MEMOIRS OF THE COLLEGE OF SCIENCE, UNIVERSITY OF KYOTO, SERIES A
Vol. XXXI, Mathematics No. 2, 1958.

Une Remarque sur l'opérateur différentiel et les solutions de l'équation aux dérivées partielles

Par

Masaya YAMAGUTI

(Reçu le 17 mai, 1958)

---

§ 1. **Introduction**—Nous nous occupons ici principalement de l'opérateur différentiel elliptique à coefficients indéfiniment dérivables.

B. Malgrange a démontré dans sa thèse [6] l'existence d'un noyau élémentaire pour l'opérateur différentiel elliptique petrowskien (voir la définition au § 5) à coefficients analytiques. Un peu plus avant, A. Grothendieck [4] avait remarqué qu'il y a une dualité entre l'espace des solutions d'une équation elliptique homogène dans un ouvert et l'espace des solutions de l'équation transposée dans l'ouvert complémentaire. A. Grothendieck a supposé l'existence d'un noyau élémentaire pour l'opérateur différentiel et une propriété des solutions de l'équation homogène. Tous les deux auteurs n'énoncent leurs résultats que pour l'opérateur elliptique à coefficients analytiques. Mais d'après des efforts de N. Aronszajn [1], L. Nirenberg [8], et dernièrement A. P. Calderón [3], on est arrivé de trouver une vaste classe d'opérateurs différentiels à coefficients non analytiques qui satisfont aux hypothèses de Malgrange et Grothendieck. Je vais faire une remarque à ce fait et je proposerai deux conditions qui sont un peu plus fortes, mais plus maniables que celle de Malgrange. Malgré le résultat remarquable de A. P. Calderón, on est encore loin de résoudre complètement le probleme du prolongement unique des solutions de l'équation elliptique (voir la définition au § 4) à coefficients indéfiniments dérivables. Je pense qu'au moins, en ce moment, il n'est pas inutile d'envisager ces conditions pour les opérateurs différentiels à coefficients indéfiniment dérivables. Aussi je démontrerai l'équivalence de la propriété de Runge bien connue et de la propriété du prologement unique des solutions de l'equation aux dérivées partielles homogène dont l'opérateur possède un noyau élémentaire à droite.

§ 2. Un rappel sur des noyaux

1. Noyaux. Nous utilisons couramment des notations dans la théorie des distributions par L. Schwartz. (par exemple, $\mathcal{E}$: l'espace des fonctions indéfiniments dérivables. $\mathfrak{D}$: l'éspace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact, $\mathfrak{D}'$: l'espace des distributions, $\mathcal{E}'$: l'espace des distributions à support compact.) Par le théorème des noyaux, une application linéaire continue de $\mathfrak{D}$ dans $\mathfrak{D}'$ peut être définie par une distribution à deux variables qu'on appelle noyau. Un noyau E sur $R^n \times R^n$ est dit régulier si l'application $\psi \rightarrow E.\psi$ de $\mathfrak{D}$ dans $\mathfrak{D}'$ qu'il définit se prolonge en une application continue $T \rightarrow E.T.$ de $\mathcal{E}'$ dans $\mathfrak{D}'$ et si $\psi \rightarrow E.\psi$ applique $\mathfrak{D}$ dans $\mathcal{E}$. Alors pour le noyau régulier, la formule de transposition $\langle\varphi, E.\psi\rangle = \langle E'\varphi, \psi\rangle$ pour $\varphi, \psi \in \mathfrak{D}$, E': la transposée de l'application E, reste valable quand on remplace φ (ou ψ) par une distribution à support compact T. Si E est un noyau régulier, et indéfiniment dérivable sur le complémentaire de la diagonale, alors E sera dit très régulier et la formule de transposition reste valable pour φ, ψ qui sont deux distributions à support compact dont les ensembles de singularité ne se rencontrent pas, (c'est à dire que sur tout ouvert, une des deux distributions soit indéfiniment dérivable).

2. Noyaux élémentaires. Un noyau est dit noyau élémentaire à gauche (res. à droite) de l'opérateur différentiel $\mathbf{P}$ si pour tout $\varphi \in \mathfrak{D}$, on a $\begin{matrix} E\mathbf{P}\varphi = \varphi \\ (\mathbf{P}E\varphi = \varphi) \end{matrix}$. Si E est en meme temps un noyau élémentaire à gauche et à droite de l'opérateur $\mathbf{P}: \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}'$, il est dit noyau élémentaire bilatère de $\mathbf{P}$.

§ 3. Des conditions pour l'existence d'un noyau élémentaire bilatère très régulier pour l'opérateur différentiel elliptique.

Nous considérons ici toujour l'opérateur différentiel sur R^n.

B. Malgrange a démontré l'existence d'un noyau élémentaire bilatère très régulier pour l'opérateur elliptique au sens de Petrowski sous la condition (c) comme suit. (désormais, nous utilisons le mot "elliptique" seulement au sens de Petrowski donc nous supprimons le mot petrowskien.) Pour tout compact K, on dit l'enveloppe réciproque de K, designant $\hat{\hat{K}}$, le plus petit ensemble fermé qui possède les propriété suivantes

$$K \subset \hat{\hat{K}}\,; \quad \mu \in \mathscr{E}' \quad \underline{\mathbf{P}\mu} \subset K \quad \text{entraîne } \underline{\mu} \subset \hat{\hat{K}}$$

(ici $\underline{\mathbf{P}\mu}$ est le support de $\mathbf{P}\mu$, $\underline{\mu}$ est celui de μ)

La propriété (c)

On dit que l'opérateur différentiel $\mathbf{P}$ possède la propriété (c) si, pour tout K compact dans R^n, $\hat{\hat{K}}$ est compact et l'application $\mathbf{P}: \mathscr{E}' \to \mathscr{E}'$ est biunivoque.

Cette propriété est assez commode pour la construction d'un noyau élémentaire, mais elle n'est pas très maniable de la vérifier pour l'opérateur différentiel à coefficients variables. Alors nous examinons deux autres conditions un peu plus fortes mais plus concrètes que (c).

La propriété (c_1)

Nous dirons que l'opérateur $\mathbf{P}$ possède la propriété (c_1) s'il possède la propriété suivante:

"Si une distribution $u \in \mathscr{E}'$ est une solution de l'équation $\mathbf{P}u = 0$ dans un voisinage d'un hyperplan qui soit un hyperplan d'appui du support de u, alors il existe un autre voisinage de cet hyperplan où u s'annule identiquement."

On voit bien que pour un opérateur hypo-elliptique, l'unicité du probleme de Cauchy "faible" dans R^n pour toutes les direction entraîne la propriete (c_1). L'unicité du probleme de Cauchy "faible" veut dire que l'équation homogène $\mathbf{P}u = 0$, avec les données initiales sur tout un hyperplan, a au plus une solution dans un voisinage de cet hyperplan.

PROPOSITION 1. *La propriété (c_1) pour un opérateur différentiel implique la propriété (c).*

PROPOSITION 2. *Si l'opérateur diéfférentiel* $\mathbf{P}$ *possède la propriété (c_1), alors quel que soit un compact K, $\hat{\hat{K}}$ est contenu dans l'enveloppe convexe fermé de K.*

Nous allons faire la démonstration sous une condition plus faible que (c_1). On verra au § 5, qu'il y a des opérateurs en dehors du cadre de l'ellipticité, qui satisfont à la condition (c_2)

suivante mais pour qui on ne sait pas démontrer la propriété (c_1).

Définition .

On dit qu'un ensemble est strictement convexe à un point p de cet ensemble s'il admet un hyperplan d'appui à ce point p tel que cet ensemble ne rencontre l'hyperplan qu'à ce point p.

La propriete (c_2).

Nous dirons que l'opérateur $\mathbf{P}$ possède la propriété (c_2) s'il satisfait à la condition suivante:

"Si une distribution u est une solution de l'équation $\mathbf{P}u=0$ dans un voisinage d'un point de son support, et si le support est strictement convexe à ce point, il existe un autre voisinage de ce point où u s'annule identiquement."

PROPOSITION 3. *Si l'opérateur différentiel hypo-elliptique* $\mathbf{P}$ *possède la propriété* (c_2), *on a* $\hat{\hat{K}} \subset \overline{\Gamma(K)}$ *pour* K *compact quelconque dans* R^n. *(Ici* $\overline{\Gamma(K)}$ *est l'enveloppe convexe fermée de* K*)*

Démonstration. On suppose que pour $\varphi \in \mathscr{E}'$, $\underline{\mathbf{P}\varphi} \subset$ compact fixé K, on démontrera que $\underline{\varphi} \cap \overline{\Gamma(K)}$. Supposons le contraire, c'est à dire qu'il y ait un point p de $\underline{\varphi}$ qui n'appartient pas à $\overline{\Gamma(K)}$. Alors, comme $\overline{\Gamma(K)}$ est l'intérsection de toutes les boules fermées qui contiennent K, donc il existe une boule fermée B qui ne contient pas p et qui conient $\overline{\Gamma(K)}$, dont le centre sera désigné q. Puisque $\underline{\varphi}$ est compact, les homothéties de la sphère de B de rayons suffisamment grands n'ont pas de point commun avec $\underline{\varphi}$. En faisant diminuer ces rayons, on trouve la première qui touche $\underline{\varphi}$. Posons p_1 ce point de rencentre, on trouve que $p_1 \in \underline{\varphi}$ et $\underline{\varphi}$ est strictement convexe à p_1 dans B qui est un voisinage de l'hyperplan d'appui à p_1 de $\underline{\varphi}$ où φ est une solution de l'équation $\mathbf{P}\varphi=0$. Donc φ s'annule identiquement, ce qui est une contradiction. Alors on peut dire que $\hat{\hat{K}} \subset \overline{\Gamma(K)}$. Comme l'enveloppe convexe fermée d'un compact est compact, $\hat{\hat{K}}$ est compact, c'est à dire que $\mathbf{P}$ possède la propriété (c), parce que $\underline{\mathbf{P}\varphi}=\phi$ entraîne $\underline{\varphi}=\phi$ par la meme discussion ci-dessus.

Maintenant, on peut énoncer le théorème d'existence d'un noyau élémentaire bilatère très régulier pour l'opérateur différentiel elliptique à coefficients indéfiniment dérivables, qui satisfont à la condition (c_2) dans R^n. Evidemment (c_2) est plus faible que (c_1).

On verra des conditions pour les coefficients qui assurent (c_1) ou (c_2) pour les opérateurs elliptiques. Mais aussi il y a des opérateurs non elliptiques qui satisfont à la condition (c_2) (quelques opérateurs hyperboliques.)

On peut démontrer en plus, sous la même condition, une propriété de Runge "faible" pour les solutions de l'équation homogène.

THEOREM 1 (Malgrange)

Sous l'hypothèse de (c) *pour l'opérateur transposé* $\mathbf{P}'$ *de* $\mathbf{P}$ *l'opérateur différentiel, qui possède un noyau élémentaire à gauche, semi-régulier à droite sur* R^n, *quelque soit ouvert relativement compact* Ω, *il existe un autre ouvert* Ω' *relativement compact dans* R^n *qui contient* Ω, *qui possède la propriété suivante*: *Soit* $f\in\mathcal{E}(\Omega')$, *et* $\mathbf{P}f=0$ *sur* Ω', f *est limite dans* $\mathcal{E}(\Omega)$ *de fonctions* $g\in\mathcal{E}(R^n)$ *et vérifiant* $\mathbf{P}g=0$ *dans* R^n.

(REMARQUE) Au cas de l'opérateur elliptique, il n'est pas nécessaire qu'on suppose l'existence d'un noyau élémentaire, parce que la propriété (c) déjà garantit son existence.

Démonstration

Puisque l'existence d'un noyau élémentaire à gauche semi-régulier à droite est supposée, l'application $\mathbf{P}'$; $\mathcal{E}'\to\mathcal{E}'$ est un isomorphisme topologique (dans), alors $\mathbf{P}'\mathcal{E}'$ est fermé dans $\mathcal{E}'$, donc, si $\nu\in\mathcal{E}'$, $\underline{\nu}\in\Omega$ orthogonal à toutes les solutions de l'équation $\mathbf{P}u=0$ dans R^n, $\nu\in\mathbf{P}'\mathcal{E}'$, c'est à dire qu'il existe une fonction $\mu\in\mathcal{E}'$ telle que $\nu=\mathbf{P}'\mu$. Posons Ω' un ouvert qui contient $\hat{\hat{\Omega}}$, alors $\underline{\mu}\subset\hat{\hat{\Omega}}\subset\Omega'$, (parce que $\hat{\hat{\Omega}}$ est compact.) Donc $\langle\nu, g\rangle=0$ pour toutes les solutions g dans Ω' de $\mathbf{P}g=0$, parce que $\langle\nu, g\rangle=\langle\mu, \mathbf{P}g\rangle=0$.

COROLLAIRE

Si l'opérateur $\mathbf{P}'$ *elliptique satisfait à la condition* (c_1) *ou* (c_2), *pour tout ouvert convexe* Ω, *une solution* f *de* $\mathbf{P}f=0$ *dans* Ω *peut être approchée par des solutions* g_i *de* $\mathbf{P}g_i=0$ *dans* R^n.

Démonstration.

Il suffit de démontrer que la restriction de f à un ouvert Ω_1 relativement compact tel que $\bar{\Omega}_1$ soit contenu dans Ω, est approchée par g_i pour la topologie de $\mathcal{E}(\Omega_1)$, ce qui est justement la conséquence du théorème parce que Ω est un ouvert convexe donc $\hat{\hat{\Omega}}_1\subset\overline{\Gamma(\bar{\Omega})}$, donc le corollaire est démontré.

Le théorème qu'on a démontré est justement la condition pour l'établissement du théorème de la dualité de Grothendieck (Grothendieck [4] §3 proposition 3).

Alors on peut vérifier la dualité entre l'espace des solutions de l'équation elliptique homogène dans un ouvert relativement compact dans R^n, et l'espace des solutions de l'équation homogène transposée dans un voisinage du complémentaire de l'ouvert, pour l'opérateur différentiel elliptique qui possède ainsi que sa transposée la propriété (c_1) ou (c_2) et qui sont à coefficients indéfiniment dérivables.

§4. La propriété de Runge et la propriété du prolongement unique.

Sous l'hypothèse de l'existence d'un noyau élémentaire à droite semi-régulier pour l'opérateur différentiel **P**, on peut facilement démontrer l'équivalence entre la propriété bien connue de Runge et la propriété du prolongement unique. D'abord, précisons-les.

Nous dirons que l'opérateur **P** possède la propriété du prolongement unique s'il possède la propriété suivante (A) ;

La propriété (A).

Quelque soit un ouvert Ω, si u est une solution de l'équation $\mathbf{P}u=0$ *dans Ω, s'annulant identiquement dans un ouvert $\Omega_1 \subset \Omega$, dans R^n, u est identiqument nulle dans Ω.*

Nous dirons que l'opérateur **P** possède la propriété de Runge s'il possède la propriété suivante : "Si Ω est un ouvert dans R^n tel que $\hat{\Omega}$ (la réunion de Ω et tous les composants connexes compacts du complementaire de Ω) ègale à Ω, toute $f \in \mathcal{E}(\Omega)$ et vérifiant $\mathbf{P}f=0$ est limite de g_i qui sont des solutions de l'équation $\mathbf{P}g_i=0$ dans R^n".

THEOREME 2. *Si l'opérateur* $\mathbf{P}'$ *transposé de* **P** *un opérateur différentiel hypo-elliptique, qui possède un noyau élémentaire à droite, la propriété de Runge pour* **P** *est équivalente à la propriété du prolongement unique pour l'opérateur* $\mathbf{P}'$.

(REMARQUE) P. D. Lax l'a démontré pour l'opérateur elliptique de 2nd ordre. Il me semble que sa méthode est applicable pour l'opérateur d'ordre$>$2, mais notre démonstration est très simple.

D'abord nous démontrons à partir de la propriété de Runge la propriété (A). Par l'observation de L. Nirenberg (voir P. D.

Lax [5]), il suffit de démontrer que si une fonction $u \in \mathfrak{D}(R^n)$ est une solution de l'équation $\mathbf{P}'u=0$ dans le complémentaire d'un compact $K=\hat{K}$ et K soit contenu dans l'intérieure du support de u, $u \equiv 0$ dans $\complement K$.

Posons $v=\mathbf{P}'u$, $v \in \mathfrak{D}(R^n)$, $\underline{v} \subset K$, alors v est orthogonal aux solutions f de l'équation $\mathbf{P}f=0$ dans R^n, parce que $\langle v, f \rangle = \langle u, \mathbf{P}f \rangle = 0$. Donc par la propriété de Runge il est aussi orthogonal à g, solution de $\mathbf{P}g=0$, dans un ouvert quelconque qui contient $K=\hat{K}$, *En* particulier, pour toutes les fonctions $\varphi \in \mathfrak{D}(R^n)$ telles que leurs supports soient contennus dans le complémentaire de $K=\hat{K}$, $E.\varphi=g$ est une solution dans un ouvert qui contient $K=\hat{K}$, qui ne contient pas le support d'une fonction φ, donc v est aussi orthogonal à g, c'est à dire que $\langle v, g \rangle = \langle v, E\varphi \rangle = \langle u, \varphi \rangle = 0$. Ce qui signifie que u est identiquement nulle dans le complémentaire de $\hat{K}$. c. q. f. d.

L'inverse est presque tout démontré par la proposition 3, parce que la propriété (A) implique evidemment (c_1), (c_2), alors on peut voir facilement $\hat{\hat{K}}=\hat{K}$ (qu'on a introduit ici). Alors dans le corollaire du théoréme 1 on peut remplacer $\overline{\Gamma(\overline{\Omega}_1)}$ par $\hat{\Omega}_1$ et aussi un ouvert convexe par n'importe quel ouvert Ω tel que $\Omega=\hat{\Omega}$. La propriété de Runge sera alors démontrée.

COROLLAIRE. *Si* **P** *est un operateur elliptique à coefficients indéfiniment dérivables, alors la propriété de Runge est éqivalente à la propriété du prolongement unique.*

Démonstration.

On sait que l'opérateur elliptique possède toujours un noyau élémentaire à droite, (toujours semi-régulier à gauche par la hypoellipticité) dans un ouvert Ω dont le diamètre est suffisamment petit, alors, comme la propriété du prolongement unique est une propriété locale, donc la démonstration ci-dessus est justement applicable en prennant un ouvert Ω suffisamment petit au lieu de R^n. Pour la démonstration du sens invers, il suffit de remarquer que la propriété (A) implique (c) (c_1) (c_2), par suite, garantit l'existence d'un noyau élémentaire très régulier bilatère.

§ 5. Divers exemples.

D'abord, énumérons les opérateurs pour lesquels on est assuré de prouver la propriété du prolongement unique. (C'est à dire (A).)

Naturellement, par le théorème d'Holmgren, les opérateurs elliptique à coefficients analytiques, en particulier, à coefficients constantes, ont cette propriété. Après Holmgren, Carleman a prouvé cette propriété pour les opérateurs elliptiques dans R^2 à coefficients indéfiniment dérivables, dont les polynomes caractéristiques n'ont pas de racines multiples complexes. En 1956. N. Aronszajn [1] a réussi de la démonstration pour les opérateurs elliptiques générales de 2nd ordre. Finalement, 1958, A. P. Calderón [5] a établi une généralisation complète du resultat de Carleman. Il a trouvé un théorème remarquable qui assure cette propriété pour les opérateurs elliptiques dans R^n à coefficients indéfiniment dérivables dont les polynomes caractéristiques n'ont pas de racines multiples complexes dans le domain complexe avec deux cas exceptionnels. Mais pour les opérateurs d'ordre>2, de caractéristiques multiples, on ne sait que très peu de choses en ce qui concerne la propriété (A).

Tandis que pour les conditions (c_1) et (c_2), on a trouvé quelques types de conditions de coefficients de l'opérateur différentiel.

L. Nirenberg a trouvé diverses conditions pour l'unicité du probleme de Cauchy pour une direction. Nos conditions (c_1), (c_2) sont indépendantes de la direction. Alors, il faut discerner des conditions qui sont invariantes par le changement des coordonées par l'application linéaire de $R^n \to R^n$ non-singulière. Maintenant nous noterons un opérateur différentiel sur R^n écrit de la manière suivante.

$$\mathbf{P} = P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a^{\alpha}(x) \frac{1}{i} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{1}{i} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{1}{i} \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$$
$$\alpha = \alpha_1, \cdots, \alpha_n$$

On dira le polynome caractéristique de $P(x, D)$, le polynome suivant :

$$P(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = m} a^{\alpha}(x) \xi^{\alpha} \quad \xi^{\alpha} = \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \cdots \xi_n^{\alpha_n}$$

On dit l'opérateur $\mathbf{P}$ elliptique (au sens de Petrowski) si et seulement si $P(x, \xi) = 0$ $x \in R^n$ entraîne $\xi = 0$ pour ξ réel. Alors la condition de A. P. Calderón [5] pour un opérateur elliptique $\mathbf{P}$

est que $P(x, \xi)=0$ n'admet pas de racines multiples pour $\xi \in C^n$ $|\xi|=1$ $x \in R^n$.

La recherche de L. Nirenberg montre que, pour les opérateurs **P** de "Constant leading term", c'est à dire $P(x, \xi)=P(\xi)$. S'il satisfait à la condition de A. P. Calderón, alors, l'opérateur **P** possède la propriété (c_2). **P** n'est pas nécessairement elliptique.

S. Mizohata [7] a trouvé aussi une condition pour l'opérateur **P** elliptique qui assure la propriété (c_1). Il a demontré que si **P** est un operateur elliptique d'ordre $2m$ et si $P(x, \xi)=P(\xi)$ (c'est à dire, "Constant leading term".) et si P ne contient pas des opérateurs de dérivations d'odre r, $m+1 \leqq r < 2m$, alors **P** possède la propriété (c_1). Il y a aussi des opérateurs elliptiques d'ordre>2, du type spécial qui sont assurés d'avoir la propriété (A). Mais il n'y a pas de théorie générale.

REFERENCE

[1] N. Aronszajn, "Sur l'unicité du prolongement des solutions des équations aux dérivées partielles elliptiques du seconde ordre." Comptes Rendus, Vol. 242 (1956) pp. 723–725.

[2] T. Carleman, "Sur un problème d'unicité pour les systèmes d'équations aux dérivées partiellees à deux variables indépendantes Arkiv för Mathematik, vol. 26 B, no. 17 (1939) pp. 1–9.

[3] A. P. Calderón, "Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations." American Journal of Math. 1958 Jan. p. 16–36.

[4] "Sur les espaces de solutions d'une classe générale d'équations aux dérivées partielles. Journal d'analyse mathématique, Vol. II, pp. 243–279.

[5] P. D. Lax, "A stability theorem for solution of abstract differential equations and its application to the study of local behaviour of solution of elliptic equations." Communications on pure and applied Mathematics (1956), Vol. 9, pp. 747–766.

[6] B. Malgrange, "Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution." Annales de l'institut Fourier. 1956, Vol. 6, pp. 271–354.

[7] S. Mizohata, "Unicité dans le problème de Cauchy pour quelques équations différentielles elliptiques." Mem. Col. Sci. Univ. of Kyoto. Ser. A, Vol. XXXI, Mat. No. 2, 1958.

[8] L. Nirenberg, "Uniqueness for the Cauchy problem for differential equations with constant leading terms. Comm. P. A. M. 1957, Vol. 10, pp. 85–105.