MEMOIRS OF THE COLLEGE OF SCIENCE, UNIVESITY OF KYOTO, SERIES, A
Vol. XXVII, Mathematics No. 1, 1925.

Sur la transformation infinitesimale du groupe d'holonomie

Par

Joyo KANITANI

(Reçu, le 14, Novembre, 1951)

1. Dans cet article nous déduisons les équations définissant les transformations infinitesimales du groupe d'holonomie relatif à l'espace $\boldsymbol{R}$ à connexion projective $\Gamma^{\beta}_{\alpha i}\, dx^i$ ($\alpha, \beta=0,\cdots, n$; $i:1\rightarrow n$).

Envisageons une courbe fermée C dans $\boldsymbol{R}$. Prenons, sur cette courbe, les points $x_1^i, x_2^i,\cdots, x_m^i$ se succedant dans l'ordre des indices croissants jusqu'à ce que le point x_m^i coïncide avec x_1^i, quand on parcourit la courbe. Joignons les points x_k^i à un point x_0^i par L_k. Soit T_k la transformation projective associée au cycle $L_k+\text{arc}\ x_k x_{k+1} -L_{k+1}$. Il est facile de voir que la transformation projective T associée à la courbe C est donnée par

$$T=T_m\ T_{m-1}\cdots T_2\ T_1.$$

Ce produit est indépendant du choix des courbe L_k. Ainsi, nous pouvons prendre comme transformation infinitesimale du groupe d'holnomie la transformation projective associée au cycle pacourant la courbe $\xi^i=x_0^i+t(x^i-x_0^i)$ de x_0^i juqu'au point x^i, un arc infinitesimal de x^i jusqu'au point $x^i+\delta x^i$, et enfin la courbe $\xi^i=x_0^i+t(x^i+\delta x^i-x_0^i)$ de $x^i+\delta x^i$ jusqu'au point x_0^i.

Soient $[I, I_1,\cdots,I_n]$, $[A, A_1,\cdots, A_n]$, $[A,' A_1'\cdots,A_n']$, $[I', I_1',\cdots,I_n']$ les repères assoies respectivement au point de départ x_0^i, au point x^i, au point $x^i+\delta x^i$, et au point de retour.

Nous avons d'abord

$$A_\alpha=I_\alpha+\frac{1}{1!}dI_\alpha+\cdots+\frac{1}{m!}d^m I_\alpha+\cdots$$

Or,

$$I_\alpha=\delta^\sigma_\alpha I_\sigma,\ dI_\alpha=\bar{d}\ \delta^\sigma_{(\alpha)}\ I_\sigma,\cdots,\ d^m I_\alpha=\bar{d}^m\delta^\sigma_{(\alpha)}I_\sigma.$$

où on désignee par d la différentielle absolue, et par (α) que la différentiation absolue n'est pas effectuée par rapport à α.

Nous pouvons donc écrire

$$A_\alpha = \gamma_\alpha^\sigma I_\sigma,$$

$$\gamma_\tau^\sigma = \delta_\tau^\sigma + \bar{d}\,\delta_{(\tau)}^\sigma + \frac{1}{2\,!}\bar{d}^2\,\delta_{(\tau)}^\sigma + \cdots + \frac{1}{m!}\bar{d}^m \delta_{(\tau)}^\sigma + \cdots \tag{1.1}$$

2. Le détreminant $|\,A\ A_1 \cdots A_n|$ étant different de zéro, il en est de même pour le déterminant $|\,\gamma_\tau^\sigma|$. Soit z_σ^τ l'inverse de l'élément γ_τ^σ de sorte qu'on a

$$I_\beta = z_\beta^\tau A_\tau.$$

Nous allons maintenant démontrer que z_β^α s'exprime par

$$z_\rho^\tau = \delta_\rho^\tau - \bar{d}\,\delta_{(\rho)}^\tau - \frac{1}{2}(\bar{d}^2\,\delta_{(\rho)}^\tau - 2\bar{d}\delta_{(\lambda)}^\tau \bar{d}\delta_{(\rho)}^\lambda) - \ .\ .\ . \tag{2.1}$$

$$-\frac{1}{m!}\sum_{a=0}^{m-1}\sum_{s_1=1}^{m-a}\sum_{s_2=1}^{m-a-s_1+1}\cdots\sum_{s_a=1}^{m-1-s_1-\cdots-s_a-1}$$

$$(-1)^a\binom{m}{s_1}\binom{m-s_1}{s_2}\cdots\binom{m-s_1-\cdots-s_{a-1}}{s_a}$$

$$\times\bar{d}^{s_1}\delta_{(\lambda_1)}^\tau\,\bar{d}^{s_2}\delta_{(\lambda_2)}^{\lambda_1}\cdots\bar{d}^{s_a}\delta_{(\lambda a)}^{\lambda_{a-1}}\bar{d}^{m-s_1-\cdots-s_a}\delta_{(\rho)}^{\lambda_a} - \ .\ .\ .$$

Pour cela il suffit de prouver que

$$\gamma_\tau^\sigma z_\rho^\tau = \delta_\rho^\sigma.$$

Or, nous avons d'après (1.1) et (2.1)

$$\gamma_\tau^\sigma\ z_\rho^\tau = \delta_\rho^\sigma - \bar{d}\ \delta_{(\rho)}^\sigma + \bar{d}\ \delta_{(\rho)}^\sigma$$

$$-\frac{1}{2!}(\bar{d}^2\,\delta_{(\rho)}^\sigma - 2\bar{d}\delta_{(\lambda)}^\sigma\ \bar{d}\delta_{(\rho)}^\lambda) - \bar{d}\delta_{(\tau)}^\sigma\ \bar{d}\delta_{(\rho)}^\tau + \frac{1}{2}\bar{d}^2\delta_{(\rho)}^\sigma$$

$$-\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$-\frac{1}{m!}\sum_{a=0}^{m-1}\sum_{s_1=1}^{m-a}\cdots\sum_{s_a=1}^{m-1-s_1\cdots-s_{a-1}}$$

$$(-1)^a\binom{m}{s_1}\binom{m-s_1}{s_2}\cdots\binom{m-s_1-\cdots-s_{a-1}}{s_a}$$

$$\times\bar{d}^{s_1}\delta_{(\lambda_1)}^\sigma\bar{d}^{s_2}\delta_{(\lambda_2)}^{\lambda_1}\cdots\bar{d}^{s_a}\delta_{(\lambda_a)}^{\lambda_{a-1}}\bar{d}^{m-s_1-\cdots-s_a}\delta_{(\rho)}^{\lambda_a}$$

$$
-\frac{1}{m!}\sum_{s=1}^{m-1}\sum_{a=0}^{m-1-s}\sum_{s_1=1}^{m-1-s-a}\cdots\sum_{s_a=1}^{m-1-s-s_1-\cdots-s_{a-1}}
$$

$$
(-1)^a\binom{m}{s}\binom{m-s}{s_1}\cdots\binom{m-s-s_1-\cdots-s_{a-1}}{s_a}
$$

$$
\bar{d}^{s}\,\partial^{\sigma}_{(\tau)}\,\bar{d}^{s_1}\,\partial^{\tau}_{(\lambda_1)}\cdots\bar{d}^{s_a}\,\partial^{\lambda_{a-1}}_{(\lambda_a)}\,\bar{d}^{m-s-s_1-\cdots-s_a}\,\partial^{\lambda_a}_{(\rho)}
$$

$$
+\frac{1}{m!}\bar{d}^{m}\,\partial^{\sigma}_{(\rho)}
$$

$$
-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
$$

Dans la deuxième partie des termes du degré m faisons, d'abord, l'échangement d'ordre de la sommation en remarquant que

$$
\sum_{s=1}^{m-1}\sum_{a=0}^{m-1-s}=\sum_{a=0}^{m-2}\sum_{s=1}^{m-1-a},
$$

et puis, écrivons $s_1, s_2,\cdots, s_{a+1}$ à la place de $s, s_1,\cdots, s_a$, et enfin, faisons le changement $a+1=a'$ Il vient alors

$$
+\frac{1}{m!}\sum_{a'=1}^{m-1}\sum_{s_1=1}^{m-a'}\cdots\sum_{s_{a'}=1}^{m-1-s_1-\cdots-s_{a'-1}}
$$

$$
(-1)^{a'}\binom{m}{s_1}\binom{m-s_1}{s_2}\cdots\binom{m-s_1-\cdots-s_{a'-1}}{s_{a'}}
$$

$$
\times\bar{d}^{s_1}\,\partial^{\sigma}_{(\lambda_1)}\,\bar{d}^{s_2}\,\partial^{\lambda_1}_{(\lambda_2)}\cdots\bar{d}^{s_{a'}}\,\partial^{\lambda_{a'-1}}_{(\lambda_{a'})}\,\bar{d}^{m-s_1-\cdots-s_{a'}}\,\partial^{\lambda_{a'}}_{(\rho)}.
$$

Si l'on l'ajoute à la première partie, il ne reste que le terme où $a=0$. C'est rien autre chose que la troisième partie avec le signe contraire. Nous voyons ainsi que la somme des termes du degré $m(\geqq 1)$ est nulle.

3. Nous démontrons, ensuite, la formule

$$
d^m V^\sigma=\sum_{a=0}^{m}\sum_{s_1=1}^{m-a+1}\sum_{s_2=1}^{m-a-s_1+2}\cdots\sum_{s_a=1}^{m-s_1-\cdots-s_{a-1}}
\tag{3·1}
$$

$$
(-1)^a\binom{m}{s_1}\binom{m-s_1}{s_2}\cdots\binom{m-s_1-\cdots-s_{a-1}}{s_a}
$$

$$
\times\bar{d}^{s_1}\,\partial^{\sigma}_{(\lambda_1)}\,\bar{d}^{s_2}\,\partial^{\lambda_1}_{(\lambda_2)}\cdots\bar{d}^{s_a}\,\partial^{\lambda_{a-1}}_{(\lambda_a)}\,\bar{d}^{m-s_1-\cdots-s_a}\,V^{\lambda_a}
$$

Il est fascile de voir que cette équation est vérifiée pour $m=1$. Or, en différentiant cette équation nous obtenons

$$
d^{m+1}V^\sigma=\bar{d}^{m+1}V^\sigma-\bar{d}\,\partial^{\sigma}_{(\tau)}\,\bar{d}^{m}V^\tau
$$

$$+\sum_{a=1}^{m}\sum_{s_1=1}^{m-a+1}\sum_{s_2=1}^{m-a-s_1+2}\cdots\sum_{s_a=1}^{m-s_1-\cdots-s_{a-1}}$$

$$(-1)^a\binom{m}{s_1}\binom{m-s_1}{s_2}\cdots\binom{m-s_1-\cdots-s_{a-1}}{s_a}$$

$$\times\Big\{(\bar{d}^{s_1+1}\delta^{\sigma}_{(\lambda_1)}-\bar{d}\,\delta^{\sigma}_{(\tau)}\bar{d}^{s_1}\delta^{\tau}_{(\lambda_1)})\bar{d}^{s_2}\delta^{\lambda_1}_{(\lambda_2)}\,\bar{d}^{s_3}\delta^{\lambda_2}_{(\lambda_3)}\cdots\cdots$$

$$+\bar{d}^{s_1}\delta^{\sigma}_{(\lambda_1)}(\bar{d}^{s_2+1}\delta^{\lambda_1}_{(\lambda_2)}-\bar{d}\delta^{\lambda_1}_{(\tau)}\,\bar{d}^{s_2}\delta^{\tau}_{(\lambda_2)})\bar{d}^{s_3}\delta^{\lambda_2}_{(\lambda_3)}\cdots\cdots$$

$$+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

$$+\bar{d}^{s_1}\delta^{\sigma}_{(\lambda_1)}\cdots\bar{d}^{s_{a-1}}\delta^{\lambda_{a-2}}_{(\lambda_{a-1})}(\bar{d}^{s_a+1}\delta^{\lambda_{a-1}}_{\lambda_a}-\bar{d}\,\delta^{\lambda_{a-1}}_{\tau}\delta^{\tau}_{(\lambda_a)})\bar{d}^{m-s_1-\cdots-s_a}V^{\lambda_a}$$

$$+\bar{d}^{s_1}\delta^{\sigma}_{(\lambda_1)}\cdots\bar{d}^{s_a}\delta^{\lambda_{a-1}}_{(\lambda_a}\ (\bar{d}^{m+1-s_1-\cdots-s_a}V^{\lambda_a}-\bar{d}\,\delta^{\lambda_a}_{(\tau)}\bar{d}^{m-s_1-\cdots-s_a}V^{\tau}\Big\}$$

$$=\bar{d}^{m+1}V^{\sigma}$$

$$+\sum_{a=1}^{m}\sum_{s_1=2}^{m-a+2}\sum_{s_2=1}^{m-a-s_1+3}\cdots\sum_{s_a=1}^{m+1-s_1-\cdots-s_{a-1}}$$

$$(-1)^a\binom{m}{s_1-1}\binom{m+1-s_1}{s_2}\cdots\binom{m+1-s_1-\cdots-s_{a-1}}{s_a}$$

$$\times\bar{d}^{s_1}\delta^{\sigma}_{(\lambda_1)}\,\bar{d}^{s_2}\delta^{\lambda_1}_{(\lambda_2)}\cdots\bar{d}^{m+1-s_1-\cdots-s_a}V^{\lambda_a}$$

$$+\sum_{a=1}^{m}\sum_{s_1=1}^{m-a+1}\sum_{s_2=2}^{m-a-s_1+3}\cdots\sum_{s_a=1}^{m+1-s_1-\cdots-s_{a-1}}$$

$$(-1)^a\binom{m}{s_1}\binom{m-s_1}{s_2-1}\binom{m+1-s_1-s_2}{s_3}\cdots\binom{m+1-s_1-\cdots-s_{a-1}}{s_a}$$

$$\times\bar{d}^{s_1}\delta^{\sigma}_{(\lambda_1)}\bar{d}^{s_2}\delta^{\lambda_1}_{(\lambda_2)}\cdots\bar{d}^{m+1-s_1-\cdots-s_a}V^{\lambda_a}$$

$$+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

$$+\sum_{a=1}^{m}\sum_{s_1=1}^{m-a+1}\cdots\sum_{s_{a-1}=1}^{m-1-s_1\cdots-s_{a-2}}\sum_{s_a=2}^{m+1-s_1-\cdots-s_{a-1}}$$

$$(-1)^a\binom{m}{s_1}\cdots\binom{m-s_1-\cdots-s_{a-2}}{s_{a-1}}\binom{m+1-s_1-\cdots-s_{a-1}}{s_a-1}$$

$$\times\bar{d}^{s_1}\delta^{\sigma}_{(\lambda_1)}\,\bar{d}^{s_2}\delta^{\lambda_1}_{(\lambda_2)}\cdots\bar{d}^{m+1-s_1-\cdots-s_a}V^{\lambda_a}$$

$$+\sum_{a=1}^{m}\sum_{s_1=1}^{m-a+1}\cdots\sum_{s_a=1}^{m-s_1-\cdots-s_{a-1}}$$

$$(-1)^a\binom{m}{s_1}\cdots\cdots\binom{m-s_1-\cdots-s_{a-1}}{s_a}$$

$$\times\bar{d}^{s_1}\delta^{\sigma}_{(\lambda_1)}\bar{d}^{s_2}\delta^{\lambda_1}_{(\lambda_2)}\cdots\bar{d}^{s_a}\delta^{\lambda_{a-1}}_{(\lambda_a)}\bar{d}^{m+1-s_1-\cdots\cdots-s_a}V^{\lambda_a}$$

$$-\sum_{a=0}^{m}\sum_{s_1=1}^{m-a+1}\sum_{s_2=1}^{m-a-s_1+2}\cdots\cdots\sum_{s_a=1}^{m-s_1-\cdots\cdots-s_{a-1}}$$

$$(-1)^a\binom{m}{s_1}\binom{m-s_1}{s_2}\cdots\binom{m-s_1-\cdots-s_{a-1}}{s_a}$$

$$\times\Big\{\bar{d}\delta^{\sigma}_{(\Upsilon)}\bar{d}^{s_1}\delta^{\Upsilon}_{(\lambda_1)}\cdots\bar{d}^{s_a}\delta^{\lambda_{a-1}}_{(\lambda_a)}\bar{d}^{m-s_1\cdots\cdots-s_a}V^{\lambda_a}$$

$$+\bar{d}^{s_1}\delta^{\sigma}_{(\lambda_1)}\bar{d}\delta^{\lambda_1}_{(\Upsilon)}\bar{d}^{s_2}\delta^{\Upsilon}_{(\lambda_2)}\cdots\bar{d}^{s_a}\delta^{\lambda_{a-1}}_{(\lambda_a)}\bar{d}^{m-s_1\cdots\cdots s_a}V^{\lambda_a}$$

$$+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$+\bar{d}^{s_1}\delta^{\sigma}_{(\lambda_1)}\cdots\bar{d}^{s_a}\delta^{\lambda_{a-1}}_{(\Upsilon)}\bar{d}\delta^{\Upsilon}_{(\lambda_a)}\bar{d}^{m-s_1\cdots\cdots-s_a}V^{\lambda_a}\Big\}$$

$$=\bar{d}^{m+1}V^{\sigma}$$

$$+\sum_{a=1}^{m}\sum_{s_1=1}^{m-a+2}\sum_{s_2=1}^{m-a-s_1+3}\cdots\sum_{s_a=1}^{m+a-s_1-\cdots\cdots-s_{a-1}}$$

$$(-1)^a\Big\{\binom{m}{s_1-1}\binom{m+1-s_1}{s_2}\cdots\binom{m+1-s_1-\cdots-s_{a-1}}{s_a}$$

$$+\binom{m}{s_1}\binom{m-s_1}{s_2-1}\binom{m+1-s_1-\cdots s_2}{s_3}\cdots\binom{m+1-s_1-\cdots-s_{a-1}}{s_a}$$

$$+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$+\binom{m}{s_1}\cdots\binom{m-s_1-\cdots-s_{a-2}}{s_{a-1}}\binom{m+1-s_1-\cdots-s_{a-1}}{s_a-1}$$

$$+\binom{m}{s_1}\cdots\binom{m-s_1-\cdots-s_{a-1}}{s_a}\Big\}$$

$$\times\bar{d}^{s_1}\delta^{\sigma}_{(\lambda_1)}\bar{d}^{s_2}\delta^{\lambda_1}_{(\lambda_2)}\cdots\bar{d}^{s_a}\delta^{\lambda_{a-1}}_{(\lambda_a)}\bar{d}^{m+1-s_1-\cdots\cdots-s_a}V^{\lambda_a}$$

$$-\sum_{a=1}^{m}\sum_{s_1=1}^{m-a+2}\sum_{s_2=1}^{m-a-s_1+3}\cdots\sum_{s_{a-1}}^{m-s_1-\cdots-s_{a-2}}$$

$$(-1)^a\binom{m}{s_1}\binom{m-s_1}{s_2}\cdots\binom{m-s_1-\cdots-s_{a-2}}{s_{a-1}}$$

$$\times\Big\{\bar{d}\delta^{\sigma}_{(\Upsilon)}\bar{d}^{s_1}\delta^{\Upsilon}_{(\lambda_1)}\cdots\bar{d}^{s_{a-1}}\delta^{\lambda_{a-2}}_{(\lambda_{a-1})}\bar{d}^{m-s_1-\cdots\cdots-s_{a-1}}V^{\lambda_{a-1}}$$

$$+\bar{d}^{s_1}\delta^{\sigma}_{(\lambda_1)}\bar{d}\delta^{\lambda_1}_{(\Upsilon)}\bar{d}^{s_2}\delta^{\Upsilon}_{(\lambda_2)}\cdots\bar{d}^{s_{a-1}}\delta^{\lambda_{a-2}}_{(\lambda_{a-1})}\bar{d}^{m-s_1-\cdots-s_{a-1}}V^{\lambda_{a-1}}$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\bar{d}^{s_1}\partial^{\sigma}_{(\lambda_1)}\cdots\bar{d}^{s_{a-1}}\partial^{\lambda_{a-2}}_{(\lambda_{a-1})}\bar{d}\partial^{\lambda_{a-1}}_{(\Upsilon)}\bar{d}^{m-s_1-\cdots-s_{a-1}}V^{\Upsilon}\Big\}$$

$$+\sum_{a=1}^{m+1}\sum_{s_1=1}^{m-a+2}\cdots\sum_{s_{a-1}}^{m-s_1\cdots-s_{a-2}}$$

$$(-1)^a\binom{m}{s}\binom{m-s_1}{s_2}\cdots\binom{m-s_1\cdots-s_{a-2}}{s_{a-1}}$$

$$\times\Big\{\bar{d}\,\partial^{\sigma}_{(\Upsilon)}\bar{d}^{s_1}\partial^{\Upsilon}_{(\sigma_1)}\cdots\bar{d}^{s_{a-1}}\partial^{\lambda_{a-2}}_{(\lambda_{a-1})}\bar{d}^{m-s_1\cdots-s_{a-1}}V^{\lambda_{a-1}}$$

$$+\bar{d}^{s_1}\partial^{\sigma}_{(\lambda_1)}\bar{d}\,\partial^{\lambda}_{(\Upsilon)}\bar{d}^{s_2}\partial^{\Upsilon}_{(\lambda_2)}\cdots\bar{d}^{s_{a-1}}\partial^{\lambda_{a-2}}_{(\lambda_{a-1})}\bar{d}^{m-s_1\cdots-s_{a-1}}V^{\lambda_{a-1}}$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\bar{d}^{s_1}\partial^{\sigma}_{(\lambda_1)}\cdots\bar{d}^{s_{a-1}}\partial^{\lambda_{a-2}}_{(\lambda_{a-1})}\bar{d}\,\partial^{\lambda_{a-1}}_{(\Upsilon)}\bar{d}^{m-s_1-\cdots-s_{a-1}}V^{\Upsilon}\Big\}$$

$$=\sum_{a=0}^{m+1}\sum_{s_1=1}^{m-a+2}\sum_{s_2=1}^{m-a+3}\cdots\sum_{s_a=1}^{m+1-s_1-\cdots-s_{a-1}}$$

$$(-1)^a\binom{m+1}{s_1}\binom{m+1-s_1}{s_2}\cdots\binom{m+1-s_1-\cdots-s_{a-1}}{s_a}$$

$$\times\bar{d}^{s_1}\partial^{\sigma}_{(\lambda_1)}\bar{d}^{s_2}\partial^{\lambda_1}_{(\lambda_2)}\cdots\bar{d}^{s_a}\partial^{\lambda_{a-1}}_{(\lambda_a)}\bar{d}^{m+1-s_1\cdots-s_a}V^{\lambda_a}.$$

Nous voyons ainsi que la formule (3.1) est vérifiée pour tout nombre entier positif m.

4. Nous avons

$$A'_{\alpha}=(\delta^{\sigma}_{\alpha}+(\bar{\delta}\;\partial^{\sigma}_{(\alpha)})_{x^i})A_{\sigma}$$

$$=\Big[\partial^{\sigma}_{\alpha}+\partial x^j(D_j\partial^{\sigma}_{(\alpha)}+dD_j\partial^{\sigma}_{(\alpha)}\cdots+\frac{1}{m!}d^mD_j\partial^{\sigma}_{(\alpha)}+\cdots)\Big]$$

$$\times\Big[\partial^{\rho}_{\sigma}+\bar{d}\,\partial^{\rho}_{(\sigma)}+\frac{1}{2}\bar{d}^2\partial^{\rho}_{(\sigma)}+\cdots\cdots\frac{1}{m!}\bar{d}^m\partial^{\rho}_{(\sigma)}+\cdots\Big]I_{\rho}$$

$$=\Big[\gamma^{\rho}_{\sigma}+\partial x^j\{D_j\,\partial^{\sigma}_{(\alpha)}+\cdots$$

$$+\frac{1}{m!}\Big(d^mD_j\partial^{\sigma}_{(\alpha)}+\sum_{s=1}^{m}\binom{m}{s}d\,\bar{\partial}^{\rho}_{(\sigma)}{}^{s}d^{m-s}D_j\partial^{\sigma}_{(\alpha)}\Big)$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\Big\}\Big]I_{\rho}$$

Or, il vient grace à (3.1)

$$d^m(D_j\delta^\rho_{(\alpha)})+\sum_{s=1}^m\binom{m}{s}\bar{d}^s\delta^\rho_{(\sigma)}\,d^{m-s}D_j\delta^\sigma_{(\alpha)}$$

$$=\bar{d}^m(D_{(j)}\delta^\rho_{(\alpha)}+\sum_{a=1}^m\sum_{s_1=1}^{m-a+1}\sum_{s_2=1}^{m-a-s_1+2}\cdots\sum_{s_a=1}^{m-s_1-\cdots-s_{a-1}}$$

$$(-1)^a\binom{m}{s_1}\binom{m-s_1}{s_2}\cdots\binom{m-s_1-\cdots-s_{a-1}}{s_a}$$

$$\bar{d}^{s_1}\delta^\rho_{\lambda_1}\cdots\bar{d}^{s_a}\delta^{\lambda_{a-1}}_{(\lambda_a)}\bar{d}^{m-s_1-\cdots-s_a}D_{(j)}\delta^{\lambda_a}_{(\alpha)}$$

$$+\sum_{s=1}^m\sum_{a=0}^{m-s}\sum_{s_1=1}^{m-s-a+1}\cdots\sum_{s_a=1}^{m-s-s_1-\cdots-s_{a-1}}$$

$$(-1)^a\binom{m}{s}\binom{m-s}{s_1}\cdots\binom{m-s-s_1-\cdots-s_{a-1}}{s_a}$$

$$\bar{d}^s\delta^\rho_{(\sigma)}\bar{d}^{s_1}\delta^\sigma_{(\lambda_a)}\cdots\bar{d}^{s_a}\delta^{\lambda_{a-1}}_{(\lambda_a)}\bar{d}^{m-s-s_1-\cdots-s_a}D_{(j)}\delta^{\lambda_a}_{(\alpha)}.$$

De la même manière que n°2, nous pouvons démontrer que, dans le dernier membre, la troisième partie est égale à la deuxième partie avec la signe conversée. Nous obtenons ainsi

$$A'_\alpha=\left[\gamma^\rho_\alpha+\delta x^j(D_j\delta^\rho_{(\alpha)}+\bar{d}\,D_{(j)}\delta^\rho_{(\alpha)}+\cdots+\frac{1}{m!}\bar{d}^m D_{(j)}\delta^\rho_{(\alpha)}+\cdots\right]I_\rho. \tag{4.1}$$

5. Lorsque la differentiation est éffectuée le long de la courbe $\xi^i=x^i_0+t(x^i+\delta x^i-x^i_0)$, nous avons

$$\bar{d}^m\delta^\sigma_{(\alpha)}=D_{i_m}D_{(i_{m-1})}\cdots D_{(i_1)}\delta^\sigma_{(\alpha)}(x^{i_1}+\delta x^{i_1}-x^{i_1}_0)\cdots(x^{i_m}+\delta x^{i_m}-x^{i_m}_0).$$

Il vient donc

$$I'_\alpha=A'_\sigma\Big[\delta^\sigma_\alpha-D_i\delta^\sigma_{(\alpha)}(x^i+\delta x^i-x^i_0)$$

$$-\frac{1}{2}(D_jD_{(i)}\delta^\sigma_{(\alpha)}-2D_j\delta^\sigma_{(\lambda)}D_i\delta^\lambda_{(\alpha)})(x^i+\delta x^i-x^i_0)(x^j+\delta x^j-x^j_0)$$

$$-\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

$$-\frac{1}{m!}\sum_{a=0}^{m-1}\sum_{s_1=1}^{m-a}\sum_{s_2=1}^{m-a-s_1+1}\cdots\sum_{s_a=1}^{m-1-s_1-\cdots-s_{a-1}}$$

$$(-1)^a\binom{m}{s_1}\binom{m-s_1}{s_2}\cdots\binom{m-s_1-\cdots-s_{a-1}}{s_a}$$

$$\times D_{i_{s_1}}\cdots D_{(i_1)}\delta^{\sigma}_{(\lambda_1)}\; D_{i_{s_1+s_2}}\cdots D_{i_{s_1+1}}\,\delta^{\lambda_1}_{(\lambda_2)}$$

$$\times \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

$$\times D_{i_m}\cdots D_{(i_{s_1+\cdots+s_a}+1)}\delta^{\lambda_a}_{\rho}$$

$$\times (x^{i_1}+\delta x^{i_1}-x_0^{i_1})(x^{i_2}+\delta x^{i_2}-x_0^{i_2})\cdots(x^{i_m}+\delta x^{i_m}-x_0^{i_m})$$

$$- \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

$$=A_\sigma'\Big[z^{\sigma}_{\alpha}-\delta x^j\Big\{D_j\delta^{\sigma}_{(\alpha)}+\frac{1}{2}(\bar d\, D_{(j)}\delta^{\sigma}_{(\alpha)}-2\bar d\,\delta^{\sigma}_{(\lambda)}\,D_j\delta^{\lambda}_{(\alpha)}$$

$$+\frac{1}{2}(D_j\bar d\,\delta^{\sigma}_{(\alpha)}-2D_j\delta^{\sigma}_{(\lambda)}\bar d\delta^{\lambda}_{(\alpha)})$$

$$+\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

$$+\frac{1}{m!}\sum_{a=0}^{m-1}\sum_{s_1=1}^{m-a}\cdots\sum_{s_a=1}^{m-a-s-\cdots-s_{a-1}}$$

$$(-1)^a\binom{m}{s_1}\binom{m-s_1}{s_2}\cdots\binom{m-s_1-\cdots-s_{a-1}}{s_a}$$

$$\times\sum\bar d^{\,s_1}\delta^{\sigma}_{(\lambda_1)}\cdots\hat{\bar d}^{\,s_k}\delta^{\lambda_{k-1}}_{(\lambda_k)}\cdots\bar d^{\,m-s_1-\cdots-s_a}\delta^{\lambda_a}_{(\alpha)}$$

$$+\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\Big\}\Big]$$

où

$$\hat{\bar d}^{\,s_k}\delta^{\lambda_{k-1}}_{(\lambda_k)}=D_j\bar d^{\,s_k-1}\delta^{\lambda_{k-1}}_{(\lambda_k)}+\bar dD_j\bar d^{\,s_k-2}\delta^{\lambda_{k-1}}_{(\lambda_k)}+\cdots+\bar d^{\,s_k-1}D_j\delta^{\lambda_{k-1}}_{(\lambda_k)}$$

Portons dans cette équation la valeur de A'_σ donnée par (4.1) en remarquant que

$$z^{\sigma}_{\alpha}\Big(D_j\delta^{\rho}_{(\sigma)}+\bar dD_{(j)}\delta^{\rho}_{(\sigma)}+\cdots+\frac{1}{(m-1)!}\bar d^{\,m-1}D_{(j)}\delta^{\rho}_{(\sigma)}+\cdots\Big)$$

$$=D_j\delta^{\rho}_{(\alpha)}-D_j\delta^{\rho}_{(\sigma)}\bar d\,\delta^{\sigma}_{(\alpha)}+\bar d\,D_{(j)}\delta^{\rho}_{(\alpha)}-\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{(m-1)!}\Big\{-\sum_{s=0}^{m-2}\sum_{a=0}^{m-2-s}\sum_{s_1=1}^{m-1-a-s}\cdots\sum_{s_a=1}^{m-2-s-s_1-\cdots-s_{a-1}}$$

$$(-1)^a\binom{m-1}{s}\binom{m-1-s}{s_1}\cdots\binom{m-1-s-s_1-\cdots-s_{a-1}}{s_a}$$

$$\bar d^{\,s}D_{(j)}\delta^{\rho}_{(\sigma)}\bar d^{\,s_1}\delta^{\sigma}_{(\lambda_1)}\cdots\bar d^{\,m-1-s-s_1-\cdots-s_a}\delta^{\lambda_a}_{(\alpha)}$$

$$+\bar{d}^{m-1} D_{(j)}\delta^{\rho}_{(\alpha)}$$

$$= D_j\delta^{\rho}_{(\alpha)} - D_j\delta^{\rho}_{(\alpha)}\,\bar{d}\delta^{\sigma}_{(\alpha)} + \bar{d}\,D_{(j)}\delta^{\rho}_{(\sigma)} - \cdots$$

$$+\frac{1}{(m-1)!}\sum_{a=1}^{m-1}\sum_{s_1=}^{m-a}\sum_{s_2=1}^{m-a-s_1+1}\cdots\sum_{s_a=1}^{m-1-s_1-\cdots-s_{a-1}}$$

$$(-1)^a\binom{m-1}{s_1-1}\binom{m-s_1}{s_2}\cdots\binom{m-s_1\cdots-s_{a-1}}{s_a}$$

$$\bar{d}^{s_1-1}D_{(j)}\delta^{\rho}_{(\lambda_1)}\bar{d}^{s_2}\delta^{\lambda_1}_{(\lambda_2)}\cdots\bar{d}^{s_a}\delta^{\lambda_{a-1}}_{(\lambda_a)}\bar{d}^{m-s_1-\cdots-s_a}\delta^{\lambda_a}_{(\alpha)}$$

$$+\frac{1}{(m-1)!}\bar{d}^{m-1}D_j\delta^{\rho}_{(\alpha)}$$

$$+\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

et que

$$\gamma^{\rho}_{\sigma}\Big(D_{(j)}\delta^{\sigma}_{(\alpha)}+\frac{1}{2}\left(\bar{d}D_j\delta^{\sigma}_{(\alpha)}-2\bar{d}\,\delta^{\sigma}_{(\lambda)}D_j\delta^{\lambda}_{(\alpha)}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(D_{(j)}\bar{d}\delta^{\sigma}_{(\alpha)}-2D_{(j)}\delta^{\sigma}_{(\lambda)}\bar{d}\delta^{\sigma}_{(\alpha)}\right)$$

$$+\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\Big)$$

$$=D_j\delta^{\rho}_{(\alpha)}+\frac{1}{2}\left(\bar{d}D_{(j)}\,\delta^{\rho}_{(\alpha)}-2\bar{d}\,\delta^{\rho}_{(\lambda)}D_{(j)}\,\delta^{\lambda}_{(\alpha)}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(D_j\bar{d}\,\delta^{\rho}_{(\alpha)}-2D_j\delta^{\rho}_{(\lambda)}\bar{d}\delta^{\lambda}_{(\alpha)}\right)+\bar{d}\delta^{\rho}_{(\sigma)}D_j\delta^{\sigma}_{(\alpha)}$$

$$+\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{m!}\sum_{a=0}^{m-1}\sum_{s_1=1}^{m-a}\sum_{s_2=1}^{m-a-s_1+1}\cdots\sum_{s_a=1}^{m-a-s_1-\cdots-s_{a-1}}$$

$$(-1)^a\binom{m}{s_1}\binom{m-s_1}{s_2}\cdots\binom{m-s_1-\cdots-s_{a-1}}{s_a}$$

$$\times\sum\bar{d}^{s_1}\delta^{\rho}_{(\lambda_1)}\cdots\hat{\bar{d}}^{s_k}\delta^{\lambda_{k-1}}_{(\lambda_k)}\cdots\bar{d}^{m-s_1-\cdots-s_a}\delta^{\lambda_a}_{(\alpha)}$$

$$+\frac{1}{m!}\sum_{s=1}^{m-1}\sum_{a=0}^{m-1-s}\sum_{s_1=1}^{m-a-s}\cdots\sum_{s_a=1}^{m-s-s_1-\cdots-s_{a-1}}$$

$$(-1)^a\binom{m}{s}\binom{m-s}{s_1}\cdots\binom{m-s-s_1-\cdots-s_{a-1}}{s_a}$$

$$\times \bar{d}^{s} \delta^{\rho}_{\sigma}\sum \bar{d}^{s_1} \delta^{\sigma}_{\lambda_1} \cdots \hat{\bar{d}}^{s_k} \delta^{\lambda_{k-1}}_{(\lambda_k)} \cdots \bar{d}^{m-s-s_1-\cdots-s_a} \delta^{\lambda_a}_{(a)}$$

$$= D_j \delta^{\rho}_{(\alpha)} + \frac{1}{2}\,(D_j \bar{d}\, \delta^{\rho}_{(\alpha)} + \bar{d} D_{(j)} \delta^{\rho}_{(\alpha)} - 2 D_j \delta^{\rho}_{(\lambda)} \bar{d}\, \delta^{\lambda}_{(\alpha)}) + \cdots$$

$$+ \frac{1}{m!} \sum_{a=1}^{m-1} \sum_{s_1=1}^{m-a} \sum_{s_2=1}^{m-a-s_1+1} \cdots \sum_{s_a=1}^{m-s_1-\cdots-s_{a-1}}$$

$$(-1)^a \binom{m}{s_1}\binom{m-s_1}{s_2}\cdots\binom{m-s_1\cdots-s_{a-1}}{s_a}$$

$$\times \hat{\bar{d}}^{s_1} \delta^{\rho}_{(\lambda_1)} \bar{d}^{s_2} \delta^{\lambda_1}_{(\lambda_2)} \cdots \bar{d}^{m-s_1\cdots-s_a} \delta^{\lambda_a}_{(\alpha)}$$

$$+ \frac{1}{m!} \hat{\bar{d}}\, \delta^{\rho}_{(\alpha)}$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

Il viendra

$$I_\alpha' = I_\rho \Big[\delta^{\rho}_{\alpha} + \frac{1}{2} \delta x^j (\bar{d} D_{(j)} - D_j \bar{d}) \delta^{\rho}_{(\alpha)} + \cdots$$

$$+ \frac{1}{m!} \delta x^j \Big\{ m \bar{d}^{m-1} D_{(j)}\, \delta^{\rho}_{(\alpha)} - \hat{\bar{d}}^{m} \delta^{\rho}_{(\alpha)}$$

$$+ \sum_{a=1}^{m-1} \sum_{s_1=1}^{m-a} \sum_{s_2=1}^{m-a-s_1+1} \cdots \sum_{s_a=1}^{m-s_1-\cdots-s_{a-1}}$$

$$(-1)^a \binom{m}{s_1}\binom{m-s_1}{s_2}\cdots\binom{m-s_1-\cdots-s_{a-1}}{s_a}$$

$$\times (s_1 \bar{d}^{s_1-1} D_{(j)} \delta^{\rho}_{(\lambda_1)} - \hat{\bar{d}}^{s_1} \delta^{\rho}_{(\lambda_1)})$$

$$\times \bar{d}^{s_2} \delta^{\lambda_1}_{(\lambda_2)} \cdots \bar{d}^{s_a} \delta^{\lambda_{a-1}}_{(\lambda_a)} \bar{d}^{m-s_1\cdots-s_a} \delta^{\lambda_a}_{(\alpha)} \Big\}$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots \Big]$$

Or, nons avons

$$(D_j D_{(i_p)} \cdots D_{(i_1)} - D_{i_p} D_{(i_{p-1})} \cdots D_{(i_1)} D_j) \delta^{\rho}_{(\lambda)}$$

$$= R^{\rho}_{\tau(i_p)(j)} D_{i_{p-1}} \cdots D_{(i_1)}\, \delta^{\tau}_{(\lambda)}$$

$$+ D_{i_p} (R^{\rho}_{\tau(i_{p-1})(j)} D_{(i_{p-2})} \cdots D_{i_1} \delta^{\tau}_{\lambda})$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+D_{i_p}\cdots D_{(i_2)}\,(R^{\rho}_{\tau(i_1)(j)}\,\delta^{\tau}_{\lambda})$$

et, par suite,

$$s\bar{d}^{s-1}D_{(j)}\,\delta^{\rho}_{(\lambda)}-\hat{\bar{d}}^{s}\,\delta^{\rho}_{(\lambda)}$$

$$=\sum_{p=0}^{s-2}(s-1-p)\bar{d}^{s-2-p}(R^{\rho}_{\tau(j)(i)}\bar{d}^{p}\,\delta^{\tau}_{(\lambda)})\,(x^i-x^i_0)$$

$$=\sum_{p=0}^{s-2}\sum_{q=0}^{s-2-p}\frac{(s-1-p)!}{q!(s-2-p-q)!}\bar{d}^{q}R^{\rho}_{\tau(j)(i)}\,\bar{d}^{s-2-q}\,\delta^{\tau}_{(\lambda)}(x^i-x^i_0)$$

$$=\sum_{q=0}^{s-2}\bar{d}^{q}R^{\rho}_{\tau(j)(i)}\,\bar{d}^{s-2-q}\,\delta^{\tau}_{(\lambda)}\,(x^i-x^i_0)\sum_{p=0}^{s-2-q}\frac{(s-1-p)!}{q!(s-1-p-q)!}$$

$$=\sum_{q=0}^{s-2}\frac{(q+1)s!}{(q+2)!\,(s-2-q)!}\bar{d}^{q}R^{\rho}_{\tau(j)(i)}\,\bar{d}^{s-2-q}\,\delta^{\tau}_{(\lambda)}(x^i-x^i_0)$$

au moyen de l'identité

$$\sum_{l=0}^{h}\frac{(a+l)!}{l!\;a!}=\frac{(a+h+1)!}{h!\;(a+1)!}.$$

Portant cette valeur nous obtenons

$$\sum_{a=1}^{m-1}\sum_{s_1=1}^{m-a}\sum_{s_2=1}^{m-a-s_1+1}\cdots\sum_{s_a=1}^{m-s_1-\cdots-s_{a-1}}$$

$$(-1)^a\binom{m}{s_1}\binom{m-s_1}{s_2}\cdots\binom{m-s_1-\cdots-s_{a-1}}{s_a}$$

$$\times\,(s_1\bar{d}^{s_1-1}D_{(j)}\,\delta^{\rho}_{(\lambda_1)}-\hat{\bar{d}}^{s_1}\,\delta^{\rho}_{(\lambda_1)})$$

$$=\sum_{a=1}^{m-2}\sum_{s_1=2}^{m-a}\sum_{s_2=1}^{m-a-s_1+1}\cdots\sum_{s_a=1}^{m-s_1-\cdots-s_{a-1}}\sum_{q=0}^{s_1-2}$$

$$(-1)^a\frac{(q+1)m!}{(q+2)!(s_1-2-q)!\,s_2!\cdots s_a!\,(m-s_1-\cdots-s_a)!}$$

$$\times\bar{d}^{q}R^{\rho}_{\tau(j)(i)}\,\bar{d}^{s_1-2-q}\,\delta^{\tau}_{(\lambda_1)}\,\bar{d}^{s_2}\,\delta^{\lambda_1}_{(\lambda_2)}\cdots\bar{d}^{m-s_1-\cdots-s_a}\,\delta^{\lambda_a}_{(a)}\,(x^i-x^i_0)$$

$$=\sum_{q=0}^{m-3}\sum_{a=1}^{m-2-q}\sum_{s_1=q+2}^{m-a}\sum_{s_2=1}^{m-a-s_1-1}\cdots\sum_{s_a=1}^{m-s_1-\cdots-s_{a-1}}\;''$$

$$=\sum_{q=0}^{m-3}\sum_{a=1}^{m-2-q}\sum_{s_1=0}^{m-a-q-2}\sum_{s_2=1}^{m-a-q-s_1-1}\cdots\sum_{s_a=1}^{m-q-2-s_1-\cdots-s_{a-1}}$$

$$\Big[(-1)^a\frac{(q+1)m!}{(q+2)!s_1!s_2!\cdots s_a!\;(m-q-2-s_1-\cdots-s_a)!}$$

$$\left.\times \bar{d}^{\,q} R^{\rho}_{\tau(j)(i)} \bar{d}^{\,s_1} \delta^{\tau}_{(\lambda_1)} \cdots \bar{d}^{\,s_a} \delta^{\lambda_{a-1}}_{(\lambda_a)} \bar{d}^{\,m-q-2-s_1-\cdots-s_a} \delta^{\lambda_a}_{(\alpha)} (x^i - x^i_0)\right]$$

$$= \sum_{q=0}^{m-3} \sum_{a=1}^{m-2-q} \sum_{s_2=1}^{m-a-q-1} \cdots \sum_{s_a=1}^{m-q-2-s_2-\cdots-s_{a-1}}$$

$$(-1)^a \frac{(q+1)m!}{(q+2)!\,s_2!\cdots s_a!(m-q-2-s_2-\cdots-s_a)!}$$

$$\times \bar{d}^{\,q} R^{\rho}_{\tau(j)(i)} \bar{d}^{\,s_2} \delta^{\tau}_{(\lambda_2)} \cdots \bar{d}^{\,s_a} \delta^{\lambda_{a-1}}_{(\lambda_a)} \bar{d}^{\,m-q-2-s_2-\cdots-s_a} \delta^{\lambda_a}_{(\alpha)} (x^i - x^i_0)$$

$$+ \sum_{q=0}^{m-4} \sum_{a=1}^{m-3-q} \sum_{s_1=1}^{m-a-q-2} \cdots \sum_{s_a=1}^{m-q-2-s_1-\cdots-s_{a-1}} [\,,,\,]$$

$$= -\sum_{q=0}^{m-3} \sum_{a=0}^{m-3-q} \sum_{s_1=1}^{m-a-q-2} \cdots \sum_{s_a=1}^{m-q-2-s_1\cdots-s_{a-1}}$$

$$(-1)^a \frac{(q+1)m!}{(q+2)!s_1!\cdots s_a!\,(m-2-q-s_1-\cdots-s_a)!}$$

$$\times \bar{d} R^{\rho}_{\tau(j)(i)} \bar{d}^{\,s_1} \delta^{\tau}_{\lambda_1} \cdots \bar{d}^{\,m-q-2-s_1-\cdots-s_a} \delta^{\lambda_a}_{(\alpha)} (x^i - x^i_0)$$

$$+ \sum_{q=0}^{m-4} \sum_{a=1}^{m-3-q} \sum_{s_1=1}^{m-a-q-2} \cdots \sum_{s_a=1}^{m-q-2-s_1\cdots-s_{a-1}} [\,,,\,]$$

$$= -\sum_{q=0}^{m-3} \frac{(q+1)m!}{(q+2)!(m-q-2)!} \bar{d}^{\,q} R^{\rho}_{\tau(j)(i)} \bar{d}^{\,m-q-2} \delta^{\tau}_{(\alpha)} (x^i - x^i_0).$$

Si l'on l'ajoute à

$$m\bar{d}^{\,m-1} D_{(j)} \delta^{\rho}_{(\alpha)} - \hat{d}^{\,m} \delta^{\rho}_{(\alpha)}$$

$$= \sum_{q=0}^{m-2} \frac{(q+1)!\,m!}{(q+2)\,(m-2-q)!} \bar{d}^{\,q} R^{\rho}_{\tau(j)(i)} \bar{d}^{\,m-2-q} \delta^{\tau}_{(\alpha)} (x^i - x^i_0),$$

il vient

$$(m-1)\bar{d}^{\,m-2} R^{\rho}_{\alpha(j)(i)} (x^i - x^i_0).$$

Nous avons ainsi

$$I'_\alpha = (\delta^{\rho}_{\alpha} + (x^i - x^i_0)\,\partial x_j\, \chi^{\rho}_{\alpha j i})\, I_\rho,$$

$$\chi^{\beta}_{\alpha i j} = \frac{1}{2} R^{\beta}_{\alpha i j} + \cdots + \frac{m-1}{m!} D_{i_{m-2}} D_{(i_{m-3})} \cdots D_{(i_1)} R^{\beta}_{\alpha(i)(j)}$$

$$\times (x^{i_1} - x^{i_1}_0) \cdots (x^{i_{m-2}} - x^{i_{m-2}}_0)$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

6. Désignons maintenant par J^{α}_{β} l'inverse de l'élément I^{β}_{α} dans le déterminant $|I^{\beta}_{\alpha}|$. La transformation projective qui anmène le repère I_{α} au repère I_{α}' s'écrit alors

$$X'^{\sigma}=(\delta^{\beta}_{\alpha}+(x^i-x^i_0)\delta x^j\chi^{\beta}_{\alpha ji})I^{\sigma}_{\beta}J^{\alpha}_{\tau}X^{\tau}$$

En particulier, si l'on associe au point x^i_0 le repère fixe dans S_n ces èquations deviennent

$$(6.1)\qquad \begin{cases}\rho X'^{0}=(1+(x^i-x^i_0)\delta x^j\chi^0_{0ji})X^0+\cdots+(x^i-x^i_0)\delta x^j\ \chi^0_{nji}X^n,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \rho X'^{n}=(x^i-x^i_0)\delta x^j\ \chi^n_{0ji}X^0+\cdots+(1+(x^i-x^i_0)\delta x^j\chi^n_{nji})X^n.\end{cases}$$

Nous pouvons écrire

$$\chi^{\beta}_{\alpha ij}=\int_0^1(tR^{\beta}_{\alpha ij}+\cdots+\frac{t^{m-1}}{(m-2)!}D_{i_{m-2}}D_{(i_{m-3})}\cdots D_{(i_1)}R^{\lambda}_{\beta(i)(j)}$$
$$\times(x^{i_1}-x^{i_1}_0)\cdots(x^{i_{m-2}}-x^{i_{m-2}}_0)$$
$$+\ \cdots\cdots\cdots\cdots)dt.$$

Désignons par $A_{\alpha}(\xi)$ le repère associé au point $\xi^i=x^i_0+t(x^i-x^i_0)$, et par B^{α}_{β} l'inverse de l'élément A_{α} dans le déterminant $|A^{\beta}_{\alpha}|$. Il vient

$$\frac{d}{dt}(R^{\beta}_{\alpha ij}\ A_{\beta}\ B^{\alpha})=(D_{i_1}\ R^{\beta}_{\alpha(i)(j)})A_{\beta}\ B^{\alpha}(x^{i_1}-x^{i_1}_0),$$

$$\frac{d^m}{dt^m}(R^{\beta}_{\alpha ij}\ A_{\beta}\ B^{\alpha})=D_{i_m}\ D_{(i_{m-1})}\cdots D_{(i_1)}\ R^{\beta}_{\alpha(i)(j)}A_{\beta}B^{\alpha}$$
$$\times(x^{i_1}-x^{i_1}_0)\cdots(x^{i_m}-x^{i_m}_0)$$

et, par suite,

$$R^{\beta}_{\alpha ij}(\xi)A_{\beta}(\xi)B^{\alpha}(\xi)=[(R^{\iota}_{\beta ij})_0+\cdots\frac{t^m}{m!}(D_{i_m}\ D_{(i_{m-1})}\cdots D_{(i_1)}\ R^{\beta}_{\alpha(i)(j)})_0$$
$$\times(x^{i_1}-x^{i_m}_0)\cdots(x^{i_m}-x^{i_m}_0)$$
$$+\ \cdots\cdots\cdots\cdots]I_{\beta}J^{\iota}$$

Nous pouvons donc écrire

$$(6.2)\qquad \chi^{\beta}_{\alpha ij}\ I_{\beta}\ J^{\alpha}=\int_0^1 tR^{\beta}_{\alpha ij}(\xi)\ A_{\beta}(\xi)\ B^{\alpha}(\xi)dt.$$

Comme nous l'avons déjà remarqué la transformation projective T associée à la courbe fermée C s'exprime par

$$T=T_m\, T_{m-1} \cdots T_2\, T_1$$

Or, les transformations T_1, T_2, par exemple, sont donnée par

$$T_2: \quad X'^{\sigma}=[\delta^{\sigma}_{\tau}+\{(x^i-x^i_0)\delta x^j\, \chi^{\beta}_{\alpha ji}+\cdots)I^{\sigma}_{\beta}\, J^{\alpha}_{\tau}\}_2]X^{\tau},$$

$$T_1: \quad X''^{\tau}=[\delta^{\tau}_{\sigma}+\{((x^i-x^i_0)\delta x^j\chi^{\beta}_{\alpha ji}+\cdots)I^{\tau}_{\beta}\, J^{\iota}_{\sigma}\}_1]X'^{\sigma}$$

et, par suite, le produit T_2T_1 est donné par

$$T_2T_1: \quad X''^{\tau}=[\delta^{\tau}_{\tau}+\{((x^i-x^i_0)\delta x^j\, \chi^{\beta}_{\alpha ji}+\cdots)I^{\tau}_{\beta}\, J^{\alpha}_{\tau}\}_1$$
$$+\{((x^i-x^i_0)\delta x^j\, \chi^{\beta}_{\alpha ji}+\cdots)I^{\tau}_{\beta}\, J^{\iota}_{\tau}\}_2]X^{\tau}$$

Les équations de la transformation T s'ecrivent donc

$$T: \quad X'^{\sigma}=[\delta^{\sigma}_{\tau}+\int_C (x^i-x^i_0)\chi^{\beta}_{\alpha ji}\, I^{\sigma}_{\beta}\, J^{\alpha}_{\tau}\, \delta x^j]X^{\tau}$$

Portons-y (6.2), en supposant que la courbe C est définie par

$$x^i=\psi^i(\tau) \quad (a\leq \tau \leq b\,;\ \psi^i(a)=\psi^i(b)).$$

Nous aurons

$$T: \quad X'^{\sigma}=[\delta^{\sigma}_{\tau}+\iint_D R^{\beta}_{\alpha ji}(\xi)\, A^{\sigma}_{\beta}(\xi)B^{\alpha}_{\tau}(\xi)d\xi^i\delta\xi^j]X^{\tau},$$

$$[D: 0\leq \tau \leq 1, \quad a\leq \tau \leq b\,; \quad \xi^i=x^i_0+t(x^i-x^i_0)].$$

7. Nous allons maintenant déterminer, en faisant l'usage de (6.1), la connexion admettant un groupe d'holomie donné.

Considérons un groupe de Lie G_r des transformations

$$S_a: \quad x'^i=f^i(x^1,\cdots, x^n\,;\ a^1,\cdots,a^r) \quad (i=1,\cdots,n),$$

où les paramètres a^s sont choisis de telle sorte qu'on ait $a^s=o$ $(s=1,\cdots,r)$ pour la transformation idéntique. La transformation $S_a^{-1}\, S_{a+da}$ peut s'exprimer sous la forme

$$S_a^{-1}S_{a+da}: \quad dx'=\xi^i_s(x')\mu^s_t(a)da^t.$$

Désignons par λ^p_q l'inverse de l'élément μ^q_p dans le déterminant $|\mu^q_p|$. Introduisons les paramèteres canoniques ρ^s au moyen des équations

$$\frac{da^p}{dt}=\rho^s\lambda^n_s(a) \quad (a(o)=o)$$

D'après ces équations nous pouvons développer a^p en série suivant les puissances entières de $u^q=t\rho^q$: $a^p=u^p+\cdots$. Ces équations, résolues par rapport à u^q donnent

$$t\rho^q = a^q + \cdots$$

Un sous-groupe $G_{r'}$ de G_r est déterminé par les équations de la forme[1)]

$$v_{pk}\rho^p = o$$

ou bien

$$v_{pk}(a^p + \cdots) \quad (k=1,2,\cdots, r-r'),$$

où les v_{pk} sont des constants numériques.

En particulier, un sous-groupe G des groupe des transformations projectives

$$x'^i = \frac{x^i + a_0^i + a_j^i x^j}{1 + a_j^0 x^j} \quad (i=1,\cdots,n\,;\ j:\ 1\to n)$$

est déterminé par les équations de la forme

$$v^\alpha_{\beta k}\,(a^\beta_\alpha + \cdots) = 0 \quad (\alpha, \beta:\ o\to n\,;\ v^0_{0k} = a^0_0 = o).$$

Donc, si la transformation (6.1) appartient à G, nous avons

$$v^\alpha_{\beta k}\,\{(x^a - x^a_0)\delta x^b(\chi^\beta_{\alpha b a} - \delta^\beta_\alpha \chi^0_{0ba}) + \cdots\} = o.$$

Si ces équations sont vérifiées indépendamment des valeurs de x^a, δx^b nous avons

(7.2) $$v^\alpha_{\beta k}(R^\beta_{\alpha ij} - \delta^\beta_\alpha\, R^0_{0ij}) = o,$$

(7.2) $$v^\alpha_{\beta k}(D_l\, R^\beta_{\alpha(i)(j)} - \delta^\beta_\alpha\, D_l\, R^0_{0(i)(j)} + D_i R^\beta_{\alpha\, l)(j)} - \delta^\beta_\alpha\, D_i\, R^0_{0(l)(j)}) = o,$$

. . . .

(7.3) $$v^\alpha_{\beta k}(D_{(i_m} D_{(i_{m-1})} \cdots D_{(i_1)} R^\beta_{\alpha(i)})_{(j)} - \delta^\beta_\alpha D_{(i_m} D_{(i_{m-1})} \cdots D_{(i_1)} R^0_{0(i)})_{(j)}) = o,$$

. . . .

Les équations (7.2) peuvent s'écrire

(7.2)′ $$v^\alpha_{\beta k}(D_l\, R^\beta_{\alpha(i)(j)} - \delta^\beta_\alpha\, D_l\, R^0_{0(i)(j)}) = o$$

d'après l'identité de Bianchi

$$D_i\, R^\beta_{\alpha(j)(k)} + D_j\, R^\beta_{\alpha(k)(i)} + D_k\, R^\beta_{\alpha(i)(j)} = o.$$

D'ailleurs, nous pouvons choisir le point x_0^i arbitrairement.

1. Cartan. La theorie des groupes finis et continus et l'analysis situs. p. 22.

Donc, pour que la connexion considérée ait comme groupe d'holonomie le groupe donné G, il faut que les équations (7.1), (7.2), (7.3)$\cdots$, soient vérifiées identiquement. Réciproquement, si cette condition est vérifiée, le groupe d'holonomie relative à la connexion $\Gamma^{i}_{\alpha i}\, dx^{i}$ est le groupe G ou sous-groupe de G, car alors les transformations infinitésimales du groupe d'holonomie appartieennent tous à G.

8. Supposons maintenant que les transformations du groupe d'holonomie laissent fixe un hyperplan. Prenons le sommet $(1, 0, \cdots, 0)$ hors cet hyperplan, et les autres sommets $(0, 1, 0,\cdots,0),\cdots, (0,\cdots, 0, 1)$ dans cet hyperplan. Associons au point x^i_0 ce repère fixe dans S_n. Alors, les points $I_h (h=1,\cdots,n)$ étant dans l'hyperplan $I_1 I_2\cdots I_n$, nous avons

$$(x^i - x^i_0)\chi^b_{hji} = o \quad (h,j=1,\cdots, n)$$

et, par suite,

$$R^0_{hij} = o, \quad D_l\, R^0_{h(i)(j)} = o, \tag{8.1}$$
$$D_{(i_m} D_{i_{m-1}} \cdots D_{(i_1)}\, R^0_{h(i))j} = o.$$

Les équations dernières peuvent s'écrire

$$D_{i_m}\cdots D_{(i_1)}\, R^0_{h(i)(j)} + D_{i_m}\cdots D_{(i)} R^0_{h(i_1)(j)} + \cdots + D_{i_{m-1}}\cdots D_{(i)}\, R^0_{h(i_m)j} = o. \tag{8.2}$$

En effet, ce fait est vrai pour $m=o$, 1 d'après (8.1). Or s'il en est ainsi pour les nombres entiers positifs moindre que m nous avons

$$D_{i_m}\cdots D_{(c)}\, D_{(b)}\, D_{(a)}\, D_{(k)}\cdots D_{(i_1)} R^0_{h(i)(j)}$$
$$D_{i_m}\cdots D_{(c)}\, D_{(a)}\, D_{(b)}\, D_{(k)}\cdots D_{(i_1)}\, R^0_{h(i)(j)}$$
$$= D_{i_m}\cdots D_{(c)} (R^0_{\gamma ab}\, D_{(k)}\cdots D_{(i_1)}\, R^{\gamma}_{h(i)(j)}$$
$$- R^{\gamma}_{hab}\, D_{(k)}\cdots D_{(i_1)}\, R^0_{\gamma(i)(j)}) = o.$$

Echangeons i, j dans (8.2). Retranchons l'équation ainsi obtenue de (8.2), en tenant compte de l'identité

$$D_a\cdots D_{(b)}\, (D_{(i)}\, R^0_{h(l)(j)} + D_{(l)}\, R^0_{h(j)(i)} + D_{(j)} R^0_{h(i)(l)}) = o.$$

Il viendra

$$D_{i_m}\cdots D_{(i_1)}\, R^0_{h(i)(j)} = o.$$

Puisque ces équations sont vérifiées independamment du choix de point x_0^i, nous obtenons

$$\Gamma^0_{\tau k}\, D_{i_m}\cdots D_{(i_1)}\, R^{\tau}_{hij} - \Gamma^{\tau}_{lk}\; D_{i_m}\cdots D_{(i_1)}\, R^0_{\tau ij}$$
$$= \Gamma^0_{lk}(D_{i_m}\cdots D_{(i_1)}\, R^l_{h(i)(j)} - \delta^l_h\, D_{i_m}\cdots D_{(i_1)}\, R^0_{0ij}) = o,$$

et, par suite,

(8.3) $$\Gamma^0_{lk}(\chi^l_{hij} - \delta^l_h \chi^0_{0ij}) = o.$$

En posant

$$Z^i = \frac{X^i}{X^0}$$

on tire de (6.1)

$$\delta Z'^p = (x^i - x^i_0)\,\delta x^j \chi^p_{0ji} + \{\delta^p_m + (x^i - x^i_0)\,\delta x^j(\chi^p_{mji} - \delta^p_m \chi^0_{0ji})\} Z^m$$

Nousa vons donc, d'apres (8.3), pour les coefficrents de direction λ^p $(p=1,\cdots,n)$ de la drote joignant l'origine au point X^α

$$\Gamma^0_{lk}\,\delta\lambda^l = o$$

ce qui nous donne

$$\Gamma^0_{lk} = o \quad (l,\ k=1,\cdots n),$$

lorsque le groupe des transformations des coefficients de direction λ^i est transitif. Nous pouvons ainsi déduire comme résultat du $n°$ précédent la propositon suivante donnée par Cartan[1].

Si le groupe d'holonomie est le groupe affine, la connexion $\Gamma^\beta_{\alpha i} dx^i$ elle-meme est affine.

9. Nous allons donner une autre application du résultat du $n°$ 7 : nous démontrons que *si les traasformations du groupe d'holonomie laissent fixe une seule hyperxuadrique reguliere, la connexion $\Gamma^\beta_{\alpha i}\, dx^i$ est non-euclidienne.*[2] Prenons le sommet (1, 0,$\cdots$,0) hors cette hyperquadrique, et les autres sommets (0, 1, 0,$\cdots$,0),$\cdots$ (0,$\cdots$ 0, 1) dans son hyperplan polaire. L'équation de cette hyperquadrique s'écrit alors sous la frorme

$$g_{00}(X^0)^2 + g_{ij}X^iX^j = o \quad (g_{00} = \pm 1,\ \det|g_{ij}| \neq o).$$

La condition pour que la transformation (6.1) laisse fixe cette hyperquadrique est que

$$(g_{ls}\chi^s_{0ji} + g_{00}\,\chi^0_{lji})(x^i - x^i_0) = o,$$
$$(g_{ls}\chi^s_{mji} + g_{ms}\,\chi^s_{lji} - 2g_{lm}\chi^0_{0ji})(x^i - x^i_0) = o,$$

c'est-à-dire, que

(1), (2) Cartan. Lecons sur la theorie des espaces a connexion projective. p. 292.

$$(9.1)\qquad \begin{cases} g_{ls} R^s_{0ij} + g_{00} R^0_{lij} = o \\ g_{ls} R^s_{mij} + g_{ms} R^s_{lji} = 2 g_{lm} R^0_{0ij} \end{cases}$$

$$(9.2)\qquad \begin{cases} g_{ls}(D_k R^s_{0(i)(j)} + D_i R^s_{0(k)(j)}) + g_{00}(D_k R^0_{l(i)(j)}) + D_i R^0_{l(k)(j)}) = o \\ g_{ls}(D_k R^s_{m(i)(j)} + D_i R^s_{m(k)(j)}) + g_{ms}(D_k R^s_{l(k)(j)} + D_i R^s_{l(k)(j)}) \end{cases}$$

$$= 2 g_{lm}(D_k R^0_{0(i)(j)} + D_i R^0_{0(k)(j)})$$

. . . .

$$(9.3)\qquad \begin{cases} g_{ls} D_{(i_p} \cdots D_{(i_1} R^s_{0(i))(j)} + g_{00} D_{(i_p} \cdots D_{(i_1)} R^0_{l(i))(j)} = o, \\ g_{ls} D_{(i_p} \cdots D_{(i_1)} R^s_{\underset{\wedge}{m}(i))(j)} + g_{ms} D_{(i_p} \cdots D_{(i_1)} R^s_{\underset{\wedge}{l}(i))(j)} \end{cases}$$

$$= 2 g_{ml} D_{(i_p} \cdots D_{(i_1)} R^0_{0(i))(j)}.$$

Or, de $\Gamma^0_{0i} = o$, $\Gamma^s_{si} = o$, il suit

$$R^\alpha_{\alpha ij} = o, \quad D_{i_p} \cdots D_{(i_1)} R^\alpha_{\alpha(i)(j)} = o. \quad (\alpha : o \to n).$$

Il vient donc de (9.3)

$$D_{i_p} \cdots D_{(i_1)} R^0_{0(i)(j)} = 0.$$

Les équations (9.1), (9.2), (9.3) peuvent s'écrire ainsi

$$(9.1)' \qquad g_{\alpha\gamma} R^\gamma_{0ij} + g_{00} R^0_{\alpha ij} = o,$$

$$(9.2)' \qquad g_{\alpha\gamma}(D_k R^\gamma_{\beta(i)(j)} + D_i R^\gamma_{\beta(k)(j)}) + g_{\beta\gamma}(D_k R^\gamma_{\alpha(i)(j)} + D_i R^\gamma_{\alpha(k)(j)}) = o,$$

$$(9.3)' \qquad g_{\alpha\gamma} D_{(i_p} \cdots D_{(i_1)} R^\gamma_{\beta(i))(j)} + g_{\beta\gamma} D_{(i_p} \cdots D_{(i_1)} R^\gamma_{\beta(i))(j)} = o$$

où $g_{0i} = o$ $(i = 1, \cdots, n)$.

Retranchons de (9.2)′ ce qu'on obtient on y échangeant i, j. Il vient

$$(9.2)'' \qquad g_{\alpha\gamma} D_k R^\gamma_{\beta(i)(j)} + g_{\beta\gamma} D_k R^\gamma_{\alpha(i)(j)} = o.$$

Puisque ces équations sont vérifiées indépendamment du choix du point x^i_0, il vient de (9.1)′, (9.2)″

$$(D_k g_{\alpha\gamma}) R^\gamma_{\beta ij} + (D_k g_{\beta\gamma}) R^\gamma_{\alpha ij} = 0.$$

Par le raisonnement du $n°$ précédent nous obtenons de (9.3)′

$$g_{\alpha\gamma} D_{i_p} \cdots D_{(i_1)} R^\gamma_{\beta(i)(j)} + g_{\beta\gamma} D_{i_p} \cdots D_{(i_1)} R^\gamma_{\alpha(i)(j)} = o,$$

$$(D_k g_{\alpha\gamma}) D_{i_p} \cdots D_{(i_1)} R^\gamma_{\beta(i)(j)} + (D_k g_{\beta\gamma}) D_{i_p} \cdots D_{(i_1)} R^\gamma_{\alpha(i)(j)} = o.$$

et, par suite,

$$(D_k g_{\alpha\gamma}) \chi^\gamma_{\alpha ij} + (D_k g_{\beta\gamma}) \chi^\gamma_{\alpha ij} = o.$$

Cela revient a dire que la transformation (6.1) laisse fixe l'hyperquadrique

$$(D_k g_{\alpha\beta}) X^\alpha X^\beta = o.$$

Or,

$$D_k g_{00} = 2\Gamma^{\gamma}_{0k}\, g_{\gamma o} = o.$$

Dons si les transformations du groupe d'holonomoie ne laissent fixe qu'une hyperquadrique, nous avons

$$D_k g_{\alpha\beta} = o \quad (\alpha,\ \beta = 0,\ 1, \cdots,\ n\ ;\ k = 1, \cdots, n).$$

C'est à dire que la connexion $\Gamma^{\beta}_{\alpha i}\, dx^i$ est non-euclidienne.