416
Notre Dame Journal of Formal Logic
Volume XI, Number 4, October 1970

ÜBER INTENSIONEN UND MODALITÄTEN

WILHELM K. ESSLER

Üblicherweise werden den Extensionen die sogenannten Intensionen und den extensionalen Logiksystemen Modallogiken als Logiksysteme der Intensionen *notwendig* und *möglich* gegenübergestellt, so als ob es sich dabei um irreduzible Entitäten handelte. Dabei bereitet es dem Philosophen keine Schwierigkeiten, Extensionen als Intensionen besonderer Art zu deuten. Interessant ist hingegen die Frage, ob nicht auch umgekehrt die Intensionen durch Komplexe von Extensionen dargestellt werden können; im folgenden wird gezeigt, daß dies tatsächlich möglich ist. Mit einer solchen extensionalen Deutung werden Intensionen und modale Logiksysteme auch für den Extensionalisten akzeptabel, da er sie dann als unproblematisch und harmlos ansehen kann.

Gegeben sei eine genügend ausdrucksreiche Sprache (etwa eine Sprache der einfachen Typentheorie), deren Begriffe ausnahmslos extensional gedeutet sind. In ihr können durch rekursive Definitionen die Begriffe des Terms, des Satzes, der Ableitbarkeit und der Beweisbarkeit bezüglich einer anderen, ausdrucksärmeren Sprache (etwa einer Sprache der Quantorenlogik zweiter Stufe) dargestellt werden. Da dabei an keiner Stelle eine neue Deutung der Ausdrücke der ursprünglichen Sprache (die jetzt Metasprache dieser Objektsprache ist) benötigt wird, bezeichnen diese syntaktischen Begriffe nach wie vor gewisse (wenn auch vielleicht nicht einfach zu beschreibende) Extensionen.

Zur Charakterisierung des Wahrheitsprädikates und der darauf zurückführbaren Begriffe wie "logische Wahrheit" und "logische Folgerung" benötigt man den Interpretationsbegriff. Es liegt auf der Hand, daß man auch bei dessen Einführung nicht genötigt ist, den Bereich der Extensionen zu verlassen. Denn eine Interpretation ist als eine Klasse von geordneten Parren darstellbar, deren Erstglieder Variablen und nichtlogische Konstanten der Objektsprache und deren Zweitglieder bestimmte Extensionen sind[1]; der Interpretationsbegriff bezeichnet dann die Gesamtheit aller

1. Vgl. [4], S.267 und [6], S.369; über die Reduzierung verschiedener endlicher Kategorien von Entitäten auf *eine* Kategorie vgl. das klassische Werk [15], insbesondere S.348 ff.

Received May 20, 1969

derartigen *Interpretationen*. Es sind bezüglich einer solchen Objektsprache also auch die semantischen Begriffe wie "Interpretation", "Wahrheit" usw. definierbar, ohne daß auf einen Bereich von Intensionen Bezug genommen werden müßte.

Es erhebt sich die Frage, ob auch die sogenannten *Intensionen der Begriffe der Objektsprache* so dargestellt werden können, daß man an der extensionalen Deutung der Begriffe nicht etwas zu ändern braucht und daß man nicht zusätzlich einen Bereich von Intensionen in Erwägung ziehen muß[2]. Dies ist tatsächlich der Fall. Dazu braucht man sich nur zu vergegenwärtigen, wie man im Einzelfall die Intension (den sogenannten Inhalt) eines Begriffs im Gegensatz zu seiner Extension (seinem Umfang) angibt. Die Intension eines Begriffs wird durch Bestimmungen festgelegt, die besagen, wie er zu gebrauchen ist und in welchem strukturellen Verhältnis er demnach zu den anderen Begriffen steht. Formal kann man diese intuitive Charakterisierung so wiedergeben: die Intensionen der Begriffe der zugrundegelegten Objektsprache werden durch eine Klasse von Sätzen der Objektsprache bestimmt, deren Elemente nicht logisch wahr, aber simultan erfüllbar sind und in dem Sinn die Bedeutung der darin vorkommenden außerlogischen Begriffe einengen, daß alle und nur solche Interpretationen der Sprache zugelassen werden, bei denen alle Aussagen dieser Klasse wahr sind.

Bei einigen außerlogischen Begriffen kann es sich dabei erweisen, daß jene Sätze ihr Verhältnis zu den anderen Ausdrücken eindeutig festlegen, so daß Beths Definierbarkeitstheorem anwendbar ist[3]. Bei anderen erweist sich eine Rückführung auf andere Begriffe als unmöglich; trotzdem legen die Sätze (die Axiome) ihre Bedeutung teilweise fest, da sie nicht alle Extensionen als Bedeutungen zulassen. Im günstigsten Fall werden sie so weit festgelegt, daß die verschiedenen zulässigen Deutungen strukturgleich (isomorph) oder strukturgleich hinsichlich Gegenstandsbereiche mit einer fest vorgegebenen Anzahl sind.

Die Axiome definieren ebenfalls einen Begriff, jedoch nicht die in ihnen vorkommenden Grundbegriffe (die genau genommen ja nur Variablen sind), sondern einen von Frege so genannten "Begriff der zweiten Stufe"[4], den Carnap "Explizitbegriff des Axiomensystems" nennt[5]. Dieser Explizitbegriff ist die Intension des Grundbegriffs oder der Grundbegriffe, da er mittels jener Gesamtheit von Aussagen definiert worden ist, die man a priori über jene Grundbegriffe gemacht hat.

Die *Intension eines Begriffs* ist also die *Form des Umfangs*, den er bei einer Interpretation bezeichnet, während die *Extension eines Begriffs* der *Inhalt dieses Umfangs* ist (es ist demnach eine sehr unglückliche Konvention, den Ausdruck "Intension" mit "Begriffs-*inhalt*" synonym zu verwenden). Der Extensionalist kann also mit dem gleichen Recht von Intensionen *reden* wie der Nicht-Extensionalist, und seine *Verwendung* von

2. Wie z.B. [2] S. 16-25.
3. Vgl. [13], S.117f.
4. Vgl. [8], S.416, 217f. und 321; vgl. auch [5].
5. Vgl. [3], S.176f.

Intensionen wird sich in nichts (außer vielleicht in größerer Klarheit) von der des Nicht-Extensionalisten unterscheiden; der Unterschied liegt lediglich darin, daß er nicht einen Bereich von Intensionen neben dem der Extensionen und damit zweierlei Arten von Interpretationen kennt, mit denen der Nicht-Extensionalist so gerne operiert, sondern daß er Intensionen als gewisse Komplexe von Extensionen (dargestellt durch Klassen von Sätzen mit freien Variablen) deutet.

Gelegentlich wird behauptet, daß neben den extensionalen Teildisziplinen der klassischen zweiwertigen Logik (wie Aussagenlogik, engere Quantorenlogik) noch eine davon unabhängige und irreduzible Logik der Intensionen existiert, worunter eine Logik der Modalitäten *notwendig* und *möglich* verstanden wird. Nun kann man zwar mit gutem Recht von *der* klassischen zweiwertigen Logik (und analog von *der* intuitionistischen Logik, *der* Minimallogik usw.) sprechen, jedoch nicht von *der* Modallogik, sondern allenfalls von *den* Systemen der Modallogik, da diese nicht generell (im Sinn der klassischen zweiwertigen Logik) miteinander äquivalent sind. Im folgenden wird am Beispiel des Kalküls S5[6] gezeigt, daß auch Systeme der Modallogik auf Systeme der klassischen zweiwertigen Logik reduzierbar sind. Die Ergebnisse lassen sich ohne Schwierigkeiten auf andere Systeme der Modallogik übertragen.

Der Kalkül S5 hat die folgenden Axiome:

A1 $\vdash \Box\phi \rightarrow \phi$
A2 $\vdash \Box(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\phi \rightarrow \Box\psi)$
A3 $\vdash \Box\phi \rightarrow \Box\Box\phi$
A4 $\vdash \phi \rightarrow \Box\Diamond\phi$
A5 $\vdash \Diamond\phi \rightarrow \Box\Diamond\phi$

Dabei sei "$\Diamond$" eine Abkürzung für "$\neg\Box\neg$". S5 hat die beiden folgenden Regeln:

R1 wenn $\vdash\phi$ und $\vdash\phi \rightarrow \psi$, so $\vdash\psi$.
R2 wenn $\vdash\phi$, so $\vdash\Box\phi$.

Der Operator "$\Box$" wird hier als aussagenlogischer Funktor wie das Symbol "$\neg$" verwendet. Er soll den intuitiven Begriff "notwendig" explizieren, doch ist diese Deutung für die Frage der Gültigkeit der Axiome nicht *notwendig*. Ich behaupte, daß die fünf Axiome und die zwei Regeln über den Notwendigkeitsbegriff überhaupt nichts Informatives aussagen und ihn deshalb in keiner Weise auch nur teilweise explizieren; wer also nicht weiß, was mit "notwendig" gemeint ist, wird es auch nicht dadurch erlernen, daß er sich in der korrekten Anwendung von S5 übt. Ich möchte diese Behauptung dadurch beweisen, daß ich zwei heterogene Modelle dieses Kalküls angebe, die beide in gewisser Hinsicht adäquat sind:

Deutung a: "$\Box$" ist objektsprachlicher Ausdruck für "logisch wahr"; semantisch kann dies folgendermaßen formuliert werden: Der Satz $\Box\phi$ ist

6. Vgl. z.B. [11], S.493 ff. und [10], S.83.

bei einer Interpretation J wahr genau dann, wenn ϕ bei jeder Interpretation wahr ist. Offensichtlich sind bei dieser Deutung alle Axiome und Regeln gültig.

Deutung b: "$\Box$" ist objektsprachlicher Ausdruck für "faktisch wahr"; semantisch kann dies folgendermaßen formuliert werden: Der Satz $\Box\phi$ ist bei einer Interpretation J wahr genau dann, wenn ϕ bei der Interpretation J wahr ist (dem liegt die intuitive Vorstellung zugrunde, daß genau das der Fall ist, was *notwendig* der Fall ist; der Begriff "notwendig" hat dann keinen zusätzlichen informativen Gehalt und ist inhaltlich gleich mit "möglich", das durch "$\Diamond$" expliziert werden sou). Es bereitet keine Schwierigkeiten, einzusehen, daß auch bei dieser Deutung alle Axiome und Regeln von S5 gelten.

Die Deutung b kann auf (wenigstens) zwei Arten in der Objektsprache ausgedrückt werden: (1) Durch Streichung des Operators "$\Box$" aus allen Kontexten (und Ersetzung von "$\Diamond$" durch "$\neg\neg$"), und (2) durch Ersetzung von "$\Box$" in allen Kontexten durch "$\neg\neg$" (und entsprechend von "$\Diamond$" durch "$\neg\neg\neg\neg$"). Bei dieser Deutung wird S5 ein Teilsystem der Aussagenlogik und erhält damit für den Extensionalisten einen klaren Sinn. Einen klaren Sinn für ihn hat S5 aber auch bei der Deutung a, da er den Kalkül dann als den Versuch einer partiellen objektsprachlichen Wiedergabe des Begriffs der logischen Folgerung (den er extensional deutet) ansehen kann.

Kripke hat als erster eine akzeptable Semantik für Systeme von Modallogiken entwickelt. Er geht dabei vom Begriff der Modellstruktur aus, den er folgendermaßen entwickelt[7]; $\langle K,R\rangle$ ist eine Modellstruktur für S5 genau dann, wenn K eine nichtleere Klasse und R eine Äquivalenzrelation über K ist und folglich die Klasse K vollständig und disjunkt in Äquivalenzklassen einteilt. "K" soll dabei das formale Analogon zum intuitiven Begriff der Klasse der möglichen Welten sein und "$\langle H_1,H_2\rangle$ e R" der Aussage "die Welt H_2 ist möglich relativ zur Welt H_1" entsprechen (wobei "e" die metasprachliche Kopula ist, also eine Abkürzung für "ist" darstellt). Doch geht diese intuitive Motivation nicht in den formalen semantischen Apparat ein (da "R" nicht weiter gedeutet wird, ist es problematisch, hier überhaupt von einer Semantik zu sprechen).

Der Wahrheitsbegriff kann dann als ein (metasprachlicher) Ausdruck eingeführt werden, der eine Relation zwischen Sätzen der Objektsprache und Elementen aus K bezeichnet. Der Operator "$\Box$" wird dabei folgendermaßen festgelegt: $\langle K,R\rangle$ sei eine Modellstruktur für S5 and H sei ein Element aus K; dann ist der Satz $\Box\phi$ bei H wahr genau dann, wenn ϕ bei jedem Element H' aus K wahr ist, bei dem gilt, daß $\langle H,H'\rangle$ e R. Da über R nichts weiter ausgesagt wird, als daß es eine Äquivalenzrelation über K ist, können zwei Extremfälle eintreten:

Fall a: R ist (auf K) die universelle Relation, so daß es überhaupt nur eine Äquivalenzklasse (über K) gibt. Dann gilt: $\Box\phi$ ist bei H wahr genau

7. Vgl. dazu [10], [11] und [14]; ich weiche von diesen Darstellungen geringfügig ab.

dann, wenn ϕ bei *jedem* Element H' aus K wahr ist. Dies entspricht der oben gegebenen Deutung a von "$\Box$".

Fall b: R ist (auf K) die Identitätsrelation und zerlegt also K in eine Gesamtheit von Einer klassen. Dan gilt lediglich, daß $\langle H,H\rangle$ *e* R, und dann gilt, daß nicht-$\langle H,H'\rangle$*e* R für jedes von H verschiedene Element H' aus K; die obige Festlegung des Operators ist unter dieser Voraussetzung äquivalent mit: $\Box\phi$ ist wahr bei H genau dann, wenn ϕ bei H wahr ist. Dies entspricht der Deutung b von "$\Box$".

Man wird mir vielleicht entgegnen, daß die sogenannten *eigentlichen* Modalitäten (die *eigentlichen* Deutungen "$\Box$") durch Relationen R geliefert werden, die weder die universelle Relation noch die Identität sind, so daß also wenigstens zwei Äquivalenzklassen existieren, von denen wenigstens eine mehrere Elemente enthält. Dazu ist folgendes zu sagen:

R ist eine Äquivalenzrelation, hat also die formale Struktur der Identität (durch sie werden jene Elemente aus K zusammengefaßt, die sich in gewisser Hinsicht nicht voneinander unterscheiden). *Wann* zwei Elemente aus K sich in einer solchen Hinsicht nicht voneinander unterscheiden, wird jedoch wohl eine empirische Frage sein, die nicht a priori beantwortet werden kann. Wenn dem so ist, kann behauptet werden, daß S5 nicht mehr durch weitere apriorische Axiome zu vervollständigen ist. Um nun R so festzulegen, daß es nicht mit einer der beiden vorhin erwähnten Relationen identisch ist, muß man eine erfüllbare Gesamtheit von metasprachlichen Aussagen angeben, aus der für beliebige Elemente H_1 and H_2 aus K entweder $\langle H_1, H_2\rangle$ *e* R oder nicht–$\langle H_1, H_2\rangle$ *e* R logisch folgt. Da R dann einzig und allein durch diese Klasse von Sätzen und nicht durch eine intuitive Motivation oder durch metasprachliche Modalitätsausdrücke axiomatisch charakterisiert ist, kann es auch in diesem Fall als eine Klasse von geordneten Paaren und damit extensional aufgefaßt werden.[8]

Solange also R nicht spezifiziert ist, bleibt der Operator "$\Box$" und damit der ganze Kalkül ungedeutet; ist hingegen bekannt, mit welcher Relation R identisch ist, so ist damit der Kalkül extensional gedeutet, wenn man R als Klasse von geordneten Paaren auffaßt.

Dem bisher Gesagten könnte entgegengehalten werden, daß der Vor- und der Nachbereich der Relation R nicht Extensionen, sondern Sachverhalte seien, die nicht mit irgendwelchen Extensionen gleichgesetzt werden könnten; daher sei S5, abgesehen vielleicht von der Deutung b, nach wie vor eine intensionale Logik. Um mein Argument zu vervollständigen, muß ich also zeigen, mit welcher extensionalen Aussage der Satz "Die Welt H_k ist möglich relativ zur Welt H_i" logisch gleichwertig ist. Es ist, mit anderen Worten, eine Relation R' anzugeben, so daß H_i zu H_k genau dann in R steht, wenn eine dem Sachverhalt H_i entsprechende Extension zu einer dem Sachverhalt H_k entsprechenden Extension in der Beziehung R' steht.

Nach dem Vollständigkeitsbeweis von Henkin genügt es, bei den Interpretationen der Sprachen der engeren Quantorenlogik Gegenstandsbereiche

8. Es besteht hier sozusagen ein Kontinuum von Systemen der Modallogik, das von logischer Notwendigkeit bis zu faktischem Bestehen reicht.

B zu verwenden, die höchstens abzählbar unendlich sind. Nun entspricht jedem Element H aus K (jeder als möglich erachteten Welt) ein Gegenstandsbereich B; in Übereinstimmung mit Henkins Resultat wird daher angenommen, daß alle diese Bereiche höchstens abzählbar unendlich sind. Ferner wird jedem Element H aus K eine Sprache S und eine Interpretation J zugeordnet in der Weise, daß J die Gegenstandsausdrücke der vorgegebenen Sprache umkehrbar eindeutig auf den Gegenstandsbereich B der Welt H abbildet; die Sprachen und deren Interpretationen seien von der Art, daß, falls die Bereiche B_i und B_k der Welten H_i und H_k gemeinsame Elemente besitzen, die Sprachen S_i und S_k dann die entsprechenden Gegenstandsausdrücke gemeinsam haben, so daß diese unter J_i und J_k jene Elemente aus B_i und B_k bezeichnen. Es wird vorausgesetzt, daß die einzelnen Sprachen die gleichen Prädikate besitzen (diese Voraussetzung ist nicht wesentlich, sie vereinfacht lediglich die folgenden Überlegungen). Wenn demnach die Bereiche B_i und B_k der zwei Welten H_i und H_k identisch sind, so haben die Sprachen S_i und S_k das gleiche Vokabular, d.h. so sind sie ebenfalls miteinander identisch. Es werden nun die Basissätze (d.h. die negierten und unnegierten atomaren Sätze) einer jeden Sprache in den verschiedensten Weisen zu maximalkonsistenten Mengen zusammengefaßt. Die Standardkonjunktionen dieser Mengen (die konjunktiven Zusammenfassungen der Elemente dieser einzelnen Mengen in lexikographischer Anordnung) werden "Zustandsbeschreibungen" genannt.[9]

Zu jeder möglichen Welt H_i gibt es genau eine Zustandsbeschreibung ${}_i\Sigma_j$ der Sprache S_i, die bei J_i wahr ist, die also H_i beschreibt. Es wird nun die Gesamtheit K' jener Zustandsbeschreibungen betrachtet, die in dieser Weise den Elementen aus K entsprechen. Der (metasprachliche) Relationsausdruck "R'" wird dann folgendermaßen eingeführt: K' ist der Vor- und der Nachbereich von R'; wenn ${}_i\Sigma_j$ und ${}_k\Sigma_l$ Elemente von K' sind, so daß ${}_i\Sigma_j$ die Welt H_i und ${}_k\Sigma_l$ die Welt H_k beschreibt, dann gilt: $\langle {}_i\Sigma_j, {}_k\Sigma_l \rangle \; e \; R'$ genau dann, wenn $\langle H_i, H_k \rangle \; e \; R$. R' ist somit eine Klasse von geordneten Paaren von Dingen[10] (Sätze sind ja Dinge, über die in der Metasprache geredet wird), womit die extensionale Deutung der Kripke-Semantik abgeschlossen ist.

Für den Extensionalisten besteht demnach nicht die Frage, ob ein System der Modallogik wie S5 sinnvoll ist oder nicht, da ja nachgewiesen ist, daß extensionale Deutungen solcher Kalküle existieren, sondern er hat zu untersuchen, welches System und welche Deutung des Systems am praktischsten und nützlichsten in der Anwendung auf konkrete Probleme ist. Nun wird man wohl unumwunden zugeben, daß ein System und eine Deutung

9. Wenn die Gesamtheit der Gegenstandsausdrücke oder der Prädikate unendlich ist, so ist eine derartige Zustandsbeschreibung ein Satz von unendlicher Länge; statt dessen könnte im folgenden auch mit den Mengen von Basissätzen operiert werden. R' wäre dann nicht als eine Relation zwischen bestimmten Zustandsbeschreibungen, sondern als eine Beziehung zwischen diesen Mengen einzuführen.

10. bzw., falls man bei unendlich vielen deskriptiven Ausdrücken Sätze von unendlicher Länge vermeiden will: eine Klasse von geordneten Mengen von Basissätzen.

des Systems umso nützlicher ist, je mehr logische Gesetze darin gelten. Dann gebührt jedoch ohne Zweifel einem System der Modallogik, das S5 einschließt und das die Deutung b erfahren hat, der Vorzug; denn bei dieser gelten alle Gesetze, die auch bei den übrigen Deutungen gelten, außerdem aber noch die Gesetze der Identitätslogik (da "$\Box$" bei ihr ja durch "$\neg\neg$" ersetzt werden kann), die bei keiner anderen Deutung Gültigkeit haben. Bei der Deutung b ist die Leibniz-Definition der Identität, aus der insbesondere das Substitutionstheorem logisch folgt, eine nichtkreative und damit analytische Behauptung,[11] während sie bei allen davon verschiedenen Deutungen kreativ ist.

Denn unter Verwendung des Substitutionsprinzips folgt aus der beweisbaren Aussage $\Box(\alpha = \alpha)$ der Satz $\alpha = \beta \rightarrow \Box(\alpha = \beta)$. Dieser ist nur bei der Deutung b ein Theorem der Logik; bei allen anderen Deutungen ist er bei einigen Interpretationen der Ausdrücke α und β wahr, bei anderen hingegen falsch, so daß er eine Aussage mit faktischem Gehalt ist. Da er aus dem Substitutionsprinzip deduziert und dieses wiederum aus dem Leibniz-Prinzip abgeleitet ist, ist dieses damit bei allen anderen Deutungen von "$\Box$" kreativ.

Eine andere, zunächst scheinbar naheliegendere extensionale Deutung der Modallogik ist kürzlich von Lorenzen vorgeschlagen worden.[12] Σ sei jener Satz der Objektsprache, der die notwendigen Sachverhalte beschreibt (wenn Kant recht gehabt hätte, könnte Σ mit einer Konjunktion seiner metaphysischen Grundsätze der Erfahrung sowie der Axiome der Arithmetik und der Geometrie identifiziert werden). Der Notwendigkeitsoperator "$\Box_\Sigma$" kann dann für Sätze ϕ, die noch keinen Modaloperator enthalten, folgendermaßen definiert werden: $\Box_\Sigma\phi$ genau dann, wenn aus Σ logisch ϕ folgt (wenn also bei allen Interpretationen der Objektsprache, bei denen Σ wahr ist, auch ϕ wahr ist). Da "$\Box_\Sigma$" hier kein objektsprachlicher, sondern ein metasprachlicher Operator ist, werden bei dieser Deutung die Axiome A3, A4 und A5 nicht etwa falsch, sondern sinnlos, was jedoch Lorenzen nicht weiter stört.

Schlimm müßte für ihn jedoch eigentlich die Tatsache sein, daß bei seiner Deutung auch A1 sinnlos ist, da hier eine metasprachliche Aussage $\Box_\Sigma\phi$, das objektsprachliche Implikationszeichen und der objektsprachliche Satz ϕ hintereinander geschrieben werden, was weder einen objektsprachlichen noch einen metasprachlichen Satz ergibt. Aber selbst wenn man diese Schwierigkeit als überwunden ansieht (wenn man etwa eine Übersetzung von $\Box_\Sigma\phi$ in die Objektsprache angeben kann), irrt er sich, wenn er behauptet, daß A1 bei seiner Deutung allgemeingültig ist. Als modallogische Wahrheiten sieht er jene Sätze an, die den Operator "$\Box_\Sigma$" enthalten und *unabhangig davon* gelten, welcher Satz Σ gewählt worden ist.[13] Dann können Σ und ϕ so gewählt werden, daß sie nicht logisch wahr sind. Es gibt in diesem Fall also eine Interpretation der Sprache, bei der sie beide falsch

11. Über den Begriff der Nichtkreativitat vgl. z.B. [4], S. 251f.
12. Vgl. [12], S.62f.
13. Vgl. [12], S.62.

sind; bei ihr ist offenbar die Aussage $\Box_\Sigma \phi$ (bzw. deren objektsprachliche Übersetzung) wahr, da nach Voraussetzung ϕ aus Σ logisch folgt, während ϕ ja falsch ist, d.h. bei ihr ist $\Box_\Sigma \phi \rightarrow \phi$ nicht wahr.

Man kann nun versuchen, heimlich und unmerklich in die Definition noch die Bedingung hineinzuschmuggeln, daß Σ auf jeden Fall eine wahre Aussage sein muß.[14] Schwieriger ist es schon, die Definition entsprechend abzuändern. Da der Wahrheitsbegriff eine zweistellige Relation zwischen objektsprachlichen Sätzen und Interpretationen ist, müßte der Notwendigkeitsoperator folgendermaßen eingeführt werden: $\Box_\Sigma^J \phi$ genau dann, wenn aus Σ logisch ϕ folgt und wenn Σ bei der Interpretation J wahr ist.

Da Σ jeder beliebige, bei J wahre Satz sein kann, werden wohl nicht viele Modallogiker diese Deutung akzeptieren. Auch Lorenzen wird sie kaum annehmen, allerdings aus einem anderen Grund: den hier verwendeten Wahrheitsbegriff kennt er nicht; wahr ist nach seiner Ansicht ein Satz vielmehr genau dann, wenn er in einem Dialog gegen jeden beliebigen Gegner verteidigt werden kann.[15] Zunächst würde wohl jeder vermuten, daß nur die logisch wahren Sätze in einem Dialog gegen alle Opponenten verteidigt werden können (denn bei empirischen Aussagen kann es sich ja stets im nachhinein herausstellen, daß man sich geirrt hat, und zwar nicht nur bei den sogenannten Grundsätzen, sondern auch schon bei singulären Behauptungen). Nach Lorenzen ist es aber auch möglich, die Gesetze der Arithmetik (und der euklidischen Geometrie) in einem Dialog gegen jeden Opponenten zu verteidigen. Das Axiom "$\bigwedge n \bigwedge m\ (n \neq m \rightarrow n + 1 \neq m + 1)$" etwa, das die Existenz von unendlich vielen natürlichen Zahlen (und bei der Definition der arithmetischen Grundbegriffe nach Russell die Existenz eines unendlichen Gegenstandsbereichs) fordert, darf nun nicht dadurch begründet werden, daß man nach einer Interpretation sucht, bei der es wahr ist; so etwas ist nach Lorenzen unzulässig. Vielmehr muß bei seiner Begründung auf eine Regel Bezug genommen werden, die besagt, daß man, ausgehend von zwei natürlichen Zahlen, durch die Addition der Zahl 1 wiederum eine natürliche Zahl erhält. Nun sind Regeln dieser Art aber mit den entsprechenden Axiomen logisch gleichwertig, d.h. die Regeln sind (bei einer gegebenen Deutung der Grundbegriffe) generell durchführbar genau dann, wenn die entsprechenden Axiome (bei der gleichen Deutung) wahr sind; wenn unsere Welt nur endlich viele Atome enthält, dann kann niemand unbegrenzt viele Striche auf ein unendlich langes Papier schreiben, sondern wird, auch wenn er genügend lange lebt, mit dieser Tätigkeit einmal aufhören müssen, und dann ist auch jenes Axiom falsch. Lorenzen gibt demnach zwar vor, jenes Axiom definitivzu begründen, doch besteht dessen Begründung bei genauerer Betrachtung in nichts anderem als in der Behauptung der Durchführbarkeit einer mit dem Axiom logisch gleichwertigen Regel, d.h. in der Behauptung der Wahrheit des Axioms selbst. Wer einer moralischen Begründung der Logik und der Mathematik das Wort redet, sollte auch bedenken, daß moralisch verwerflich ist, anderen durch nebulose Formulierungen Lösungen vorzugaukeln, die keine sind.

14. Vgl. [12], S.63.
15. Vgl. etwa [12], S.42f.

LITERATUR

[1] Carnap, Rudolf, *Introduction to Semantics*, Cambridge, Massachusetts (1942).

[2] Carnap, Rudolf, *Meaning and Necessity. A Study in Semantics and Modal Logic*, Chicago, Illinois (1956).

[3] Carnap, Rudolf, *Einführung in die symbolische Logik*, Wien (1969).

[4] Essler, Wilhelm K., *Einführung in die Logik*, Stuttgart (1969).

[5] Essler, Wilhelm K., "Über die Interpretation von Wissenschaftssprachen," *Philosophisches Jahrbuch*, 77 (1970), pp. 117-130.

[6] Essler, Wilhelm K., "Ein nichtkonstruktiver Beweis des ersten ε-Theorems," *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 11 (1970), pp. 369-371.

[7] Essler, Wilhelm K., *Induktive Logik—Grundlagen und Voraussetzungen*, Freiburg-München (1970).

[8] Frege, Gottlob, *Kleine Schriften*, hrsg. von I. Angelelli, Darmstadt (1967).

[9] Kripke, Saul A., "Semantical Analysis of Modal Logic I," *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 9 (1963), pp. 67-96.

[10] Kripke, Saul A., "Semantical Considerations on Modal Logic," *Acta philosophica fennica*, 16 (1963), pp. 83-94.

[11] Lewis, Clarence I., and Charles H. Langford, *Symbolic Logic*, New York (1951).

[12] Lorenzen, Paul, *Normative Logic and Ethics*, Mannheim (1969).

[13] Robinson, Abraham, *Introduction to Model Theory and to the Metamathematics of Algebra*, Amsterdam (1965).

[14] Schütte, Kurt, *Vollständige Systeme modaler und intuitionistischer Logik*, Berlin-Heidelberg-New York (1968).

[15] Tarski, Alfred, "Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen," *Studia Philosophica*, 1 (1936), pp. 261-405.

Universität München
München, Germany