Bornes pour les Degrés et les Hauteurs dans le Problème de Division

M. ELKADI

1. Introduction

Soient $P_1, \ldots, P_m, Q$ $(m+1)$-polynômes à n variables, avec Q appartenant à l'idéal engendré par $P_1, \ldots, P_m$. Une question légitime est la suivante: comment peut-on écrire explicitement Q sous la forme $A_1 P_1 + \cdots + A_m P_m$?

La théorie de l'élimination donne une borne en $\deg Q + 2(2D)^{2^{n-1}}$ pour les degrés des polynômes A_i, où $D = \max\{\deg P_i, 1 \le i \le m\}$ [He; MW]. En général, une telle borne est inévitable comme le montre l'exemple de Mayr–Meyer [MM]. Dans le cas où les homogénéisés de $P_1, \ldots, P_m$ forment une intersection complète dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, un ancien résultat de Macaulay donne une borne en $\deg Q + D^m$ [Mc]. Plus récemment, Berenstein et Yger ont trouvé, lorsque $P_1, \ldots, P_m$ est une intersection complète dans $\mathbf{C}^n$, en utilisant des méthodes analytiques centrées autour des techniques de cohomologie du $\bar{\partial}$ à croissance, une borne en $\deg Q + \kappa(m, n) D^m$, où $\kappa(m, n)$ est une constante qui ne dépend que de n et m [BY1].

Ces résultats ont été mieux compris du point de vue de la géométrie algébrique depuis le travail de Kollár [Ko] et la relecture qu'en a proposé Philippon [P1]. La clef de l'existence de bornes en D^m pour le problème de l'appartenance à l'idéal dans le cas des suites régulières réside comme on pouvait s'y attendre dans le théorème de Bezout (voir, par exemple, [Ha, p. 54]), même si celui-ci ne suffit pas à expliquer la manière dont Kollár se débarrasse du problème que peuvent créer les composantes immergées.

Il existe depuis quelques années plusieurs travaux dirigés vers la recherche d'un théorème de Bezout arithmétique. Il s'agit d'une part de construire une bonne notion de hauteur h pour les schémas arithmétiques (plus concrètement pour ce qui nous intéresse, les variétés algébriques définies par des polynômes à coefficients entiers), d'autre part de savoir majorer correctement $h(X \cap Y)$ en terme des hauteurs $h(X), h(Y)$ et des degrés $\deg(X), \deg(Y)$ lorsque X et Y sont deux schémas se coupant proprement. Une première version d'un tel résultat résulte des travaux de Gillet–Soulé [GS], Faltings [Fa], et on trouvera un énoncé dans [BGS].

Signalons que le problème de la recherche d'un dénominateur dans l'identité de Bezout, lorsque l'on veut la résoudre pour des polynômes dont les

Received May 7, 1992.
Michigan Math. J. 40 (1993).

coefficients appartiennent à l'anneau des entiers d'un corps de nombres, a été étudié par Philippon [P2], et que les résultats qu'il a obtenu ont servi de manière cruciale à Berenstein–Yger dans [BY2] pour établir une version du Nullstellensatz avec contrôle de hauteur dans $\mathbf{Q}[z_1, \dots, z_n]$.

S'ils permettent de retrouver les estimations de dénominateur dans les problèmes de division, les résultats de Gillet–Soulé ne peuvent encore à l'heure actuelle donner un contrôle optimal sur la hauteur des quotients qui apparaissent dans ces formules.

Il existe plusieurs procédés en analyse complexe permettant d'expliciter le problème de l'appartenance à un idéal lorsque celui-ci est engendré par des polynômes définissant une intersection complète dans $\mathbf{C}^n$. Ces procédés sont basés sur l'existence de formules explicites de représentation intégrale. On ne sait pas encore si la formule la plus naturelle, celle qui est proposée dans [BGY], est une formule de division dans $\bar{\mathbf{Q}}[z_1, \dots, z_n]$ lorsque les polynômes sont à coefficients entiers. Cependant, il nous est apparu, depuis les travaux [BY2; BY3], que la formule de Cauchy-Weil pouvait jouer le rôle d'une formule "économique" de division. C'est précisément cette formule qu'ont utilisé Berenstein–Yger dans [BY3], et que nous reprenons ici pour expliciter complètement le problème de l'appartenance d'un polynôme Q à un idéal lorsque celui-ci est engendré par m polynômes $P_1, \dots, P_m$ définissant une intersection complète. A l'instar de la méthode proposée dans [BY1], le procédé que nous utilisons nous autorise à construire des quotients à coefficients rationnels dès que les polynômes $Q, P_1, \dots, P_m$ sont à coefficients entiers (on pourrait bien sûr remplacer entiers par entiers d'un corps de nombres). Notre méthode permet de trouver une borne pour les degrés des quotients A_i et donne en plus un contrôle pour la taille de leurs coefficients lorsque les polynômes $P_1, \dots, P_m, Q$ sont à coefficients dans $\mathbf{Z}$.

Plus précisément, en utilisant ces méthodes analytiques, nous prouverons le résultat suivant: étant donnés des polynômes $P_1, \dots, P_m$ à coefficients entiers, de degrés respectifs $D_1 = D \geq \cdots \geq D_m$ et de hauteurs logarithmiques (au sens naïf) au plus h, définissant une intersection complète dans $\mathbf{C}^n$, un polynôme $Q \in \mathbf{Z}[z_1, \dots, z_n]$ de degré D_Q et de hauteur logarithmique h_Q appartenant à l'idéal engendré par $P_1, \dots, P_m$ dans $\mathbf{Q}[z_1, \dots, z_n]$, il existe des polynômes $A_1, \dots, A_m \in \mathbf{Z}[z_1, \dots, z_n]$ et un entier naturel non nul δ tels que

$$\delta Q = A_1 P_1 + \cdots + A_m P_m$$

avec les estimations:

$$\deg A_i \leq 2D_Q + \kappa(n) \prod_{i=1}^{m} D_i,$$

$$\log \delta \leq \kappa(n) D^a \left(\prod_{i=1}^{m} D_i \right)^b \left(D_Q + \prod_{i=1}^{m} D_i \right)^c (h + D \log D),$$

et

$$h(A_i) \leq \kappa(n) \left\{ D^a \left(\prod_{i=1}^{m} D_i \right)^b \left(D_Q + \prod_{i=1}^{m} D_i \right)^c (h + D \log D) + h_Q \right\},$$

où $\kappa(n)$ est une constante effectivement calculable ne dépendant que du nombre de variables n, et a, b, c sont des constantes absolues (indépendantes de n).

Bien sûr, ces estimations de hauteur ne sont certainement pas optimales (compte tenu du théorème de Bezout arithmétique proposé par Gillet-Soulé-Bost [GSB], l'estimation de δ que l'on peut attendre est en $h(D+D_Q)D^m$, et l'on peut conjecturer qu'il existe aussi un théorème de division "économique" dans le cadre d'une théorie arithmétique de l'intersection). Notre approche tient à souligner le rôle que pourrait jouer dans une telle théorie le résidu de Grothendieck et surtout la formule dans laquelle il intervient, à savoir la formule de Cauchy-Weil.

2. Lemmes Préparatoires

LEMME 2.1. *Soient $P_1, \dots, P_m \in \mathbf{Z}[z_1, \dots, z_n]$ de degrés au plus D et tels que la variété algébrique $V = \{z \in \mathbf{C}^n : P_1(z) = \cdots = P_m(z) = 0\}$ soit de dimension $n-m$.*

Il existe alors des entiers $\lambda_{i,j}$ dont le module est borné par $(D+1)^{n-1}$, tels que les n polynômes p_i, définis par $p_i = \sum_{j=1}^{m} \lambda_{i,j} P_j$ pour $1 \le i \le m$ et $p_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j} z_j$ pour $m+1 \le i \le n$, soient en position normale.

Un système de n polynômes $p_1, \dots, p_n$ à n variables est dit en position normale si, pour tout sous-ensemble J de $\{1, \dots, n\}$, $V(P_j, j \in J) = \emptyset$, ou

$$\dim V(P_j, j \in J) = n - \operatorname{Card} J,$$

avec $V(P_j, j \in J) = \{z \in \mathbf{C}^n : P_j(z) = 0, j \in J\}$.

Preuve. Nous commençons par prendre $p_1 = P_1$. Soient $\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_s$ les composantes premières de l'idéal (p_1); nécessairement $s \le D$ [Ma, Lemme 2]. Puisque pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$ il existe $j_i \in \{1, \dots, m\}$ tel que $P_{j_i} \notin \mathcal{I}_i$, on peut trouver des entiers $\lambda_{2,j}$, $1 \le j \le m$, $|\lambda_{2,j}| \le s$, tels que le polynôme $p_2 = \lambda_{2,1} P_1 + \cdots + \lambda_{2,m} P_m$ n'appartienne à aucun des idéaux $\mathcal{I}_i$ [MW, Chap. 4, Lemme 1]. Alors l'idéal (p_1, p_2) est propre de rang 2 et de degré inférieur à D^2 [Ma, Lemme 2]; cet idéal est équidimensionel. Nous allons construire p_3, le cas général s'en suivant par induction. Considérons toutes les composantes premières des idéaux (p_1), (p_2) et (p_1, p_2), que nous notons $\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_r$, avec $r \le D^2 + 2D \le (D+1)^2$ d'après [Ma]. Pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$ il existe $j_i \in \{1, \dots, m\}$ tel que $P_{j_i} \notin \mathcal{J}_i$; on peut donc trouver des entiers $\lambda_{3,j}$, $1 \le j \le m$, $|\lambda_{3,j}| \le (D+1)^2$ tels que le polynôme $p_3 = \lambda_{3,1} P_1 + \cdots + \lambda_{3,m} P_m$ n'appartienne à aucune composante $\mathcal{J}_i$ [MW]. Alors les idéaux (p_1, p_3), (p_2, p_3), et (p_1, p_2, p_3) sont propres de rang respectifs $2, 2, 3$, et de degré inférieur respectivement à D^2, D^2, D^3.

Pour la construction de p_{m+1}, considérons toutes les composantes premières $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_t$ de tous les idéaux $(p_{i_1}, \dots, p_{i_k})$, où $\{i_1, \dots, i_k\}$ décrit tous les sous-ensembles de $\{1, \dots, m\}$; on a

$$t \leq \sum_{k=1}^{m} \binom{k}{m} D^k \leq (D+1)^m.$$

Comme pour tout $i \in \{1, \ldots, t\}$, on peut trouver $j_i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $z_{j_i} \notin \mathcal{K}_i$ (sinon, au moins un des idéaux considérés est de rang n, ce qui n'est pas vrai), il existe des entiers $\lambda_{m+1,k}$, $1 \leq k \leq n$, avec $|\lambda_{m+1,k}| \leq (D+1)^m$, tels que le polynôme $p_{m+1} = \lambda_{m+1,1} z_1 + \cdots + \lambda_{m+1,n} z_n$ n'appartienne à aucune composante $\mathcal{K}_i$. Donc pour tout sous ensemble $\{i_1, \ldots, i_k\}$ de $\{1, \ldots, m\}$, l'idéal $(p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}, p_{m+1})$ est soit $\mathbf{C}[z_1, \ldots, z_n]$, soit propre de rang $k+1$, et de degré $\leq D^k \leq D^m$. En procédant ainsi, on construit $p_{m+1}, \ldots, p_n$ de proche en proche. □

LEMME 2.2. *Soient $P_1, \ldots, P_m \in \mathbf{C}[z_1, \ldots, z_n]$ de degrés respectifs au plus $D_1 = D \geq \cdots \geq D_m \geq 3$. Supposons que la variété $V = \{P_1 = \cdots = P_m = 0\}$ soit de dimension $n-m$.*

Alors il existe n polynômes p_i, avec $p_i = \sum_{j=1}^m \lambda_{i,j} P_j$ pour $i = 1, \ldots, m$, et $p_i = \sum_{j=1}^n \lambda_{i,j} z_j$ pour $i = m+1, \ldots, n$, où les $\lambda_{i,j}$ sont des entiers satisfaisant

$$|\lambda_{i,j}| \leq (D+1)^{n-1} + \binom{2m}{m},$$

n formes affines $L_1, \ldots, L_n \in \mathbf{Z}[z_1, \ldots, z_n]$ et une constante $R > 0$ tels que:

(a) *Pour tout sous-ensemble non vide J de $\{1, \ldots, n\}$, pour tout $j \in J$,*

$$V((p_i)_{i \in J}, (L_k)_{k \notin J}, L_j) = \emptyset.$$

(b) *Il existe une constante $\gamma > 0$ telle que*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |L_i^{3D_1 \cdots D_m}(z) p_i(z)|^2 \right)^{1/2} \geq \gamma \|z\|^{2D_1 \cdots D_m}, \quad \|z\| > R.$$

De plus, si les polynômes $P_i \in \mathbf{Z}[z_1, \ldots, z_n]$, de hauteurs logarithmiques (au sens naïf) au plus h, on peut choisir les coefficients des formes affines L_j bornés par

$$\exp\left(\kappa(n) D \prod_{i=1}^{m} D_i (h + D \log D) \right)$$

où $\kappa(n)$ est une constante effectivement calculable qui dépend seulement du nombre de variables n.

On rappelle que la hauteur logarithmique (au sens naïf) d'un polynôme à coefficients entiers est le logarithme du maximum des modules de ses coefficients.

Preuve. Le lemme précédent joint au Lemme 3.1 de [El] donne ce qu'il faut. □

Dans toute la suite $\kappa(n)$ désignera une constante effectivement calculable qui ne dépend que du nombre de variables n, et que l'on peut expliciter en la suivant pas à pas dans les différentes étapes; on gardera la même notation même si elle change d'une étape à l'autre.

Nous allons déduire du Lemme 2.2 une formule de division effective.

3. Formules de Division

Soient $P_1, \dots, P_m$ des polynômes de n variables, à coefficients entiers, de degrés respectifs au plus $D_1 = D \geq \cdots \geq D_m \geq 3$ et de hauteurs logarithmiques au plus h définissant une intersection complète; nous leur attachons un choix de n polynômes $p_1, \dots, p_n$ et de n formes affines $L_1, \dots, L_n$ via le Lemme 2.2.

Nous nous proposons de diviser un polynôme Q de degré D_Q et de hauteur logarithmique h_Q appartenant à l'idéal $(P_1, \dots, P_m)$.

Théorème 3.1. *Sous ces hypothèses, il existe des polynômes* $A_1, \dots, A_m \in \mathbf{Z}[z_1, \dots, z_n]$, *un entier naturel non nul* δ *tels que*

$$\delta Q = A_1 P_1 + \cdots + A_m P_m$$

avec les estimations suivantes:

$$\deg A_i \leq 2D_Q + \kappa(n,m) \prod_{i=1}^{m} D_i,$$

$$\log \delta \leq \kappa(n) D^4 \left(\prod_{i=1}^{m} D_i \right)^6 \left(D_Q + \prod_{i=1}^{m} D_i \right)^2 (h + D \log D),$$

et

$$h(A_i) \leq \kappa(n) \left\{ D^4 \left(\prod_{i=1}^{m} D_i \right)^5 \left(D_Q + \prod_{i=1}^{m} D_i \right)^3 (h + D \log D) + h_Q \right\},$$

où $\kappa(n,m) = 3n(n+1)(2n+1)m^n + 3mn + 12n + 8m.$

Preuve. Nous pouvons choisir les polynômes $p_1, \dots, p_m$ tels que le déterminant de la matrice des $\lambda_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq m$, soit non nul; ceci implique que $L^{3\Delta} Q \in (F_1, \dots, F_m)$ où $L = \prod_{i=1}^{m} L_i$, $\Delta = \prod_{i=1}^{m} D_i$ et $F_i = L_i^{3\Delta} p_i$, $1 \leq i \leq n$.

L'ensemble $B(R) = B(R_1, \dots, R_n) = \{\zeta \in \mathbf{C}^n : |F_i(\zeta)| < R_i,\ i = 1, \dots, n\}$ est un polyèdre de Weil [AY] pour presque tous les choix des nombres réels $R_1, \dots, R_n$ assez grands (ceci découle du théorème de Sard et de la propreté de l'application $F = (F_1, \dots, F_n)$); à l'intérieur de celui-ci, nous écrirons

$$L^{3\Delta}(z) Q(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma(R)} \frac{L^{3\Delta}(\zeta) Q(\zeta) D(\zeta, z)}{\prod_{i=1}^{n} (F_i(\zeta) - F_i(z))} \, d\zeta \tag{1}$$

où le cycle $\Gamma(R) = \{\zeta \in \mathbf{C}^n : |F_i(\zeta)| = R_i,\ i = 1, \dots, n\}$ est orienté de manière à ce que $d(\arg F_1) \wedge \cdots \wedge d(\arg F_n) \geq 0$ et où $D(\zeta, z)$ désigne le déterminant d'une matrice de polynômes $(F_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ réalisant un système de diviseurs de Hefer pour $F_1, \dots, F_n$, soit

$$\forall \zeta, z \in \mathbf{C}^n, \quad F_i(\zeta) - F_i(z) = \sum_{j=1}^{n} F_{ij}(\zeta, z)(\zeta_j - z_j), \quad i = 1, \dots, n.$$

Nous avons d'autre part

$$0 = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma(R)} \frac{L^{3\Delta}(\zeta) Q(\zeta) D(\zeta, z)}{\prod_{i=1}^{n} F_i(\zeta)} \, d\zeta \tag{2}$$

car $L^{3\Delta} Q \in (F_1, \dots, F_n)$ [BT, Prop. 1.2].

En soustrayant (2) de (1), on a

$$L^{3\Delta}(z)Q(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\Gamma(R)} L^{3\Delta}(\zeta)Q(\zeta)A(\zeta,z)\,d\zeta, \quad z\in B(R)$$

où

$$A(\zeta,z)=\frac{1}{\prod_{i=1}^n G_i(\zeta,z)}-\frac{1}{\prod_{i=1}^n F_i(\zeta)}$$

avec

$$G_i(\zeta,z)=F_i(\zeta)-F_i(z).$$

En reprenant la démonstration de la Proposition 1.3 de [BT] et exploitant le fait que $L^{3\Delta}Q$ est dans l'idéal engendré par seulement $F_1,\dots,F_m$, on obtient

$$L^{3\Delta}(z)Q(z)=\sum_{s=1}^{m}\sum_{|S|=s}F_S(z)\frac{1}{(2\pi i)^n}$$
$$\int_{\Gamma(R)}\frac{L^{3\Delta}(\zeta)Q(\zeta)R(\zeta)D(\zeta,z)G_T(\zeta,z)}{\prod_{i=1}^n F_i(\zeta)\prod_{i=1}^n G_i(\zeta,z)}\,d\zeta, \quad z\in B(R)$$

où dans la somme au dessus, S décrit les parties de $\{1,\dots,m\}$, $T=\{1,\dots,m\}\setminus S$, $F_S(z)=\prod_{i\in S}F_i(z)$, $G_T(\zeta,z)=\prod_{i\in T}G_i(\zeta,z)$, et $R(\zeta)=\prod_{i=m+1}^n F_i(\zeta)$. Ceci peut s'écrire

$$L^{3\Delta}(z)Q(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\sum_{s=1}^{m}\sum_{|S|=s}F_S(z)$$
$$\sum_{k_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=0}^{\infty}\left(\int_{\Gamma(R)}\frac{H(\zeta,z)}{\prod_{i=1}^n F_i^{k_i+2}(\zeta)}\,d\zeta\right)\prod_{i=1}^n F_i^{k_i}(z) \tag{3}$$

pour $z\in B(R)$ où

$$H(\zeta,z)=L^{3\Delta}(\zeta)Q(\zeta)R(\zeta)D(\zeta,z)G_T(\zeta,z).$$

Si R est choisit assez grand pour que $B(R)$ contienne tous les zéros communns aux polynômes $F_1,\dots,F_n$, (3) devient

$$L^{3\Delta}(z)Q(z)=\sum_{s=1}^{m}\sum_{|S|=s}F_S(z)$$
$$\sum_{k_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=0}^{\infty}\langle\bar\partial(1/F^{\underline{k}+\underline{2}}),H(\zeta,z)\,d\zeta\rangle\prod_{i=1}^n F_i^{k_i}(z), \quad z\in B(R)$$

où $\langle\bar\partial(1/F^{\underline{k}+\underline{2}}),\cdot\rangle$ est le résidu global de Grothendieck du système de polynômes $F_1^{k_1+2},\dots,F_n^{k_n+2}$ [GH, Chap. 5], k désignant le multi-indice $(k_1,\dots,k_n)$.

D'après le Théorème 1 de [BY3] on a

$$L^{3\Delta}(z)Q(z)=\sum_{s=1}^{m}\sum_{|S|=s}F_S(z)$$
$$\sum_{|k|\le k_0}\langle\bar\partial(1/F^{\underline{k}+\underline{2}}),H(\zeta,z)\,d\zeta\rangle\prod_{i=1}^n F_i^{k_i}(z), \quad z\in\mathbf{C}^n \tag{4}$$

où $k_0=(1/2\Delta)\{3m\Delta+3n\Delta-4\Delta+D_Q+2mD+2n+nD-2m-2D\}$.

Il est clair que (4) s'écrit sous la forme

$$L^{3\Delta}(z)\,Q(z)=\sum_{i=1}^{m} B_i(z)F_i(z),\quad z\in\mathbf{C}^n$$

où les B_i, $1\le i\le m$, sont des polynômes à coefficients rationnels [BY2, Lemme 2.3], de degré au plus $2D_Q+(12n+8m-3)\Delta$. Maintenant nous nous proposons de chercher un dénominateur commun aux coefficients des B_i, $1\le i\le m$, et d'estimer leur taille.

Ces coefficients sont des combinaisons linéaires entières des nombres rationnels

$$\rho_l=\langle\bar\partial(1/F^{\underline{k}+\underline{2}}),\zeta^l d\zeta\rangle,\quad |l|\le D_Q+(7n+3m)\Delta \tag{5}$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$\rho_l=\sum_{j=0}^{n}\sum_{|J|=j}\sum_{\alpha\in V_J}\rho_{lJ}(\alpha)$$

où $V_J=V((p_i)_{i\in J},(L_j)_{j\notin J})$, et

$$\rho_{lJ}(\alpha)=\left\langle\left(\bigwedge_{i\in J}\bar\partial\left(\frac{1}{p_i^{k_i+2}}\right)\bigwedge_{j\notin J}\bar\partial\left(\frac{1}{L_j^{3\Delta(k_j+2)}}\right)\right)',\frac{\zeta^l}{\prod_{r\notin J}p_r^{k_r+2}\prod_{s\in J}L_s^{3\Delta(k_s+2)}}\,d\zeta\right\rangle_\alpha$$

le prime dans le crochet signifie que l'on prend le résidu local [GH, Chap. 5] après avoir réarrangé les indices dans l'ordre strictement croissant.

On pose $J=\{i_1,\dots,i_k\}$; nous associons au système de polynômes $(p_j)_{j\in J}$ un système triangulaire de polynômes $(\dot p_j)_{j\in J}$, c'est à dire tel que $\deg\dot p_{j_i}\le D_i$, $1\le i\le k$, et

$$\dot p_j=\sum_{k\in J}\beta_{j,k}p_k,\quad j\in J,$$

où les β_{jk}, $j,k\in J$, sont des entiers de module au plus $\exp(\kappa(n)\log D)$ (voir [El, Lemme 1]). Par construction, l'idéal $((\dot p_i^{(|k|+2n)})_{i\in J},(L_j^{3\Delta(|k|+2n)})_{j\notin J})$ est contenu dans l'idéal $((p_i^{k_i+2})_{i\in J},(L_j^{3\Delta(k_j+2)})_{j\notin J})$. Il existe alors des polynômes $R_{j,k}$, $1\le j,k\le n$, à coefficients entiers de degré au plus $\kappa(n)D(D_Q+\Delta)$ tels que

$$f_j=\sum_{k=1}^{n}R_{j,k}h_k,\quad 1\le j\le n,$$

où $f_i=\dot p_i^{(|k|+2n)}$ $(i\in J)$, $h_j=p_j^{k_j+2}$ $(j\in J)$, et $f_s=h_s=L_s^{3\Delta(k_s+2)}$ $(s\notin J)$.

En utilisant la loi de transformation du résidu [BGY, Prop. 2.5; GH, Chap. 5, p. 657], la recherche d'un dénominateur commun aux nombres algébriques

$$\rho_{lJ}(\alpha),\quad |l|\le D_Q+(7n+3m)\Delta \tag{6}$$

se ramène à celle d'un dénominateur commun aux nombres algébriques

$$\left\langle\bigwedge_{i\in J}\bar\partial\left(\frac{1}{\dot p_i^{|k|+2n}}\right)\bigwedge_{j\notin J}\bar\partial\left(\frac{1}{L_j^{3\Delta(|k|+2n)}}\right),\frac{\zeta^l}{\Phi_J}\,d\zeta\right\rangle_\alpha,\quad |l|\le\kappa(n)D(D_Q+\Delta)$$

où $\Phi_J=\prod_{j\notin J}p_j^{k_j+2}\prod_{j\in J}L_j^{3\Delta(k_j+2)}$.

A ce stade nous sommes dans la même situation que celle du Lemme 5.4 de [BY2]; en reprenant la méthode utilisée pour la preuve de ce lemme, on trouve un dénominateur λ commun aux nombres rationnels

$$\rho_l, \quad |l| \leq D_Q + (7n+3m)\Delta,$$

dont la taille satisfait

$$\log \lambda \leq \kappa(n) D^4 \Delta^6 (D_Q + \Delta)^2 (h + D \log D).$$

Intéressons-nous maintenant à la taille des nombres rationnels donnés par (5). Pour cela, estimons les nombres algébriques donnés par (6).

En effet, les polynômes à coefficients entiers $R_{j,k}$, $1 \leq j, k \leq n$, précédents sont de hauteurs logarithmiques au plus $\kappa(n) D\Delta (D_Q + \Delta)^2 (h + D \log D)$. En appliquant la loi de transformation pour le résidu [BGY; GH], on a

$$\begin{aligned}\rho_{lJ}(\alpha) &= \sum_{|m| \leq \kappa(n) D(D_Q+\Delta)} a_m \left\langle \left(\bigwedge_{i \in J} \bar{\partial}\left(\frac{1}{\dot{p}_i^{(|k|+2n)}}\right) \bigwedge_{j \notin J} \bar{\partial}\left(\frac{1}{L_j^{3\Delta(|k|+2n)}}\right)\right)', \frac{\zeta^m}{\Phi_J} d\zeta \right\rangle_\alpha \\ &= \sum_{|m| \leq \kappa(n) D(D_Q+\Delta)} a_m \eta_{mJ}(\alpha)\end{aligned}$$

où les a_m sont des entiers de module au plus

$$\exp(\kappa(n) D\Delta (D_Q + \Delta)^2 (h + D \log D)).$$

Donc l'estimation des nombres donnés par (6) se ramène à celle de

$$\eta_{mJ}, \quad |m| \leq \kappa(n) D(D_Q + \Delta).$$

Nous sommes de nouveau dans la même situation que celle du Lemme 5.6 de [BY2]; en reprenant la démarche utilisée pour établir ce lemme, on trouve

$$|\rho_l| \leq \exp(\kappa(n) D^2 \Delta^3 (D_Q + \Delta)^3 (h + D \log D)), \quad |l| \leq D_Q + (7n+3m)\Delta.$$

Comme il y a une grande liberté pour le choix des formes L_i, on associe aux polynômes $P_1, \ldots, P_m$ $n+1$ systèmes de formes affines $L_{i,1}, \ldots, L_{i,n}$, $1 \leq i \leq n+1$, via le Lemme 2.2. On peut supposer que $L_{1,i_1}, \ldots, L_{n+1,i_{n+1}}$, $1 \leq i_1, \ldots, i_{n+1} \leq m$, n'ont pas de zéros communs.

Posons $\mathcal{L}_i = \prod_{j=1}^m L_{i,j}$, $1 \leq i \leq n+1$. Il existe alors un entier naturel non nul d et des polynômes $Q_1, \ldots, Q_{n+1} \in \mathbf{Z}[z_1, \ldots, z_n]$ tels que

$$d = \mathcal{L}_1 Q_1 + \cdots + \mathcal{L}_{n+1} Q_{n+1}$$

avec les estimations suivantes [BY2]:

$$\deg Q_i \leq \kappa(n);$$

$$\log d \leq \kappa(n) D\Delta (h + D \log D);$$

$$h(Q_i) \leq \kappa(n) D\Delta (h + D \log D).$$

Par suite $d^{3(n+1)\Delta} \in (\mathcal{L}_1^{3\Delta}, \ldots, \mathcal{L}_{n+1}^{3\Delta})$ et on peut donc trouver des polynômes $S_1, \ldots, S_{n+1}$ à coefficients entiers tels que

$$d^{3(n+1)\Delta} = \mathcal{L}_1^{3\Delta} S_1 + \cdots + \mathcal{L}_{n+1}^{3\Delta} S_{n+1}$$

avec

$$h(S_i) \leq \kappa(n) D\Delta^2 (h + D \log D)$$

et

$$\deg S_i \leq (3n(n+1)(2n+1)m^n + 3mn)\Delta.$$

Finalement, on a

$$\delta Q = d^{3(n+1)\Delta} \lambda Q = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda S_j \mathcal{L}_j^{3\Delta} Q = \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{m} \lambda S_j B_{ji} F_{ji} = \sum_{k=1}^{n} P_k A_k$$

où

$$A_k = \lambda \sum_{i=1}^{m} \lambda_{ik} \sum_{j=1}^{n+1} S_j B_{ji} L_{ji}^{3\Delta}.$$

On a

$$\log \delta = 3(n+1)\Delta \log d + \log \lambda \leq \kappa(n) D^4 \Delta^6 (D_Q + \Delta)^2 (h + D \log D).$$

Il est clair que les coefficients des quotients A_k sont entiers et

$$\deg A_k \leq 2D_Q + \{3n(n+1)(2n+1)m^n + 3mn + 12n + 8m\}\Delta.$$

En plus, on sait estimer les différents termes qui apparaissent dans l'expression des quotients A_k; on a donc

$$h(A_k) \leq \kappa(n)\{D^4 \Delta^5 (D_Q + \Delta)^3 (h + D \log D) + h_Q\}. \qquad \square$$

Remarques. On peut remplacer $\mathbf{Z}$ par l'anneau des entiers d'un corps de nombres K. Dans ce cas les constantes $\kappa(n)$ vont dépendre, en plus du nombres de variables n, du degré de l'extension $K/\mathbf{Q}$.

References

[AY] I. A. Aĭzenberg et A. P. Yuzhakov, *Integral representations and residues in multidimensional complex analysis,* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983.

[BGY] C. A. Berenstein, R. Gay, et A. Yger, *Analytic continuation of currents and division problems,* Forum. Math. 1 (1989), 15–51.

[BT] C. A. Berenstein et B. A. Taylor, *Interpolation problems in* $\mathbf{C}^n$ *with applications to harmonic analysis,* J. Analyse Math. 38 (1980), 188–254.

[BY1] C. A. Berenstein et A. Yger, *Bounds for the degrees in the division problem,* Michigan Math. J. 37 (1990), 25–43.

[BY2] ———, *Effective Bezout identities in* $\mathbf{Q}[z_1, \ldots, z_n]$, Acta Math. 166 (1991), 69–120.

[BY3] ———, *Une formule de Jacobi et ses conséquences,* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 24 (1991), 363–377.

[BGS] J. B. Bost, H. Gillet, et C. Soulé, *Un analogue arithmétique du théorème de Bezout,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 312 (1991), 845–848.

[El] M. Elkadi, *Une version effective du théorème de Briançon-Skoda dans le cas algébrique descret,* Acta Arith. (à paraître).

[Fa] G. Faltings, *Diophantine approximation on abelian varieties,* Ann. of Math. (à paraître).

[GS] H. Gillet et C. Soulé, *Arithmetic intersection theory,* Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 72 (1990), 93–174.
[GH] P. Griffiths et J. Harris, *Principles of algebraic geometry,* Wiley, New York, 1978.
[Ha] R. Hartshorne, *Algebraic geometry,* Springer, New York, 1977.
[He] G. Hermann, *Zur Frage der endliche vielen schritte in der Theorie der polynomideale,* Math. Ann. 95 (1926), 736–788.
[Ko] J. Kollár, *Sharp effective Nullstellensatz,* J. Amer. Math. Soc. 1 (1988), 963–975.
[Mc] F. Macaulay, *The algebraic theory of modular systems,* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1916.
[Ma] D. W. Masser, *On polynomials and exponential polynomials in several complex variables,* Invent. Math. 63 (1981), 81–95.
[MW] D. W. Masser et G. Wüstholz, *Fields of large transcendence degree generated by values of elliptic functions,* Invent. Math. 72 (1983), 407–464.
[MM] E. Mayr et A. Meyer, *The complexity of the word problems for commutative semigroups and polynomial ideals,* Adv. in Math. 64 (1982), 305–329.
[P1] P. Philippon, *Théorème des zéros effectifs d'après Kollár,* Problèmes diophantiens, Publ. Math. Univ. Paris 6, No. 88, 1988/89.
[P2] ———, *Dénominateurs dans le théorème des zéros de Hilbert,* Acta. Arith. 58 (1991), 1–25.

Université Bordeaux I
CeReMaB 33405
Talence
France