MEMOIRS OF THE COLLEGE OF SCIENCE, UNIVERSITY OF KYOTO, SERIES, A
Vol. XXVII, Mathematics No. 3, 1953.

Sur la fonction analytique de deux variables complexes satisfaisant l'associativité: $f\{x, f(y, z)\}=f\{f(x, y), z\}$

Par

Akira KUWAGAKI

(Reçu le 21 Avril, 1952)

§ 1. Introduction

1. Nous allons exprimer la recherche sur la fonction de deux variables complexes $f(x, y)$ satisfaisant la relation fonctionnelle suivante ou l'associativité:

$$f\{x, f(y, z)\}\equiv f\{f(x, y), z\} \tag{1}$$

Pour la fonction $f(x, y)$ nous supposons qu'il y a au moins un nombre complex c, fini ou infini, tel que

$$f(c, c)=c \tag{2}$$

et que $f(x, y)$ a une expansion de Taylor à (c, c).

2. Le nombre c peut être réduit facilement à 0 par la moyen suivante, sans perdre les conditions (1) et (2).

1° Si c est un nombre fini, posons

$$f_1(x, y)\equiv f(x+c,\ y+c)-c$$

nous aurons par (1)

$$\begin{aligned} f_1\{x, f_1(y, z)\} &= f_1\{x, f(y+c,\ z+c)-c\} \\ &= f\{x+c, f(y+c,\ z+c)\}-c \\ &= f\{f(x+c,\ y+c),\ z+c\}-c \\ &= f_1\{f(x+c,\ p+c)-c,\ z\} \\ &= f_1\{f_1(x, y),\ z\} \end{aligned}$$

et par (2)

$$f_1(0, 0)=f(c, c)-c=0$$

2° Si c est infini, posons

$$f_2(x, y)\equiv\frac{1}{f(1/x,\ 1/y)}$$

nous aurons par (1)

$$\begin{aligned} f_2\{x, f_2(y, z)\} &= f_2\left\{x, \frac{1}{f(1/y, 1/z)}\right\} \\ &= \frac{1}{f\{1/x, f(1/y, 1/z)\}} = \frac{1}{f\{f(1/x, 1/y), 1/z\}} \\ &= f_2\left\{\frac{1}{f(1/x, 1/y)}, z\right\} = f_2\{f_2(x, y), z\} \end{aligned}$$

et par (2)

$$f_2(0, 0) = \frac{1}{f(\infty, \infty)} = 0$$

§ 2. Théorèmes

3. Donc, nous montrons le théorème dans le cas $c=0$.

Théorème 1. *Soit la fonction de deux variables complexes $f(x, y)$ holomorphe à $(0, 0)$ et satisfaisante les deux conditions:*

$$f\{x, f(y, z)\} \equiv f\{(x, y), z\} \tag{1}$$

et

$$f(0, 0) = 0 \tag{2'}$$

elle est une fonction d'une seule variable x ou de y, ou bien une fonction symétrique en x et y.

La forme de la fonction $f(x, y)$ sera déterminée avec plus précision par le théorème suivant.

Théorème 2. *La fonction $f(x, y)$ du théorème 1 appartient à une des quatre espèces de fonction suivantes,*

1) $f(x, y) \equiv x$
2) $f(x, y) \equiv y$
3) $f(x, y) \equiv x + y + xyS_1(x, y)$
4) $f(x, y) \equiv xyS_2(x, y)$

où S_1 et S_2 sont deux fonctions holomorphes à $(0, 0)$ et symétriques en x et y, et où $S_2(0. 0) \neq 0$ ou $S_2(x, y) \equiv 0$.

4. J. Aczél[1] a démontré un théorème suivant, sur la fonction de deux variables réelles $f(x, y)$ dont la valeur pour chaque x et y de l'intervalle réel (a, b) est aussi comprise dans cet intervalle (a, b).

Théorème (J. Aczél) Pour qu'il existe une fonction $\varphi(z)$ croissante, continue, définie dans l'intervalle réel (a, b) et permettant de mettre $f(x, y)$ sous la forme

$$f(x, y)=\varphi^{-1}\{\varphi(x)+\varphi(y)\}$$

il faut et il suffit que la fonction $f(x, y)$ satisfasse aux trois conditions suivantes :

I. Monotonité : $f(x, y)<f(x', y)$ pour $x<x'$ (et de même pour $y<y'$) ;

II. Continuité : $\lim f(x, y)=f(\lim x, \lim y)$;

III. Associativité : $f\{x, f(y, z)\}=f\{f(x, y), z\}$

Dans le cas de J. Aczél, l'opération $f(x, y)$ définit une groupe continue par la monotonité et la continuité, mais dans notre théorème l'opération $f(x, y)$ du cas seul 3) définit un groupe, d'ailleurs l'opération de 4) ne définit qu'un semi-groupe parce qu'il n'y a pas d'opération inverse.

5. De plus, comme un colloraire du théorème 1 nous obtiendrons sans difficulté le résultat suivant.

Théorème 3. *Un semi-groupe de dimension un et analytique au point c tel que le produit de c et de c-même est égal à c-même, est commutatif.* (*ou abelien*)

§ 3. Démonstrations des théorèmes

6. Comme la fonction $f(x, y)$ est holomorphe à $(0, 0)$ et $f(0, 0)=0$, on aura l'expansion :

$$f(x, y)=\sum_{i=1}^{\infty} H_i(x, y)$$

où $H_i(x, y)$ sera un polynôme homogène du degré $i(i=1, 2, \cdots)$.

7. En posant $y=z=0$ dans l'équation (1), on aura

$$f(x, 0)\equiv f\{f(x, 0), 0\} \tag{3}$$

Puis, développerons les deux membres de (3) en vertu de l'expansion :

$$f(x, 0)=\sum_{i=\mu}^{\infty} h_i x^i$$

$$(h_1=h_2=\cdots=h_{\mu-1}=0,\ h_\mu \neq 0 \text{ et } \mu \geqq 1)$$

les termes du moidre degré en x seront respectivement $h_\mu x^\mu$ dans le premier membre, $h_\mu^{1+\mu} x^{\mu^2}$ dans le deuxième. Pour l'égalité de deux membres de (3), il faut que i) $h_\mu=0$ ou ii) $h_\mu \neq 0$ et $\mu^2=\mu$

i) On aura tout de suite

$$f(x, 0)\equiv 0$$

ii) On aura par la condition $\mu \geqq 1$.

$$\mu = 1 \quad \text{et} \quad h_1 = 1$$

c'est-à-dire, la forme de $f(x, 0)$ sera

$$f(x, 0) = x + \sum_{i=\nu}^{\infty} h_i x^i$$

($h_\nu \neq 0$ première fois pour ν et $\nu \geqq 2$)

Employons cette relation dans (3) encore, on aura

$$x + \sum_{i=\nu}^{\infty} h_i x^i \equiv x + \sum_{i=\nu}^{\infty} h_i x^i + \sum_{i=\nu}^{\infty} h_i \Big(x + \sum_{j=\nu}^{\infty} h_j x^j\Big)^i$$

ou

$$\sum_{i=\nu}^{\infty} h_i \Big(x + \sum_{j=\nu}^{\infty} h_j x^j\Big)^i \equiv 0 \quad (\nu \geqq 2)$$

Considérons le terme du degré ν, on aura

$$h_\nu x^\nu = 0$$

par conséquent

$$\sum_{i=\nu}^{\infty} h_j x^j \equiv 0$$

Ce signifiera que

$$f(x, 0) \equiv x$$

Réunissant les résultats de i) et ii), on aura

$$f(x, 0) \equiv 0 \quad \text{ou} \quad x \tag{4}$$

De même, on aura pour $f(0, y)$

$$f(0, y) \equiv 0 \quad \text{ou} \quad y \tag{4'}$$

combinons (4) et (4'), les quatre cas suivants seront possibles;

$$\left.\begin{aligned}
&\text{a)} \quad f(x, y) \equiv x + \sum_{i=2}^{\infty} H_i(x, y) \\
&\text{b)} \quad f(x, y) \equiv y + \sum_{i=2}^{\infty} H_i(x, y) \\
&\text{c)} \quad f(x, y) \equiv x + y + xy \sum_{i=0}^{\infty} H_i(x, y) \\
&\text{d)} \quad f(x, y) \equiv xy \sum_{i=0}^{\infty} H_i(x, y)
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$H_i(x, y)$ étant un polynôme homogène du degré i en x et y.

8. Le cas a)

Si il y a un nombre naturel n tel que

$$H_2 \equiv H_3 \equiv \cdots \equiv H_{n-1} \equiv 0 \quad \text{et} \quad H_n \not\equiv 0 \qquad (n \geqq 2)$$

on aura par la relation (1)

$$x+\sum_{i=n}^{\infty}H_i\{x,\ y+\sum_{j=n}^{\infty}H_j(y,\ z)\}$$

$$\equiv x+\sum_{i=n}^{\infty}H_i(x,\ y)+\sum_{i=n}^{\infty}H_i\{x+\sum_{j=n}^{\infty}H_j(x,\ y),\ z\}$$

Prendrons les termes du degré n de ces deux membres, on aura

$$H_n(x,\ y)\equiv H_n(x,\ y)+H_n(x,\ z)$$

ou

$$H_n(x,\ z)\equiv 0$$

Donc nous obtenons 1) du théorème 2:

$$f(x,\ y)\equiv x \tag{6}$$

et d'après le cas b), de même, 2) du théorème 2:

$$f(x,\ y)\equiv y \tag{6'}$$

9. Le cas c)

$$f(x,\ y)\equiv x+y+xy\sum_{i=0}^{\infty}H_i(x,\ y)$$

Par la différentiation en x, nous aurons

$$f_x(0,\ 0)=1\neq 0$$

en conséquence, l'équation $z=f(x,\ y)$ aura une solution unique $x=\varphi(y,\ z)$ dans la voisinage de $(0,\ 0)$, l'équation c) sera une représentation du groupe de Lie de dimension un, dont le produit sera la fonction $f(x,\ y)$ et l'unité 0. On en conclut évidemment[2] la symétrie*:

$$f(x,\ y)\equiv f(y,\ x)$$

c'est-à-dire on aura

$$f(x,\ y)\equiv x+y+xyS_1(x,\ y) \tag{7}$$

10. Le cas d)

$$f(x,\ y)\equiv xy\{H_0+\sum_{i=1}^{\infty}H_i(x,\ y)\}$$

Pour cette forme, l'associativité (1) sera

$$xyz\{H_0+\sum_{i=1}^{\infty}H_i(y,\ z)\}[H_0+\sum_{i=1}^{\infty}H_i\{x,\ yz(H_0+\sum_{j=1}^{\infty}H_j(y,\ z))\}]$$

$$\equiv xyz\{H_0+\sum_{i=1}^{\infty}H_i(x,\ y)\}[H_0+\sum_{i=1}^{\infty}H_i\{xy(H_0+\sum_{j=1}^{\infty}H_j(x,\ y)),\ z\}] \tag{8}$$

---

* La démonstration directe de la symétrie de $H_i(x,y)$ sera difficile, mais pourra être obtenue par le calcul employant c) dans (5).

nous considérons ici deux cas différents pour la valeur de H_0: i) $H_0=0$ ii) $H_0\neq 0$

i) $H_0=0$

Supposons que

$$H_n\not\equiv 0 \quad \text{et} \quad H_1\equiv H_2\equiv\cdots\equiv H_{n-1}\equiv 0 \qquad (n\geqq 1)$$

on aura d'après l'associativité

$$\sum_{i=n}^{\infty} H_i(y, z)\sum_{i=n}^{\infty} H_i\{x, yz\sum_{j=1}^{n} H_j(y, z)\}$$
$$\equiv\sum_{i=1}^{\infty} H_i(x, y)\sum_{i=n}^{\infty} H_i\{xy\sum_{j=n}^{\infty} H_j(x, y), z\}$$

Dans cette équation, en posant $z=0$, on aura

$$\sum_{i=n}^{\infty} H_i(y, 0)\sum_{i=n}^{\infty} H_i(x, 0)\equiv\sum_{i=n}^{\infty} H_i(x, y)\sum_{i=n}^{\infty} H_i\{xy\sum_{j=n}^{\infty} H_j(x, y), 0\}$$

et en plus, en employant l'expansion:

$$\sum_{i=n}^{\infty} H_i(x, 0)\equiv\sum_{j=m}^{\infty} h_j x^j \qquad (m\geqq n)$$

on aura

$$\sum_{i=m}^{\infty} h_i x^i\sum_{j=m}^{\infty} h_j y^j\equiv\sum_{i=n}^{\infty} H_i(x, y)\sum_{j=m}^{\infty} h_j x^j y^j\{\sum_{k=n}^{\infty} H_k(x, y)\}^j$$

Le moindre degré du premier membre de cette équation sera $2m$, tandis que celui du deuxième membre sera $n+2m+nm>2m$. Il faut que dans le premier membre

$$h_m^2 x^m y^m\equiv 0$$

on aura en suite

$$\sum_{i=n}^{\infty} H_i(x, 0)=\sum_{j=m}^{\infty} h_j x^j\equiv 0$$

et de même on aura

$$\sum_{i=n}^{\infty} H_i(0, y)\equiv 0$$

Par ces deux relations, $f(x, y)$ sera écrit sous la forme

$$f(x, y)\equiv x^2y^2\sum_{i=0}^{\infty} G_i(x, y)$$

$G_i(x, y)$ étant un polynôme du degré i.

Si $G_0=0$, l'associativité (1) pour $f(x, y)$ sera

$$x^2y^4z^4\{\sum_{i=1}^{\infty}G_i(y, z)\}^2\sum_{i=1}^{\infty}G_i\{x, y^2z^2\sum_{j=1}^{\infty}G_j(y, z)\}$$
$$\equiv x^4y^4z^2\{\sum_{i=1}^{\infty}G_i(x, y)\}^2\sum_{i=1}^{\infty}G_i\{x^2y^2\sum_{j=1}^{\infty}G_j(x, y), z\}$$

ou

$$z^2\{\sum_{i=1}^{\infty}G_i(y, z)\}^2\sum_{i=1}^{\infty}G_i\{x, y^2z^2\sum_{j=1}^{\infty}G_i(y, z)\}$$
$$\equiv x^2\{\sum_{i=1}^{\infty}G_i(x, y)\}^2\sum_{i=1}^{\infty}G_i\{x^2y^2\sum_{j=1}^{\infty}G_j(x, y), z\}$$

En posant $z=0$, on aura

$$\{\sum_{i=1}^{\infty}G_i(x, y)\}^2\equiv 0$$

ou

$$\sum_{i=1}^{\infty}G_i\{x^2y^2\sum_{j=1}^{\infty}G_j(x, y), 0\}\equiv 0$$

C'est-à-dire, on en conclut toujours que

$$\sum_{i=1}^{\infty}G_i(x, 0)\equiv 0$$

et de même que

$$\sum_{i=1}^{\infty}G_i(0, y)\equiv 0$$

Réunions ces deux relations, on aura

$$\sum_{i=1}^{\infty}G_i(x, y)\equiv xy\sum_{i=0}^{\infty}\cdots$$

On continuera cette méthode successivement, arrivera enfin

$$f(x, y)\equiv 0$$

ou

$$f(x, y)\equiv x^ny^n\sum_{i=0}^{\infty}K_i(x, y)$$

où $K_0\neq 0$ et K_i sera un polynôme homogène du degré i ($i\geqq 0$ et $n\geqq 2$).

Dans le dernier cas, l'associativité (1) de $f(x, y)$ sera

$$x^ny^{n^2}z^{n^2}\{K_0+\cdots\}^n[K_0+\cdots]$$
$$\equiv x^{n^2}y^{n^2}z^n\{K_0+\cdots\}^n[K_0+\cdots]$$

où ... signifiera le terme du degré un ou plus haut, d'après cette équation on aura par $K_0\neq 0$,

$$x^ny^{n^2}z^{n^2}\equiv x^{n^2}y^{n^2}z^n$$

en suite

$$n^2=n$$

C'est contradictoire, parce que $n\geqq 2$, et $H_0=0$ entraînera un seul cas banal:

$$f(x, y)\equiv 0 \tag{9}$$

ii) $H_0 \neq 0$

Supposons encore que

$$H_n \not\equiv 0 \quad \text{et} \quad H_1\equiv H_2\equiv\cdots\equiv H_{n-1}\equiv 0 \qquad (n\geqq 1)$$

l'équation (8) sera développée comme suivant

$$\begin{aligned}
&H_0\sum_{i=n}^{\infty}H_i(y, z)+H_0\sum_{i=n}^{\infty}H_i\{x, yz\sum_{j=0}^{\infty}H_j(y, z)\}\\
&\quad+\sum_{i=n}^{\infty}H_i(y, z)\sum_{i=n}^{\infty}H_i\{x, yz\sum_{j=0}^{\infty}H_j(y, z)\}\\
&\quad\equiv H_0\sum_{i=n}^{\infty}H_i(x, y)+H_0\sum_{i=n}^{\infty}H_i\{xy\sum_{j=0}^{\infty}H_j(x, y), z\}\\
&\quad+\sum_{i=n}^{\infty}H_i(x, y)\sum_{i=n}^{\infty}H_i\{xy\sum_{j=0}^{\infty}H_j(y, z), z\}
\end{aligned}$$

Dans cette équation, divisons par H_0 et posons $z\equiv x$, on aura

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=n}^{\infty}H_i(x, y)-\sum_{i=n}^{\infty}H_i(y, x)\\
&\quad\equiv\sum_{i=n}^{\infty}H_i\{x, yx\sum_{j=0}^{\infty}H_j(y, x)\}-\sum_{i=n}^{\infty}H_i\{xy\sum_{j=0}^{\infty}H_j(x, y), x\}\\
&\quad+\frac{1}{H_0}\sum_{i=n}^{\infty}H_i(y, x)\sum_{i=n}^{\infty}H_i\{x, yx\sum_{j=0}^{\infty}H_j(y, x)\}\\
&\quad-\frac{1}{H_0}\sum_{i=n}^{\infty}H_i(x, y)\sum_{i=n}^{\infty}H_i\{xy\sum_{j=0}^{\infty}H_j(x, y), x\}
\end{aligned} \tag{10}$$

Alors utilisons les polynômes nouveaux J_i et G_i suivants dont le degré commun est i,

$$H_i(x, y)\equiv a_i x^i+b_i y^i+J_i(x, y)$$

et

$$G_i(x, y)\equiv J_i(x, y)-J_i(y, x)$$
$$(i=n,\ n+1,\cdots)$$

où

$$J_i(0, y)\equiv J_i(x, 0)\equiv 0\,,$$

nous considérons le terme du degré n dans l'équation (10).

$$a_n x^n + b_n y^n - a_n y^n - b_n x^n + G_n(x, y) \equiv a_n x^n - b_n x^n$$

par suite, nous aurons

$$(b_n - a_n) y^n + G_n(x, y) \equiv 0$$

Cette identité entraînera

$$a_n = b_n \quad \text{et} \quad G_n(x, y) \equiv 0$$

Puis, si les deux équations suivantes sont remplies pour $i = n$, $n+1, \cdots, m$

$$a_i = b_i \quad \text{et} \quad G_i(x, y) \equiv 0$$

le terme du degré $m+1$ dans l'équation (10) sera

$$a_{m+1} x^{m+1} + b_{m+1} y^{m+1} - a_{m+1} y^{m+1} - b_{m+1} x^{m+1} + G_{m+1}(x, y)$$
$$\equiv a_{m+1} x^{m+1} - b_{m+1} x^{m+1} + L_{m+1}$$

où L_{m+1} sera le terme du degré $m+1$, mais il se perdra en vertu de la symétrie de $H_i(x, y)$ et $H_j(x, y)$ pour $i, j \leqq m$.

Par conséquent, nous aurons seulement

$$(b_{m+1} - a_{m+1}) y^{m+1} + G_{m+1}(x, y) \equiv 0$$

et de même que la méthode dernière

$$a_{m+1} = b_{m+1} \quad \text{et} \quad G_{m+1}(x, y) \equiv 0$$

C'est-à-dire, la symétrie de $H_i(x, y)$:

$$H_i(x, y) \equiv H_j(y, x)$$

sera verifiée pour $i \geqq n$ et quelconque, ou autrement dit

$$\sum_{i=0}^{\infty} H_i(x, y) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} H_i(y, x)$$

Il en suivra que

$$f(x, y) \equiv xy S_2(x, y) \tag{11}$$

où $S_2(x, y)$ sera symétrique et 0 à $(0, 0)$, ou bien $S_2(x, y) \equiv 0$.

Les résultats (6), (6′), (7), (9) et (11) démontreront les théorèmes 1 et 2 complètement.

§ 4. Remarques

11. D'abord il y a en fait la fonction de la forme 3) ou 4) du théorème 2.

Exemple de 3)

$$\frac{x+y}{1-xy}=(x+y)\{1+xy+x^2y^2+\cdots\}$$

Exemple de 4)

$$\frac{xy}{1+x+y}=xy\{1-(x+y)+(x+y)^2-\cdots\}$$

12. Dans le cas 3) la fonction $f(x, y)$ sera représentée par la forme

$$f(x, y)\equiv\varphi^{-1}\{\varphi(x)+\varphi(y)\}$$

dans un voisinage de $(0, 0)$, d'après la théorie de groupe de Lie, où $\varphi(x)$ sera une fonction continue.

13. Parce que la symétrie dans un voisinage d'un point sera établie, celle sera verifiée dans tout le domaine de la fonction analytique par le prolongement analytique.

L'auteur veut exprimer ici ses remerciements sincères à M. le Professeur T. Matsumoto pour ses conceils précieux qu'il lui a donné pendent la recherche.

Références

1) Jean Aczél; "Sur les opérations définies pour nombres réels", (Bull. de la Société Math. de France, 1947).

2) L. Pontrjagin; "Topological groups" Chap. IX. (London, 1939).