Notre Dame Journal of Formal Logic
Volume XI, Number 4, October 1970

LES ALGÈBRES DE HEYTING ET DE ŁUKASIEWICZ TRIVALENTES

LUIZ MONTEIRO

1. *INTRODUCTION*. Gr. Moisil a montré que les algèbres de Łukasiewicz trivalentes sont des algèbres de Heyting et il a utilisé ce résultat pour chercher une formalisation du calcul propositionnel trivalent de Łukasiewicz ([9], [10]) dans laquelle l'implication intuitioniste joue un rôle fondamental ([14], [16], [17]).

Il faut remarquer que l'implication intuitioniste qu'on peut définir dans les algèbres de Łukasiewicz a des proprietés très speciales car elle varifie les egalités (equivalentes deux à deux):

H6) $((a \Rightarrow c) \Rightarrow b) \Rightarrow (((b \Rightarrow a) \Rightarrow b) \Rightarrow b) = 1$
H6') $(\neg a \Rightarrow b) \wedge ((b \Rightarrow a) \Rightarrow b) = b$
H6'') $((a \Rightarrow c) \Rightarrow b) \wedge ((b \Rightarrow a) \Rightarrow b) = b$

Nous avons étudié [23] les algèbres de Heyting que verifient H6, sous le nom d'algèbres de Heyting trivalentes et nous les appellons dans cette note des algèbres $\mathfrak{H}_3$; elles jouent un rôle important dans l'étude du *calcul propositionnel intuitioniste trivalent* consideré par Heyting [4], et qui a été étudié par J. Łukasiewicz [10] et I. Thomas [28].

Nous nous proposons de montrer, dans cette note, que les algèbres de Łukasiewicz (trivalentes) peuvent être définies[1] comme des algèbres $\mathfrak{H}_3$ sur lesquelles est définie une opération de négation ($\sim$) vérifiant les axiomes:

1. $\sim\sim x = x$;
2. $\sim(x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$;
3. $(x \wedge \sim x) \wedge (y \vee \sim y) = x \wedge \sim x$.

Au paragraphe 4 nous indiquons un ensemble d'axiomes indépendants pour ces algèbres.

---

1. A. Monteiro, dans un séminaire du second semestre 1963 a posé le probleme de savoir s'il est possible de caractériser les algèbres de Łukasiewicz (trivalentes) au moyen des connectifs, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\sim$. Nous avons resolu ce problème en 1963, en utilisant la théorie des filtres premiers. Plus tard nous avons obtenu la démonstration que nous indiquons dans cette note, où l'induction transfinie n'intervient pas.

Received September 15, 1969

2. *ALGEBRES DE MORGAN, DE HEYTING ET DE ŁUKASIEWICZ.* Rappelons les définitions et les résultats que nous aurons à utiliser par la suite.

La notion de réticulé distributif peut être définie avec M. Sholander [27] comme un système $\langle A, \wedge, \vee \rangle$ formé par un ensemble non vide A et deux opérations binaires $\wedge, \vee$ définies sur A, qui vérifient les axiomes (pour tout x, y, z de A):

S1) $x \wedge (x \vee y) = x$
S2) $x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x)$

Rappelons maintenant la définition d'algèbre de Morgan.

2.1 DEFINITION. *Un système* $\underset{\sim}{A} = \langle A, 1, \sim, \wedge, \vee \rangle$ *formé par un ensemble non vide* A, *un élément* $1 \in A$, *une opération monaire* $\sim$ *et deux opérations binaires* $\wedge, \vee$ *définies sur* A *sera dit une algèbre de Morgan si les axiomes suivants sont vérifiés* (pour tout x, y, z de A):

A1) $x \vee 1 = 1$
A2) $x \wedge (x \vee y) = x$
A3) $x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x)$
A4) $\sim\sim x = x$
A5) $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$

Nous dirons aussi pour abréger que $\underset{\sim}{A}$ est une algèbre de Morgan. On voit de suite que dans une algèbre de Morgan on a

$$\sim (x \vee y) = \sim x \wedge \sim y$$

En outre: 1 est le dernier élément et $0 = \sim 1$ est le premier élément de $\underset{\sim}{A}$. Une algèbre de Morgan sera dite *normale* (J. Kalman [8]) ou linéaire [19] si quels que soient x et y

A6) $(x \wedge \sim x) \wedge (y \vee \sim y) = x \wedge \sim x$

Nous avons à utiliser le résultat suivant obtenu par A. Monteiro. La démonstration de cet auteur a été réproduite dans [2]. Nous indiquons ici une démonstration plus simple:

2.2 LEMME. *Si* z *est un élément d'une algèbre de Morgan normale ayant un complément booléen* $-z$ *alors* $-z = \sim z$.

DEM: Par hypothèse nous avons:

(1) $z \vee -z = 1$;
(2) $z \wedge -z = 0$

De (1) et (A5) on déduit:

(3) $\sim z \wedge \sim (-z) = 0$.

Par la normalité de l'algèbre, (2) et (3), nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned} z \wedge \sim z &= (z \wedge \sim z) \wedge ((-z) \vee \sim (-z)) \\ &= (z \wedge \sim z \wedge -z) \vee (z \wedge \sim z \wedge \sim (-z)) \\ &= (\sim z \wedge 0) \vee (z \wedge 0) = 0 \vee 0 = 0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire:

(4) $z \wedge \sim z = 0,$

d'où par A5 et A4:

(5) $z \vee \sim z = 1.$

Alors (1), (2), (4) et (5) montrent que $\sim z = -z$.

D'après A. Monteiro [18] on peut définir la notion d'algèbre de Heyting généralisée ou algèbre de Hilbert-Bernays, de la manière suivante:

2.3. DEFINITION. *Un système* $\mathfrak{B} = \langle A, 1, \Rightarrow, \wedge, \vee \rangle$ *formé par un ensemble non vide* A, *un élément* $1 \in A$ *et trois opérations binaires* $\Rightarrow, \wedge, \vee$, *définies sur* A *sera dit une algèbre de Hilbert-Bernays si les axiomes suivantes sont vérifiés* (pour tout x, y, z de A):

H1) $x \Rightarrow x = 1$
H2) $(x \Rightarrow y) \wedge y = y$
H3) $x \wedge (x \Rightarrow y) = x \wedge y$
H4) $x \Rightarrow (y \wedge z) = (x \Rightarrow z) \wedge (x \Rightarrow y)$
H5) $(x \vee y) \Rightarrow z = (x \Rightarrow z) \wedge (y \Rightarrow z)$

Cette notion a été définie par G. Birkhoff ([1], pag. 147) sous le nom de "relatively pseudo-complemented lattice" et elle joue un rôle important dans l'étude de la logique positive de D. Hilbert—P. Bernays [5]. Voir aussi à ce propôs H. Rasiowa et R. Sikorski [26].

Nous supposerons connues les règles de calcul valables dans ces algèbres. Il est bien connu que le système $\langle A, 1, \wedge, \vee \rangle$ est un réticulé distributif ayant le dernier élément 1.

Si une algèbre de Hilbert-Bernays $\mathfrak{B}$ a un premier élément 0 alors nous avons affaire à une algèbre de Heyting. L'opération de négation intuitioniste $\neg$ est alors définie par la formule $\neg x = x \Rightarrow 0$.

Une classe importante d'algèbres de Hilbert-Bernays est indiquée dans la définition suivante:

2.4. DEFINITION: *Une algèbre de Hilbert-Bernays* A *sera dite une algèbre* $\mathfrak{HB}_3$ *si pour tout* x, y, z *de* A:

H6) $((x \Rightarrow z) \Rightarrow y) \Rightarrow (((y \Rightarrow x) \Rightarrow y) \Rightarrow y) = 1$

Si A *est une algèbre de Heyting nous dirons qu'il s'agit d'une algèbre* $\mathfrak{H}_3$.

On peut montrer que:

2.5. LEMME. *Dans une algèbre de Hilbert-Bernays* H6 *est équivalent à*:

H6'') $((x \Rightarrow z) \Rightarrow y) \wedge ((y \Rightarrow x) \Rightarrow y) = y$

DEM: D'après H6'' on peut écrire

$$(((x \Rightarrow z) \Rightarrow y) \wedge ((y \Rightarrow x) \Rightarrow y)) \Rightarrow y = y \Rightarrow y = 1$$

Comme dans une algèbre de Hilbert-Bernays nous avons

(I) $(a \wedge b) \Rightarrow c = a \Rightarrow (b \Rightarrow c)$

alors

H6) $((x \Rightarrow z) \Rightarrow y) \Rightarrow (((y \Rightarrow x) \Rightarrow y) \Rightarrow y) = 1$

Réciproquement si H6 est valable alors par (I) on peut écrire

$$(((x \Rightarrow z) \Rightarrow y) \wedge ((y \Rightarrow x) \Rightarrow y)) \Rightarrow y = 1$$

c'est-à-dire

(i) $((x \Rightarrow z) \Rightarrow y) \wedge ((y \Rightarrow x) \Rightarrow y) \leq y.$

Comme $b \leq a \Rightarrow b$, alors il est évident que:

(ii) $y \leq ((x \Rightarrow z) \Rightarrow y) \wedge ((y \Rightarrow x) \Rightarrow y)$

Alors de (i) et (ii) on déduit H6''.

Dans le cas particulier des algèbres de Heyting, H6 est équivalente [23] à

H6' $(\neg x \Rightarrow y) \wedge ((y \Rightarrow x) \Rightarrow y) = y$

2.6. LEMME. *Dans une algèbre* $\mathcal{HB}_3$ *nous avons* $(x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow x) = 1$.

DEM. Pour démontrer l'égalité indiquée il suffit de démontrer que:

S) *Si z est un élément tel que $x \Rightarrow y \leq z$ et $y \Rightarrow x \leq z$ alors* $z = 1$.

Supposons donc que:

(1) $x \Rightarrow y \leq z$;
(2) $y \Rightarrow x \leq z$.

De (1) on déduit $z \Rightarrow z \leq (x \Rightarrow y) \Rightarrow z$ et comme $z \Rightarrow z = 1$, alors

(3) $(x \Rightarrow y) \Rightarrow x = 1$

Comme $y \leq x \Rightarrow y$ en tenant compte de (1) nous pouvons écrire $y \leq z$ d'où

(4) $z \Rightarrow x \leq y \Rightarrow x$.

De (2) et (4) on déduit

(5) $z \Rightarrow x \leq z$

d'où $z \Rightarrow z \leq (z \Rightarrow x) \Rightarrow z$, c'est-à-dire

(6) $(z \Rightarrow x) \Rightarrow z = 1$.

Finalement d'après H6, (3) et (6)

$$1 = ((x \Rightarrow y) \Rightarrow z) \Rightarrow (((z \Rightarrow x) \Rightarrow z) \Rightarrow z) = 1 \Rightarrow (1 \Rightarrow z) = 1 \Rightarrow z = z$$

ce qu'il fallait démontrer.

2.7. DEFINITION. *Une algèbre de Hilbert-Bernays telle que* $(x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow x) = 1$ *est dite linéaire* [20].

Cette notion a été considérée par Gr. Moisil [11]. Rappelons maintenant que

2.8 LEMME. *Dans une algèbre de Hilbert-Bernays les conditions*

a) $(x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow x) = 1$
b) $x \vee y = ((x \Rightarrow y) \Rightarrow y) \wedge ((y \Rightarrow x) \Rightarrow x)$
c) $x \Rightarrow (y \vee z) = (x \Rightarrow y) \vee (x \Rightarrow z)$
d) $(x \wedge y) \Rightarrow z = (x \Rightarrow z) \vee (y \Rightarrow z)$

sont équivalentes deux à deux [20][2].

Une partie de ces résultats a été établie par Morgan Ward [29]. Les algèbres de Heyting linéaires jouent un rôle important dans l'étude du calcul propositionnel **LC** étudié par M. Dummet [3].

Rappelons encore deux résultats bien connus, que nous aurons à utiliser par la suite.

2.9. COROLLAIRE: *Dans une algèbre de Heyting linéaire* $\neg x \vee x = \neg\neg x \Rightarrow x$.

DEM. Rappelons tout d'abord que dans toute algèbre de Heyting:

(1) $x \Rightarrow \neg x = \neg x$;
(2) $\neg x \Rightarrow x = \neg\neg x$.

Donc par 2.8-b, (1) et (2):

$$\begin{aligned} x \vee \neg x &= ((x \Rightarrow \neg x) \Rightarrow \neg x) \wedge ((\neg x \Rightarrow x) \Rightarrow x) \\ &= (\neg x \Rightarrow \neg x) \wedge (\neg\neg x \Rightarrow x) \\ &= \neg\neg x \Rightarrow x. \end{aligned}$$

2.10 COROLLAIRE: *Dans toute algèbre de Heyting linéaire* $\neg\neg x$ *est le complément booléen de* $\neg x$.

DEM. Dans toute algèbre de Heyting $\neg\neg\neg x = \neg x$, donc par 2.9, $\neg\neg x \vee \neg x = \neg\neg\neg x \Rightarrow \neg x = \neg x \Rightarrow \neg x = 1$, et comme $\neg\neg x \wedge \neg x = 0$, on voit que $\neg x$ est booléen et a pour complément booléen $\neg\neg x$.

La notion d'algèbre de Łukasiewicz (trivalente) joue un rôle fondamental dans l'étude du calcul propositionnel trivalent de Łukasiewicz. Cette notion a été introduite par Gr. Moisil [12], [13], [15], qui a aussi développé la théorie correspondante. Nous pouvons définir cette notion, d'après A. Monteiro [21], de la manière suivante:

2.11. DEFINITION: *Un système* $\mathfrak{L} = \langle A, 1, \sim, \nabla, \wedge, \vee \rangle$ *formé par un ensemble non vide* A, *un élément* $1 \in A$, *deux opérations monaires* $\sim$, ∇, *et deux opérations binaires* $\wedge, \vee$ *définies sur* A, *sera dit une algèbre de Łukasiewicz trivalente si les conditions suivantes sont vérifiées* (pour tout x, y, z de A):

A1) $x \vee 1 = 1$
A2) $x \wedge (x \vee y) = x$
A3) $x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x)$

2. Les démonstrations des résultats indiqués dans [20] n'ont pas été publiées mais elles ont été exposées dans un cours realizé à l'Universidad Nacional del Sur au premier semestre 1963.

A4) $\sim\sim x = x$
A5) $\sim(x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$
A6) $\sim x \wedge \nabla x = 1$
A7) $x \wedge \sim x = \sim x \wedge \nabla x$
A8) $\nabla(x \wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y$

Dans ce travail nous dirons aussi, pour abréger, que $\mathfrak{L}$ est une algèbre de Łukasiewicz.

Nous avons montré [22] que chacun des axiomes A2-A8 est indépendant des restants et que A1 est démontrable à partir de A2-A8.

Nous supposerons connues les règles de calcul valables dans les algèbres de Łukasiewicz.

Gr. Moisil [17] a obtenu l'important résultat suivant, où $\Delta x = \sim\nabla\sim x$.

2.12. THEOREME. *Toute algèbre de Łukasiewicz $\mathfrak{L}$ est une algèbre de Heyting, l'implication intuitioniste de chaque couple ordonné (x, y) d'éléments de A étant donné par la formule:* $x \Rightarrow y = \Delta\sim x \vee \Delta y \vee (\nabla\sim x \wedge \nabla y) \vee (\Delta x \wedge y \wedge \sim y)$ (Gr. Moisil [14], [17]).

A. Monteiro a montré[1] qu'on peut écrire plus simplement:

2.13. THEOREME. $x \Rightarrow y = \Delta\sim x \vee y \vee (\nabla\sim x \wedge \nabla y)$

Nous allons maintenant montrer que:

2.14. THEOREME. *Toute algèbre de Łukasiewicz est une algèbre* $\mathfrak{H}_3$.

DEM. D'après 2.13 nous avons $\neg x = x \Rightarrow 0 = \Delta\sim x$, donc:

(1) $\neg x \Rightarrow y = \Delta\sim x \Rightarrow y = \nabla x \vee y \vee (\nabla x \wedge \nabla y) = \nabla x \vee y.$

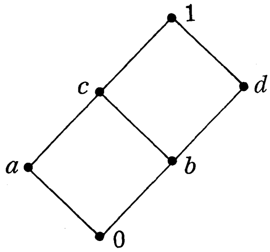
(2) $$\begin{aligned}&(y \Rightarrow x) \Rightarrow y\\ &= (\Delta\sim y \vee x \vee (\nabla\sim y \wedge \nabla x)) \Rightarrow y\\ &= \Delta(\nabla y \wedge \sim x \wedge (\Delta y \vee \sim\nabla x)) \vee y \vee (\nabla(\nabla y \wedge \sim x \wedge (\Delta y \vee \sim\nabla x)) \wedge \nabla y)\\ &= (\nabla y \wedge \Delta\sim x \wedge (\Delta y \vee \Delta\sim x)) \vee y \vee (\nabla y \wedge \nabla\sim x \wedge (\Delta y \vee \Delta\sim x))\\ &= (\nabla y \wedge \Delta\sim x) \vee y \vee (\Delta y \wedge \nabla\sim x) \vee (\nabla y \wedge \Delta\sim x)\\ &= (\nabla y \wedge \Delta\sim x) \vee y.\end{aligned}$$

En utilisant (1) et (2) nous pouvons écrire:

(3) $$\begin{aligned}(\neg x \Rightarrow y) \wedge ((y \Rightarrow x) \Rightarrow y) &= (\nabla x \vee y) \wedge ((\nabla y \wedge \Delta\sim x) \vee y)\\ &= (\nabla x \wedge \nabla y \wedge \Delta\sim x) \vee y\\ &= (\nabla x \wedge \sim\nabla x \wedge \nabla y) \vee y\\ &= (0 \wedge \nabla y) \vee y =\\ &= 0 \vee y = y.\end{aligned}$$

Alors $\mathfrak{L}$ est une algèbre $\mathfrak{H}_3$.

Dans une algèbre de Łukasiewicz l'opération $\sim$ ne peut pas être exprimée au moyen des opérations $\neg, \Rightarrow, \wedge, \vee$. Pour montrer cela A. Monteiro[1] a indiqué l'exemple suivant. Considérons le réticulé distributif A dont le diagramme de Hasse est indiqué sur la figure ci-dessous:



x	$\sim x$	∇x
0	1	0
a	d	a
b	c	d
c	b	1
d	a	d
1	0	1

En définissant sur A les opérations $\sim$, ∇ au moyen des tables précédentes alors le système $(A, 1, \sim, \nabla, \wedge, \vee)$ est une algèbre de Łukasiewicz. La partie $A' = \{0, c, 1\}$ est fermée par rapport aux opérations $\urcorner, \Rightarrow, \wedge, \vee$, et n'est pas fermée par rapport à l'opération $\sim$. Donc $\sim$ ne peut pas s'exprimer au moyen des opérations $\urcorner, \Rightarrow, \wedge, \vee$. Il se pose donc le problème[1] de savoir s'il est possible de caractériser les algèbres de Łukasiewicz comme un système $\langle A, 1, \sim, \Rightarrow, \wedge, \vee \rangle$. Nous allons montrer qu'il en est ainsi. Remarquons, tout d'abord, que:

2.15. LEMME. *Dans une algèbre de Łukasiewicz nous avons* $\nabla x = \sim x \Rightarrow x$ ([14], 12.35 et 12.36).

DEM. $\sim x \Rightarrow x$

$$= \triangle \sim\sim x \vee x \vee (\nabla \sim\sim x \wedge \nabla x)$$
$$= \triangle x \vee x \vee (\nabla x \wedge \nabla x)$$
$$= x \vee \nabla x = \nabla x$$

Ce résultat montre que l'opération ∇ peut être définie au moyen de $\sim$ et $\Rightarrow$.

Rappelons aussi le résultat bien connu:

2.16. LEMME. *Dans une algèbre de Łukasiewicz nous avons* $\nabla x = \urcorner\urcorner x$.

DEM. Nous savons (voir **2.14**) que $\urcorner x = \triangle \sim x$, alors

$$\urcorner\urcorner x = \triangle \sim \urcorner x = \triangle \sim \triangle \sim x = \triangle \nabla x = \nabla x.$$

3. *RELATION ENTRE LES ALGEBRES DE ŁUKASIEWICZ ET DE HEYTING*: Nous allons maintenant demontrer le résultat que nous avons indiqué au début.

3.1. THEOREME: *Si dans un système* $\langle A, 1, \sim, \Rightarrow, \wedge, \vee \rangle$ *vérifiant les axiomes*:

L1) $x \Rightarrow x = 1$
L2) $(x \Rightarrow y) \wedge y = y$
L3) $x \wedge (x \Rightarrow y) = x \wedge y$
L4) $x \Rightarrow (y \wedge z) = (x \Rightarrow z) \wedge (x \Rightarrow y)$
L5) $(x \vee y) \Rightarrow z = (x \Rightarrow z) \wedge (y \Rightarrow z)$
L6) $((x \Rightarrow z) \Rightarrow y) \Rightarrow (((y \Rightarrow x) \Rightarrow y) \Rightarrow y) = 1$
L7) $\sim\sim x = x$
L8) $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$
L9) $(x \wedge \sim x) \wedge (y \vee \sim y) = x \wedge \sim x$

nous posons: D) $\nabla x = \sim x \Rightarrow x$, *alors le système* $\langle A, 1, \sim, \nabla, \wedge, \vee \rangle$ *est une algèbre de Łukasiewicz et en outre*:

$$x \Rightarrow y = \Delta \sim x \vee y \vee (\nabla \sim x \wedge \nabla y).$$ [3]

DEM: En tenant compte des axiomes L1-L5 nous pouvons affirmer que $\langle A, 1, \wedge, \vee \rangle$ est un réticulé distributif ayant le dernier élément $1 = x \Rightarrow x$ et dans ces conditions les axiomes A1-A3 de la définition **2.11** sont vérifiés. Les axiomes A4, A5 coïncident avec L7 et L8. Il nous reste donc à démontrer que les axiomes A6-A8 sont vérifiés.

Remarquons que $0 = \sim 1$ est le premier élément du réticulé A, qui est donc une algèbre $\mathfrak{H}_3$. Nous posons comme d'habitude $\urcorner x = x \Rightarrow 0$.

3.2. LEMME. $\urcorner x \leqslant \sim x$.

DEM. De **2.10** et **2.2** un déduit que $\urcorner\urcorner x = \sim \urcorner x$, et comme $\urcorner x \vee \urcorner\urcorner x = 1$ nous avons:

$$\begin{aligned} x &= x \wedge 1 = x \wedge (\urcorner x \vee \sim \urcorner x) \\ &= (x \wedge \urcorner x) \vee (x \wedge \sim \urcorner x) \\ &= 0 \vee (x \wedge \sim \urcorner x) = x \wedge \sim \urcorner x, \end{aligned}$$

c'est-à-dire $x \leqslant \sim \urcorner x$, donc $\urcorner x \leqslant \sim x$.

3.3. LEMME. $\sim x \vee \nabla x = 1$ (Axiome A6).

DEM. Par définition $\nabla x = \sim x \Rightarrow x$ donc:

$$\begin{aligned} (1) \quad \sim x \vee \nabla x &= \sim x \vee (\sim x \Rightarrow x) \\ &= ((\sim x \Rightarrow (\sim x \Rightarrow x)) \Rightarrow (\sim x \Rightarrow x)) \wedge (((\sim x \Rightarrow x) \Rightarrow \sim x) \Rightarrow \sim x) \\ &= ((\sim x \Rightarrow x) \Rightarrow (\sim x \Rightarrow x)) \wedge (((\sim x \Rightarrow x) \Rightarrow \sim x) \Rightarrow \sim x) \\ &= (((\sim x \Rightarrow x) \Rightarrow \sim x) \Rightarrow \sim x) \end{aligned}$$

Dans une algèbre $\mathfrak{H}_3$ nous avons

$$1 = ((x \Rightarrow 0) \Rightarrow \sim x) \Rightarrow (((\sim x \Rightarrow x) \Rightarrow \sim x) \Rightarrow \sim x)$$

c'est-à-dire $1 = (\urcorner x \Rightarrow \sim x) \Rightarrow (((\sim x \Rightarrow x) \Rightarrow \sim x) \Rightarrow \sim x)$
Mais d'après **3.2** $\urcorner x \Rightarrow \sim x = 1$ donc

$$1 = 1 \Rightarrow (((\sim x \Rightarrow x) \Rightarrow \sim x) \Rightarrow \sim x)$$

c'est-à-dire

$$(2) \qquad 1 = ((\sim x \Rightarrow x) \Rightarrow \sim x) \Rightarrow \sim x$$

De (1) et (2) on déduit le lemme.

3.4. LEMME. $x \wedge \sim x = \sim x \wedge \nabla x$ (Axiome A7)

DEM. En effet: $\sim x \wedge \nabla x = \sim x \wedge (\sim x \Rightarrow x) = \sim x \wedge x = x \wedge \sim x$.

3.5. LEMME. $\urcorner x = \sim (\sim x \Rightarrow x)$

DEM. Démontrons tout d'abord que: (i) $\urcorner x \leqslant \sim (\sim x \Rightarrow x)$. D'après **3.2**

3. Ce résultat a été utilisé par Luisa Iturrioz dans [6]. Voir aussi [7].

$\neg x \leqslant {\sim}x$, donc ${\sim}x \Rightarrow x \leqslant \neg x \Rightarrow x = \neg\neg x$, d'où par **3.2** $\neg\neg\neg x = \neg x \leqslant \neg({\sim}x \Rightarrow x) \leqslant {\sim}({\sim}x \Rightarrow x)$ ce qui démontre (i).

Voyons que (ii) ${\sim}({\sim}x \Rightarrow x) \leqslant \neg x$.

D'après **3.3** ${\sim}x \vee ({\sim}x \Rightarrow x) = 1$ donc $x \wedge {\sim}({\sim}x \Rightarrow x) = 0$, d'où $(x \wedge {\sim}({\sim}x \Rightarrow x)) \vee \neg x = \neg x$, c'est-à-dire

$$(x \vee \neg x) \wedge ({\sim}({\sim}x \Rightarrow x) \vee \neg x) = \neg x$$

d'où $\neg\neg((x \vee \neg x) \wedge ({\sim}({\sim}x \Rightarrow x) \vee \neg x)) = \neg\neg\neg x$
c'est-à-dire $\neg\neg(x \vee \neg x) \wedge \neg\neg({\sim}({\sim}x \Rightarrow x) \vee \neg x) = \neg x$

$$\neg(\neg x \wedge \neg\neg x) \wedge \neg\neg({\sim}({\sim}x \Rightarrow x) \vee \neg x) = \neg x$$

comme $\neg(\neg x \wedge \neg\neg x) = \neg 0 = 1$ alors:

(1) $\quad \neg\neg({\sim}({\sim}x \Rightarrow x) \vee \neg x) = \neg x$

D'après la formule $y \leqslant \neg\neg y$ de (1) on déduit ${\sim}({\sim}x \Rightarrow x) \leqslant \neg x$ ce qui démontre (ii).

3.6. LEMME. $\nabla(x \wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y$ (Axiome A8)

DEM. Par définition $\nabla(x \wedge y) = {\sim}(x \wedge y) \Rightarrow (x \wedge y)$ donc ${\sim}\nabla(x \wedge y) = {\sim}({\sim}(x \wedge y) \Rightarrow (x \wedge y))$, d'où d'après **3.5** ${\sim}\nabla(x \wedge y) = \neg(x \wedge y)$. Mais dans une algèbre de Heyting linéaire $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$, donc:

$$\begin{aligned} {\sim}\nabla(x \wedge y) &= \neg x \vee \neg y \\ &= {\sim}({\sim}x \Rightarrow x) \vee {\sim}({\sim}y \Rightarrow y) \\ &= {\sim}(({\sim}x \Rightarrow x) \wedge ({\sim}y \Rightarrow y)) \\ &= {\sim}(\nabla x \wedge \nabla y) \end{aligned}$$

et alors $\nabla(x \wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y$.

Nous venons ainsi de démontrer que le système $(A, 1, {\sim}, \nabla, \wedge, \vee)$ est une algèbre de Łukasiewicz (trivalente), donc si nous posons: $\Delta x = {\sim}\nabla{\sim}x$; l'élément $C = \Delta{\sim}x \vee y \vee (\nabla{\sim}x \wedge \nabla y)$ a d'après **2.13**, les propriétés

I1) $x \wedge C \leqslant y$,
I2) *si* $x \wedge z \leqslant y$ *alors* $z \leqslant C$

et cela montre bien que $x \Rightarrow y = \Delta{\sim}x \vee y \vee (\nabla{\sim}x \wedge \nabla y)$ et le théorème est démontré.

4. *AXIOMES INDEPENDANTS POUR LES ALGEBRES DE ŁUKASIEWICZ TRIVALENTES*: Nous nous proposons maintenant de caractérizer les algèbres de Łukasiewicz trivalentes au moyen d'axiomes indépendants.

Soit $\langle A, 1, \wedge, \vee, \Rightarrow, {\sim}\rangle$ un système verifiant les axiomes suivantes:

M1) $x \Rightarrow x = 1$
M2) $x \wedge (x \Rightarrow y) = x \wedge y$
M3) $x \Rightarrow (y \wedge z) = (x \Rightarrow z) \wedge (x \Rightarrow y)$
M4) $(x \vee y) \Rightarrow z = (x \Rightarrow z) \wedge (y \Rightarrow z)$
M5) $((x \Rightarrow z) \Rightarrow y) \wedge ((y \Rightarrow x) \Rightarrow y) = y$
M6) ${\sim}{\sim}x = x$
M7) ${\sim}(x \wedge y) = {\sim}x \vee {\sim}y$
M8) $x \wedge {\sim}x = (x \wedge {\sim}x) \wedge (y \vee {\sim}y)$.

Il est évident que des axiomes L1-L9 on déduit (voir H6'' et Définition **2.4**) les axiomes M1-M8.

Pour voir que M1-M8 impliquent L1-L9 il suffit de démontrer que l'axiome A2 $(x \Rightarrow y) \wedge y = y$ est une conséquence de M1-M5, parce que de M1-M5 et A2 on déduit l'axiome L6.

4.1. LEMME. $1 \wedge x = x$

DEM. D'après M5, on peut écrire $((x \Rightarrow x) \Rightarrow x) \wedge ((x \Rightarrow x) \Rightarrow x) = x$. Alors par M1, nous avons:

(1) $(1 \Rightarrow x) \wedge (1 \Rightarrow x) = x$.

Par M2: $x \wedge (x \Rightarrow x) = x \wedge x$, d'où par M1 $x \wedge 1 = x \wedge x$, donc $1 \Rightarrow (x \wedge 1) = 1 \Rightarrow (x \wedge x)$, et en tenant compte de M3, nous avons $(1 \Rightarrow 1) \wedge (1 \Rightarrow x) = (1 \Rightarrow x) \wedge (1 \Rightarrow x)$, d'où par M1 et (1):

(2) $1 \wedge (1 \Rightarrow x) = x$.

De (2) et M2 on tire $1 \wedge x = x$.

4.2. LEMME. $1 \Rightarrow x = x$

DEM. Comme par M2: $1 \wedge (1 \Rightarrow x) = 1 \wedge x$, alors en utilisant le lemme **4.1** on obtient $1 \Rightarrow x = x$.

4.3. LEMME. $x \Rightarrow 1 = 1$

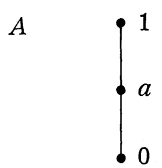
DEM. D'après M5 on a $((x \Rightarrow x) \Rightarrow 1) \wedge ((1 \Rightarrow x) \Rightarrow 1) = 1$, et tenant compte de M1 et du lemme **4.2**, on peut écrire: $(1 \Rightarrow 1) \wedge (x \Rightarrow 1) = 1$ c'est-à-dire $1 \wedge (x \Rightarrow 1) = 1$ d'où par le lemme **4.1**: $x \Rightarrow 1 = 1$.

4.4. LEMME. $(x \Rightarrow y) \wedge y = y$ (Axiome A2)

DEM. Par M5 on a $((1 \Rightarrow x) \Rightarrow y) \wedge ((y \Rightarrow 1) \Rightarrow y) = y$, d'où d'après les lemmes **4.2** et **4.3**: $(x \Rightarrow y) \wedge (1 \Rightarrow y) = y$, et par le lemme **4.2** on a finalement $(x \Rightarrow y) \wedge y = y$.

Nous allons maintenant démontrer que les axiomes M1-M8 sont indépendants. Pour cela, nous considérons les exemples suivants:

Exemple I. Soit A l'algèbre de Łukasiewicz trivalente dont le diagramme de Hasse et les tables des opérateurs $\sim$, ∇ et Δ sont indiqués sur la figure 1.



x	$\sim x$	∇x	Δx
0	1	0	0
a	a	1	0
1	0	1	1

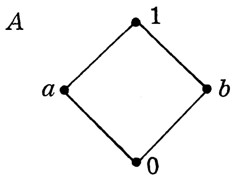
Fig. 1

Posons par définition $x \Rightarrow y = \Delta \sim x \vee y$. Alors les axiomes M2-M8 sont valables tandis que M1 ne l'est pas car:

$$a \Rightarrow a = \Delta \sim a \vee a = \Delta a \vee a = 0 \vee a = a \neq 1$$

Exemple II. Soit A l'algèbre indiquée dans l'exemple I et posons par définition $x \Rightarrow y = \nabla \sim x \vee y$. On vérifie facilement que les axiomes M1, M3-M8 sont valables et M2 ne l'est pas car: $a \wedge (a \Rightarrow 0) = a \wedge 1 = a$ tandis que $a \wedge 0 = 0$.

Exemple III. Soit A l'algèbre de Boole indiqué dans la figure 2 et définissons les opérateurs "$\sim$" et "$\Rightarrow$" par les tables suivantes:



x	$\sim x$
0	1
a	b
b	a
1	0

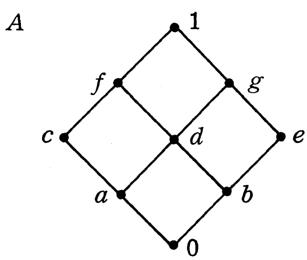
$\Rightarrow$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	0	1	b	1
b	0	a	1	1
1	0	a	b	1

Fig. 2

Alors les axiomes M1, M2, M4-M8 sont valables tandis que M3 ne l'est pas car: $a \Rightarrow (a \wedge b) = a \Rightarrow 0 = 0$ et $(a \Rightarrow b) \wedge (a \Rightarrow a) = b \wedge 1 = b$.

Exemple IV. Soit A le réticulé distributif dont le diagramme de Hasse est indiqué sur la figure 3. Dans ces conditions les opérations $\wedge, \Rightarrow$ sont univoquement définies sur A. L'opération $\sim$ sera définie sur A au moyen de la table suivante. Comme A est un réticulé la borne supérieur de deux éléments x et y est déterminé. Nous allons ignorer cette borne supérieur et nous allons considérer la nouvelle opération binaire $\vee$ définie par l'égalité:

$$x \vee y = \sim (\sim x \wedge \sim y)$$



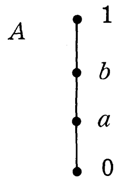
x	$\sim x$
0	1
a	b
b	a
c	e
d	d

x	$\sim x$
e	c
f	g
g	f
1	0

Fig. 3

Considérons alors l'algèbre $\langle A, 1, \sim, \wedge, \vee, \Rightarrow \rangle$ ainsi définie. Comme le système $\langle A, 1, \wedge, \Rightarrow \rangle$ est une algèbre de Hertz [24] alors les axiomes M1, M2, M3 sont vérifiées et en utilisant les définitions on montre que M5-M8 sont aussi valables, tandis que M4 n'est pas valable car: $(c \vee d) \Rightarrow a = (\sim (\sim c \wedge \sim d)) \Rightarrow a = \sim (e \wedge d) \Rightarrow a = \sim b \Rightarrow a = a \Rightarrow a = 1$, et $(c \Rightarrow a) \wedge (d \Rightarrow a) = d \wedge c = a$.

Exemple V. Soit A l'algèbre de Heyting dont le diagramme est indiqué sur la figure 4 et définissons l'opérateur "$\sim$" par la table suivante:



x	$\sim x$
0	1
a	b
b	a
1	0

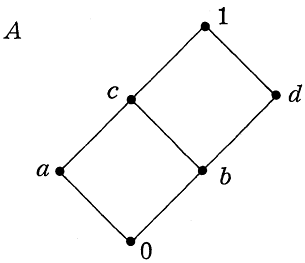
Fig. 4

Tous les axiomes sont vérifiés à l'exception de M5, car:

$$((a \Rightarrow 0) \Rightarrow b) \wedge ((b \Rightarrow a) \Rightarrow b) = (0 \Rightarrow b) \wedge (a \Rightarrow b) = 1 \wedge 1 = 1 \neq b.$$

Exemple VI. Soit A l'algèbre de Heyting, indiquée sur la figure 1, et posons par définition $\sim x = \neg x$. Alors les axiomes M1-M5, M7, M8 sont vérifiés, et M6 ne l'est pas car: $\sim\sim a = \neg(\neg a) = \neg 0 = 1 \neq a$.

Exemple VII. Soit A le réticulé distributif fini dont le diagramme est indiqué sur la figure 5, alors les opérations $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, sont bien determinées et les axiomes M1-M5 sont verifiés. Supposons que l'opération "$\sim$" soit définie par la table ci-jointe.



x	$\sim x$	$x \wedge \sim x$	$x \vee \sim x$
0	1	0	1
a	b	0	c
b	a	0	c
c	d	b	1
d	c	b	1
1	0	0	1

Fig. 5

Les axiomes M6 et M8 sont verifiés tandis que M7 ne l'est pas car

$$\sim (a \wedge b) = \sim 0 = 1 \text{ et} \sim a \vee \sim b = b \vee a = c.$$

Exemple VIII. Soit A le réticulé distributif fini, dont le diagramme est indiqué sur la figure 3, A est un algèbre de Heyting trivalente, alors M1-M5 sont verifiés. Définissons "$\sim$" par la table ci-jointe, alors M6 et M7 sont verifiés, tandis que M8 ne l'est pas car: $(c \wedge \sim c) \wedge (d \vee \sim d) = c \wedge d = a \neq c \wedge \sim c = c$.

x	$\sim x$
0	1
a	f
b	g
c	c
d	d

x	$\sim x$
e	e
f	a
g	b
1	0

NOTE: Ces exemples montrent aussi que M1, M2, M3, M4 et M5 sont des axiomes indépendants pour les algèbres $\mathcal{H}_3$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Birkhoff, G., *Lattice Theory*, Revised edition, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 25, Amer. Math. Soc., New York (1948).

[2] Cignoli, Roberto, "Boolean Elements in Łukasiewicz Algebras I," *Proceedings of the Japan Academy*, vol. 41, No. 8 (1965), pp. 670-675.

[3] Dummett, Michael, "A propositional calculus with denumerable matrix," *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 24 (1959), pp. 97-106.

[4] Heyting, Arend, "Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik," *Sitzungsberitche der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, Physikalisch-mathematische Klasse (1930), pp. 42-56.

[5] Hilbert, D., and P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, vol. I (1934), vol. II (1939).

[6] Iturrioz, Luisa, "Axiomas para el câlculo proposicional trivalente de Łukasiewicz," *Revista de la Uniôn Matemâtica Argentina*, vol. 22, No. 3 (1965), p. 150.

[7] Iturrioz, Luisa, "Sobre una clase particular de Algebras de Moisil," *Revista de la Uniôn Matemâtica Argentina*, vol. 23, No. 1 (1966), pp. 39-40.

[8] Kalman, J. A., "Lattices with involution," *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 87 (1958), pp. 485-491.

[9] Łukasiewicz, Jan, "O logice trójwartościowej," *Ruch Filozoficzny*, vol. 5 (1920), p. 170.

[10] Łukasiewicz, Jan, "Die Logik und das Grundlagenproblem," *Les Entretiens de Zürich* (1938), pp. 82-100, Discussion, pp. 100-108.

[11] Moisil, Gr. C., "Recherches sur l'algèbre de la logique," *Annales Scientifiques de l'Universitê de Jassy*, vol. 22 (1935), pp. 1-117.

[12] Moisil, Gr. C., "Recherches sur les logiques non-chrysippiennes," *Annales Scientifiques de l'Universitê de Jassy*, vol. 26 (1940), pp. 431-466.

[13] Moisil, Gr. C., "Notes sur les logiques non-chrysippiennes," *Annales Scientifiques de l'Universitê de Jassy*, vol. 27 (1941), pp. 86-98.

[14] Moisil, Gr. C., "Logique Modale," *Disquisitions Mathematicäe et Physicae*, Buc. 2 (1942), pp. 3-98.

[15] Moisil, Gr. C., "Sur les ideaux des algèbres Łukasiewicziennes trivalentes," *Analele Universitatii C. I. Parhon*, Seria Acta Logica, vol. 3 (1960), pp. 83-95.

[16] Moisil, Gr. C., "Sur la logique à trois valeurs de Łukasiewicz," *Analele Universitatii Bucaresti*, Seria Acta Logica, vol. 5 (1962), pp. 103-117.

[17] Moisil, Gr. C., "Les logiques non-chrysippiennes et leurs applications," *Acta Philosophica Fennica*, vol. 16 (1963), pp. 137-152.

[18] Monteiro, Antonio, "Axiomes indêpendants pour les algèbres de Brouwer," *Revista de la Uniôn Matemâtica Argentina*, vol. 17 (1955), pp. 149-160.

[19] Monteiro, Antonio, "Matrices de Morgan Caractêristiques pour le Calcul Propositionnel Classique," *Anais da Academia Brasileira de Ciências*, vol. 52 (1960), pp. 1-7.

[20] Monteiro, Antonio, "Linearisation de la logique positive de Hilbert-Bernays," *Revista de la Unión Matemática Argentina*, vol. 20 (1962), pp. 308-309.

[21] Monteiro, Antonio, "Sur la Définition des Algèbres de Łukasiewicz trivalentes," *Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la R.P.R.*, Tome 7 (55), nr. 1-2 (1963), pp. 3-12.

[22] Monteiro, Luiz, "Axiomes indépendants pour les algèbres de Łukasiewicz trivalentes," *Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la R.P.R.*, Tome 7 (55), nr. 3-4 (1963), pp. 199-202.

[23] Monteiro, Luiz, "Sur les Algèbres de Heyting trivalentes," *Notas de Lógica Matemática*, No. 19 (1964).

[24] Porta, Horacio, "Sur un théorème de Skolem," *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, Tome 256 (1963), pp. 5262-5264.

[25] Rasiowa, H., and R. Sikorski, "Algebraic Treatment of the Notion of Satisfiability," *Fundamenta Mathematicae*, vol. 40 (1953), pp. 62-95.

[26] Rasiowa, H., and R. Sikorski, *The Mathematics of Methamathematics*, Monografie Matematyczne, Tom 41, Warszawa (1963).

[27] Sholander, Marlow, "Postulates for distributive lattices," *Canadian Journal of Mathematics*, vol. 3 (1951), pp. 28-30.

[28] Thomas, Ivo, "Finite limitations on Dummett's L C," *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 3 (1962), pp. 170-174.

[29] Ward, Morgan, "Structure Residuation," *Annals of Mathematics*, vol. 33 (1938), pp. 558-568.

Instituto de Matemática
Universidad Nacional del Sur
Bahia Blanca, Argentina