Memoirs of the College of Science, University of Kyoto, Series A
Vol. XXXI, Mathematics No. 3, 1958.

Unicité du prolongement des solutions pour quelques opérateurs différentiels paraboliques

Par

Sigeru Mizohata

(Reçu le 15, Octobre 1958)

---

§ 1. Introduction.

Nous voulons démontrer l'unicité des solutions dans la direction de l'espace pour l'équation parabolique de la forme :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-L\right)u(x,\ t)=0\,, \tag{1, 1}$$

où L est un opérateur elliptique de second ordre :

$$L=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,\ t)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x,\ t)\frac{\partial}{\partial x_i}+c(x,\ t)\,, \tag{1, 2}$$

$a_{ij}(x,\ t)$ étant des fonctions à valeurs réelles, vérifiant la condition :

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,\ t)\xi_i\xi_j\geqslant\delta(x,\ t)|\xi|^2,\quad \delta(x,\ t)>0\,. \tag{1, 3}$$

On sait bien que si les coefficients sont analytiques en x, alors la solution u l'est. Récemment, MM. Itô et Yamabe not établi dans [1], un résultat remarquable. D'autre part, M. Calderón a étudié systématiquement les opérateurs d'intégrales singulières avec M. Zygmund [2], "singular integral operator", et obtenu un résultat puissant pour les systèmes kowalewskiens [3]. Bien que l'équation parabolique (1, 1) n'entre pas dans le cadre de Calderón en apparence — car, son cadre est borné aux systèmes kowalewskiens dont l'équation caractéristique n'ait jamais de racine multiple — nous avons fait, avec une modification, entrer l'équation (1, 1) dans son cadre.

Nous supposons, pour simplifier le raisonnement, que tous les coefficients dans (1, 1) sont *indéfiniment différentiables.* Alors, on sait que les solutions u le sont. Maintenant, nous énonçons notre résultat :

Théorème 1. *Toute solution* $\mathrm{u}(x, t)$ *de l'équation* (1, 1), *définie au voisinage de l'origine, vérifiant la condition* :

$$\mathrm{u}(x, t) = \frac{\partial}{\partial x_n} \mathrm{u}(x, t) = 0 \quad \textit{pour} \quad x_n = 0 ,$$

s'annule dans un voisinage de l'origine.

Une conséquence immédiate, nous l'énonçons sous la forme de deux corollaires :

Corollaire 1. *Le Théorème est encore vrai quand on remplace l'hyperplan* $x_n=0$ *par n'importe quel hyperplan non horizontal passant par l'origine (il faut alors remplacer la condition* $\frac{\partial}{\partial x_n}\mathrm{u}=0$ *par* $\frac{\partial}{\partial n}\mathrm{u}=0$, *n étant une direction transversale à l'hyperplan).*

Démonstration. Soit H un tel hyperplan ; H : $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n + \alpha_0 t = 0$. Par hypothèse, $\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \neq 0$, supposons donc $\alpha_n \neq 0$. Cette condition dit que l'axe des x_n est une direction transversale. Nous choisissons un nouveau système de coordonnées $(x'_1, \cdots, x'_{n-1})$ dans $\mathrm{H} \cap (t=0)$. On a alors dans l'espace (x, t) un système de coordonnées $(x'_1, \cdots, x'_{n-1}, x_n, t)$. Pour ce système de coordonnées l'équation transformée est encore de la forme (1, 1), et H s'exprime par $\beta x_n + \alpha_0 t = 0$, $\beta \neq 0$. On change ensuite $x_n \to x'_n$: $x'_n = x_n + \frac{\alpha_0}{\beta} t$. Alors $(x'_1, \cdots, x'_{n-1}, x'_n, t)$ garde encore l'équation (1, 1) sous la même forme, et H s'exprime $x'_n = 0$. c.q.f.d.

Etant donnés deux ouverts $O_1 \subset O_2$ dans l'espace-(x, t), nous dirons d'après Nirenberg [6], un point $P \in O_2$ appartient au *composant horizontal* de O_1, si P peut être joint à un point de O_1 par une ligne brisée *horizontale* (c'est-à-dire une ligne dont le t-composant des coordomées soit constant) dans O_2. Alors on a (voir [6], Théorème 9, démontré dans le cas $n=1$),

Corollaire 2. *Toute solution* $\mathrm{u}(x, t)$ *de* (1, 1), *définie dans* O_2, *s'annulant dans* O_1, *s'annule dans le composant horizontal de* O_2.

Comme la démonstration découle immédiatement du Corollaire 1, nous renvoyons le lecteur à [6], p. 102-103. Nous nous bornerons à remarquer que le Corollaire 1 est encore vrai même quand on remplace l'hyperplan par l'hypersurface (indéfiniment différentiable) dont le plan tangent en ce point n'est pas horizontal.

Dans le § 1, nous considérerons une classe d'opérateurs, qui généralise celle de Calderón et Zygmund. Nous signalons toutefois que cette classe ne serait plus, à précisément parler, ce qu'on appelle l'opérateur d'intégrales singulières aujourd'hui. Mais, comme nous verrons dans la suite, son caractère est tout-à-fait le même que celui de Calderón et Zygmund.

§ 2. Une classe d'opérateurs.

Nous suivons les définitions et les notations de [2] et [3]. Soit $\hat{h}(x, \xi)$ est une fonction de deux variables $x \in R_x^n$, $\xi \in R_\xi^n$, vérifiant *certaines conditions*. On attache à cette fonction l'opérateur H défini par

$$\mathrm{Hf}(x) = \int \exp(2\pi i x\xi)\hat{h}(x, \xi)\hat{f}(\xi)d\xi . \tag{2, 1}$$

où $\hat{f}(\xi)$ est la transformée de Fourier de $f(x)$. La fonction $\hat{h}(x, \xi)$ est dite alors le symbole de H et on la désigne par $\sigma(\mathrm{H}) = \hat{h}(x, \xi)$.

Nous voulons dans cet article traiter une autre classe de Caldrón et Zygmund :

$$\hat{h}(x, \xi) = \sum_{\nu \geqslant 0} a(x)^\nu \hat{h}_\nu(\xi), \quad \text{où} \quad a(x) = (a_1(x),\ a_2(x),\ \cdots,\ a_p(x)) ; \tag{2, 2}$$

$$a(x)^\nu = a_1(x)^{\nu_1} a_2(x)^{\nu_2} \cdots a_p(x)^{\nu_p}, \quad \text{où} \quad \nu = (\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_p) .$$

Supposons maintenant que

$$|\hat{h}_\nu(\xi)| \leqslant \mathrm{K} < +\infty , \quad \nu \geqslant 0 , \tag{2, 3}$$

$$|a_i(x)| \leqslant \rho < 1 , \quad (i = 1, 2, \cdots, p) . \tag{2, 4}$$

On a alors

PROPOSITION 2, 1. *Sous les conditions* (2, 2), (2, 3), *et* (2, 4), $\hat{h}(x, \xi)$ *définit un opérateur continu de* L^2 *dans lui-même.*

Démonstration. Pour $f(x) \in L^2$, on aura

$$\mathrm{Hf}(x) = \sum_{\nu \geqslant 0} a(x)^\nu \int \exp(2\pi i x\xi)\hat{h}_\nu(\xi)\hat{f}(\xi)d\xi . \tag{2, 5}$$

Il est clair que $\int \exp(2\pi i x\xi)\hat{h}_\nu(\xi)\hat{f}(\xi)d\xi = h_\nu(x) * f(x)$, où $h_\nu(x)$ est l'image réciproque (de Fourier de) $\hat{h}_\nu(\xi)$; elle $(h_\nu(x))$ n'est pas nécessairement une fonction, mais une distribution. On désignera désormais :

$$h\cdot f(x)=\int \exp(2\pi i x\xi)\hat{h}(\xi)\hat{f}(\xi)d\xi\,. \tag{2, 6}$$

Alors, on a

$$\|h\cdot f\|_{L^2}\leqslant \sup_{\xi}|\hat{h}(\xi)|\cdot\|f\|_{L^2}\,. \tag{2, 7}$$

Nous écrivons désormais, sauf mention expresse, $\|\ \|$ au lieu de $\|\ \|_{L^2}$. Nous avons donc

$$\|\mathrm{H}f\|_{L^2}\leqslant(\sum_{\nu\geqslant 0}\sup|a(x)^\nu|)\cdot K\cdot\|f\|\leqslant(\sum_{\nu\geqslant 0}\rho^{|\nu|})\cdot K\cdot\|f\|\,. \tag{2, 8}$$

c.q.f.d.

Désignons par $\mathfrak{D}^m_{L^2}$, ($m>0$, entier), l'espace des fonctions $f(x)\in L^2$ ainsi que ses dérivées jusqu' à l'ordre m, muni du produit scalaire :

$$(f,g)_{\mathfrak{D}^m_{L^2}}=\int\sum_{|\alpha|\leqslant m}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f(x)\cdot\overline{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha g(x)}\,dx\,;$$

désignons par $\mathfrak{D}^{-m}_{L^2}$ l'espace dual de $\mathfrak{D}^m_{L^2}$.

Si l'on suppose de plus que les $a_i(x)$ ($i=1,\cdots,p$) appartiennent à $\mathcal{B}$: $a_i(x)$ et toutes ses dérivées sont des fonction continues et bornées, on a

Proposition 2, 2. *H est une application continue de $\mathfrak{D}^m_{L^2}$ dans lui-même, où m est un entier quelconque positif ou négatif.*

Démonstration. Considérons d'abord le cas où $\sigma(H)=c(x)\hat{h}(\xi)$. On aura

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha Hf=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha(c(x)h\cdot f)$$
$$=\sum_{0\leqslant\beta\leqslant\alpha}c^\alpha_\beta\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta c(x)\right]\cdot h\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha-\beta}f\,,$$

en prenant $|\alpha|\leqslant m$, d'où

$$\|Hf\|_{\mathfrak{D}^m_{L^2}}\leqslant c(m)\left(\sum_{|\alpha|\leqslant m}\sup_x\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha c(x)\right|\right)\cdot\sup_\xi|\hat{h}(\xi)|\cdot\|f\|_{\mathfrak{D}^m_{L^2}}\,.$$

Revenons au cas général. on aura

$$\|Hf\|_{\mathcal{D}^m_{L^2}} \leqslant c(m)\cdot K\cdot \|f\|_{\mathcal{D}^m_{L^2}} \cdot \left(\sum_{\nu\geqslant 0}\left(\sum_{|\alpha|\leqslant m}\sup\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} a(x)^{\nu}\right|\right)\right).$$

Dans le cas où m est négatif, compte tenu de ce que $\mathcal{D}^m_{L^2}$ est le dual de $\mathcal{D}^{-m}_{L^2}$, et que si on suppose $\sigma(H)=c(x)\hat{h}(\xi)$, alors $H^*f= h^*\overline{c(x)}f$, où $\sigma(h^*)=\overline{\hat{h}(\xi)}$, on a facilement le lemme. c.q.f.d.

Ce qui est essentiel dans [3] est le fait suivant ([3], Théorème 3): *les opérateurs* $H\Lambda-\Lambda H$, $\Lambda(H^*-H^\sharp)$, $(H^*-H^\sharp)\Lambda$, $\Lambda(H_1\circ H_2-H_1H_2)$, $(H_1\circ H_2-H_1H_2)\Lambda$ *sont des opérateurs bornés de* L^2 *dans lui-même.*

Abordons la vérification.

Commençons par l'opérateur $H\Lambda-\Lambda H$. D'abord le cas où $\sigma(H)=c(x)\hat{h}(\xi)$, où $c(x)\in\mathcal{B}$, $\hat{h}(\xi)$ est une fonction bornée. Nous imposons à Λ les conditions suivantes:

(2, 9)
$$\begin{cases} \text{1)} & \hat{\Lambda}(\xi) \text{ est localement bornée, indéfiniment différentiable dans le complémentaire de l'origine;} \\ \text{2)} & \left|\left(\dfrac{\partial}{\partial\xi}\right)^{\nu}\hat{\Lambda}(\xi)\right| \leqslant \dfrac{c_\nu}{|\xi|^{(|\nu|-1)d}}, \text{ pour } |\nu|\geqslant 1,\ |\xi|\geqslant R\geqslant 1, \text{ où } 0<d\leqslant 1. \end{cases}$$

On prend $\alpha(\xi)\in\mathcal{D}$:

$$\alpha(\xi)=\begin{cases} 1 & \text{pour } |\xi|\leqslant R, \\ 0 & \text{pour } |\xi|\geqslant 2R, \\ 0\leqslant\alpha(\xi)\leqslant 1, & \text{pour } R\leqslant|\xi|\leqslant 2R. \end{cases}$$

Posons

(2, 10) $$\hat{\Lambda}_1(\xi)=\alpha(\xi)\hat{\Lambda}(\xi),\quad \hat{\Lambda}_2(\xi)=[1-\alpha(\xi)]\hat{\Lambda}(\xi).$$

(2, 11) $$H\Lambda-\Lambda H=(H\Lambda_1-\Lambda_1 H)+(H\Lambda_2-\Lambda_2 H).$$

Evidemment on a

(2, 12) $$\|H\Lambda_1 f\|,\ \|\Lambda_1 Hf\|\leqslant\sup_{\xi}|\hat{\Lambda}_1(\xi)|\cdot\sup_{\xi}|\hat{h}(\xi)|\cdot\sup_{x}|c(x)|\cdot\|f\|.$$

Examinons le deuxième terme de (2, 11):

(2, 13) $$H\Lambda_2-\Lambda_2 H=c(x)h\Lambda_2-\Lambda_2\cdot c(x)h=[c(x)\Lambda_2-\Lambda_2 c(x)]h.$$

Il suffit donc d'envisager l'opérateur $c(x)\Lambda_2-\Lambda_2 c(x)$. Or, pour $f(x)\in\mathcal{D}$, on a

(2, 14) $$(c(x)\Lambda_2-\Lambda_2 c(x))f=\int\Lambda_2(x-y)[c(x)-c(y)]f(y)dy.$$

Il faut noter que cette intégrale ne doit pas être prise au sens habituel, car $\Lambda_2(x)$ n'est pas en général fonction, mais une distribution.

Développons $c(x)-c(y)$ autour du point x:

$$(2, 15)\quad c(y)-c(x)=\sum_{|\nu|\leqslant m-1}\frac{D^{\nu}c(x)}{\nu!}^{1)}(y-x)^{\nu}+\sum_{|\nu|=m}\frac{c_{\nu}(y,x)}{\nu!}(y-x)^{\nu}.$$

Nous définissons, par exemple, les $c_{\nu}(y, x)$ de la manière suivante: Nous avons défini dans [4], p. 20, la decomposition (N):

$$(\mathrm{N})\qquad a(x)=\sum x_i a_i(x).$$

Si la fonction $a(x)$ dépend de λ de manière indéfiniment différentiable, dans l'espace $\mathcal{B}_0: \lambda\to a(x;\lambda)$ est une fonction indéfiniment différentiable, on aura

$$\partial_{\lambda}a(x;\lambda)=\sum x_i\partial_{\lambda}a_i(x;\lambda).$$

et encore, nous avons

$$\sup_x\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}\partial_{\lambda}a_i(x;\lambda)\right|\leqslant k_{\alpha}\cdot\sum_{|\beta|=|\alpha|+1}\sup_x\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\beta}\partial_{\lambda}a(x;\lambda)\right|.$$

Revenons à la décomposition (N). On décompose les $a_i(x)$ encore par la règle (N):

$$(\mathrm{N}_2)\qquad a(x)=\sum_{i=1}^{n}x_i a_i(0)+\sum x_i x_j a_{ij}(x).$$

On voit facilement que

i) $a_i(0)=\dfrac{\partial}{\partial x_i}a(0)$.

ii) $\sup_x\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}a_{ij}(x)\right|\leqslant k_{\alpha}\cdot\sum_{|\beta|=|\alpha|+2}\sup_x\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\beta}a(x)\right|$, pour tout $\alpha\geqslant 0$,

de proche en proche, on aura

$$(\mathrm{N}_m)\qquad \begin{aligned}&a(x)=\sum_{1\leqslant|\nu|\leqslant m-1}\frac{x^{\nu}}{\nu!}D^{\nu}a(0)+\sum_{|\nu|=m}\frac{x^{\nu}}{\nu!}a_{\nu}(x),\\&\sup_x\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}a_{\nu}(x)\right|\leqslant k_{m+|\alpha|}\sum_{|\beta|=|\alpha|+m}\sup_x\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\beta}a(x)\right|.\end{aligned}$$

De plus, si l'on prend $a(x;\lambda)$ on aura

$$\sup_x\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}\partial_{\lambda}a_{\nu}(x;\lambda)\right|\leqslant k_{m+|\alpha|}\sum_{|\beta|=|\alpha|+m}\sup_x\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\beta}\partial_{\lambda}a(x;\lambda)\right|.$$

1) D^{ν} désigne $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\nu}$. Nous utiliserons dans la suite ces deux notations.

Ceci fait, considérons la fonction $c(y)-c(x)$. En posant $y=y'+x$, et regardons x comme paramètre: $c(y)-c(x)=c(y';x)\in\mathcal{B}_0$. On aura alors

$$c(y)-c(x)=c(y'+x)-c(x)=\sum_{1\leqslant|\nu|\leqslant m-1}\frac{D^\nu c(x)}{\nu!}y'^\nu+\sum_{|\nu|=m}\frac{c_\nu'(y';x)}{\nu!}y'^\nu$$

En posant, $c_\nu'(y';x)=c_\nu'(y-x;x)=c_\nu(y,x)$, on a

$$\begin{aligned}(2,16)\quad \sup_{x,y}\left|\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\alpha c_\nu(y,x)\right| &= \sup_{x,y'}\left|\left(\frac{\partial}{\partial y'}\right)^\alpha c_\nu'(y';x)\right|\\ &\leqslant k_{m+|\alpha|}\cdot\sum_{|\nu|=m+|\alpha|}\sup_x\left|\left(\frac{\partial}{\partial y'}\right)^\nu[c(y'+x)-c(x)]\right|\\ &= k_{m+|\alpha|}\sum_{|\nu|=m+|\alpha|}\sup_x\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\nu c(x)\right|.\end{aligned}$$

Revenons à notre but, d'abord

$$\varphi_\nu(x)=\int(x-y)^\nu\Lambda_2(x-y)f(y)dy\xrightarrow[\mathscr{F}]{}\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^{|\nu|}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\nu\hat{\Lambda}_2(\xi)\hat{f}(\xi).$$

D'où, par Plancherel,

$$\begin{aligned}\|\varphi_\nu(x)\| &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{|\nu|}\left(\int\left|\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\nu\hat{\Lambda}_2(\xi)\right|^2\left|\hat{f}(\xi)\right|^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leqslant\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{|\nu|}\sup_\xi\left|\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\nu\hat{\Lambda}_2(\xi)\right|\cdot\|f\|.\end{aligned}$$

Finalement évaluons

$$\varphi_\nu(x)=\int\left|c_\nu(y,x)(x-y)^\nu\Lambda_2(x-y)\right||f(y)|dy,\quad|\nu|=m,$$

compte tenu de ce que $x^\nu\Lambda_2(x)$ est une fonction pour $m(|\nu|=m)$ assez grand, on décompose cette intégrale en deux parties:

$$\varphi_\nu(x)=\int_{|x-y|\leqslant1}+\int_{|x-y|\geqslant1}=\varphi_\nu^1(x)+\varphi^2(x),$$

D'abord

$$|(x-y)^\nu\Lambda_2(x-y)|\leqslant\left(\frac{1}{2\pi}\right)^m\int\left|\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\nu\hat{\Lambda}_2(\xi)\right|d\xi.$$

Ceci entraîne que

$$(2,17)\quad\|\varphi_\nu^1(x)\|\leqslant\sup_{x,y}|c_\nu(x,y)|\cdot\mathrm{B}_n\cdot\left(\frac{1}{2\pi}\right)^m\left(\int\left|\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\nu\hat{\Lambda}_2(\xi)\right|d\xi\right)\|f\|.$$

où B_n est le volume de la boule unité dans R^n.

En effet, soient $f \in L^2$, μ une mesure telle que $\int |d\mu| < +\infty$, on aura la relation suivante (voir, par exmple, [5], Tome II p. 8):

$$\|f * \mu\|_{L^2} \leqslant \|f\|_{L^2} \cdot \left(\int |d\mu|\right).$$

Dans notre cas

$$|\varphi_\nu^1(x)| \leqslant \sup_{y,x} |c_\nu(y, x)| \cdot \int_{|x-y|\leqslant 1} |(x-y)^\nu \Lambda_2(x-y)| \, |f(y)| dy,$$

et nous avons appliqué la relation précédente en posant $\mu = (x^\nu \Lambda_2(x))_{|x|\leqslant 1}$.

Passons à $\varphi_\nu^2(x)$:

$$|\varphi_\nu^2(x)| \leqslant \sup_{y,x} |c_\nu(y, x)| \cdot \int_{|y-x|\geqslant 1} |(x-y)^\nu \Lambda_2(x-y)| \cdot |f(y)| dy.$$

Or,

$$(x_\nu \Lambda_2(x))_{|x|\geqslant 1} = \frac{1}{|x|^{2p}} \cdot (|x|^{2p} \cdot x^\nu \Lambda_2(x))_{|x|\geqslant 1}, \quad \text{et}$$

$$|x|^{2p} x^\nu \Lambda_2(x) \xrightarrow[\mathscr{F}]{} \left(\frac{1}{-2\pi i}\right)^{|\nu|+2p} \Delta_\xi^p \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\nu \hat{\Lambda}_2(\xi), \quad \text{par Sobolev,}$$

(2, 19) $$\sup_x (|x|^{2p} x^\nu \Lambda_2(x)) \leqslant c(n) \cdot \| |x|^{2p} x^\nu \Lambda_2(x) \|_{\mathcal{D}_{L^2}^{[\frac{n}{2}]+1}}$$
$$\leqslant c(n) \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{|\nu|+2p} \left(\int \left| (1+|\xi|)^{[\frac{n}{2}]+1} \Delta_\xi^p \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\nu \hat{\Lambda}_2(\xi) \right|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Déterminons maintenant l'entier m. Pour que (2, 17) ait le sens, il faut et il suffit que

$$\int \left| \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\nu \hat{\Lambda}_2(\xi) \right| d\xi < +\infty, \quad |\nu| = m.$$

Compte tenu de la condition (2, 9), et de ce que $\hat{\Lambda}_2(\xi) = [1-\alpha(\xi)]\hat{\Lambda}(\xi)$, on a

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\nu \hat{\Lambda}_2(\xi) \right| \leqslant \frac{c_\nu'}{|\xi|^{(|\nu|-1)d}} \quad \text{pour} \quad \xi \in R_\xi^n.$$

On prend donc, par exemple de la manière que $(m-1)d \geqslant n+1$ c'est-à-dire que

(2, 20) $$m = \left[\frac{n+1}{d}\right] + 2.$$

Ceci fait, on prend $p (2p \geqslant n+1)$ assez grand de manière que l'intégrale dans le second membre de (2, 19) soit finie:

$$\left|\Delta_\xi^\nu\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\nu \hat{\Lambda}_2(\xi)\right| \leqslant \alpha(m+2p)\cdot\Big(\sum_{|\beta|\leqslant m+2p} c_\beta\Big)\cdot|\xi|^{(1-m-2p)d}, \qquad |\nu|=m\,,$$

donc on prend p de manière que

$$(1-m-2p)d+\left[\frac{n}{2}\right]+1\leqslant-\left[\frac{n}{2}\right]-1\,.$$

Notons que p est déterminé par m et n. Pour p ainsi fixé, on a, en désignant le second membre de (2, 19) par $\mathrm{I}(n, m)$,

$$\|\varphi_\nu^2(x)\|\leqslant \sup_{y,x}|c_\nu(y, x)|\cdot \mathrm{I}(n, m)\left(\int_{|x|\geqslant 1}\frac{dx}{x^{n+1}}\right)\|f\|\,.$$

Finalement, compte tenu de (2, 16),

$$\sup_{y,x}|c_\nu(y, x)|\leqslant k_m\cdot\sum_{|\alpha|=m}\sup_x|D^\alpha c(x)|\,.$$

Résumons notre résultat sous la forme:

LEMME 2, 1. *Soit* Λ *un opérateur vérifiant la condition* (2, 9). *Soit* H *un opérateur tel que* $\sigma(H)=c(x)\hat{h}(\xi)$. *On a pour* $f\in L^2$,

$$\|(\Lambda H-H\Lambda)f\|\leqslant C_\Lambda\Big(\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant k(n,d)}\sup_x|D^\alpha|c(x)|\Big)\sup_\xi|\hat{h}(\xi)|\cdot\|f\|\,,$$

où $k(n, d)=\left[\frac{n+1}{d}\right]+2$, *et* C_Λ *est une constante qui ne dépend que de* Λ.

REMARQUE. Comme $\mathfrak{D}$ est dense L^2, nous avons raisonné en se bornant aux cas où $f\in\mathfrak{D}$, ou bien $hf\in\mathfrak{D}$.

Revenons maintenant au cas général:

$$(2, 2) \qquad \sigma(H)=\sum_{\nu\geqslant 0}a(x)^\nu\hat{h}_\nu(\xi)\,. \quad |\hat{h}_\nu(\xi)|\leqslant K\,.$$

En vertu du lemme précédent, en évaluant terme à terme,

$$\|(H\Lambda-\Lambda H)f\|\leqslant C_\Lambda\cdot K\Big(\sum_{\nu\geqslant 0}\Big(\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant k}\sup_x|D^\alpha[a_1(x)^{\nu_1}\cdots a_p(x)^{\nu_p}]|\Big)\Big)\cdot\|f\|\,.$$

Compte tenu de $|a_i(x)|\leqslant\rho<1$, il est facile de voir que la somme $\sum_{\nu\geqslant 0}$ est finie. Nous avons donc

PROPOSITION 2, 3. *Soit* H *un opérateur dont le symbole satisfasse à la condition* (2, 3) *et* (2, 4); *Soit* Λ *un opérateur vérifiant la condi-*

tion (2, 9). *Alors, l'opérateur* $H\Lambda-\Lambda H$ *est borné de* L^2 *dans lui-même.*

Passons à $(H^*-H^\sharp)\Lambda$, en supposant d'abord $\sigma(H)=c(x)\hat{h}(\xi)$. Alors $h^\sharp=\overline{c(x)}h^*$, $H^*=h^*\overline{c(x)}$, où $h^*\to\overline{\hat{h}(\xi)}$.

Supposons pour $\hat{h}(\xi)$ et $\hat{\Lambda}(\xi)$ que

$$(2, 20)\quad \begin{cases} \left|\hat{\Lambda}(\xi)\left(\dfrac{\partial}{\partial\xi}\right)^\nu \hat{h}(\xi)\right| \leqslant \dfrac{B_\nu}{|\xi|^{(|\nu|-1)d}}, \text{ pour } |\xi|\geqslant R, \text{ où } 0<d\leqslant 1, \\ \qquad |\nu|\geqslant 1, \quad |\hat{h}(\xi)|\leqslant B_0, \quad \text{pour} \quad \xi\in R^n_\xi, \\ \hat{\Lambda}(\xi)=\sqrt[q]{\hat{\lambda}(\xi)}, \text{ où } \hat{\lambda}(\xi) \text{ est un polynome } \geq 0\,; >1 \text{ pour} \\ \qquad |\xi|\geqslant R\,; \text{ degré de } \hat{\lambda}(\xi)\leq q,\ (q\geq 2). \end{cases}$$

En utilisant $\alpha(\xi)$ définie plus haut, on décompose $\hat{h}(\xi)$:

$$\hat{h}(\xi)=\alpha(\xi)\hat{h}(\xi)+[1-\alpha(\xi)]\hat{h}(\xi)=\hat{h}_1(\xi)+\hat{h}_2(\xi).$$
$$h^*=h_1^*+h_2^*.$$

on aura

$$(2, 21)\qquad \begin{aligned}(H^*-H^\sharp)\Lambda f &= (h^*\overline{c(x)}-\overline{c(x)}h^*)\Lambda f \\ &= (h_1^*\overline{c(x)}-\overline{c(x)}h_1^*)\Lambda f+(h_2^*\overline{c(x)}-\overline{c(x)}h_2^*)\Lambda f.\end{aligned}$$

Envisageons le premier terme du dernier membre D'abord

$$(2, 22)\qquad \begin{aligned}\|c(x)h_1^*f\| &\leqslant \sup_x|c(x)|\cdot\sup_\xi|\hat{h}_1(\xi)\hat{\Lambda}(\xi)|\cdot\|f\| \\ &\leqslant \sup_x|c(x)|\cdot B_0\sup_{|\xi|\leqslant 2R}|\hat{\Lambda}(\xi)|\cdot\|f\|.\end{aligned}$$

Quant à $h_1^*\overline{c(x)}\Lambda f$, on considère

$$(g,\ h_1^*\overline{c(x)}\Lambda f)=(\Lambda c(x)h_1 g,\ f).$$

Or, $\quad \hat{\Lambda}(\xi)^q+1=\hat{\lambda}(\xi)+1=(\hat{\Lambda}(\xi)-\omega_1)(\hat{\Lambda}(\xi)-\omega_2)\cdots(\hat{\Lambda}(\xi)-\omega_q)$,

où les $\omega_1,\cdots,\omega_q$ sont les racines de $z^q=-1$. Notons que ω_i ne sont pas réelles sauf -1. En tout cas, $|\hat{\Lambda}(\xi)-\omega_i|\geq \min_j$. partie imaginaire de ω_j $(\omega_j\neq -1)$. Ceci entraîne que

$$\hat{\Lambda}(\xi)-\omega_1=\frac{\hat{\lambda}(\xi)+1}{\Pi'(\hat{\Lambda}(\xi)-\omega_i)}\cdot$$

D'où

$$(2, 23)\qquad \Lambda-\omega_1\cdot I=\left(\lambda\frac{\partial}{\partial x}+I\right)\cdot \mathrm{A}=\mathrm{A}\cdot\left(\lambda\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)+I\right),$$

où A est l'opérateur borné: $A \to \dfrac{1}{\Pi'(\hat{\Lambda}(\xi)-\omega_i)}\cdot$

Revenons à

$$\Lambda\cdot c(x)h_1 g = A\cdot\left[\lambda\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)+I\right]c(x)h_1 g\,.$$

Or, $$\left[\lambda\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)+I\right]\cdot\left[c(x)\cdot h_1 g\right]=\sum_{|\mu|+|\nu|\leqslant q} c_\mu^\nu\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\mu c(x)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\nu h_1 g\,,$$

où c_μ^ν sont des constantes. $\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)^\nu h_1 g \to (2\pi i\xi)^\nu \hat{h}_1(\xi)\hat{g}(\xi)$, et comme $|(2\pi i\xi)^\nu \hat{h}_1(\xi)|\leqslant(2R)^{|\nu|}\sup|\hat{h}_1(\xi)|\leqslant(2\mathrm{R})^q\mathrm{B}_0$,

$$||\Lambda\cdot c(x)h_1 g||\leqslant C'_\Lambda\cdot \mathrm{B}_0\Big(\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant q}\sup_x|D^\alpha c(x)|\Big)\cdot ||g||\,,$$

où C'_Λ est une constante qui ne dépend que de Λ. D'où

(2, 24) $$||h_1^*\overline{c(x)}\Lambda f||\leqslant C'_\Lambda B_0\Big(\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant q}\sup_x|D^\alpha c(x)|\Big)\,||f||\,,$$

Passons à

$$(h_2^*\overline{c(x)}-\overline{c(x)}h_2^*)\Lambda f=\int h_2^*(x-y)[\overline{c(y)}-\overline{c(x)}](\Lambda f)(y)dy\,.$$

On décompose $c(y)-c(x)$ par (2, 15). D'abord

$$\varphi_\nu(x)=\int h_2^*(x-y)(x-y)^\nu(\Lambda f)(y)dy\,.$$

Or, $$\hat{\varphi}_\nu(\xi)=\left(\frac{1}{-2\pi i}\right)^{|\nu|}\cdot\overline{\left(\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\nu\hat{h}_2(\xi)\right)}\,\hat{\Lambda}(\xi)\hat{f}(\xi)\,,$$

d'où

(2, 25) $$||\varphi_\nu(x)||\leqslant\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{|\nu|}\sup_\xi\left|\hat{\Lambda}(\xi)\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\nu\hat{h}_2(\xi)\right|\cdot||f||\,.$$

On considère ensuite

$$\int h_2^*(x-y)(x-y)^\nu c_\nu(y,z)(\Lambda f)(y)dy\,,\quad |\nu|=m\,,$$

compte tenu de (2, 23),

$$=\omega_1\cdot\int h_2^*(x-y)(x-y)^\nu c_\nu(y,x)f(y)dy$$
$$+\int h_2^*(x-y)(x-y)^\nu c_\nu(y,x)\left[\lambda\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)+I\right]Af(y)dy\,.$$

On suppose $\varphi(y)=Af(y)\in\mathfrak{D}_y$, alors la deuxième intégrale est égale à $\int\left[\lambda'\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)+I\right]\left[h_2^*(x-y)(x-y)^\nu c_\nu(y,x)\right]\cdot\varphi(y)dy$, où $\lambda'\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)$ est le transposé de $\lambda\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)$. En posant

$$\left[\lambda'\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)+I\right]\left[c_\nu(y,x)h_2^*(x-y)(x-y)^\nu\right], \quad \text{(Leibniz)}$$
$$=\sum_{|\alpha|+|\beta|\leqslant q} b_\alpha^\beta\left[\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\alpha c_\nu(y,x)\right]\cdot\left[\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\beta\left(h_2^*(x-y)(x-y)^\nu\right)\right]$$

où b_α^β sont des constantes. Considérons

$$\varphi(x)=\int\left|\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\beta(h_2^*(x-y)(x-y)^\nu)\right||f(y)|dy=\int_{|x-y|\leqslant 1} \text{''}\ dy$$
$$+\int_{|x-y|\geqslant 1} \text{''}\ dy=\varphi_1(x)+\varphi_2(x)\,.$$

D'abord $\left|\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\beta(h_2^*(x-y)(x-y)^\nu)\right|\leqslant(2\pi)^{|\beta|-|\nu|}\int|\xi|^{|\beta|}\left|\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\nu\hat{h}_2(\xi)\right|d\xi$,

comme $|\beta|\leqslant q$, $|\nu|=m$, et compte tenu de

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\nu\hat{h}_2(\xi)=\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\nu[(1-\alpha(\xi))\hat{h}(\xi)]$$

par Leibniz, on a

$$\text{(2, 26)}\qquad \left|\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\nu\hat{h}_2(\xi)\right|\leqslant C(m)\cdot\left(\sum_{0\leqslant|\beta|\leqslant m}\sup_\xi|D^\beta\alpha(\xi)|\right)\cdot B_\nu'\cdot|\xi|^{-(m-1)d}$$

où
$$B_\nu'=\sum_{0\leqslant|\gamma|\leqslant m-1}B_\gamma+B_\nu\,.$$

ou encore en notant $\left(\sum_{0\leqslant|\beta|\leqslant m}\sup_\xi|D^\beta\alpha(\xi)|\right)$ par α_m on a

$$\text{(2, 26')}\qquad \left|\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\nu\hat{h}_2(\xi)\right|\leqslant C(m)\cdot\alpha(m)\cdot|\xi|^{-(m-1)d}\,.$$

D'où $\left|\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\beta(h_2^*(x-y)(x-y)^\nu)\right|\leqslant(2\pi)^{q-m}C(m)\alpha_m B_\nu'\int_{|\xi|\geqslant R}|\xi|^{-(m-1)d+q}d\xi$.

Donc,

$$\text{(2, 27)}\qquad ||\varphi_1(x)||\leqslant B_n\cdot(2\pi)^{q-m}\left(\int|\xi|^{|\beta|}\left|\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\nu\hat{h}_2(\xi)\right|d\xi\right)$$
$$\leqslant C(m)\alpha_m B_\nu'(2\pi)^{q-m}\cdot B_n\int_{|\xi|\geqslant R}|\xi|^{-(m-1)d+q}d\xi\,,$$

où B_n est le volume de la boule unité.

Fixons maintenant m de la manière que $(m-1)d-q \geqslant n+1$, c'est-à-dire que

$$(2,28) \qquad m=\left[\frac{n+q+1}{d}\right]+2.$$

Passons à $\varphi_2(x)$;

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta (h_2^*(x)x^\nu)_{|x|\geqslant 1}=\frac{1}{|x|^{2p}}\left(|x|^{2p}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta (h_2^*(x)x^\nu)\right)_{|x|\geqslant 1}.$$

Or, la transformation de Fourier donne

$$|x|^{2p}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta (h_2^*(x)x^\nu)\to\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^{2p+|\nu|}\Delta_\xi^p\left[\xi^\beta\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\nu \overline{\hat{h}_2(\xi)}\right].$$

Envisageons $\Delta_\xi^p\left[\xi^\beta\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\nu \overline{\hat{h}_2(\xi)}\right]$, où $|\beta|\leqslant q$, $|\nu|=m$.

En désignant $\Delta^p=\sum_{|\alpha|=2p} C_\alpha^p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha$, considérons

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\alpha\left[\xi^\beta\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\nu \overline{\hat{h}_2(\xi)}\right]=\sum_{0\leqslant\gamma\leqslant\alpha} d_\gamma^\alpha\left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\gamma \xi^\beta\right]\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^{\alpha-\gamma}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\nu \overline{\hat{h}_2(\xi)}\right].$$

Or, $\left|\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\gamma\xi^\beta\right|\leqslant q\,!\,|\xi|^{q-|\gamma|}$, $\left|\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^{\alpha-\gamma+\nu}\hat{h}_2(\xi)\right|\leqslant B'_{\alpha-\gamma+\nu}|\xi|^{-(2p-|\gamma|+m-1)d}$

donc $\qquad |\text{leur produit}|\leqslant q\,!\,B'_{\alpha-\gamma+\nu}|\xi|^{-(2p+m-1)d-|\gamma|(1-d)+q}$.

Prenons donc p de manière que $(2p+m-1)d-q\geqslant\frac{n+1}{2}$; $2p\geqslant n+1$. C'est-à-dire que

$$(2,29) \qquad p=\max\left(\left[\frac{\frac{n+1}{4}+q}{d}-\frac{m-1}{2}\right]+1,\ \left[\frac{n}{2}\right]+1\right).$$

Alors, le raisonnement est le même que dans la dernière partie de la démonstration du lemme 2, 1. En résumé, nous avons

LEMME 2. 2.

$$(2,30) \quad \|(H^*-H^\#)\Lambda f\|\leqslant C(n,d,\Lambda)\Big(\sum_{0\leqslant|\beta|\leqslant m+2p} B_\beta\Big)\Big(\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m+q}\sup_x|D^\alpha c(x)|\Big)\cdot\|f\|,$$

où, m et p sont déterminés par (2, 28) *et* (2, 29) *respectivement.*

Supposons la condition vérifiée: $\sigma(H)=\sum_{\nu\geqslant 0} a(x)^\nu\hat{h}_\nu(\xi)$,

$$(2,31)\quad\begin{cases} 1)\ \ |a_i(x)|\leqslant\rho<1\,,\quad a(x)\in\mathscr{B}\,,\\ 2)\ \ |\hat{h}_\nu(\xi)|\leqslant \mathrm{B}_0\,,\ \text{pour tout}\ \nu\geqslant 0\,,\\ 3)\ \ \left|\hat{\Lambda}(\xi)\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\alpha\hat{h}_\nu(\xi)\right|\leqslant\frac{\mathrm{B}_\alpha}{|\xi|^{(|\alpha|-1)d}}\,,\quad |\xi|\geqslant R\,,\quad\text{pour tout}\\ \qquad |\alpha|\geqslant 1\,,\ \text{pour tout}\ \nu\geqslant 0\,,\\ 4)\ \ \hat{\Lambda}(\xi)\ \text{satisfait à la dernière condition de (2, 20).}\end{cases}$$

D'où, d'après (2, 30), il est facile de voir que

PROPOSITION 2, 4. *Sous l'hypothèse* (2, 31), $(H^*-H^\sharp)\Lambda$ *est un opérateur borné de* L^2 *dans lui-même.*

Passons finalement à $(H_1\circ H_2-H_1H_2)\Lambda$. Supposons d'abord $\sigma(H_1)=c_1(x)\hat{h}_1(\xi)$, $\sigma(H_2)=c_2(x)\hat{h}_2(\xi)$, et considérons

$$(H_1\circ H_2-H_1H_2)\Lambda f=c_1(x)[c_2(x)h_1-h_1c_2(x)]\Lambda h_2 f\,.$$

Il suffit donc de considérer l'opérateur $[c_2(x)h_1-h_1c_2(x)]\Lambda$. Or, ce type d'opérateurs est justement celui que nous avons envisagé dans le lemme 2, 2. (voir (2, 21)). Nous avons donc, en supposant à $\hat{h}_1(\xi)$ et à $\hat{\Lambda}(\xi)$ la condition (2, 20), on a d'après (2, 30)

$$(2,32)\qquad \|(H_1\circ H_2-H_1H_2)\Lambda f\|\leqslant C(n,d,\Lambda)\Big(\sum_{0\leqslant|\beta|\leqslant m+2p}\mathrm{B}_\beta\Big)\times$$
$$\times\Big(\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m+q}\sup_x|D^\alpha c_2(x)|\Big)\big(\sup_x|c_1(x)|\big)\sup_\xi|\hat{h}_2(\xi)|\cdot\|f\|\,.$$

Explicitions la condition: Soient

$$\sigma(H_1)=\sum_{\mu\geqslant 0}a(x)^\mu\hat{h}_\mu^1(\xi)\,,\quad \sigma(H_2)=\sum_{\nu\geqslant 0}a(x)^\nu\hat{h}_\nu^2(\xi)\,,$$

$$(2,33)\quad\begin{cases} 1)\ \ \text{condition 2) de (2, 31) pour}\ \hat{h}_\mu^1(\xi),\ \mu\geqslant 0,\\ 2)\ \ |\hat{h}_\nu^2(\xi)|\leqslant \mathrm{C}_0,\ \xi\in R_\xi^n,\ \text{pour}\ \nu\geqslant 0,\\ 3)\ \ a(x)\in\mathscr{B},\ \text{de plus}\ |a_i(x)|\leqslant\rho<1,\\ 4)\ \ \hat{\Lambda}(\xi),\ \text{condition 4) de (2, 31).}\end{cases}$$

PROPOSITION 2, 5. *Sous l'hypothèse* (2, 33), *l'opérateur* $(H_1\circ H_2-H_1H_2)\Lambda$ *est borné de* L^2 *dans lui-même.*

DÉMONSTRATION. En vertu de (2, 32),

$$\|H_1\circ H_2-H_1H_2)f\|\leqslant\sum_{\mu\geqslant 0,\nu\geqslant 0}C(n,d,\Lambda)\Big(\sum_{0\leqslant|\beta|\leqslant m+2p}\mathrm{B}_\beta\Big)\big(\sup_x|a(x)^\mu|\big)\mathrm{C}_0\times$$
$$\times\Big(\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m+q}\sup|D^\alpha a(x)^\nu|\Big)\|f\|=C(n,d,\Lambda)\Big(\sum_{0\leqslant|\beta|\leqslant m+2p}\mathrm{B}_\beta\Big)\mathrm{C}_0\|f\|\cdot$$
$$\Big(\sum_{\mu\geqslant 0,\,\nu\geqslant 0}\big(\sup_x|a(x)^\mu|\big)\Big)\cdot\Big(\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m+q}\sup|D^\alpha a(x)^\nu|\Big)\,.\qquad\text{c.q.f.d.}$$

Il nons reste encore d'envisager trois opérateurs $\Lambda H^*-H^*\Lambda$, $\Lambda(H^*-H^\#)$, $\Lambda(H_1\circ H_2-H_1H_2)$. Pour le premier opérateur, le raisonnement est presque le même que pour $\Lambda H-H\Lambda$. Pour le deuxième, compte tenu de ce que H^* vérifie aussi la même condition que H, et de ce que

$$\Lambda(H^*-H^\#)=(\Lambda H^*-H^*\Lambda)-(\Lambda H^\#-H^\#\Lambda)+(H^*-H^\#)\Lambda\ ,$$

on voit que l'opérateur est borné. Pour le troisième, notons d'abord que, bien que $H_1\circ H_2$ ne vérifie pas en général la condition de la frome (2, 2), lorsque les deux opérateurs H_1 et H_2 vérifient même la condition de la forme (2, 2), on voit facilment que $\Lambda(H_1\circ H_2)-(H_1\circ H_2)\Lambda$ est borné. En effet, supposons que H_1 et H_2 vérifient la condition: $\sigma(H_1)=\sum_{\mu\geqslant 0}a(x)^\mu\hat{h}^1_\mu(\xi)$, $\sigma(H_2)=\sum_{\nu\geqslant 0}a(x)^\nu\hat{h}^2_\nu(\xi)$, $|\hat{h}^1_\mu(\xi)|\leqslant B_0$, $\mu\geqslant 0$, $|\hat{h}^2_\nu(\xi)|\leqslant C_0$, $\nu\geqslant 0$.

En posant $\sigma(H_1\circ H_2)=\sum_{\kappa\geqslant 0}a(x)^\kappa\hat{h}_\kappa(\xi)$,

$$|\hat{h}_\kappa(\xi)|\leqslant|\kappa|^p\cdot\max(\mathrm{B}_0,\ \mathrm{C}_0)\ .$$

Or, $$\sum_{\nu\geqslant 0}|\nu|^p\Big(\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant k}\sup_x|D^\alpha a(x)^\nu|\Big)<+\infty\ .$$

Résumons ce que nous avons obtenu sous la forme:

THÉORÈME 2. *Soient* H, H_1, H_2, Λ *des opérateurs dont les symboles vérifient les conditions de la forme* (2, 9) *et* (2, 31). *Alors*

$H\Lambda-\Lambda H$, $H^*\Lambda-\Lambda^*H$, $(H^*-H^\#)\Lambda$, $\Lambda(H^*-H^\#)$, $(H_1\circ H_2-H_1H_2)\Lambda$, $\Lambda(H_1\circ H_2-H_1H_2)$

sont des opérateurs bornés de L^2 *dans lui-même.*

§ 3. Démonstration du Théoremè 1.

D'abord, comme on fait dans le cas kowalewskien, on fait le changement de variables de telle manière que la solution transformée ait son support strictement convexe dans $x_n\geqslant 0$: $x_n'=x_n+\sum_{i=1}^{n-1}x_i^2+t^2$, $x_i'=x_i$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$, $t'=t$. Ensuite on change la notation des variables x: $x_n'\to t$, $t'\to x_n$, c'est-à-dire $(x_1',\cdots,x_{n-1}',x_n',t')\to(x_1,\cdots,x_{n-1},t,x_n)$. Alors l'équation (1, 1) devient:

$$(3,1)\quad \Big(\frac{d}{dt}\Big)^2u(x,t)+2a_1\Big(x,t,\frac{\partial}{\partial x}\Big)\Big(\frac{d}{dt}\Big)u(x,t)+a_2\Big(x,t,\frac{\partial}{\partial x}\Big)u(x,t)$$
$$+\sum_{j=1}^{n-1}b_j(x,t)\frac{\partial}{\partial x_j}u(x,t)+b_n(x,t)\frac{d}{dt}u(x,t)+c(x,t)u(x,t)=0\ ,$$

où $a_i\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ $(i=1, 2)$ sont de la forme:

$$2a_1\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}\right)=\sum' 2a_i(x, t)\frac{\partial}{\partial x_i},$$
$$a_2\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}\right)=\sum' b_{ij}(x, t)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}-a_n(x, t)\frac{\partial}{\partial x_n},$$

où les coefficients sont tous réels, et $a_n(0, 0)>0$, $\sum'$ désigne désormais $\sum_{i=1}^{n-1}$ ou $\sum_{i,j=1}^{n-1}$. On fait maintenant le changement d'inconnues (comme dans [3] p. 27) de la manière que, en posant

$$\hat{\Lambda}(\xi)=\sqrt[4]{(\sum'\xi_i^2)^2+\xi_n^2} \tag{3, 2}$$

$$\begin{cases} v_1=\Lambda u\,, \\ v_2=\dfrac{d}{dt}u\,. \end{cases} \tag{3, 3}$$

On aura alors

$$\text{(E)}\qquad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ a_2\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}\right)\Lambda^{-2} & a_1\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}\right)\Lambda^{-1} \end{pmatrix}\Lambda\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$
$$+\begin{pmatrix} 0 \\ \sum' b_i(x, t)\frac{\partial}{\partial x_i}\Lambda^{-1}v_1+b_n(x, t)v_2+c(x, t)u \end{pmatrix}=0\,.$$

Notons d'abord que $\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}\Lambda^{-1}\right\|\leqslant C'$ $(i=1, \cdots, n-1)$, alors en vertu du lemme 2 dans [3], on aura

$$\int_0^h \varphi_n^2\left\|\sum' b_{ij}(x, t)\frac{\partial}{\partial x_i}\Lambda^{-1}v_1+b_n(x, t)v_2+c(x, t)u\right\|^2 dt\leqslant c$$
$$\times\int_0^h \varphi_n^2(\|v_1\|^2+\|v_2\|^2)dt\,.$$

L'équation caractéristique admet alors deux racines:

$$\hat{\lambda}_1(x, t, \xi)=\frac{-ia_1(x, t, 2\pi i\xi)-\sqrt{D(x, t, \xi)}}{\hat{\Lambda}(\xi)}, \tag{3, 4}$$
$$\hat{\lambda}_2(x, t, \xi)=\frac{-ia_1(x, t, 2\pi i\xi)+\sqrt{D(x, t, \xi)}}{\hat{\Lambda}(\xi)},$$

où

$$(3, 5) \qquad \begin{cases} a_1(x, t, \xi) = \sum' a_i(x, t)\xi_i \,, \\ D(x, t, \xi) = \sum' a_{ij}(x, t)\xi_i\xi_j + 2\pi i a_n(x, t)\xi_n \,, \end{cases}$$

où $\sum' a_{ij}(x, t)\xi_i\xi_j$ est une forme définite-positive : $\geq k|\xi|^2$, (Notons que les a_{ij} sont différens de ceux de (1, 2)). Notons que tous les coefficients $a_i(x, t)$ $(i=1, \cdots, n)$, $a_{ij}(x, t)$ sont *réels*.

On voit que $\sqrt{D(x, t, \xi)}$ est une fonction (en ξ) uniforme, même dans le cas $n=2$. On fixe la déternination de $\sqrt{D(x, t, \xi)}$ comme sa partie rélle ≥ 0.

Le symbole de la matrice $\boldsymbol{n}$ devient (vair [3], p. 29),

$$(3, 6) \qquad \sigma(\boldsymbol{n}) = \frac{1}{\hat{\lambda}_2 - \hat{\lambda}_1}\begin{pmatrix} \hat{\lambda}_2 & -1 \\ -\hat{\lambda}_1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2\pi i a_1(x, t, \xi)}{2\sqrt{D(x, t, \xi)}} + \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\hat{\Lambda}(\xi)}{2\sqrt{D(x, t, \xi)}} \\ \dfrac{-2\pi i a_1(x, t, \xi)}{2\sqrt{D(x, t, \xi)}} - \dfrac{1}{2} & \dfrac{\hat{\Lambda}(\xi)}{2\sqrt{D(x, t, \xi)}} \end{pmatrix}.$$

D'abord, montrons que la fonction $\hat{\Lambda}(\xi) = \sqrt[4]{|\xi^*|^4 + \xi_n^2}$ vérifie la condition (2, 9).

$$(3, 7) \qquad \frac{\partial}{\partial \xi_i}\hat{\Lambda}(\xi) = \begin{cases} \dfrac{|\xi^*|^2\xi_i}{\hat{\Lambda}(\xi)^3} & (i=1, 2, \cdots, n-1), \text{ où } \xi^* = (\xi_1, \cdots, \xi_{n-1}), \\ \dfrac{\xi_n}{2\hat{\Lambda}(\xi)^3} & (i=n)\,. \end{cases}$$

$\hat{\Lambda}(\xi)$ a la propriété suivante qu'on vérifie facilement (remarquous que cette propriété est due essentiellement à ce que le polynome $(|\xi^*|^4 + \xi_n^2)$ est un polynome complet et de type local dans la terminologie de Hörmander) : il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout ϑ, vecteur complexe, dont les composants ϑ_i satisfassent à la condition

$$(3, 8) \qquad |\vartheta_i| \leqslant c|\xi|^{\frac{1}{2}},$$

on a

$$(3, 9) \qquad \frac{1}{2} \leqslant \left|\frac{\hat{\Lambda}(\xi+\vartheta)}{\hat{\Lambda}(\xi)}\right| \leqslant \frac{3}{2} \quad \text{pour} \quad |\xi| \geqslant 1\,.$$

Notons que $\hat{\Lambda}(\zeta)$, $\zeta = \xi + \vartheta$, est analytique en ζ dans le polydisque défini par (3, 8).

Deuxièmement, soit $Q_\beta(\xi) = \xi^\beta$ l'un des monômes qui interviennent dans les nominateurs des $\frac{\partial}{\partial \xi_i}\hat{\Lambda}(\xi)$. Evidemment, on a $\left|\frac{Q_\beta(\xi)}{\hat{\Lambda}(\xi)^3}\right| \leqslant C$ pour $|\xi| \geqslant 1$. En prolongeant $Q_\beta(\xi)$, $\hat{\Lambda}(\xi)$ anlytiquement dans le polydisque (3, 8), on applique la formule de Cauchy :

$$(3, 10) \qquad \frac{Q_\beta(\xi)}{\hat{\Lambda}(\xi)^3} = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{c_1} \cdots \int_{c_n} \frac{1}{(\zeta_1 - \xi_1)\cdots(\zeta_n - \xi_n)} \left(\frac{Q_\beta(\zeta)}{\hat{\Lambda}(\zeta)^3}\right) d\zeta_1 \cdots d\zeta_n, \quad |\xi| \geqslant 1.$$

D'abord, $Q_\beta(\zeta)$ prend son maximum au point ξ^0 réel ($|\xi^0| \geqslant 1$), ensuite (3, 9) signifie que la valeur de $\hat{\Lambda}(\zeta)^3$ sur $\boldsymbol{C}$ est équivalente partout. Plus précisément, $\max_{\zeta \in C} \left|\frac{Q_\beta(\zeta)}{\hat{\Lambda}(\zeta)^3}\right| \leqslant 2C$, d'où, par dérivation successive en ξ_i, $\left|\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\nu \left(\frac{Q_\beta(\xi)}{\hat{\Lambda}(\xi)^3}\right)\right| \leqslant 2C\nu!\,(c|\xi|^{\frac{1}{2}})^{-|\nu|}$, en ajoutant tous les β intervenant dans les nominateurs, on aura finalement

$$(3, 11) \qquad \left|\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\nu \hat{\Lambda}(\xi)\right| \leqslant B_\nu |\xi|^{-\frac{1}{2}(|\nu|-1)}, \quad \text{pour } |\xi| \geqslant 1.$$

Avansçons-nous à la vérification de la condition (2, 31) pour les symboles $\hat{\lambda}_1(x, t, \xi)$, $\hat{\lambda}_2(x, t, \xi)$, $\cdots$.

Nous voulons développer tons les symboles qui interviennent dans le raisonnement suivant les puissances des $\sigma_{ij} = a_{ij}(x, t) - a_{ij}(0, 0)$ $(i, j = 1, 2, \cdots, n-1)$, $\sigma_i = a_i(x, t) - a_i(0, 0)$ $(i = 1, \cdots, n)$. Pour cela, nous regardons tous les symboles comme des fonctions de deux variables $(\xi; \sigma)$, alors ces symboles sont des fonctions analytiques de σ au voisinage de 0. On va préciser ce voisinage.

D'abord $D(\xi; \sigma) = D(\xi) + \sum' \sigma_{ij}\xi_i\xi_j + 2\pi i\sigma_n\xi_n$, il existe alors un $\mathrm{r} > 0$ tel que

$$(3, 12) \qquad \text{pour } |\sigma_{ij}|,\ |\sigma_i| \leqslant \mathrm{r}, \quad \frac{1}{2} \leqslant \left|\frac{D(\xi; \sigma)}{D(\xi)}\right| \leqslant 2 \quad \text{pour } \xi \neq 0.$$

D'autre part, $D(\xi)$ jouit de la même propriété que $\hat{\Lambda}(\xi)$: il existe une constante c' telle que, pour tout ϑ, vecteur complexe, dont le composant satisfasse à la condition

$$(3, 13) \qquad \text{pour } |\vartheta_i| \leqslant c'|\xi|^{\frac{1}{2}}, \text{ on a } \frac{1}{2} \leqslant \left|\frac{D(\xi + \vartheta)}{D(\xi)}\right| \leqslant 2 \text{ pour } |\xi| \geqslant 1.$$

En faisant r plus petit, s'il est nécessaire, on peut supposer de plus que

$$(3, 14) \qquad \frac{1}{3} \leqslant \left|\frac{D(\xi + \vartheta; \sigma)}{D(\xi)}\right| \leqslant 3 \quad \text{pour } |\xi| \geqslant 1.$$

r ainsi fixé, nous allons développer tous les symboles suivant les puissances de σ, dans $|\sigma_i|$, $|\sigma_{ij}|\leqslant\rho\mathrm{r}$, $0<\rho<1$.

Prenons par example, $\dfrac{\sqrt{D(\xi\,;\sigma)}}{\hat{\Lambda}(\xi)}$, alors la formule de Cauchy appliquée à la variable σ montre que, en posant cette fonction $=\sum_{\nu\geqslant 0}\sigma^\nu \hat{d}_\nu(\xi)$, on a $|\hat{d}_\nu(\xi)|\leqslant\dfrac{1}{\mathrm{r}^{|\nu|}}\max_{\sigma\in C}\left|\dfrac{\sqrt{D(\xi\,;\sigma)}}{\hat{\Lambda}(\xi)}\right|$, où $\boldsymbol{C}$ est le polydisque du centre 0 avec le rayon égal tout à r. Comme $\sqrt{D(\xi)}$ et $\hat{\Lambda}(\xi)$ sont équivalentes (c'est-à-dire que: $0<a<\dfrac{\sqrt{D(\xi)}}{\hat{\Lambda}(\xi)}<b<+\infty$), compte tenu de (3, 12), on aura $|\hat{d}_\nu(\xi)|\leqslant K\dfrac{1}{\mathrm{r}^{|\nu|}}$, où K est une constante indépendante de ν. On voit donc que tous les symboles admettent des développements satisfaisant à la première et la deuxième condition (2, 31), si l'on pose

$$\frac{a_{ij}(x,t)-a_{ij}(0,0)}{\mathrm{r}}\ (i,j=1,\cdots,n-1),\quad \frac{a_i(x,t)-a_i(0,0)}{\mathrm{r}}\ (i=1,2,\cdots,n)$$

$$\text{comme}\quad a(x)=(a_1(x),\cdots,a_p(x))\,.$$

On considère ici, bien entendu, t qui intervient dans $a(x)$ comme paramètre; (x, t) est voisin de $(0, 0)$. La dépendance en t de tout opérateur intervient donc sous la forme:

$\sigma(H)=\sum_{\nu\geqslant 0}a(x,t)^\nu\hat{h}_\nu(\xi)$, d'où $H'(t)$ est continu de L^2 dans lui-même.

Il ne reste qu'à vérifier la troisième condition de (2, 31). Soit $\hat{h}(\xi\,;\sigma)=\sum_{\nu\geqslant 0}\sigma^\nu\hat{h}_\nu(\xi)$ l'un des symboles qui interviennent. Alors,

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\alpha[\hat{\Lambda}(\xi)\hat{h}(\xi\,;\sigma)]=\hat{\Lambda}(\xi)\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\alpha\hat{h}(\xi\,;\sigma)+\sum_{\substack{\beta\ \alpha\\|\beta|\geqslant 1}}C^\alpha_\beta\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\beta\hat{\Lambda}(\xi)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^{\alpha-\beta}\hat{h}(\xi\,;\sigma)\,.$$

Si l'on vérifie donc les deux sortes d'inégalités:

$$(\mathrm{I}_1)\qquad \left|\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\alpha[\hat{\Lambda}(\xi)\hat{h}(\xi\,;\sigma)]\right|\leqslant\frac{\mathrm{B}_\alpha'}{|\xi|^{(|\alpha|-1)\frac{1}{2}}}\quad\text{pour } |\xi|\geqslant 1,\ |\alpha|\geqslant 1,$$

$$(\mathrm{I}_2)\qquad \left|\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\beta\hat{h}(\xi\,;\sigma)\right|\leqslant\frac{\mathrm{B}_\alpha}{|\xi|^{\frac{1}{2}|\beta|}},\quad\text{pour } |\xi|\geqslant 1\,,\ \beta\geqslant 0\,,$$

on aura (la formule de Cauchy appliquée à la variable σ), pour

$|\xi|\geqslant 1$,

$$\left|\hat{\Lambda}(\xi)\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^{\alpha}\hat{h}_{\nu}(\xi)\right|\leqslant\frac{1}{r^{|\nu|}}\left\{\max_{\sigma\in C}\left|\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^{\alpha}[\hat{\Lambda}(\xi)\hat{h}(\xi\,;\sigma)]\right|\right.$$
$$\left.+\sum_{\substack{\alpha\leqslant\beta\\|\beta|\geqslant 1}}C_{\beta}^{\alpha}\left|\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^{\beta}\hat{\Lambda}(\xi)\right|\cdot\max_{\sigma\in C}\left|\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^{\alpha-\beta}\hat{h}(\xi\,;\sigma)\right|\right\}$$

d'où l'inégalité voulue, compte teue de (3, 11),

$$\left|\hat{\Lambda}(\xi)\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^{\alpha}\hat{h}_{\nu}(\xi)\right|\leqslant\frac{A_{\alpha}}{|\xi|^{\frac{1}{2}(|\alpha|-1)}}\cdot\frac{1}{r^{|\nu|}}\quad\text{pour }|\xi|\geqslant 1\,.\tag{3, 15}$$

Vérifions d'abord la condition (I_2) pour le symbole $\dfrac{\sqrt{D(\xi\,;\sigma)}}{\hat{\Lambda}(\xi)}$, comme titre d'exemple.

La formule de Cauchy appliquée à la variable ξ donne, pour $|\xi|\geqslant 1$,

$$\frac{\sqrt{D(\xi\,;\sigma)}}{\hat{\Lambda}(\xi)}=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{n}\int_{c_1}\cdots\int_{c_n}\frac{1}{(\zeta_1-\xi_1)\cdots(\zeta_n-\xi_n)}\left(\frac{\sqrt{D(\zeta\,;\sigma)}}{\hat{\Lambda}(\zeta)}\right)\times$$
$$\times\,d\zeta_1\cdots d\zeta_n\,,$$

où $C=(c_1,\cdots,c_n)$ est le polydisque du centre ξ avec le rayon $\min(c,c')|\xi|^{\frac{1}{2}}=c''|\xi|^{\frac{1}{2}}$ (voir (3, 8) et (3, 13)).

Or, $\max\limits_{\zeta\in C}\dfrac{\sqrt{D(\zeta\,;\sigma)}}{\hat{\Lambda}(\zeta)}$ est uniformément bornée par rapport à $\xi(|\xi|\geqslant 1)$ et σ, compte tenu de (3, 14) et de ce que $\sqrt{D(\xi)}$ et $\hat{\Lambda}(\xi)$ sont équivalentes. La dérivation en ξ dans cette formule de Cauchy achève donc la verifivation de (I_2).

La vérification de (I_1) est un peu délicate. Pour $\hat{\lambda}_1(\xi\,;\sigma)$ et $\hat{\lambda}_2(\xi\,;\sigma)$ elle est bien facile. Nous la vérifions pour $\dfrac{\hat{\Lambda}(\xi)}{\sqrt{D(\xi\,;\sigma)}}$.

On départ de la première dérivation :

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi_i}\right)\frac{\hat{\Lambda}(\xi)^2}{\sqrt{D(\xi\,;\sigma)}}=\frac{2\hat{\Lambda}(\xi)}{\sqrt{D(\xi\,;\sigma)}}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi_i}\hat{\Lambda}(\xi)-\frac{1}{2}\frac{\hat{\Lambda}(\xi)^2}{D(\xi\,;\sigma)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi_i}D(\xi\,;\sigma)\,.$$

Alors (3, 7) donnerai, par le raisonnement ci-dessus et celui qui était donné pour l'évalution de $\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^{\alpha}\hat{\Lambda}(\xi)$, la vérification voulue.

Ajoutons quelques remarques. D'abord, les opérateurs qui interviennent dans le raisonnement ne sont pas strictement ceux qui corresponent à $\hat{\lambda}_i(x, t, \xi)$, mais comme les coefficients des développements sont toujours réels, ce qui entraîne que notre verification concernant (2, 31) est encore vraie pour tels opérateurs.

Deuxièment, on doit montrer que, en posant

$$\sigma(\mathrm{P}_i) = \text{partie réelle de } \hat{\lambda}_i(x, t, \xi),$$

P_i $(i=1, 2)$ sont inversibles. Ceci résulte du fait que

$$\text{partie réelle } \hat{\lambda}_i(0, 0, \xi) = \pm \frac{1}{\hat{\Lambda}(\xi)} \text{ partie réelle } \sqrt{D(\xi)},$$

$$(\text{partie réelle } \sqrt{D(\xi)})^2 = \frac{1}{2}\Big(\sum' a_{ij}(0, 0)\xi_i\xi_j + \sqrt{(\sum' a_{ij}(0, 0)\xi_i\xi_j)^2 + a_n(0, 0)^2 4\pi^2\xi_n^2}\Big),$$

et on voit facilement que cette fonction est équivalente à $\hat{\Lambda}(\xi)^2$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Itô et H. Yamabe, A unique continuation theorem for solutions of a parabolic differential equation. J. Math. Soc. Japan, 10 (1958) p. 314-321.

[2] A. P. Calderón et A. Zygmund, Singular integral operators and differential equations. Amer. Journal. Math. Vol. 79 (1957) pp. 901-921.

[3] A. P. Calderón, Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations, Amer. Journal Math. Vol. 80 (1958) p. 16-36.

[4] S. Mizohata, Hypoellipticité des équations paraboliques, Bull. Soc. Math. France 85 (1957) p. 15-50.

[5] L. Schwartz, Théorie des distributions, I, II, (1950-1951), Paris, Hermann.

[6] L. Nirenberg, Uniqueness in Cauchy problem for differential equations with constant leading coefficients, Comm. Pure and Appl. Math., vol. 10 (1957) p. 89-105.