mathcal{A}) comme en 1.11 et supposons vérifiée l'hypothèse de connexité (CONN) de l'introduction. On appliquera 4.1 à $V \times V$. Le cup-produit en cohomologie est le composé du produit externe déduit de l'isomorphisme étudié en 4.1,

$$R\Gamma(X, \Lambda) \otimes_{\mathbb{L}} R\Gamma(X, \Lambda) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(X \times X, \Lambda)$$

et de la restriction à la diagonale

$$\Delta^*: H^*(X \times X, \Lambda) \rightarrow H^*(X, \Lambda).$$

Celle-ci est la restriction au sous-espace diagonal V de $V \times V$; c'est un cas particulier de (3.5.1). D'après (4.1.4), le produit externe envoie $h_c^*(A_1) \otimes h_c^*(A_2)$ dans $h_c^*(A_1 \times A_2)$. Que $A_1 \times A_2$ coupe transversalement la diagonale équivaut à ce que A_1 et A_2 se coupent transversalement dans V . D'après 3.5, les seules composantes non nulles du cup-produit sont donc les composantes

$$h^*(A) \otimes h^*(B) \rightarrow h^*(C) \tag{4.2.1}$$

pour $C = A \cap B$, cette intersection étant transverse. Dans ce cas, (4.2.1) est déduit du dual de l'isomorphisme (4.1.3) et du dual de

$$\alpha^*: R\Gamma_{\{C\}}([C, V], j_{V!}\Lambda) \rightarrow R\Gamma_{\{(A, B)\}}([A, V] \times [B, V], j_{(V, V)!}\Lambda)$$

pour $\alpha: [A, V] \times [B, V] \rightarrow [C, V]$ l'intersection.

REMARQUE 4.3. Soient V un espace affine sur k algébriquement clos et $\mathcal{A}, \mathcal{A}^+, X$ comme en 1.14. Les arguments utilisés en 2.2 se transposent tels quels au cas de la cohomologie ℓ -adique. Par contre, 3.3 pose problème. En conséquences nos arguments ne déterminent pas le cup-produit en cohomologie ℓ -adique. Nous conjecturons qu'il reste donné par les mêmes formules 4.2.

Références

[dS] M. de Longueville and C. Schultz, *The cohomology rings of complements of subspace arrangements*, preprint, Technische Universität Berlin, 2000.
 [FZ] E. Feichtner and G. Ziegler, *On cohomology algebras of complex subspace arrangements*, Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000), 3523–3555.

- [GM] M. Goresky and R. MacPherson, *Stratified Morse theory*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* (3), 14, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [M] J. W. Morgan, *The algebraic topology of smooth algebraic varieties*, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 48 (1978), 137–204.
- [Y] S. Yuzvinsky, *Small rational model of subspace complement*, preprint.

School of Mathematics
Institute for Advanced Study
Princeton, NJ 08540