Résolution de $\bar\partial$ sur des Portions de Sphères ou d'Anneaux

LILIANE BITAR

Il est bien connu (cf. en particulier [6]) que sur la sphère unité S_n de $\mathbf{C}^n$, $n>1$, le $\bar\partial_b$-problème est résoluble sauf pour le degré critique $n-1$.

Dans l'article [12] Rosay démontre que si g est une $(0,q)$-forme $\mathcal{C}^\infty$ et $\bar\partial_b$-fermée sur la partie de S_n définie par $|Z_1|<\frac{1}{2}$, avec $1\le q\le n-3$, alors il existe u une $(0,q-1)$-forme $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\bar\partial_b u=g$ sur cette partie. Et il donne un contre-exemple pour $q=n-2$. Il démontre aussi la résolubilité de $\bar\partial_b$ sur les parties de S_n définies par $|Z_1|>\frac{1}{2}$, pour $q=1,\dots,n-2$.

Dans ce travail, on s'intéresse à des ouverts Σ de S_n définis par $|Z_1|^2+\cdots+|Z_k|^2<\frac{1}{2}$, et on en déduira la résolubilité de l'équation $\bar\partial$ dans des portions d'anneaux θ définies par $1<|Z|<2$ et $|Z_1|^2+\cdots+|Z_k|^2<\frac{1}{2}$ avec $1\le k\le n-1$.

On démontrera les théorèmes suivant, pour $n\ge 4$:

THEOREME 1. *Soit g une $(0,q)$-forme $\mathcal{C}^\infty$ et $\bar\partial_b$-fermée sur Σ, $q\in\{1,\dots,n-3\}$.*

Si $q\notin\{n-k-1,\ n-k,\ n-k+1\}$, alors il existe u une $(0,q-1)$-forme $\mathcal{C}^\infty$ telle que

$$\bar\partial_b u=g \quad \text{sur } \Sigma. \tag{0.1}$$

Si $q=n-k+1$, on peut résoudre (0.1) *sur toute partie relativement compacte de Σ.*

Si $q=n-k-1$, l'équation (0.1) *n'est pas résoluble sur Σ.*

THEOREME 2. *Soit g une $(0,q)$-forme $\mathcal{C}^\infty$ et $\bar\partial$-fermée dans θ, $q\in\{1,\dots,n-3\}$.*

Si $q\notin\{n-k-1,\ n-k,\ n-k+1\}$, alors il existe u une $(0,q-1)$-forme $\mathcal{C}^\infty$ dans θ telle que

$$\bar\partial u=g \quad \text{dans } \theta. \tag{0.2}$$

Si en plus g se prolonge $\mathcal{C}^\infty$ sur les parties de la frontière $|Z|=1$ ou 2, alors il existe u une solution $\mathcal{C}^\infty$ dans θ de (0.2) *qui se prolonge $\mathcal{C}^\infty$ sur $|Z|=1$ ou 2.*

Si $q=n-k+1$, on peut résoudre (0.2) *dans toute partie relativement compacte dans θ.*

Si $q=n-k-1$, l'équation (0.2) *n'est pas résoluble.*

Received June 8, 1989.
Michigan Math. J. 37 (1990).

Le cas $q=n-k$ reste ouvert.

Dans toute la suite on note $Z=(Z', Z'')$ où $Z'=(Z_1, \dots, Z_k)$, $Z''=(Z_{k+1}, \dots, Z_n)$ et $1 \leq k \leq n-1$.

I. Formules de Saut et d'Homotopie

1. REMARQUE PRELIMINAIRE. Soit $\Sigma' = \{|Z|=1, |Z'|^2 < \frac{1}{2} - \epsilon\}$ où ϵ est un réel positif.

Il suffit de prouver, pour tout $\epsilon > 0$, la résolubilité de $\bar{\partial}_b$ sur Σ', pour les degrés $q \in \{1, \dots, n-3\}/\{n-k-1, n-k\}$ la résolubilité sur S s'en déduit comme dans [12] par un procédé de suite convergente.

2. Considérons Ω un voisinage ouvert de Σ' dans $\mathbf{C}^n$, coupé par Σ en deux parties $\Omega^+ = \{Z \in \Omega : |Z| < 1\}$ et $\Omega^- = \{Z \in \Omega : |Z| > 1\}$, et tel que $\Omega \cap \Sigma$ est la partie Σ'' définie par $|Z'|^2 < \frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{2}$. Soit $S(\zeta, Z) = (S_1(\zeta, Z), \dots, S_n(\zeta, Z))$ une section de fibré de Leray associée à (Σ, Ω). Ce qui signifie: pour $Z \in \Omega \backslash \Sigma$ et $\zeta \in \Sigma$, $S(\zeta, Z)$ est un n-uplet de fonctions continuement différentiables qui vérifient l'hypothèse fondamentale

$$\operatorname{Re} \sum_{j=1}^{n} (\zeta_j - Z_j) S_j(\zeta, Z) > 0 \quad \forall Z \in \Omega \backslash \Sigma \text{ et } \forall \zeta \in \Sigma.$$

A $S(\zeta, Z)$ on associe le noyau

$$K_S(\zeta, Z) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \frac{S_j(\zeta, Z)}{[\sum_{l=1}^{n} (\zeta_l - Z_l) S_l(\zeta, Z)]^n} \bigwedge_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \bar{\partial}_{\zeta, Z} S_k \wedge d\zeta$$

avec $d\zeta = d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n$ et $\bar{\partial}_{\zeta, Z} = \bar{\partial}_\zeta + \bar{\partial}_Z$.

Supposons que S vérifie:

$$(*) \begin{cases} 1. \ (\alpha) \ S \text{ est holomorphe en } \zeta \text{ pour } \zeta \text{ à l'extérieur d'un compact } H \subset \Sigma, \\ \quad \text{ou} \\ \quad (\beta) \ S \text{ est holomorphe en } Z \text{ pour } \zeta \notin H. \\ 2. \ S(\zeta, Z) = \bar{\zeta} - \bar{Z}, \text{ pour } Z \in \Omega \backslash \Sigma \text{ et } \zeta \in \Sigma''. \end{cases}$$

Définissons $g^{\pm}(Z)$, pour $Z \in \Omega \backslash \Sigma$, par

$$g^{\pm}(Z) = (-1)^q \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{\zeta \in \Sigma} g(\zeta) \wedge K_S(\zeta, Z) = \begin{cases} g^+(Z) & \text{si } Z \in \Omega^+, \\ g^-(Z) & \text{si } Z \in \Omega^-. \end{cases} \tag{1.1}$$

Par (2), la formule locale de saut et les résultats de différentiabilité sont applicables (cf. [1], [3], et [4]). Et en tenant compte de (1), $g^{\pm}$ est $\bar{\partial}$-fermée dans $\Omega^{\pm}$ (cf. [12]). Ce qui signifie: g^+ (resp. g^-) est $\bar{\partial}$-fermée dans Ω^+ (resp. dans Ω^-) et s'étend $\mathcal{C}^\infty$ sur Σ''. En plus, sur Σ'' on a:

$$g = g^+ - g^- \pmod{\bar{\partial}\rho}$$

ρ étant une fonction définissant Σ.

Pour résoudre l'équation

(1.2) $$\bar{\partial}_b u = g \quad \text{sur } \Sigma'$$

il suffit de résoudre

(1.3) $$\bar{\partial}_b u^{\pm} = g^{\pm} \quad \text{sur } \Sigma'$$

car alors la fonction $u = u^+ - u^-$ vérifie (1.2).

3. On sait d'après [9], que l'équation $\bar{\partial}_b$ est résoluble sur la frontière de tout domaine strictement convexe, sauf pour le degré critique $n-1$.

Si $g^{\pm}$ est $\bar{\partial}_b$-fermée sur la frontière d'un domaine strictement convexe $\theta^{\pm}$ tel que $\Sigma' \subset b\theta^{\pm}$, alors la résolubilité de $\bar{\partial}_b u^{\pm} = g^{\pm}$ sur $b\theta^{\pm}$, donc sur $\Sigma' \subset b\theta^{\pm}$, résulte de [9].

Sinon, on considère θ^+ (resp. θ^-) un domaine strictement convexe contenu dans la boule unité B_n (resp. contenant B_n) et telle que $b\theta^+ \cap S_n = \Sigma'$ (resp. $b\theta^- \cap S_n = \Sigma'$). Si on sait résoudre $\bar{\partial} u^{\pm} = g^{\pm}$ dans $\Omega^{\pm}$, on prolonge u^+ (resp. u^-) en une forme $\mathcal{C}^\infty$ dans B_n (resp. dans $\mathbf{C}^n \backslash \bar{B}_n$). On obtient $\bar{\partial} u^{\pm}$ une $(0, q)$-forme $\mathcal{C}^\infty$ et $\bar{\partial}_b$-fermée sur $b\theta^{\pm}$, égale à $g^{\pm}$ sur Σ'. D'après [9], il existe $v^{\pm}$ une $(0, q-1)$-forme $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\bar{\partial}_b v^{\pm} = \bar{\partial} u^{\pm}$ sur $b\theta^{\pm} \supset \Sigma'$, d'où la résolubilité de (1.3). Il suffit donc de résoudre $\bar{\partial} u^{\pm} = g^{\pm}$ dans $\Omega^{\pm}$.

4. RESOLUTION DE $\bar{\partial} u^{\pm} = g^{\pm}$ DANS $\Omega^{\pm}$. Si $S'(\zeta, Z)$ est une autre section de fibré de Leray associées à (Σ, Ω), on peut appliquer la formule d'homotopie (cf. [3], [5], [10], et [11]):

$$\int_{\zeta \in \Sigma} g(\zeta) \wedge K_S(\zeta, Z) = \int_{\zeta \in \Sigma} g(\zeta) \wedge K_{S'}(\zeta, Z) - \int_{(b\Sigma) \times [0,1]} g(\zeta) \wedge K_{\tilde{S}}(\zeta, Z, \lambda)$$
$$+ \bar{\partial}\left(- \int_{\Sigma \times [0,1]} g(\zeta) \wedge K_{\tilde{S}}(\zeta, Z, \lambda) \right) \quad \forall Z \in \Omega \backslash \Sigma$$

où

$$\tilde{S}(\zeta, Z, \lambda) = (1-\lambda) S(\zeta, Z) + \lambda S'(\zeta, Z), \quad \lambda \in [0,1]$$

et

$$K_{\tilde{S}}(\zeta, Z, \lambda) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \frac{\tilde{S}_j(\zeta, Z, \lambda)}{[\sum_{l=1}^{n} (\zeta_l - Z_l) \tilde{S}_l]^n} \bigwedge_{k \neq j} \delta \tilde{S}_k \wedge d\zeta$$

avec $\delta = \bar{\partial}_\zeta + \bar{\partial}_Z + d_\lambda$.

On remarque que si les sections S et S' sont telles que pour tout $Z \in \Omega^{\pm}$

(**) $$\int_{\zeta \in \Sigma} g(\zeta) \wedge K_{S'}(\zeta, Z) = 0$$

et

(***) $$\int_{b\Sigma \times [0,1]} g(\zeta) \wedge K_{\tilde{S}}(\zeta, Z, \lambda) = 0,$$

alors

$$u^{\pm}(Z)=(-1)^{q+1}\frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n}\int_{\Sigma\times[0,1]} g(\zeta)\wedge K_{\tilde{S}}(\zeta,Z,\lambda)=\begin{cases} u^+(Z) & \text{si } Z\in\Omega^+, \\ u^-(Z) & \text{si } Z\in\Omega^-, \end{cases}$$

vérifie $\bar\partial u^{\pm}=g^{\pm}$ dans $\Omega^{\pm}$.

Le problème se réduit donc à construire des sections $S(\zeta,Z)$ et $S'(\zeta,Z)$ qui vérifient (*), (**), et (***).

II. Construction des Sections

1. Supposons que $q\in\{1,\ldots,n-k-2\}$, avec $1\le k\le n-3$, et construisons des sections convenables à la résolubilité dans ces degrés.

Considérons pour $\zeta\in\Sigma$ et $Z\in\mathbf{C}^n\setminus\Sigma$ avec $|Z'|^2<\frac{1}{2}-\frac{\epsilon}{2}$:

$$(2.1)\quad S(\zeta,Z)=\begin{cases} \bar\zeta-\bar Z & \text{si } |\zeta'|^2<\frac{1}{2}-\frac{\epsilon}{2}, \\ (\bar\zeta',0) & \text{si } \frac{1}{2}-\frac{\epsilon}{4}<|\zeta'|^2<\frac{1}{2}, \\ \chi(\zeta')\cdot(\bar\zeta-\bar Z)+[1-\chi(\zeta')]\cdot(\bar\zeta',0) & \text{si } \frac{1}{2}-\frac{\epsilon}{2}<|\zeta'|^2<\frac{1}{2}-\frac{\epsilon}{4}, \end{cases}$$

où χ est une application $\mathcal{C}_0^\infty$ de $\mathbf{C}^k$ dans [0,1] telle que $\chi\equiv 1$ dans un voisinage de $\{\zeta'\in\mathbf{C}^k: |\zeta'|^2<\frac{1}{2}-\frac{\epsilon}{2}\}$ et $\chi\equiv 0$ dans un voisinage de $\{\zeta'\in\mathbf{C}^k: \frac{1}{2}-\frac{\epsilon}{4}<|\zeta'|^2<\frac{1}{2}\}$.

On vérifie que S est une section de fibré de Leray associée à (Σ,Ω), avec $\Omega=\{Z\in\mathbf{C}^n: |Z'|^2<\frac{1}{2}-\frac{\epsilon}{2}\}$. En plus, $S(\zeta,Z)=\bar\zeta-\bar Z$ pour $\zeta\in\Sigma''=\{|\zeta|=1, |\zeta'|^2<\frac{1}{2}-\frac{\epsilon}{2}\}$, et S est holomorphe en Z pour $\frac{1}{2}-\frac{\epsilon}{4}<|\zeta'|^2<\frac{1}{2}$. Par conséquent, $S(\zeta,Z)$ vérifie (*).

D'autre part, la $(0,q)$-forme g^+ définie par (1.1) est $\mathcal{C}^\infty$ et $\bar\partial$-fermée dans $\Omega^+=\{Z\in\Omega: |Z|<1\}=\{|Z|<1, |Z'|^2<\frac{1}{2}-\frac{\epsilon}{2}\}$. Or on peut trouver un domaine strictement convexe θ^+ contenu dans Ω^+ et tel que $\Sigma'\subset b\theta^+$. Donc la résolubilité de $\bar\partial_b u^+=g^+$ sur Σ' résulte de [9].

Il nous reste à construire une section S' associée à (Σ,Ω^-) avec

$$\Omega^-=\{Z\in\mathbf{C}^n: |Z|>1 \text{ et } |Z'|^2<\tfrac{1}{2}-\tfrac{\epsilon}{2}\},$$

telle que (**) et (***) soient vérifiées.

Considérons pour $\zeta\in\Sigma$ et $Z\in\Omega^-$:

$$S'(\zeta,Z)=\begin{cases} -\bar Z & \text{si } |\zeta'|^2<\frac{1}{2}-\frac{\epsilon}{2}, \\ (\bar\zeta',0) & \text{si } \frac{1}{2}-\frac{\epsilon}{4}<|\zeta'|^2<\frac{1}{2}, \\ \text{et on recolle comme dans (2.1).} & \end{cases}$$

On vérifie que S' est une section de fibré de Leray associée à (Σ,Ω^-).

Démontrons (**) *et* (***):

$d\bar\zeta_{k+1},\ldots,d\bar\zeta_n$ n'apparaissent pas dans $K_{S'}(\zeta,Z)$. Par conséquent, $g\wedge K_{S'}$ est de degré au plus $(n+k+q)$ en $d\zeta, d\bar\zeta$. Σ étant de dimension réelle $2n-1$ donc (**) est vérifiée pour $q\in\{1,\ldots,n-k-2\}$. D'autre part, (***) est triviale car sur $b\Sigma$ on a $\tilde S(\zeta,Z,\lambda)=(1-\lambda)S(\zeta,Z)+\lambda S'(\zeta,Z)=(\bar\zeta',0)$ donc $K_{\tilde S}(\zeta,Z,\lambda)=0$ $(k\le n-3<n-1)$.

Ainsi (*), (**), et (***) sont satisfaites pour tout $q\in\{1,\ldots,n-k-2\}$.

2. Supposons à présent que $q\in\{n-k+1,\dots,n-3\}$ avec $4\le k\le n-1$. Soit

$$\Omega=\{Z\in\mathbf{C}^n\colon |Z''|^2>\tfrac12+\tfrac{\epsilon}{2}\}\quad\text{avec } Z''=(Z_{k+1},\dots,Z_n).$$

On remarque que $\Omega\cap S_n=\{|Z|=1,\ |Z'|^2<\frac12-\frac{\epsilon}{2}\}=\Sigma''$.

Considérons pour $\zeta\in\Sigma$ et $Z\in\Omega\backslash\Sigma$:

$$S(\zeta,Z)=\begin{cases}\bar\zeta-\bar Z & \text{si } |\zeta'|^2<\frac12-\frac{\epsilon}{2},\\ (0,-\bar Z'') & \text{si } \frac12-\frac{\epsilon}{4}<|\zeta'|^2<\frac12,\\ \text{et on recolle comme dans (2.1).}\end{cases}$$

$S(\zeta,Z)$ est une section de fibré de Leray associée à (Σ,Ω), elle coïncide avec $\bar\zeta-\bar Z$ pour $\zeta\in\Sigma''$ et S est holomorphe en ζ pour $\frac12-\frac{\epsilon}{4}<|\zeta'|^2<\frac12$, donc S vérifie $(*)$.

D'autre part, considérons pour $\zeta\in\Sigma$ et $Z\in\Omega^+=\{|Z|<1,\ |Z''|^2>\frac12+\frac{\epsilon}{2}\}$:

$$S'_+(\zeta,Z)=\bar\zeta.$$

C'est une section de fibré de Leray associée à (Σ,Ω^+).

Par considération de degré, on démontre comme précédemment (dans II.1) $(**)$ et $(***)$. Il nous reste à construire une section S'_- associée à (Σ,Ω^-), $\Omega^-=\{|Z|>1,\ |Z''|^2>\frac12+\frac{\epsilon}{2}\}$, telle que S et S'_- vérifient $(**)$ et $(***)$ sur (Σ,Ω^-).

Définissons $S'_-(\zeta,Z)$ pour $\zeta\in\Sigma$ et $Z\in\Omega^-$ par

$$S'_-(\zeta,Z)=-\bar Z.$$

C'est bien une section de fibré de Leray. Et on peut de même vérifier $(**)$ et $(***)$ par considération de degré.

D'où la résolubilité de l'équation $\bar\partial_b u=g$ sur Σ', pour tout

$$q\in\{1,\dots,n-3\}\backslash\{n-k-1,n-k\}.$$

III. Non Résolubilité pour $q=n-k-1$

Pour compléter la démonstration du Théorème 1, il reste à démontrer lorsque $k<n-1$ l'existence d'une $(0,n-k-1)$-forme g, $\mathcal{C}^\infty$ et $\bar\partial_b$-fermée sur Σ, telle que l'équation $\bar\partial_b u=g$ soit non résoluble sur Σ.

Raisonnons par l'absurde en supposant que l'équation $\bar\partial_b$ est résoluble sur Σ pour le degré $n-k-1$, et démontrons que cela implique la propriété suivante:

$$(\mathcal{P})\begin{cases}\text{Soit } \omega_p=\{Z\in\Sigma\colon Z_n=\cdots=Z_{n-p}=0\},\ 0\le p\le n-k-2.\\ \text{Alors, pour toute } f\in\mathcal{C}^\infty_{0,q}(\omega_p),\ 0\le q\le n-p-k-2, \text{ telle que } \bar\partial_b f=0\\ \text{dans } \omega_p \text{ (le } \bar\partial_b \text{ est dans le sens de } \mathbf{C}^{n-p-1}\text{), il existe } F\in\mathcal{C}^\infty_{0,q}(\Sigma) \text{ telle}\\ \text{que } \bar\partial_b F=0 \text{ sur } \Sigma \text{ et } F=f \text{ sur } \omega_p.\end{cases}$$

Par récurrence sur $p=0,\dots,n-k-2$:

Si $p=0$: soit f une $(0,q)$-forme $\mathcal{C}^\infty$ et $\bar\partial_b$-fermée sur $\omega_0=\Sigma\cap\{Z_n=0\}$ avec $0\le q\le n-k-2$. Considérons f_1 un prolongement $\mathcal{C}^\infty$ de f sur Σ. On peut choisir f_1 tel que $\bar{\partial}_b f_1$ est plat sur ω_0. Posons $F=f_1+Z_n v$ sur Σ, où v est à choisir convenablement. On a $\bar{\partial}_b F=0$ sur Σ si et seulement si $\bar{\partial}_b v=-Z_n^{-1}\bar{\partial}_b f_1$ sur Σ. Or $\alpha=-Z_n^{-1}\bar{\partial}_b f_1$ est une $(0,q+1)$-forme $\mathcal{C}^\infty$ et $\bar{\partial}_b$ fermée sur Σ avec $1\le q+1\le n-k-1$. Par conséquent, l'existence de v se déduit du raisonnement par l'absurde. Ainsi F est une $(0,q)$-forme $\mathcal{C}^\infty$, $\bar{\partial}_b$-fermée sur Σ et $F=f$ sur ω_0. Donc $(\mathcal{P})$ est vraie pour $p=0$.

Supposons que la propriété $(\mathcal{P})$ reste vraie jusqu' à l'ordre $p<n-k-2$ et démontrons qu'elle est vraie pour l'ordre $p+1$: Soit $f\in\mathcal{C}^\infty_{0,q}(\omega_{p+1})$ telle que $\bar{\partial}_b f=0$ avec $0\le q\le n-p-k-3$ et $\omega_{p+1}=\Sigma\cap\{Z_n=\cdots=Z_{n-p-1}=0\}$. Considérons f_1 un prolongement $\mathcal{C}^\infty$ de f sur Σ. Posons $G=f_1+Z_{n-p-1}v$ sur ω_p où v est à choisir convenablement. On a

$$\alpha=-Z_{n-p-1}^{-1}\bar{\partial}_b f_1\in\mathcal{C}^\infty_{0,q+1}(\omega_p)\quad\text{et}\quad\bar{\partial}_b\alpha=0$$

avec $1\le q+1\le n-p-k-2$. L'hypothèse de récurrence implique l'existence d'une $(0,q+1)$-forme β, $\mathcal{C}^\infty$ et $\bar{\partial}_b$-fermée sur Σ et telle que $\beta=\alpha$ sur ω_p. D'après l'hypothèse il existe $v\in\mathcal{C}^\infty_{0,q}(\Sigma)$ telle que $\bar{\partial}_b v=\beta$ sur Σ $(1\le q+1\le n-p-k-2<n-k-1)$. Ainsi G est une $(0,q)$-forme $\mathcal{C}^\infty$, $\bar{\partial}_b$-fermée sur ω_p et $G=f$ sur ω_{p+1} avec $q\le n-p-k-3<n-p-k-2$. A nouveau l'hypothèse de récurrence implique l'existence d'une $(0,q)$-forme F, $\mathcal{C}^\infty$ et $\bar{\partial}_b$-fermée sur Σ et telle que sur ω_{p+1}, $F=G=f$. Ainsi $(\mathcal{P})$ est vraie pour tout $p=0,\ldots,n-k-2$.

En particulier, $(\mathcal{P})$ vraie pour l'ordre $n-k-2$ implique que toute fonction $\bar{\partial}_b$-fermée sur $\omega_{n-k-2}=\{Z\in\Sigma\colon Z_n=\cdots=Z_{k+2}=0\}$ se prolonge en une fonction $\bar{\partial}_b$-fermée sur Σ; ceci est impossible. En effet, la fonction $1/Z_{k+1}$ est holomorphe, donc $\bar{\partial}_b$-fermée, sur ω_{n-k-2}. Mais elle ne se prolonge pas en une fonction $\bar{\partial}_b$-fermée sur Σ, car sinon soit Γ son prolongement. Γ est donc $\bar{\partial}_b$-fermée sur $\Sigma_1=\{Z\in\Sigma\colon Z_1=\cdots=Z_k=0\}\subset\Sigma$. Et Σ_1 peut-être considérée comme étant la sphère unité de $\mathbf{C}^{n-k}$ avec $n-k>1$. Donc Γ admet un prolongement holomorphe $\tilde{\Gamma}$ dans $D_1=\{|Z''|^2<1\}$ (cf. [7]). Par conséquent, $1/Z_{k+1}$ admet un prolongement holomorphe sur

$$\{|Z_{k+1}|^2<1\}=\{|Z_{k+1}|^2+\cdots+|Z_n|^2<1\}\cap\{Z_{k+2}=\cdots=Z_n=0\}\subset D_1;$$

c'est impossible.

Ceci achève la démonstration du Théorème 1. □

IV. Résolution du $\bar{\partial}$ dans des Portions d'Anneaux

Fixons un réel $\epsilon\in]0,1[$ et un entier $j>2$. Considérons

$$\Sigma_\epsilon=\{Z\in\mathbf{C}^n\colon |Z|=1+\epsilon \text{ et } |Z'|^2<\tfrac{1}{2}\},$$

$$\theta_\epsilon=\{Z\in\mathbf{C}^n\colon 1+\epsilon<|Z|<2 \text{ et } |Z'|^2<\tfrac{1}{2}\},$$

$$\theta'_\epsilon=\{Z\in\mathbf{C}^n\colon |Z|<1+\epsilon \text{ et } |Z'|^2<\tfrac{1}{2}\},$$

$$\tilde{\theta}=\{Z\in\mathbf{C}^n\colon |Z|<2 \text{ et } |Z'|^2<\tfrac{1}{2}\}=\theta_\epsilon\cup\Sigma_\epsilon\cup\theta'_\epsilon,$$

et

$$\theta_{\epsilon,j}=\{Z\in\mathbf{C}^n: 1+\epsilon<|Z|<2 \text{ et } |Z'|^2<\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{j}\}.$$

1. Soit g une $(0,q)$-forme $\mathcal{C}^\infty$ et $\bar\partial$-fermée dans $\theta=\{1<|Z|<2 \text{ et } |Z'|^2<\frac{1}{2}\}$, avec $q\in\{1,\dots,n-3\}\setminus\{n-k-1,n-k\}$. Comme dans I.1, il suffit de prouver la résolubilité de $\bar\partial u=g$ dans $\theta_{\epsilon,j}$; la résolubilité dans θ s'en déduit par un procédé de suite convergente.

LEMME. *Il existe $\tilde g\in\mathcal{C}_{0,q}(\tilde\theta)$ telle que $\bar\partial\tilde g=0$ au sens des distributions dans $\tilde\theta$, $\tilde g=g$ dans $\theta_\epsilon\cup\Sigma_\epsilon$ et $\tilde g$ est $\mathcal{C}^\infty$ dans $\theta_\epsilon\cup\Sigma_\epsilon$ et $\theta'_\epsilon\cup\Sigma_\epsilon$.*

Preuve. La restriction de g à Σ_ϵ est une $(0,q)$-forme $\mathcal{C}^\infty$ et $\bar\partial_b$-fermée avec $q\neq n-k-1,\ n-k$. D'après le Théorème 1, il existe v une $(0,q-1)$-forme $\mathcal{C}^\infty$ sur Σ_ϵ telle que $\bar\partial_b v=g$ sur Σ_ϵ. C'est équivalent à: il existe v', un prolongement de v, $\mathcal{C}^\infty$ dans $\theta'_\epsilon\cup\Sigma_\epsilon$ telle que $\bar\partial v'=g$ sur Σ_ϵ.

Posons $g'=\bar\partial v'$ dans $\theta'_\epsilon\cup\Sigma_\epsilon$. C'est une $(0,q)$-forme $\mathcal{C}^\infty$ dans $\theta'_\epsilon\cup\Sigma_\epsilon$, $\bar\partial g'=0$ dans θ'_ϵ et $g'=g$ sur Σ_ϵ.

Considérons
$$\tilde g=\begin{cases} g & \text{dans } \theta_\epsilon\cup\Sigma_\epsilon,\\ g' & \text{dans } \theta'_\epsilon.\end{cases}$$

C'est une $(0,q)$-forme continue dans $\tilde\theta$ ($g=g'$ sur Σ_ϵ) et $\mathcal{C}^\infty$ dans $\theta_\epsilon\cup\Sigma_\epsilon$ et $\theta'_\epsilon\cup\Sigma_\epsilon$. En plus, en appliquant la formule de Stokes à $g'\wedge\varphi$ et $g\wedge\varphi$ dans θ'_ϵ et θ_ϵ resp., $\forall\varphi\in\mathcal{C}^\infty_{n,n-q-1}$ à support compact dans $\tilde\theta$ et en tenant compte de l'orientation de Σ_ϵ, on peut facilement vérifier que $\bar\partial\tilde g=0$ au sens des distributions dans $\tilde\theta$. □

PROPOSITION. *Il existe $u\in\mathcal{C}^\infty_{0,q-1}(\theta_{\epsilon,j})$ telle que $\bar\partial u=g$ dans $\theta_{\epsilon,j}$.*

Démonstration. Soit U_j un ouvert strictement pseudo-convexe contenu dans $\tilde\theta$ et contenant $\tilde\theta_j=\{|Z|<2,\ |Z'|^2<\frac{1}{2}-\frac{1}{j}\}$. D'après [8], la $(0,q-1)$-forme $\bar\partial^*N\tilde g$ est une solution de l'équation $\bar\partial v=\tilde g$ dans U_j, où N est l'opérateur de Neumann et $\bar\partial^*$ l'adjoint de $\bar\partial$.

En plus, si $\tilde g=\sum_{|I|=q} g_I d\bar Z_I$ alors $N\tilde g=\sum_{|I|=q}4a_I d\bar Z_I$ avec

$$(*)\qquad \Delta a_I=g_I$$

dans U_j, pour tout multi-indice I tel que $|I|=q$ (cf. [13]).

Par conséquent, $\tilde g$ étant $\mathcal{C}^\infty$ dans θ'_ϵ et $\theta_{\epsilon,j}\subset\theta_\epsilon$, $N\tilde g$ et par suite $\bar\partial^*N\tilde g$ l'est aussi. Par restriction de $\bar\partial^*N\tilde g$ à $\theta_{\epsilon,j}$, on obtient la résolubilité de $\bar\partial u=g$ dans $\theta_{\epsilon,j}$, avec $u_j\in\mathcal{C}^\infty_{0,q-1}(\theta_{\epsilon,j})$. □

2. Supposons en plus, que g se prolonge $\mathcal{C}^\infty$ sur $\Sigma_0=\{|Z|=1,\ |Z'|^2<\frac{1}{2}\}$. Dans ce cas, le lemme et la proposition sont applicables pour $\epsilon=0$. Pour avoir la régularité jusqu'au bord de la solution de Neumann donnée par la proposition précédente, on est ramené, d'après (*), à démontrer la proposition suivante dont on peut trouver des références (par exemple [2]) et nous en donnons une démonstration simple pour la commodité du lecteur.

PROPOSITION.

Soit Ω un domaine de $\mathbf{R}^n$ et Σ une hypersurface réelle $\mathcal{C}^\infty$ séparant Ω en deux régions Ω_1 et Ω_2.

Considérons h_1 et h_2 deux fonctions $\mathcal{C}^\infty$ dans $\bar{\Omega}_1$ et $\bar{\Omega}_2$ respectivement.

Soit h la fonction dont la restriction à Ω_1 (resp. à Ω_2) est h_1 (resp. h_2). Et soit v une fonction telle que $\Delta v = h$ dans Ω au sens des distributions.

Alors, la restriction de v à Ω_1 (resp. à Ω_2) se prolonge en une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\bar{\Omega}_1$ (resp. $\bar{\Omega}_2$).

Démonstration. Soit ρ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs réelles telle que $\Sigma = \{X \in \mathbf{R}^n : \rho(X) = 0\}$ et $\nabla\rho \neq 0$ sur Σ. Dans cette proposition, on s'intéresse plutôt au prolongement $\mathcal{C}^\infty$ de v sur Σ de chaque côté. Donc il suffit de démontrer la proposition pour Ω assez petit pour avoir $\nabla\rho(X) \neq 0$, $\forall X \in \Omega$. Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, il est facile de construire deux fonctions u_i et $r_i \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}_i)$, ou $i = 1, 2$, telles que r_i s'annule à l'ordre k sur Σ et

$$\begin{cases} \Delta u_i = h_i + r_i \text{ dans } \Omega_i \\ u_i/\Sigma = (\partial_\nu u_i)/\Sigma = 0 \end{cases}$$

où $\nu(x)$ est le vecteur unité normal à Σ au point x de Σ. Considérons la fonction $r \in \mathcal{C}^{k-2}(\Omega)$, pour $k \geq 2$, définie par

$$r(X) = \begin{cases} r_1(X) & \text{dans } \bar{\Omega}_1, \\ r_2(X) & \text{dans } \bar{\Omega}_2, \end{cases}$$

et soit $w \in \mathcal{C}^{k-2}(\Omega)$ une solution de $\Delta w = r$ dans Ω.

D'autre part, considérons u la fonction dont la restriction à Ω_i est u_i, pour $i = 1, 2$. Alors, u est continue dans Ω ($u_1 = u_2 = 0$ sur Σ) et on peut vérifier, par la formule de Green, que $\Delta u = h + r$ au sens des distributions dans Ω.

Par conséquent, $\Delta v = \Delta(u - w) = h$ au sens des distributions dans Ω. Alors, il existe une fonction f harmonique, donc $\mathcal{C}^\infty$ dans Ω, telle que $v = u - w + f$ dans Ω.

Ainsi, pour tout entier $k > 1$, ils existent u, w, et f telles que u est $\mathcal{C}^\infty$ dans $\bar{\Omega}_1$ et $\bar{\Omega}_2$, $w \in \mathcal{C}^{k-2}(\Omega)$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, et $v = u - w + f$ au sens des distributions dans Ω.

Donc la restriction de v à Ω_1 (resp. à Ω_2) se prolonge en une fonction $\mathcal{C}^k$ sur $\bar{\Omega}_1$ (resp. $\bar{\Omega}_2$) et ceci pour tout entier k.

Ceci achève la démonstration de la proposition. □

REMARQUE. De même, si g se prolonge $\mathcal{C}^\infty$ sur $\Sigma_1 = \{Z \in \mathbf{C}^n : |Z| = 2$ et $|Z'| < \frac{1}{2}\}$, on peut trouver une solution de $\bar{\partial} u = g$ dans θ qui se prolonge $\mathcal{C}^\infty$ sur Σ_1.

V. Contre-exemple pour le Degré $n-k-1$ dans le Théorème 2

On peut démontrer, comme dans III, que si l'équation $\bar{\partial}$ est résoluble dans θ pour le degré $n-k-2$, alors toute fonction holomorphe dans

$$\theta \cap \{Z_n = \cdots = Z_{k+2} = 0\}$$

se prolonge holomorphiquement dans θ; c'est impossible.

En effet, $1/Z_{k+1}$ est holomorphe dans $\theta \cap \{Z_n = \cdots = Z_{k+2} = 0\}$ mais ne se prolonge pas en une fonction holomorphe dans θ. Car sinon, soit P son prolongement. P est donc holomorphe dans $\theta \cap \{Z_1 = \cdots = Z_k = 0\}$ qui peut-être considéré comme un anneau de $\mathbf{C}^{n-k}$, $n-k>1$. Par conséquent, P se prolonge holomorphiquement dans $D = \{|Z| < 2\} \cap \{Z_1 = \cdots = Z_k = 0\}$ qui contient $\{|Z_{k+1}|^2 < 2\}$. Il résulte que $1/Z_{k+1}$ admet un prolongement holomorphe dans $\{|Z_{k+1}|^2 < \frac{1}{2}\}$; c'est impossible.

Ceci achève la démonstration du Théorème 2. $\square$

Bibliographie

1. L. A. Aizenberg and A. Dautov, *Differentsial' nye formy, ortogonal' nye golomorfnym funktsiyam ili formam, is ikh svoistva* (Differential forms that are orthogonal to holomorphic functions or forms, and their properties), Izdat. "Nauka", Novosibirsk, 1975.
2. J. Chazarain and A. Piriou, *Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires,* Gauthier-Villars, Paris, 1981.
3. Sh. A. Dautov, *On forms orthogonal to holomorphic functions on integration along the boundary of strictly pseudo-convex domains,* Dokl. Akad. Nauk SSSR 203 (1972), 16–18. (Translated in Soviet Math. Dokl. 13 (1972), 318–321.)
4. F. R. Harvey and H. B. Lawson, *On boundaries of complex analytic varieties. I,* Ann. of Math. (2) 102 (1975), 223–290.
5. G. M. Henkin, *Integral representation of functions in strictly pseudoconvex domains and applications to the $\bar{\partial}$-problem,* Mat. Sb. (N.S.) 82 (1970), 300–308. (Translated in Math. USSR-Sb. 11 (1970), 273–281.)
6. ———, *The Lewy equation and analysis on pseudoconvex manifolds,* Russian Math. Surveys 32 (1977), 59–130.
7. L. Hörmander, *An introduction to complex analysis in several variables,* Van Nostrand, Princeton, N.J., 1966.
8. J. J. Kohn, *Boundaries of complex manifolds,* Proc. Conf. Complex Analysis (Minneapolis, Minn., 1964), pp. 81–94, Springer, Berlin, 1965.
9. J. J. Kohn and H. Rossi, *On the extension of holomorphic functions from the boundary of a complex manifold,* Ann. of Math. (2) 81 (1965), 451–472.
10. I. Lieb, *Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf streng pseudokonvexen Gebieten,* Math. Ann. 190 (1970/71), 6–44; 199 (1972), 241–256.
11. A. V. Romanov, *A formula and estimates for solutions of the tangential Cauchy-Riemann equation.* Dokl. Akad. Nauk. SSSR 220 (1975), 532–535. (Translated in Soviet Math. Dokl. 16 (1975), 124–128.)
12. J. P. Rosay, *Some applications of Cauchy-Fantappié forms to (local) problems on $\bar{\partial}_b$,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 13 (1986), 225–243.
13. A. Weil, *Introduction à l'étude des variétés Kähleriennes,* Hermann, Paris, 1958.

Université de Provence
UFR-MIM, C.N.R.S.-U.R.A. 225
13331 Marseille Cedex 3
France