J. Math. Kyoto Univ.
1-2 (1962) 271-302.

Solutions nulles et solutions non analytiques

Par

Sigeru MIZOHATA

(Reçu le 4 décembre, 1961)

1. Introduction.

Dans cet article, nous traiterons toujours les équations aux dérivées partielles à coefficients *analytiques*.

Etant données une équation aux dérivées partielles

$$a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(x) = 0 \tag{1.1}$$

et une hypersurface S définie par

$$\varphi(x) = 0\,; \quad \varphi_x(x) \neq 0 \tag{1.2}$$

(φ étant à valeurs réelles), on sait que, si S n'est pas caractéristique, alors la donnée de Cauchy sur S, supposée analytique, détermine uniquement la solution cherchée $u(x)$, où $\varphi(x)$ est aussi supposée analytique. Au contraire, si S est une variété caractéristique pour (1. 1), c'est-à-dire que

$$h(x, \varphi_x(x)) = 0 \text{ pour } x \text{ sur } S, \tag{1.3}$$

le prolongement d'une solution $u(x)$ au travers de S, est-elle toujours non unique? Plus précisément, existe-t-il des solutions identiquement nulles d'un côté de S et ne s'annulant pas de l'autre côté? Cette question a été posée par Petrowsky et il a lui-même indiqué à la fin de son mémoire [7] que la réponse est affirmative si la variété caractéristique S est analytique et simple. Comme sa démonstration manque de détail, nous voulons présenter notre démonstration. Petrowsky a réduit ce problème à celui de Goursat. Au contraire, nous utiliserons la méthode d'Hadamard, qui s'apelle la méthode de singularité, exposée dans [1, 2]. Evidemment la méthode d'Hadamard et celle de majorante pour le problème de Goursat s'appuyent sur presque le même principe. Nous devons signaler que récemment la méthode d'Hadamard a été développée par P. D. Lax et D. Ludwig sous la forme du développement asymptotique [4, 5]. D. Ludwig a traité un problème analogue à notre problème actuel pour le système hyperbolique. Il a réduit ce problème au problème de Goursat. Ici nous avons traité directement le problème en montrant que la solution définie par une série converge au voisinage du point donné.

Dans la section 3, nous traiterons la question de l'existence de solutions non analytiques, en nous appuyant sur le même principe. Cette question a été le point de départ de cette recherche, bien que nous l'ayons traitée dans la section 3. M. Hamada nous a posé cette question. Plusieurs discussions avec lui ont été fructueuses pour nous. Finalement ma gratitude à M. Yamaguti, qui a bien voulu discuter avec nous.

2. Solutions nulles.

On suppose désormais que la variété caractéristique S est simple :

$$(2.1) \qquad \sum_{i=1}^{n} |h^{(i)}(x, \varphi_x)| \neq 0, \quad \text{où } h^{(i)}(x, \xi) = h_{\xi_i}(x, \xi).$$

Nous allons construire une solution $u(x)$ de (1.1) par la méthode d'Hadamard. Posons la fonction cherchée $u(x)$ sous la forme

$$(2.2) \qquad u(x) = f_0(\varphi)u_0(x) + f_1(\varphi)u_1(x) + \cdots + f_p(\varphi)u_p(x) + \cdots,$$

où

$$f_0(\tau) = \begin{cases} \tau^{s+m}/(s+m)! & \text{pour } \tau \geqslant 0 \\ 0 & \text{pour } \tau \leqslant 0, \end{cases}$$

s étant un entier positif. En général, on pose

$$(2.4) \qquad f_p(\tau) = \begin{cases} \tau^{s+m+p}/(s+m+p)! & \text{pour } \tau \geqslant 0 \\ 0 & \text{pour } \tau \leqslant 0. \end{cases}$$

(Il n'est nullement nécessaire de supposer que s soit entier positif pour notre raisonnement, il suffit de supposer que $s>0$).

Considérons

$$a\Big(x, \frac{\partial}{\partial x}\Big)(f(\varphi)u) = u\cdot a\Big(x, \frac{\partial}{\partial x}\Big)f(\varphi) + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} u\cdot a^{(i)}\Big(x, \frac{\partial}{\partial x}\Big)f(\varphi)$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u\cdot a^{(ij)}\Big(x, \frac{\partial}{\partial x}\Big)f(\varphi)+\cdots, \quad \text{où } a^{(ij)}(x, \xi) = a_{\xi_i\xi_j}(x, \xi).$$

Cette expression s'écrit encore sous la forme

$$\begin{aligned}(2.4)\quad & f^{(m)}(\varphi)h(x, \varphi_x)u + f^{(m-1)}(\varphi)\Big[\sum_{i=1}^n h^{(i)}(x, \varphi_x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c_1(x)u\Big] \\ & + f^{(m-2)}(\varphi)\Big[\frac{1}{2}\sum_{i,j} h^{(ij)}(x, \varphi_x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i c_i^{(2)}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c^{(2)}(x)u\Big] \\ & + f^{(m-3)}(\varphi)L_3[u] + \cdots + f(\varphi)L_m[u] = 0,\end{aligned}$$

où tous les coefficients ainsi que ceux des $L_3, L_4, \cdots, L_m$ sont des fonctions analytiques, et L_i sont des opérateurs différentiels d'ordre i.

Notons d'abord que (1.3) entraîne que

$$(2.5) \qquad h(x, \varphi_x) = c_0(x)\varphi(x),$$

où $c_0(x)$ est une fonction analytique au voisinage de S.

Ceci posé, on va définir u_0. En remarquant que $f_0^{(m)}(\varphi)\varphi/f_0^{(m-1)}(\varphi) = s+1$, on détermine u_0 par l'équation

$$(2.6) \qquad u_0 = \sum_{i=1}^n h^{(i)}(x, \varphi_x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + [c_1(x) + (s+1)c_0(x)]u_0 = 0.$$

Passons à u_1. (2.4) s'écrit encore

$$f^{(m-1)}(\varphi)\Big[\sum_i h^{(i)}(x, \varphi_x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + \Big(c_1(x) + \frac{f^{(m)}(\varphi)\varphi}{f^{(m-1)}(\varphi)}c_0(x)\Big)u\Big]$$
$$+\sum_{k=2}^m f^{(m-k)}(\varphi)L_k[u] = 0.$$

Compte tenu de $f_1^{(m-1)}(\varphi) = f_0^{(m-2)}(\varphi) = \dfrac{\varphi^{s+2}}{(s+2)!}$ pour $\varphi>0$, on définit $u_1(x)$ par

$$(2.7) \qquad \mathcal{L}_1[u_1] + L_2[u_0] = 0$$

où $\mathcal{L}_1[u] = \sum h^{(i)}\dfrac{\partial u}{\partial x_i} + [c_1(x) + (s+2)c_0(x)]u$, L_2 étant l'opérateur différentiel du second ordre, qui figure au troisième terme de (2. 4).

De proche en proche, en égalant les termes multipliés par les mêmes puissances de φ, on définit u_p par (supposé que u_0, $u_1, \cdots$, u_{p-1} étant définies)

$$(2.8) \quad \mathcal{L}_p[u_p] = \sum_{i=1}^{n} h^{(i)}(x, \varphi_x)\frac{\partial u_p}{dx_i} + [c_1(x)+(p+s+1)c_0(x)]u_p$$
$$= -\sum_{k=2}^{m} L_k[u_{p+1-k}], \quad p = 1, 2, \cdots.$$

En effet, $f_p^{(i)}(\varphi)=\dfrac{\varphi^{s+m+p-i}}{(s+m+p-i)!}=f_{p-1}^{(i-1)}(\varphi)=f_{p-2}^{(i-2)}(\varphi)=\cdots=f_{p-i}(\varphi)$.

Jusqu'à maintenant, nous n'avons rien dit sur les conditions accessoires (conditions initiales) pour u_0, $u_1, \cdots$. Il serait naturel de poser $u_0(x_0)=1$. Mais, pour d'autres termes, ces conditions sont arbitraires. Cela est manifeste vu le problème de Goursat. Ce qui est essentiel est donc de montrer que la série $u(x)=\sum f_p(\varphi)u_p(x)$ soit convergente au voisinage de x_0, en imposant aux $u_p(x)$ des conditions initiales assez simples.

D'abord on suppose que $x_0=0$, et, vu (2. 1), que $h^{(1)}\neq 0$. En prenant $x_1=t$ (cela signifie que l'hyperplan $t=0$ n'est pas tangent aux directions bicaractéristiques au voisinage de l'origine), nous écrivons (2. 8) sous la forme

$$(2.8)' \quad \mathcal{L}'_{s+p+1}[u_p] = \frac{\partial}{\partial t}u_p + \sum a_i(x, t)\frac{\partial}{\partial x_i}u_p + (b_0(x, t)$$
$$+(s+1+p)b_0(x, t))u = -\sum_{k=2}^{m} L_k[u_{p+1-k}].$$

où tous les coefficients sont analytiques.

Ceci posé, on impose aux u_p les conditions initiales suivantes:

$$(2.9) \quad \begin{aligned} u_0(x, 0) &= 1 \\ u_p(x, 0) &= 0, \quad \text{pour } p\geqslant 1. \end{aligned}$$

Nous allons montrer que ces fonctions u_0, $u_1, \cdots$, vérifient les inégalités de la forme

$$(2.10) \quad |u_p(x, t)|\leqslant \frac{p!}{\rho^p}K$$

avec leurs dérivées d'ordre m pour (x, t) voisins de l'origine.

3. Evaluation des $u_p(x, t)$.

Dans ce qui suit, nous évaluons la solution $u(x, t)$ de

$$(3.1) \qquad L_p[u] = f(x, t)$$

$$\text{où} \quad L_p = \frac{\partial}{\partial t} + \sum a_i(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i} + (b_1(x, t) + (p-1) b_0(x, t))$$

où p est un paramètre à valeurs entiers positifs et tous les coefficients sont analytiques en x, t. Il faut remarquer que cette solution $u(x, t)$ s'obtient par quadrature et que les $a_i(x, t)$ sont en géneral à valeurs complexes. Dans ce qui suit, nous regardons les t comme paramètre, à valeurs réelles positives. D'abord une remarque élémentaire :

Lemme 3.1. *Soient $a(x)$ et $b(x)$ deux fonctions analytique vérifiant*

$$|D^\nu a(x)| \leqslant \frac{(r+|\nu|)!}{(k\rho)^{|\nu|}} A\,, \quad k > 1\,,$$

$$|D^\nu b(x)| \leqslant \frac{(s+|\nu|)!}{\rho^{|\nu|}} B\,,$$

où r et s sont des entiers non négatifs. Alors on a

$$|D^\nu(ab)(x)| \leqslant \frac{(r+s+|\nu|)!}{\rho^{|\nu|}} (k/k-1) AB/C_r^{r+s}\,.$$

Preuve.

$D^\nu(ab) = \sum_\mu C_\mu^\nu D^\mu a D^{\nu-\mu} b$. Comme $\sum_{|\mu|=p} C_\mu^\nu \leqslant C_p^{|\nu|}$, nous avons $|D^\nu(ab)| \leqslant \frac{AB}{\rho^{|\nu|}} \sum_{p=0}^{|\nu|} C_p^{|\nu|} (r+p)!\ (s+|\nu|-p)!\ (1/k)^p$.

Or, $C_p^{|\nu|}(r+p)!\ (s+|\nu|-p)! = C_p^{|\nu|} \frac{(r+s+|\nu|)!}{C_{r+p}^{r+s+|\nu|}} \leqslant (r+s+|\nu|)!/C_r^{r+s}$,

car $$C_{r+p}^{r+s+|\nu|}/C_p^{|\nu|} \geqslant C_r^{r+s}.$$

D'où $$|D^\nu(ab)| \leqslant \frac{AB}{C_r^{r+s}} \frac{(r+s+|\nu|)!}{\rho^{|\nu|}} \sum_{p=0}^{|\nu|} (1/k)^p.$$

Revenons à (3.1). On suppose

$$
\begin{aligned}
&|a_i(x, t)| \leqslant \gamma_0 \\
(3.2) \qquad &|D^{\nu}_{x,t} a_i(x, t)| \leqslant \frac{(|\nu|-1)!}{(3\rho)^{|\nu|-1}}\gamma, \quad |\nu| \geqslant 1, \\
&|D^{\nu}_{x,t} b_i(x, t)| \leqslant \frac{|\nu|!}{(3\rho)^{|\nu|}}\gamma, \qquad i = 1, 2.
\end{aligned}
$$

Dans cette hypothèse, nous allons évaluer la solution u de (3.1) avec la donnée initiale zéro: $u(x, 0)=0$.

Lemme 3.2. *Supposons que*

(3.3) $|D^{\nu}_{x,t} f(x, t)| \leqslant \frac{(r+|\nu|)!}{\rho^{|\nu|}} \exp(p\gamma t) K(t)^{r+|\nu|} A$, $r \geqslant p$. *Alors on a*

$$
(3.4) \qquad |D^{\nu}_x u(x, t)| \leqslant 2\frac{(r+|\nu|-1)!}{\rho^{|\nu|}} \exp(p\gamma t) K(t)^{r+|\nu|} A/\gamma n
$$

où $K(t)=\exp(\gamma nt)(1+\gamma nt)$, *$n$ étant la dimension de l'espace des x.*

Démonstration.

L'expression intégrale de $u(x, t)$ donne

$$
\begin{aligned}
|u(x, t)| &\leqslant \int_0^t \exp(p\gamma(t-s)) r! \exp(p\gamma s) K(s)^r A ds \\
&\leqslant \exp(p\gamma t) r! \, A \int_0^t K(s)^r ds \leqslant r! \exp(p\gamma t) A K(t)^r / r\gamma n \\
&= (r-1)! \exp(p\gamma t) K(t)^r A/\gamma n,
\end{aligned}
$$

ce qui prouve (3.4) pour $|\nu|=0$. Passons à général ν. Désignons par

$$
u_m(t) = \max_{|\nu|=m} \sup_x |D^{\nu}_x u(x, t)|.
$$

La différentiation en x donne, compte tenu de (3.2),[1]

---

1) Appliquons $D_i\left(=\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$ à (3.1), on a

$$
L_p[D_i u] + \sum (D_i a_k)(D_k u) + (D_i b)u = D_i f,
$$

où $b=b_1+(p-1)b_0$. En général nous avons

$$
\begin{aligned}
&L_p[D_{i_1} D_{i_2} \cdots D_{i_m} u] + \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{m} (D_{i_p} a_k)(D_{i_1} \cdots \hat{D}_{i_p} \cdots D_{i_m} D_k u) + \sum_k \sum_{p,q} (D_{i_p} D_{i_q} a_k)(D_{i_1} \cdots \hat{D}_{i_p} \cdots \\
&\cdots \hat{D}_{i_q} \cdots D_{i_m} D_k u) + \cdots + \sum_k (D_{i_1} \cdots D_{i_m} a_k)(D_k u) + \sum (D_{i_p} b)(D_{i_1} \cdots \hat{D}_{i_p} \cdots D_{i_m} u) + \\
&+ \sum (D_{i_p} D_{i_q} b)(D_{i_1} \cdots \hat{D}_{i_p} \cdots \hat{D}_{i_q} \cdots D_{i_m} u) + \cdots + (D_{i_1} \cdots D_{i_m} b)u = D_{i_1} \cdots D_{i_m} f.
\end{aligned}
$$

$$\left(\frac{d}{dt}-p\gamma-mn\gamma\right)u_m(t)\leqslant f_m(t)+\sum_{q=1}^{m}u_{m-q}(t)(C_{q+1}^m n+pC_q^m)\frac{q!}{(3\rho)^q}.$$

Supposons que les inégalités (3. 4) soient vraies pour u_{m-q}, $q\geqslant 1$. Alors dans l'inégalité ci-dessus le terme sous le signe $\sum$ est majoré par $(1/3)^q\left(C_{q+1}^m+\frac{p}{n}C_q^m\right)\frac{(r+m-1-q)!\ q!}{\rho^m}2A\exp(p\gamma t)K(t)^{r+m-q}$.

Comme $(r+m-1-q)!\ q!=(r+m-1)!/C_q^{r+m-1}$, $C_{q+1}^m\leqslant mC_q^m$, et $C_q^{r+m-1}\geqslant C_q^m$, nous aurons $\left(C_{q+1}^m+\frac{p}{n}C_q^m\right)(r+m-1-q)!\ q!\leqslant(r+m-1)!$ $\times\left(m+\frac{p}{n}\right)\leqslant(r+m-1)!\ (m+p)$.

D'où, $\sum u_{m-q}(\cdots)\leqslant\frac{(r+m-1)!}{\rho^m}2A\exp(p\gamma t)K(t)^{r+m-1}(m+p)\sum_{q=1}^{m}\left(\frac{1}{3}\right)^q$.

Comme $f_m(t)\leqslant\frac{(r+m)!}{\rho^m}\exp(p\gamma t)K(t)^{r+m}A$, l'intégration donne

$$u_m(t)\leqslant\frac{(r+m-1)!}{\rho^m}\exp(p\gamma t)K(t)^{r+m}A/\gamma n$$
$$+\frac{(r+m-1)!}{\rho^m}\exp(p\gamma t)K(t)^{r+m}A(m+p)/(r+m)(\gamma n).$$

Comme $r\geqslant p$, et de sorte que $(m+p)/(r+m)\leqslant 1$, l'inégalité au-dessus montre que (3. 4) est vraie pour $|\nu|=m$.

Lemme 3. 3. *Sous la même hypothèse que le lemme* 3. 2, *considérons la solution* u *de*

(3. 1)′ $L_p[u]=0$, *avec la condition initiale*

$$|D_x^\nu u(x, 0)|\leqslant\frac{(r+|\nu|)!}{\rho^{|\nu|}}A, \text{ où } r\geqslant p, \text{ nous avons alors}$$

$$|D_x^\nu u(x, t)|\leqslant 2\frac{(r+|\nu|)!}{\rho^{|\nu|}}\exp(p\gamma t)K(t)^{|\nu|}A.$$

Comme la démonstration est la même que la précédente, nous omettons cette preuve. Maintenant, on peut montrer

Proposition 3. 1. *Dans la même condition que le lemme* 3. 2, *supposons*

$$(3.5)\quad |D_x^\nu D_t^q f(x, t)| \leqslant \frac{(r+q+|\nu|)!}{\rho^{q+|\nu|}} \exp(p\gamma t) K(t)^{r+q+|\nu|} (\gamma n)^q A\,,$$
$$r \geqslant p\ (\geq 1)\,,$$

nous avons alors

$$(3.6)\quad |D_x^\nu D_t^q u(x, t)| \leqslant 2\,\frac{(r-1+q+|\nu|)!}{\rho^{q+|\nu|}} \exp(p\gamma t) K(t)^{r+q+|\nu|} (\gamma n)^q A\,,$$

où γ *et* ρ *vérifient, outre* (3.2), *la condition suivante* :

$$(3.7)\qquad \gamma \geqslant \min(6\gamma_0,\ 27),\quad \rho \leqslant 1/18\,.$$

Démonstration. Pour $q=0$, cette proposition est vraie (lemme 3.2). Nous allons montrer cette proposition par récurrence sur q. Supposons alors que (3.6) soit vrai pour $q=0, 1, \cdots, q-1$, et montrons-le pour $q=q$. $D_t^q u(x, t)$ est la solution de

$$(3.8)\quad L_p[D_t^q u] = D_t^q f - \sum_s C_s^q \{ \sum_{i=1}^{n} (D_t^{q-s} a_i)(D_t^s D_i u) + (D_t^{q-s} b)(D_t^s u)\}\,,$$

où $b = b_1 + (p-1) b_0$. Posons le second membre $= D_t^q f + \varphi(x, t)$, et divisons $D_t^q u$ en trois fonctions :

$$D_t^q u = u_0 + u_1 + u_2\,,\quad \text{où}$$

1) $u_0(x, t)$ est définie par

$L_p[u_0] = 0$, avec la condition initiale $u_0(x, 0) = D_t^q u(x, 0)$;

2) u_1 et u_2 sont définies par

$$\left.\begin{aligned} L_p[u_1] &= D_t^q f \\ L_p[u_2] &= \varphi \end{aligned}\right. \quad \text{avec les données initiales zéro.}$$

Considérons d'abord $u_1(x, t)$. D'après le lemme 3.2, nous aurons

$$(3.9)\quad |D_x^\nu u_1(x, t)| \leqslant \frac{(r+p-1+|\nu|)!}{\rho^{p+|\nu|}} \exp(p\gamma t) K(t)^{r+p+|\nu|} (\gamma n)^p A \left(\frac{2}{\gamma n}\right).$$

Passons à u_2. Nous voulons évaluer $D_x^\nu \varphi(x, t)$. Prenons le terme $(D_t^{q-s} a_i)(D_t^s D_i u)$ dans (3.8). Les dérivées D_x^ν de cette fonction sont majorées par

$$\frac{(r-1+q+|\nu|)!}{\rho^{q+|\nu|}} \left(\frac{1}{3}\right)^{q-s-1} 2\gamma \Big/ C_{r+s}^{r+q-1} \times \exp(p\gamma t) K(t)^{r+s+|\nu|} (\gamma n)^s A\,.$$

Pour la simplicité, nous écrivons ce fait par

$$(D_t^{q-s}a_i)(D_t^sD_iu) \underset{\nu}{\longrightarrow} (r-1+q+|\nu|)!\left(\frac{1}{3}\right)^{q-s-1} 2\gamma(\gamma n)^s/C_{r+s}^{r+q-1}\,.$$

De même

$$(D_t^{q-s}b)(D_t^su) \underset{\nu}{\longrightarrow} (r-1+q+|\nu|)!\left(\frac{1}{3}\right)^{q-s} 2\gamma p(\gamma n)^s/C_{q-s}^{r+q-1}$$

Comme $C_s^q/C_{r+s}^{r+q-1} \leqslant C_s^q/C_s^{q-1} \leqslant q$, et $C_{q-s}^{r+q-1} \geqslant C_{q-s}^q = C_s^q$, on voit que $D_x^\nu\varphi(x, t)$ se majore par

$$\frac{(r-1+q+|\nu|)!}{\rho^{q+|\nu|}}\exp(p\gamma t)K(t)^{r-1+q+|\nu|}2\left(\frac{3}{2}q+\frac{p}{2n}\right)(\gamma n)(\gamma n)^{q-1}A\,.$$

Alors, d'après le lemme 3.2, on a

$$\text{(3.10)}\qquad |D_x^\nu u_2(x, t)| \leqslant \frac{(r-1+q+|\nu|)!}{\rho^{q+|\nu|}}$$
$$\times\exp(p\gamma t)K(t)^{r+q+|\nu|}(\gamma n)^{q-1}A\left\{\frac{4\left(\frac{3}{2}q+\frac{p}{2n}\right)}{r+q-1+|\nu|}\right\}$$

où le dernier facteur se majore par $4\cdot 2=8$.

Enfin, considérons $u_0(x, t)$. Pour évaluer $D_x^\nu u_0(x, t)$ d'après le lemme 3.3, nous devons évaluer

$$D_x^\nu u_0(x, 0) = D_x^\nu D_t^q u(x, 0)\,.$$

Or, on a

$$\begin{aligned}\text{(3.11)}\qquad D_t^q u(x, 0) &= D_t^{q-1}f(x, 0)\\ &-\sum_{s=0}^{q-2}C_t^{q-1}\{\sum_{i=1}^{n}(D_t^{q-1-s}a_i)(D_t^sD_iu)+(D_t^{q-1-s}b)(D_t^su)\}\\ &-(\sum_{i=1}^{n}a_i(D_t^{q-1}D_iu)+b(D_t^{q-1}u))\,.\end{aligned}$$

Posons ce second membre $=D_t^{q-1}f+v_1(x)+v_2(x)$.
Ici, $D_x^\nu v_1(x)$ a été déjà évalué :

$$\text{(3.12)}\quad |D^\nu v_1(x)| \leqslant \frac{(r-2+q+|\nu|)!}{\rho^{q-1+|\nu|}}2\left\{\frac{3}{2}(q-1)+\frac{p}{n}\right\}(\gamma n)^{q-1}A\,.$$

Comme $2\left\{\frac{3}{2}(q-1)+\frac{p}{n}\right\}/(r+q-1+|\nu|) \leqslant 3$, (ici on utilise le fait que $r \geqslant p$), on a

$$(3.13) \qquad |D^\nu v_1(x)| \leqslant \frac{(r+q-1+|\nu|)!}{\rho^{q-1+|\nu|}}(\gamma n)^{q-1}A\cdot 3\,.$$

Passons à $v_2(x)$. On départ de l'expression

$$D_x^\nu(a_i\cdot D_t^{q-1}D_i u) = a_i(D_x^\nu D_t^{q-1}D_i u) + \sum_{\mu\neq 0} C_\mu^\nu(D_x^\mu a_i)(D_x^{\nu-\mu}D_t^{q-1}D_i u)\,.$$

Le premier terme du second membre se majore par

$2\gamma_0 \dfrac{(r+q-1+|\nu|)!}{\rho^{q+|\nu|}}(\gamma n)^{q-1}A$, et le second terme se majore par

$2\gamma\left(\dfrac{3}{2}\right)\dfrac{(r+q-2+|\nu|)!}{\rho^{q-1+|\nu|}}(\gamma n)^{q-1}A\,.$

De même, $D_x^\nu\{b(D_t^{q-1}u)\}$ se majore par $2p\gamma\left(\dfrac{3}{2}\right)\dfrac{(r+q-2+|\nu|)!}{\rho^{q-1+|\nu|}}\times$ $(\gamma n)^{q-1}A \leqslant 3\gamma\dfrac{(r+q-1+|\nu|)!}{\rho^{q-1+|\nu|}}(\gamma n)^{q-1}A$. (Ici, on a utilisé le fait que $q \geqslant 2$, $p \leqslant r$). On aura donc

$$(3.14) \qquad |D^\nu v_2(x)| \leqslant \frac{(r+q-1+|\nu|)!}{\rho^{q+|\nu|}}(\gamma n)^q\left(2\frac{\gamma_0}{\gamma}+3\rho+3\rho\right)A\,.$$

Comme $|D_x^\nu D_t^{q-1}f(x, 0)| \leqslant \dfrac{(r+q-1+|\nu|)!}{\rho^{q-1+|\nu|}}(\gamma n)^{q-1}A$, compte tenu de (3.12) et (3.13), et en appliquant le lemme 3.3, nous avons

$$(3.15) \qquad |D_x^\nu u_0(x, t)| \leqslant \frac{(r+q-1+|\nu|)!}{\rho^{q+|\nu|}}(\gamma n)^q \times \exp(p\gamma t)K(t)^{|\nu|}2\left(2\frac{\gamma_0}{\gamma}+6\rho+\frac{\rho}{\gamma}\right)A\,.$$

Les (3.9), (3.10) et (3.15) donnent

$$(3.16) \qquad |D_x^\nu D_t^q u(x, t)| \leqslant \frac{(r+q-1+|\nu|)!}{\rho^{q+|\nu|}} \times \exp(p\gamma t)K(t)^{r+q+|\nu|}(\gamma n)^q 2\left(\frac{5}{\gamma}+2\frac{\gamma_0}{\gamma}+6\rho+\frac{\rho}{\gamma}\right)A\,.$$

D'après les conditions sur γ, γ_0 et ρ dans l'énoncé de cette proposition, le dernier facteur est moindre que 2, ce qui prouve (3.5) pour $q=q$.

Pareillement à la proposition 3.1, on a

Proposition 3.2. *Considérons la solution $u(x, t)$ de*

$$L_p[u] = 0. \tag{3.1$'$}$$

On suppose que la donnée initiale $u(x, 0)$ vérifie l'inégalité :

(3.17) $\quad |D_x^\nu u(x, 0)| \leqslant \dfrac{(r+|\nu|)!}{\rho^{|\nu|}} A$, *où* $r \geqslant p \geqslant 1$, *alors on a*

$$|D_x^\nu D_t^q u(x, t)| \leqslant 2 \frac{(r+q+|\nu|)!}{\rho^{q+|\nu|}} \exp(p\gamma t) K(t)^{r+q+|\nu|} (\gamma n)^q A, \tag{3.18}$$

où γ et ρ sont supposées vérifiant (3.7) *de la proposition* 3.2.

Pour $q=0$, (3.18) devient le lemme 3.3. Pour $q \geqslant 1$, la démonstration est presque la même que la précédente. Nous l'omettons.

Ceci préparé, revenons à notre problèmes. D'après la notation de la section précédente, $u_0(x, t)$ est définie par

$$\mathcal{L}'_{s+1}[u_0] = 0, \quad u_0(x, 0) = 1. \tag{3.19}$$

En y appliquant la proposition 3.2 (ici on prend $L_p = \mathcal{L}'_{s+1}$, c'est-à-dire que $p = s+2$), on a

$$|D_x^\nu D_t^q u_0(x, t)| \leqslant 2 \frac{(s+2+q+|\nu|)!}{\rho^{q+|\nu|}} \times \exp\{(s+2)\gamma t\} K(t)^{s+2+q+|\nu|} (\gamma n)^q. \tag{3.20}$$

De proche en proche, $u_1, u_2, \cdots, u_p, \cdots$ sont définies par

$$\mathcal{L}'_{s+1+p}[u_p] = -\sum_{k=2}^{m} L_k[u_{p+1-k}], \quad u_p(x, 0) = 0. \tag{2.8$'$}$$

Maintenant on va montrer la

Proposition 3.3.

$$|D_x^\nu D_t^q u_p(x, t)| \leqslant C_0^p \frac{(s+2+p+q+|\nu|)!}{\rho^{q+|\nu|}} \times \exp\{(s+2+p)\gamma t\} K(t)^{s+2+p+q+|\nu|} (\gamma n)^q, \quad p = 0, 1, 2, \cdots \tag{3.21}$$

où C_0 (>1) est une constante convenablement choisie.

Preuve. Récurrence sur p. Supposons que (3. 21) soit vrai pour $u_1, u_2, \cdots, u_{p-1}$. On veut montrer (3. 21) pour u_p. Désignons le second membre de (2. 8)$'$ par g_p: $\mathcal{L}'_{s+1+p}[u_p]=g_p$. Nous aurons

$$\begin{aligned}|D_x^\nu D_t^q g_p| &\leqslant C_0^{p-1} M \frac{(s+2+p+1+q+|\nu|)!}{\rho^{q+|\nu|+1}} \\ &\quad\times \exp\{(s+2+p-1)\gamma t\}\, K(t)^{s+2+p+1+q+|\nu|}(\gamma n)^q \\ &\leqslant \frac{(s+2+p+1+q+|\nu|)!}{\rho^{q+|\nu|}} \\ &\quad\times \exp\{(s+2+p)\gamma t\}\, K(t)^{s+2+p+1+q+|\nu|}(\gamma n)^q \left[C_0^{p-1} M\left(\frac{1}{\rho}\right)^{p+1}\right],\end{aligned}$$

où M est une constante ne dépendant que de $L_2, \cdots, L_m$.
On va y appliquer la proposition 3. 1. On prend $L_p=\mathcal{L}'_{s+1+p}$ $r=s+2+p+1$, on aura

$$\begin{aligned}|D_x^\nu D_t^q u_p(x, t)| &\leqslant \frac{(s+2+p+q+|\nu|)!}{\rho^{q+|\nu|}} \\ &\quad\times \exp\{(s+2+p)\gamma t\}\, K(t)^{s+2+p+1+q+|\nu|}(\gamma n)^q\, 2\left[C_0^{p-1} M\left(\frac{1}{\rho}\right)^{p+1}\right].\end{aligned}$$

Pour avoir (3. 21), il suffit de prendre C_0 de manière que

(3. 22) $2K(1)M\dfrac{1}{\rho}\leqslant C_0$, ici on a supposé que $0\leqslant t\leqslant 1$. c.q.e.d.

Jusqu'à maintenant, nous avons fait joué à une des variables, qu'on a prit t, un rôle spécial, ceci serait nécessaire compte tenu des suites de conditions initiales des u_p. Maintenant, en écrivant (3. 21) sous la forme symétrique, on aura

$$\begin{aligned}(3.23)\qquad |D^\nu u_p(x)| &< \frac{(s+2+p+|\nu|)!}{\rho^{|\nu|}} \\ &\quad\times \{K(\delta)(\gamma n)\}^{|\nu|}\{C_0 K(\delta)\exp(\gamma\delta)\}^p\{\exp(\gamma\delta)K(\delta)\}^{s+2} \\ &= \frac{(s+2+p+|\nu|)!}{\rho(\delta)^{|\nu|}} C(\delta)^p A(\delta\,;\,s)\,,\quad p=0,1,2,\cdots,\end{aligned}$$

où $\qquad \rho(\delta)=\rho/K(\delta)(\gamma n),\quad C(\delta)=C_0K(\delta)\exp(\gamma\delta)\,.$

Ce qui montre que la série

$$(2.2)\qquad u(x)=\sum_{p=0}^{\infty} f_p(\varphi)u_p(x)$$

converge uniformément autour de x_0 si $\varphi < 1/C(\delta)$, avec toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre $s+m$. Evidemment on doit se rappeler que, pour la majoration de (3.23), on a, dès le commencement, supposé que $x-x_0$ est petit parce que les directions bicaractéristiques ne sont en général pas réelles.

On a donc le

Théorème 3.1. *Soit S une variété caractéristique analytique simple, c'est-à-dire qu'on suppose* (2.1). *Il existe alors une solution $u(x)$ de $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)=0$ au voisinage de x_0, s'annulant identiquement nulle d'un côté de S (qu'on peut choisir à la volonté), mais dans l'autre côte, $u(x)$ a $\frac{\varphi^{s+m}}{(s+m)!}$ comme sa partie principale. s étant un entier positif arbitraire. $u(x)$ est $(m+s-1)$-fois continuement différentiable, mais ne l'est pas $(m+s)$*-fois.

4. Solutions non analytiques.

On va envisager l'équation à coefficients analytiques

$$a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(x) = 0. \tag{4.1}$$

On sait que si $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ est elliptique, u doit être analytique. Il y a plus : toute solution $u(x)$ de $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)u=f(x)$ est analytique où $f(x)$ l'est [7]. Mais, si $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ n'est pas elliptique, existe-t-il au moins une solution non analytique ? La réponse est en général négative. Mais nous voulons esseyer de considérer le côté positif : Dans quelles conditions, peut-on affirmer l'existence de solutions non analytiques ?

D'abord, considérons le cas où

(4.2)
1°. $h\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ est un opérateur à coefficients réels ;
2°. $h(x^0, \xi^0) = 0$;
3°. $\sum |h_{\xi_i}(x^0, \xi^0)| \neq 0$.

Dans ces conditions, on peut montrer l'existence d'une solution non analytique. En effet, on voit qu'il existe une variété caractéristique S passant par x^0. Voici la preuve : $\sum|h_{\xi_i}(x^0,\xi^0)|\neq 0$ entraîne qu'il existe $h_{\xi_i}\neq 0$, supposé $h_{\xi_1}\neq 0$, alors $\xi_1=\lambda(x;\xi_2,\cdots,\xi_n)$, λ étant réel pour x, ξ réels. On résout l'équation $\varphi_{x_1}=\lambda(x_1,\cdots,x_n;\varphi_{x_2},\cdots,\varphi_{x_n})$ sous la condition $\varphi(0,x_2,\cdots,x_n)=\xi_2^0(x_2-x_2^0)+\cdots+\xi_n^0(x_n-x_n^0)$ (Théorème de Cauchy-Kowalewski). Evidemment $\varphi(x^0)=0$ et $\varphi_x\neq 0$. La surface définie par $\varphi(x)=0$ est une variété caractéristique pour $a\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)$, car $h(x,\varphi_x)=0$. Or, le résultat (Théorème 3.1) affiirme qu'il existe une infinité de solutions non analytiques.

Maintenant on va envisager un autre cas. On suppose 2° et 3° de (4.2). Mais on ne suppose plus 1°. Or, récemment H. Lewy a traité ce genre de question [6] et puis L. Hörmander a discuté cette question d'une manière assez générale au point de vue un peu différent. Nous avons été inspirés directement du beau mémoire de H. Lewy [6].
Au lieu de 1° de (4.2), on suppose

$$(4.3)\ 1'^\circ:\ C_{2m-1}(x,\xi)=Im\sum_{i=1}^{n}h_{\xi_i}(x,\xi)\overline{h_{x_i}(x,\xi)}\neq 0\quad\text{pour}\quad x=x^0,\ \xi=\xi^0.$$

Dans ces conditions, c'est-à-dire que dans les conditions 1'°, 2° et 3°, Hörmander a montré [3] le

Lemme 4.1. *Il existe une solution analytique* $\varphi(x)$ *de* $h(x,\varphi_x)=0$ *vérifiant*

a) $\varphi(x^0)=0,\quad \varphi_x\neq 0;$

b) $\varphi(x)=\xi^0\cdot(x-x^0)+\dfrac{1}{2}\sum_{i,j}\alpha_{ij}(x_i-x_i^0)(x_j-x_j^0)+0(|x|^3),$

où $[\alpha_{ij}]$ *étant symétrique et Re* $[\alpha_{ij}]$ *est définie-positive.*

Pour faciliter au lecteur la comprénension de ce lemme, nous allons en donner la preuve. Supposons $h_{\xi_1}\neq 0$; En résolvant $h(x,\xi)=0$, on considère

$\xi_1=\lambda(x;\xi_2,\xi_3,\cdots,\xi_n)$. Comme $\lambda_{x_i}=-h_{x_i}/h_{\xi_1}$, $\lambda_{\xi_i}=-h_{\xi_i}/h_{\xi_1}$,

$$h_{\xi_1}\bar h_{x_1}+\sum_{i=2}^{n}{}'h_{\xi_i}\bar h_{x_i}=|h_{\xi_1}|^2\left(\frac{\bar h_{x_1}}{\bar h_{\xi_1}}+\sum{}'\frac{h_{xi}}{h_{\xi_1}}\frac{\bar h_{xi}}{\bar h_{\xi_1}}\right)=-|h_{\xi_1}|^2(\bar\lambda_{x_1}-\sum{}'\lambda_{\xi_i}\bar\lambda_{x_i}).$$

(4. 3) devient alors

$$Im(\lambda_{x_1} - \textstyle\sum' \lambda_{x_i}\bar{\lambda}_{\xi_i}) \neq 0\,. \tag{4. 4}$$

Cela posé, on résout l'équation

$$\varphi_{x_1} = \lambda(x_1, \cdots, x_n\,;\ \varphi_{x_2}, \cdots, \varphi_{x_n})$$

avec la condition initiale

$$\varphi(0,\ x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=2}^{n}{}' \xi_i^0(x_i - x_i^0) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=2}^{n}{}' \alpha_{ij}(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)\,,$$

où α_{ij} sont des constantes à déterminer. En écrivant

$$\varphi(x) = \sum \xi_i^0(x_i - x_i^0) + \frac{1}{2}\sum \alpha_{ij}(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) + \cdots\,,$$

$$\alpha_{1i} = \varphi_{x_1 x_i} = \lambda_{x_i} + \sum_j{}' \lambda_{\xi_j}\varphi_{x_j x_i} = \lambda_{x_i} + \textstyle\sum' \alpha_{ij}\lambda_{\xi_j}\,, \quad (i = 1, 2, \cdots, n)\,.$$

Cette relation équivaut à dire que

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12}\cdots\alpha_{1n} \\ & \boxed{\ \alpha_{ij}\ } \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ \lambda_{\xi_2} \\ \vdots \\ \lambda_{\xi_n} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \lambda_{x_1} \\ \lambda_{x_2} \\ \vdots \\ \lambda_{x_n} \end{pmatrix}.$$

Or, Hörmander a montré que l'existence d'une $[\alpha_{ij}]$ vérifiant les conditions mentionnées ci-dessus est équivalente à ce que le premier membre de (4. 4) soit négatif (qu'on le peut supposer toujours en prenant $\xi^0 = -\xi^0$ dans (4. 3), s'il est nécessaire).

Cela posé, considérons la fonction $\varphi(x)^{\frac{2p+1}{2}}$ dans l'espace réel R^n. Elle est une fonction uniforme au voisinage de x^0, car sa partie imaginaire y est toujours non négative, si le voisinage est petit. De plus, elle est p-fois continuement dérivable, mais ne l'est pas $(p+1)$-fois. Or, d'après le résultat de section 3, on a le droit de considérer la solution $u(x)$ de (4. 1), définie au voisinage de x^0, de la forme

$$u(x) = \varphi(x)^{\frac{2m+1}{2}}u_0(x) + \varphi(x)^{\frac{2m+3}{2}}u_1(x) + \cdots + \varphi(x)^{\frac{2m+1+2p}{2}}u_{p-1}(x) + \cdots \tag{4. 5}$$

où $u_i(x)$ étant définies exactement de la même manière que dans le cas précédent. Elle est, au voisinage de x_0, m-fois continuement dérivable, mais ne l'est pas $(m+1)$-fois.

Enonçons notre résultat.

Théorème 4.1. *Soit* $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ *un opérateur différentiel à coefficients analytiques. Si on suppose* 2°, 3° *de* (4.2) *et* (4.3), *il existe alors une solution* $u(x)$ *de* (4.1), *m-fois continuement dérivable, mais ne l'est pas* $(m+1)$*-fois, au voisinage de* x_0.

Remarque. Evidemment, en prenant dans (4.5), $m=m+k$, on peut dire qu'il existe une solution exactement $(m+k)$-fois dérivable.

5. Systèmes.

Le raisonnement prédédent s'applique aux systèmes d'équations. Mais, comme Hadamard a signalé dans [1], cette application n'est pas immédiate. Nous avons suivi assez fidèlement le chemin tracé par Hadamard ([1]. p. 278–287).

Soit

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \left[a^{ij}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\right] \tag{5.1}$$

une matrice d'ordre N. On suppose que les a^{ij} sont tous d'ordre m et à coefficients analytiques.

Désignons par

(5.2) $H(x, \xi)=[h^{ij}(x, \xi)]$, où les $h^{ij}(x, \xi)$ sont les parties principales de $a^{ij}(x, \xi)$ d'ordre m.

Soit

$$h(x, \xi) = \text{dét}\, H(x, \xi). \tag{5.3}$$

On dit que la variété S définie par $\varphi(x)=0$, $(\varphi_x \neq 0)$, est une variété caractéristique de A, si

$$h(x, \varphi_x) = 0 \quad x \text{ sur } S. \tag{5.4}$$

Supposons d'abord que S est caractéristique simple au point x_0:

$$\sum_{i=1}^{n} |h_{\xi_i}(x^0; \varphi_x(x^0))| \neq 0. \tag{5.5}$$

Ceci entraîne que $H(x, \varphi_x)$ est de *rang* $N-1$ *pour* $x \in S$.

On définit une matrice analytique $H_0(x)$ de rang $N-1$ au voisinage de x_0, qui coïncide avec $H(x, \varphi_x)$ pour x sur S. En désignant par $\alpha_{ij}(x)$ le co-facteur de $h^{ij}(x)$ de $H_0(x)$, on peut supposer $\alpha_{nn}(x) \neq 0$.
On définit le nul-vecteur à droite $\alpha(x)$ et à gauche $\beta(x)$ par

$$\begin{aligned} H_0(x)\alpha(x) &= 0, \quad \alpha(x) = (\alpha_{N1}, \alpha_{N2}, \cdots, \alpha_{NN}) \\ \beta(x)H_0(x) &= 0, \quad \beta(x) = (\alpha_{1N}, \alpha_{2N}, \cdots, \alpha_{NN}). \end{aligned}$$

Cela posé, on considère $A\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)(f(\varphi)u)$. Ceci s'exprime par

$$f^{(m)}(\varphi)H(x, \varphi_x)u + f^{(m-1)}(\varphi)\left[\sum_{i=1}^{n} H_{\xi_i}(x, \varphi_x)\frac{\partial}{\partial x_i}u + C(x)u\right] + \cdots$$

Comme $H(x, \varphi_x)$ s'annule sur S, on pose

$$H(x, \varphi_x) = C_0(x)\varphi(x),$$

où $C_0(x)$ est une matrice analytique. Alors l'expression ci-dessus s'écrit

$$f^{(m)}(\varphi)H_0(x)u + f^{(m-1)}(\varphi)\left[\sum H_{\xi_i}(x, \varphi_x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + \left(C(x) + \frac{f^{(m)}(\varphi)\varphi}{f^{(m-1)}(\varphi)}\right)C_0(x)u\right] + \cdots$$

Comme dans la section 2, on veut construire une solution $u(x)$ de la forme

(5. 6) $$u(x) = f_0(\varphi)u_0(x) + f_1(\varphi)u_1(x) + \cdots$$

On pose d'abord

(5. 7) $$u_0(x) = \sigma_0(x)\alpha(x)$$

où $\sigma_0(x)$ est une fonction scalaire à déterminer dans l'étape suivante. Pour déterminer u_1, on doit résoudre

(5. 8) $$\sum H_{\xi_i}(x, \varphi_x)\frac{\partial}{\partial x_i}u_0 + (C(x) + (s+1)C_0(x))u_0 + H_0(x)u_1 = 0,$$

car $$f_0^{(m)}(\varphi)\varphi / f_0^{(m-1)}(\varphi) = s+1.$$

Pour que cette équation puisse se résoudre, il faut et il suffit qu'on ait

$$(5.9)\quad \sum_{i=1}^{n}\langle\beta(x),\ H_{\xi_i}(x,\ \varphi_x)\frac{\partial}{\partial x_i}u_0\rangle+\langle\beta(x),\ (C(x)+(s+1)C_0(x))u_0\rangle = 0\,.$$

Compte tenu de (5.7), il devient

$$(5.10)\qquad \sum a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\sigma_0+\{c_1(x)+(s+1)c_0(x)\}\,\sigma_0=0\,,$$

où
$$a_i(x) = \langle\beta(x),\ H_{\xi_i}(x,\ \varphi_x)\alpha(x)\rangle\,.$$

Nous allons montrer que

$$(5.11)\qquad a_i(x) = \alpha_{NN}(x)h_{\xi_i}(x,\ \varphi_x)\quad x\ sur\ S.$$

En effet, pour x sur S,

$\langle\beta(x),\ H_{\xi_\nu}\alpha(x)\rangle=\sum_{i,j}h_{\xi_\nu}^{ij}(x,\ \varphi_x)\alpha_j\beta_i=\sum_{i,j}h_{\xi_\nu}^{ij}\alpha_{Nj}\alpha_{iN}$. Or, $\alpha_{NN}(\alpha_{i1},\ \alpha_{i2},\ \cdots,\alpha_{iN})=\alpha_{iN}(\alpha_{N1},\ \alpha_{N2},\cdots,\alpha_{NN})$. D'où $\alpha_{Nj}\alpha_{iN}=\alpha_{ij}\alpha_{NN}$. Donc la dernière somme est égale à

$$\alpha_{NN}\sum h_{\xi_\nu}^{ij}\alpha_{ij} = \alpha_{NN}h_{\xi_\nu}(x,\ \varphi_x)\quad \text{pour } x \text{ sur } S\,.$$

$\sigma_0(x)$ étant ainsi définie, on définit $u_1(x)$ (solution particulière) de la manière suivante : ici $H_0(x)u_1=f_0$, où $f_1\beta_1+\cdots+f_N\beta_N=0$, alors il existe une matrice régulière $B(x)$ telle qu'on ait

$$(5.12)\qquad u_1(x) = B(x)f_0+\sigma_1(x)\alpha(x)\,,$$

donnant toujours la solution générale, où $\sigma_1(x)$ est une fonction scalaire à déterminer, où

$$(5.13)\quad f_0(x) = -\sum H_{\xi_i}(x,\ \varphi_x)\frac{\partial}{\partial x_i}u_0-(C(x)+(s+1)C_0(x))u_0\,.$$

Pour $u_2(x)$, on aura l'équation

$$(5.14)\quad H_0(x)u_2 = -\sum H_{\xi_i}(x,\ \varphi_x)\frac{\partial}{\partial x_i}u_1-(C_1(x)+(s+2)C_0(x))u_1 +L_2[u_0]\,,$$

où L_2 est un opérateur différentiel du second ordre. Pour que cette équation en u_2 ait une solution, il faut et il suffit qu'on ait

$$(5.15)\quad \sum a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\sigma_1+(c_1(x)+(s+2)c_0(x))\sigma_1=\langle\beta,\ L_2[u_0]\rangle\,.$$

$\sigma_1(x)$ étant ainsi déterminée, on a

(5.16) $$u_2(x) = B(x)f_1(x)+\sigma_2(x)\alpha(x)\,,$$

où $f_1(x)$ est le second membre de (5.14) et $\sigma_2(x)$ est une fonction à déterminer.

En général, on a une série d'équations

(5.17) $$H_0(x)u_p = -\sum H_{\xi_i}(x, \varphi_x)\frac{\partial}{\partial x_i}u_{p-1}-(C_1(x)+(s+p)C_0(x))u_{p-1}$$
$$+L_2[u_{p-2}]+L_3[u_{p-3}]+\cdots+L_m[u_{p-m}]\,.$$

Supposons qu'on ait déterminé $u_0,\ u_1, \cdots, u_{p-2}$ et

(5.18) $$u_{p-1} = B(x)f_{p-2}(x)+\sigma_{p-1}(x)\alpha(x)\,,$$

où f_{p-2} est le second membre de (5.17) correspondant à $p=p-1$. et $\sigma_{p-1}(x)$ est une fonction scalaire à déterminer. En prenant le produit scalaire du second membre de (5.17) avec β, on a

(5.19) $$\sum a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\sigma_{p-1}+\Big(c(x)+(s+p)c_0(x)\Big)\sigma_{p-1} = \sum_{r=2}^{m}\langle\beta,\ L_r[u_{p-r}]\rangle\,,$$

$\sigma_{p-1}(x)$ étant ainsi déterminée, de sorte que u_{p-1} étant ainsi complètement déterminée, on a

(5.20) $$u_p = B(x)f_{p-1}(x)+\sigma_p(x)\alpha(x)\,,$$

où f_{p-1} est le second membre de (5.17), et $\sigma_p(x)$ est à déterminer dans l'étape suivante.

On peut étendre le raisonnement précédent à des cas plus généraux. Nous allons donner quelques indications sur ce point.

Au lieu de supposer (5.5), on suppose que: Soit $h_1(x, \xi)$ une valeur propre de multiplicité p de $H(x, \xi)$:

(5.21) $$\text{dét}\,(\lambda I-H(x, \xi)) = (\lambda-h_1(x, \xi))^p q(\lambda\,;\,x, \xi)\,,$$

où

1°. $h_1(x, \xi)$ est analytique en x et ξ au voisinage de x^0 et $\xi^0=\varphi_x(x^0)$; $h_1(x^0, \xi^0)=0$;

2°. $q(0\,;\,x^0, \xi^0)\neq 0$;

3°. $\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial}{\partial\xi_i}h_1(x^0, \xi^0)\right|\neq 0$;

4°. $H(x, \varphi_x)$ est du rang $N-p$ pour x sur S.

Comme $h_1(x, \xi)$ est une valeur propre de multiplicité p, il existe une matrice analytique $N(x, \xi)$ définie au voisinage de (x^0, ξ^0) telle qu'on ait (forme canonique)

$$(5.22)\qquad N(x, \xi)H(x, \xi)N^{-1}(x, \xi) = \left(\begin{array}{c|c} C & B \\ \hline \underbrace{\quad 0 \quad}_{N-p} & \left.\begin{matrix} h_1 & & \theta_{ij} \\ & h_1 & \\ 0 & & \ddots \ \ h_1 \end{matrix}\right\} p \end{array}\right) = D(x, \xi),$$

où $\theta_{ij}(x, \xi)$ sont analytiques. On a

a) dét. $C(x^0, \xi^0) \neq 0$, car dét. $C(x^0, \xi^0) = \pm q(0\,; x^0, \xi^0)$.
b) $h_1(x, \varphi_x) = 0$ pour x sur S, car det. $H = h(x, \varphi_x) = 0$ x sur S.
c) $\theta_{ij}(x, \varphi_x) = 0$ pour x sur S, (d'après 4°).

Maintenant on définit p *presque* vecteurs propres à gauche $e_1, \cdots, e_p$ et ceux à droite $\gamma_1, \cdots, \gamma_p$ correspondant à la valeur propre $h_1(x, \xi)$ de la manière suivante :

$$(5.23)\qquad e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ N-p+i, \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \qquad \gamma_i = \begin{pmatrix} * \\ * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} N-p \\ \\ \\ N-p+i \\ \\ \\ \end{matrix}$$

où γ_i sont des vecteurs propres (à droite) de la matrice correspondant à la valeur propre $h_1(x, \xi)$:

$$\left(\begin{array}{c|c} C & B \\ \hline 0 & \begin{matrix} h_1 & & 0 \\ & h_1 & \\ 0 & & \ddots \ \ h_1 \end{matrix} \end{array}\right)$$

On aura alors

$$(5.24)\qquad \begin{cases} (h_1 - B)\gamma_i = \theta_{1i}e_1 + \theta_{2i}e_2 + \cdots + \theta_{i-1,i}e_{i-1} & (i = 1, 2, \cdots, p), \\ (h_1 - {}^tB)e_i = \theta_{i,i+1}e_{i+1} + \theta_{i,i+2}e_{i+2} + \cdots + \theta_{ip}e_p & (i = 1, 2, \cdots, p). \end{cases}$$

Remarquons ici que, au lieu de supposer 4° de (5. 21), si on suppose de plus :

(5. 25) $\quad H(x, \xi)$ est de rang $N-p$ au voisinage x^0, ξ^0,

alors tous les θ_{ij} s'annulent identiquement.
Cela posé, on définit

$$(5.26)\qquad \begin{cases} \alpha_i = N^{-1}\gamma_i , \\ \beta_i = {}^tNe_i . \end{cases}$$

Compte tenu de (5. 22) et (5. 24), on a

$$(5.27)\qquad \begin{cases} (h_1 I - H)\alpha_i = \theta_{1i}N^{-1}e_1 + \theta_{2i}N^{-1}e_2 + \cdots + \theta_{i-1,i}N^{-1}e_{i-1} , \\ (h_1 I - {}^tH)\beta_i = \theta_{i,i+1}\beta_{i+1} + \theta_{i,i+2}\beta_{i+2} + \cdots + \theta_{ip}\beta_p . \end{cases}$$

Evidemment, *pour x sur S*, on a

$$(5.28)\qquad \begin{cases} H(x, \varphi_x)\alpha_i(x, \varphi_x) = 0 , \\ {}^tH(x, \varphi_x)\beta_i(x, \varphi_x) = 0 . \end{cases}$$

On va montrer que

$$(5.29)\qquad \langle \beta_j(x, \varphi_x), H_{\xi_\nu}(x, \varphi_x)\alpha_i(x, \varphi_x)\rangle = \frac{\partial}{\partial \xi_\nu} h_1(x, \varphi_x)\delta_i^j + \frac{\partial}{\partial \xi_\nu}\theta_{ji}(x, \varphi_x)$$

pour x sur S.

En effet, la différentiation en ξ_ν de la première relation de (5. 27) donne

$$((h_1)_{\xi_\nu} I - H_{\xi_\nu})\alpha_i + (h_1 I - H)(\alpha_i)_{\xi_\nu} = \sum_{k=1}^{i-1}(\theta_{ki})_{\xi_\nu}N^{-1}e_k + \sum_{k=1}^{i-1}\theta_{ki}(N^{-1}e_k)_{\xi_\nu} .$$

En posant $\xi = \varphi_x$ et en restreignant x sur S (de sorte que la dernière expression s'annule), on prend le produit scalaire avec $\beta_j(x, \varphi_x)$:

$$\begin{aligned} (h_1)_{\xi_\nu}(x, \varphi_x)\langle \beta_j, \alpha_i\rangle - \langle \beta_j, H_{\xi_\nu}\alpha_i\rangle + \langle \beta_j, -H(\alpha_i)_{\xi_\nu}\rangle \\ = \sum_{k=1}^{i-1}(\theta_{ki})_{\xi_\nu}\langle \beta_j, N^{-1}e_k\rangle = (\theta_{ji})_{\xi_\nu} . \end{aligned}$$

En effet, $\langle \beta_j, N^{-1}e_k\rangle = \langle {}^tNe_j, N^{-1}e_k\rangle = \langle e_j, e_k\rangle = \delta_j^k$.
Comme $\langle \beta_j, \alpha_i\rangle = \delta_i^j$. nous avons donc (5. 29).
Nous avons vérifié (5. 29) en supposant $x \in S$. Mais, *au voisinage de S*, on a

$$(5.30)\qquad \langle\beta_j, H_{\xi_\nu}(x, \varphi_x)\alpha_i\rangle = \frac{\partial}{\partial\xi_\nu}h_1(x, \varphi_x)\delta_i^j + \frac{\partial}{\partial\xi_\nu}\theta_{ji}(x, \varphi_x) - c_{ij}(x),$$

où
$$c_{ij}(x) = \langle\beta_j(x, \varphi_x), \sum_{k=1}^{i-1}\theta_{ki}(N^{-1})_{\xi_\nu}e_k\rangle.$$

Compte tenu de cette situation, on décompose $H_{\xi_\nu}(x, \varphi_x)$ ($\nu = 1, 2, \cdots, n$) sous la forme :

$$(5.31)\qquad H_{\xi_\nu}(x, \varphi_x) = H_\nu(x) + H_\nu^\varepsilon(x) = H_\nu(x) + \varphi(x)H'_\nu(x),$$

où $H'_\nu(x)$ est une matrice analytique au voisinage de x_0, et pour $H_\nu(x)$ on a

$$(5.32)\qquad \langle\beta_j, H_\nu(x)\alpha_i\rangle = \frac{\partial}{\partial\xi_\nu}h_1(x, \varphi_x)\delta_i^j + \frac{\partial}{\partial\xi_\nu}\theta_{ji}(x, \varphi_x)$$

au voisinage de x_0.

Une telle matrice $H_\nu^\varepsilon(x)$ existe. En effet, la condition $\langle\beta_j, H_\nu^\varepsilon(x)\alpha_i\rangle = c_{ij}(x)$ équivaut à $c_{ij} = \langle e_j, N(x, \varphi_x)H_\nu^\varepsilon(x)N^{-1}(x, \varphi_x)\gamma_i\rangle$. Il suffit donc qu'on ait

$$NH_\nu^\varepsilon(x)N^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_{ji} \end{bmatrix}.$$

De même, on décompose $H(x, \varphi_x)$:

$$(5.33)\qquad H(x, \varphi_x) = H_0(x) + H_0^\varepsilon(x) = H_0(x) + \varphi(x)H'_0(x).$$

On définit $H_0^\varepsilon(x)$ de la manière suivante :

$$NH(x, \varphi_x)N^{-1} = \begin{bmatrix} C & B \\ 0 & \mathcal{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C - h_1 I_{N-p} & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 I_{N-p} & 0 \\ 0 & \mathcal{E} \end{bmatrix}$$
$$= D_0(x) + D_\varepsilon(x).$$

$$\begin{cases} H_0(x) = N^{-1}D_0 N, \\ H_0^\varepsilon(x) = N^{-1}D_\varepsilon N. \end{cases}$$

On aura alors

$$(5.34)\qquad \begin{cases} \text{i)}\quad H_0(x)\alpha_i = 0,\ {}^tH_0(x)\beta_i = 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, p; \\ \text{ii)}\quad \langle\beta_j, H_0^\varepsilon(x)\alpha_i\rangle = \theta_{ji}(x, \varphi_x) + h_1(x, \varphi_x)\delta_i^j. \end{cases}$$

Comme i) est évident, montrons ii).

$$\langle\beta_j, H_0^\varepsilon(x)\alpha_i\rangle = \langle e_j, NH_0^\varepsilon N^{-1}\gamma_i\rangle = \langle e_j, D_\varepsilon(x)\gamma_i\rangle$$
$$= h_1(x, \varphi_x)\delta_i^j + \theta_{ji}(x, \varphi_x).$$

Maintenant, compte tenu de (5. 31) et (5. 33), on écrit $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)(f(\varphi)u)$ sous la forme:

$$f^{(m)}(\varphi)H_0(x)u+f^{(m-1)}(\varphi)\left[\sum_{\nu=1}^{n} H_\nu(x)\frac{\partial}{\partial x_\nu}u+\left(C(x)+\frac{f^{(m)}(\varphi)\varphi}{f^{(m-1)}(\varphi)}H_0'(x)\right)u\right]$$
$$+f^{(m-2)}(\varphi)\left[\sum H_{\xi_i\xi_j}(x,\varphi_x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\cdots+\frac{f^{(m-1)}(\varphi)\varphi}{f^{(m-2)}(\varphi)}\left(\sum H_\nu'(x)\frac{\partial}{\partial x_\nu}u\right)\right]+\cdots$$

Posons d'abord $u=u_0$, $f=f_0=\begin{cases}\dfrac{\varphi^{s+m}}{(s+m)!} & \text{pour } \varphi\geqslant 0\\ 0 & \text{pour } \varphi<0,\end{cases}$

alors on a

$$f_0^{(m)}(\varphi)H_0(x)u_0+f_0^{(m-1)}(\varphi)\left[\sum H_\nu(x)\frac{\partial}{\partial x_\nu}u_0+(C(x)+(s+1)H_0'(x))u_0\right]$$
$$+f_0^{(m-2)}(\varphi)\left\{L_2+(s+2)\sum H_\nu'(x)\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right\}[u_0]+f_0^{(m-3)}L_3[u_0]+\cdots+f_0L_m[u_0].$$

Comme dans le cas d'une caractéristique simple, on définit une série de fonctions $u_0, u_1, \cdots, u_p, \cdots$: On pose d'abord

$$u_0(x)=\sum_{i=1}^{p}\sigma_0^i(x)\alpha_i(x). \tag{5. 35}$$

Ensuite u_1 est définie de manière que l'équation

$$H_0(x)u_1+\sum H_\nu(x)\frac{\partial}{\partial x_\nu}u_0+(C(x)+(s+1)H_0'(x))u_0=0 \tag{5. 36}$$

ait au moins une solution $u_1(x)$. u_2 est définie par

$$\begin{aligned}H_0(x)u_2+\sum H_\nu(x)\frac{\partial}{\partial x_\nu}u_1+(C(x)+(s+2)H_0'(x))u_1&\\+(L_2+(s+3)L_1)[u_0]=0,&\end{aligned} \tag{5. 37}$$

où $L_1=\sum H_\nu'(x)\frac{\partial}{\partial x_\nu}$.

En général, u_l est déterminée par

$$\begin{aligned}H_0(x)u_l+\left[\sum H_\nu(x)\frac{\partial}{\partial x_\nu}+(C(x)+(s+l)H_0'(x))\right][u_{l-1}]&\\+(L_2+(s+l+1)L_1)[u_{l-2}]+L_3[u_{l-3}]+\cdots+L_m[u_{l-m}]=0.&\end{aligned} \tag{5. 38}$$

Cela posé, pour qu'il existe une solution u_1 de (5. 36), il faut et il suffit qu'on ait

$$(5.39)\quad \langle\beta_j,\ \sum_\nu H_\nu(x)\frac{\partial}{\partial x_\nu}u_0\rangle+\langle\beta_j,\ \{C(x)+(s+1)H_0'(x)\}u_0\rangle=0\,,\qquad j=1,2,\cdots,p\,.$$

Compte tenu de (5. 35), ceci équivaut à

$$\sum_{i=1}^{p}\Big[\sum_\nu\langle\beta_j,H_\nu\alpha_i\rangle\frac{\partial\sigma_0^i}{\partial x_\nu}+\sum_\nu\sigma_0^i\langle\beta_j,H_\nu(\alpha_i)_{x_\nu}\rangle+\sigma_0^i\langle\beta_j,\ \{C+(s+1)H_0'\}\alpha_i\rangle\Big]=0\,.$$

Ou bien sous la forme matricielle,

$$(5.40)\qquad \sum_{\nu=1}^{n}A_\nu(x)\frac{\partial}{\partial x_\nu}\sigma_0+(B(x)+(s+1)B_0(x))\sigma_0=0\,,$$

où (compte tenu de (5. 32) et (5. 34)),

$$A_\nu=\begin{pmatrix}(h_1)_{\xi_\nu} & & (\theta_{ij})_{\xi_\nu}\\ & (h_1)_{\xi_\nu} & \\ 0 & \ddots & (h_1)_{\xi_\nu}\end{pmatrix},\quad \sigma_0=\begin{pmatrix}\sigma_0^1\\ \vdots\\ \sigma_0^p\end{pmatrix},\quad B_0=\begin{pmatrix}b & & b_{ij}\\ & b & \\ 0 & \ddots & b\end{pmatrix}.$$

Remarquons ici que cette équation n'est pas, à strictement parler, un système d'équations différentielles ordinaires. Mais, comme nous allons montrer, l'opérateur $\sum_{\nu=1}^{n}(h_1)_{\xi_\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}+(s+1)b$ joue un rôle prépondérant.

Supposons σ_0, de sorte que u_0, déterminée de manière qu'elle satisfasse (5. 40), alors u_1 est définie (modulo vecteurs nuls engendrés par les α_i) par

$$(5.41)\qquad u_1=S(x)f_0+\sum_{i=1}^{p}\sigma_1^i\alpha_i\,,\quad =u_1^{(0)}+\sum\sigma_1^i\alpha_i$$

où $f_0=\Big(\sum H_\nu\frac{\partial}{\partial x_\nu}+\{C+(s+1)H_0'\}\Big)u_0$, et $S(x)$ étant une matrice ne définie que par H_0.

De la même manière que le précédent, σ_1 est définie par

$$(5.42)\qquad \sum A_\nu\frac{\partial}{\partial x_\nu}\sigma_1+\{B+(s+2)B_0\}\sigma_1+g_1=0\,,$$

où $g_1(x)$ est le vecteur dont la j-composante est

$$(5.43)\qquad g_1^{(j)}=\langle\beta_j,\Big(H\frac{\partial}{\partial x}+\{C+(s+2)H_0'\}\Big)u_1^{(0)}\rangle+\langle\beta_j,(L_2+(s+3)L_1)[u_0]\rangle\,.$$

Supposons qu'on ait déterminé $u_0, u_1, \cdots, u_{l-2}$. D'après (5. 38), où on pose $l=l-1$, on a

(5. 44) $\quad u_{l-1} = u_{l-1}^{(0)} + \sum \sigma_{l-1}^{i} \alpha_i\,,\quad$ où

(5.4 5) $$u_{l-1}^{(0)} = S(x)\Big(H\frac{\partial}{\partial x}+(C+(s+l-1)H_0')\Big)[u_{l-2}] + S(x)(L_2+(s+1)L_1)[u_{l-3}]+S(x)\sum_{k=3}^{m} L_k[u_{l-1-k}]\,,$$

et σ_{l-1} est une fonction à déterminer de telle manière qu'elle satisfasse à

(5. 46) $$\Big(\sum A_\nu\frac{\partial}{\partial x_\nu}+(B+(s+l)B_0)\Big)\sigma_{l-1}+g_{l-1} = 0\,,$$

où g_{l-1} est définie par $u_0, \cdots, u_{l-1}$, et $u_{l-1}^{(0)}$. Précisément, sa j-composante est

(5. 47) $$g_{l-1}^{(j)} = \langle\beta_j,\ \Big(H\frac{\partial}{\partial x}+\{C+(s+l)H_0\}\Big)u_{l-1}^{(0)}\rangle + \langle\beta_j,\ (L_2+(s+l+1)L_1)[u_{l-2}]\rangle+\sum_{k=3}^{m}\langle\beta_j,\ L_k[u_{l-k}]\rangle\,.$$

Finalement, on va montrer comment on résout $\sigma_0, \sigma_1, \cdots$, pour obtenir des majorations assez délicates. D'après l'hypothèse (cf. (5. 21)), on peut supposer que $(h_1)_{\xi_1} \neq 0$. Comme la matrice A_1 est régulière, en prenant $x_1=t$, on va considérer l'équation de la forme

(5. 48) $$\frac{\partial}{\partial t}\sigma+\sum A_\nu'(x,\, t)\frac{\partial}{\partial x_\nu}\sigma+(B'(x,\, t)+kB_0'(x,t))\sigma = f\,,$$

où $A_\nu'=A_1^{-1}A_\nu=\begin{pmatrix} * & & * \\ & * & \\ 0 & & \ddots \\ & & & * \end{pmatrix}$, dont les éléments diagonaux sont tous $(h_1)_{\xi_\nu}/(h_1)_{\xi_1}$, $B_0'=A_1^{-1}B_0=\begin{pmatrix} b & & b_{ij} \\ & b & \\ 0 & & \ddots \\ & & & b \end{pmatrix}$.

Cela posé, on définit les données initiales.

(5. 49) $$\sigma_0(x,\, 0) = 1\,,\quad \sigma_1(x,\, 0) = \sigma_2(x,\, 0) = \cdots = 0\,.$$

Pour évaluer $\sigma_0, \sigma_1, \cdots$, commençons par le

Lemme 5. 1. *Soit* $u(x,\, t)$ *la solution de*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\sum A'_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}+kB'_0\right)u=f \tag{5.50}$$

avec la donnée initiale 0: $u(x, 0)=0$.
Supposons

$$|D_x^\nu D_t^q f| \leqslant \frac{(r+q+|\nu|)!}{\rho^{q+|\nu|}} \exp(k\gamma nt) K(t)^{r+q+|\nu|} (\gamma n)^{q+|\nu|} A, \tag{5.51}$$

où $r \geqslant k$, *alors*

$$|D_x^\nu D_t^q u| \leqslant \frac{(r-1+q+|\nu|)!}{\rho^{q+|\nu|}} \exp(k\gamma nt) K(t)^{r+q+|\nu|} (\gamma n)^{q+|\nu|} CA, \tag{5.52}$$

où C *est une constante indépendante de* r *et* k,

Preuve.

Soient $u=\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}$, $f=\begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{bmatrix}$. D'abord on résout

$$\frac{\partial}{\partial t}u_p+\sum a_i(x, t)\frac{\partial}{\partial x_i}u_p+kb(x, t)u_p=f_p.$$

D'après la proposition 3.1, on a l'inégalité de la forme (5.52), où $C=2$.
En suite on résout u_{p-1} par

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\sum a_i\frac{\partial}{\partial x_i}+kb\right)u_{p-1}=f_{p-1}+(L-kb_{p-1,p})u_p,$$

où L est un opérateur différentiel du premier ordre. En utilisant encore la proposition 3.1, on aura l'inégalité de la forme (5.52) pour u_2. Ici, on a utilisé le fait que tous les coefficients dans le second membre sont analytiques. Ainsi de suite, on a finalement l'inégalité (5.52) pour toutes les composantes de u.

Proposition 5.1. *Soit* $u(x, t)$ *la solution de*

$$\mathcal{L}_k[u]=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\sum A'_\nu\frac{\partial}{\partial x_\nu}+kB'_0+B'\right)u=f,$$

avec la donnée initiale zéro. Supposons (5.51). *On a alors*

$$(5.53)\quad |D_x^\nu D_t^q u| \leqslant \frac{(r-1+q+|\nu|)!}{\rho^{q+|\nu|}} \exp(k\gamma nt) K(t)^{r+q+|\nu|}(\gamma n)^{q+|\nu|} \times AC\left\{1+\left(\frac{CC_0}{r}\right)+\left(\frac{CC_0}{r}\right)^2+\cdots\right\},$$

où C_0 est une constante ne dépendant que de B'.

Démonstration. On pose la solution cherchée sous la forme

$$u = u_0+u_1+u_2+\cdots,$$

où u_0 est la solution de (5.50). u_i est la solution (avec la donnée initiale 0) de

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\sum A'_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}+kB'_0\right)u_i = -B'u_{i-1}, \qquad i=1, 2, \cdots.$$

Alors (5.53) découle immédiatement du lemme précédent.

Compte tenu de la proposition précédente, si on prend s' et M assez grands, on aura une série de majorations de la forme

$$|D_x^\nu D_t^q u_p(x, t)| \leqslant \frac{(s'+p+q+|\nu|)!}{\rho^{q+|\nu|}} \exp\{(s+p+1)\gamma nt\} \times K(t)^{s'+p+q+|\nu|}(\gamma n)^{s'+p+q+|\nu|} M^p A.$$

pour $p=0, 1, 2, \cdots$. Cela signifie qu'on a une majoration de la forme

$$|D^\nu u_p(x)| \leqslant \frac{(s'+p+|\nu|)!}{\rho_0^{|\nu|}} C(\delta)^p A(\delta\,; s')$$

dans un voisinage assez petit de x^0. On a donc

Théorème 5.1. *Théorème* 3.1. *est encore vrai pour des systèmes vérifiant* (5.5) *ou bien* (5.21).

Appendice.

Nous allons montrer un opérateur non elliptique, mais qui est analytique-hypoelliptique. Cet exemple montre que la caractérisation de l'opérateur elliptique par l'analytique-hypoellipticité tombe en défaut contrairement dans le cas des opérateurs à coefficients constants.

Soit

$$L[u] = \left(3y^2\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)u(x, y) = 0. \tag{1}$$

Nous allons le considérer au voisinage de l'origine. En posant $y^3=t$, cette équation devient sauf $y=0$, (i.e. $t=0$),

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial t}\right)u(x, \sqrt[3]{t}) = 0. \tag{2}$$

Alors on a

$$u(x, \sqrt[3]{t}) = \begin{cases} \Phi_1(x+it) & \text{pour } t>0 \\ \Phi_2(x+it) & \text{pour } t<0, \end{cases} \tag{3}$$

où $\Phi_1(z)$ et $\Phi_2(z)$ sont holomorphes pour $Im.\, z>0$ et <0 respectivement. Or, si l'on suppose de plus que $u(x, y)$ soit *continue*, alors Φ_1 et Φ_2 sont continues et coïncident pour $t=0$. D'après le théorème de Morera, $\Phi_1(z)$ et $\Phi_2(z)$ sont des prolongements analytiques au travers de $t=0$ l'une de l'autre. D'où, $u(x, \sqrt[3]{t})=\Phi(x+it)$, où $\Phi(z)$ est holomorphe au voisinage de l'origine. Ceci montre que $u(x, y)=\Phi(x+iy^3)$ est une fonction analytique en (x, y).[2]

Ceci établi, considérons une solution $u(x, y)$ *continue* de

$$L[u] = f(x, y), \tag{4}$$

où f est analytique au voisinage de l'origine. Alors d'après le théorème de Cauchy-Kowalewski et ce qui précède, $u(x, y)$ doit être analytique en (x, y) au voisinage de l'origine.

Maintenant nous allons montrer que L est hypo-elliptique par la méthode des noyaux élémentaires. On va construire un noyau

2) Ce mode de raisonnement, je le dois à M. Y. Hamada.

élémentaire pour L compte tenu de ${}^tL=-L$.

Solution élémentaire pour L.

D'abord considérons la distribution T définie par

$$\varphi(x, y)\xrightarrow[T]{}\iint \frac{1}{z}t^{-2/3}\varphi(x, \sqrt[3]{t})dxdt, \quad \text{où } z=x+it\,.$$

Il est évident que cette forme linéaire est continue, car $\dfrac{1}{z}t^{-2/3}$ est localement sommable.

En effet, $$\int_0^1\int_0^1 \frac{dxdt}{\sqrt{x^2+t^2}\,t^{2/3}}=\int_0^1 dx\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{x^2+t^2}\,t^{2/3}}\,.$$

En posant, $t/x=t'$, on a, $$=\int_0^1\frac{dx}{x^{2/3}}\int_0^{1/x}\frac{1}{t^{2/3}\sqrt{1+t^2}}dt\,.$$

Or, $$\int_0^{1/x}\cdots dt\leqslant\int_0^\infty\frac{1}{t^{2/3}\sqrt{1+t^2}}dt<\infty\,.$$

Donc T est une distribution d'ordre 0.

Nous allons montrer que

$$LT=c\delta, \quad \text{où} \quad c=6\pi\,. \tag{5}$$

$$\langle LT, \varphi(x, y)\rangle=-\langle T, \left(3y^2\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi(x, y)\rangle$$
$$=-\iint\frac{1}{z}t^{-2/3}\widetilde{\left(3y^2\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)}\varphi(x, y)dxdt\,,$$

où $\sim$ désigne la substitution $\psi(x, y)\to\psi(x, \sqrt[3]{t})$

Or, $$\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi(x, \sqrt[3]{t})=\varphi_x(x, \sqrt[3]{t})+i\frac{1}{3}t^{-2/3}\varphi_y(x, \sqrt[3]{t})$$
$$=\frac{1}{3}t^{-2/3}\{3t^{2/3}\varphi_x(x, \sqrt[3]{t})+i\varphi_y(x, \sqrt[3]{t}\,t)\}\,.$$

D'où

$$\widetilde{\left(3y^2\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)}\varphi(x, y)=3t^{2/3}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi(x, \sqrt[3]{t})\,.$$

D'où

(6) $$\langle LT, \varphi(x, y)\rangle = -3\iint \frac{1}{z}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi(x, \sqrt[3]{t})\,dxdt\,.$$

Or, on a

$$\iint_{|z|\geqq\varepsilon} \frac{1}{z}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi(x, \sqrt[3]{t})\,dxdt = i\oint_{|z|=\varepsilon}\frac{1}{z}\varphi(x, \sqrt[3]{t})\,dz\,,$$

parce que $\varphi(x, \sqrt[3]{t})$ est continue sur $t=0$.
Compte tenu de la continuité hölderienne de $\varphi(x, \sqrt[3]{t})$, la dernière intégrale vaut $-2\pi\varphi(0, 0)$.
D'où

(7) $$LT = 6\pi\delta\,.$$

Plus généralement, considérons la distribution $T_{a,b}$ définie par

(8) $$\varphi(x, y) \longrightarrow \iint \frac{1}{z-(a+ib^3)}\,t^{-2/3}\varphi(x, \sqrt[3]{t})\,dxdt\,.$$

Il est clair qu'on a

(9) $$LT_{a,b} = 6\pi\delta_{(a,b)}\,.$$

Or, la distribution $T_{a,b}$ n'est autre que,

$$\langle T_{a,b}, \varphi(x, y)\rangle = 3\iint \frac{1}{x+iy^3-(a+ib^3)}\,\varphi(x, y)\,dxdy\,.$$

D'où

(10) $$T_{a,b} = 3\,\frac{1}{x+iy^3-(a+ib^3)}\,,$$

qui est une fonction localement sommable. On va monter que ce noyau est très régulier. Pour démontrer l'hypoellipticité de L, il suffit de montrer les deux semi-régularités en (x, y) et en (a, b) de $T_{a,b}$[3]. Comme ce noyau est anti-symétrique en (x, y) et (a, b), nous allons ne montrer que sa semi-régularité en (x, y).
Soit $\psi(a, b) \in \mathfrak{D}$, on va montrer que la fonction

$$\varphi(x, y) = \iint \frac{\psi(a, b)\,dadb}{a-x+i(b^3-y^3)} = \int db\int \frac{\psi(a, b)}{a-x+i(b^3-y^3)}\,da$$

est une fonction indéfiniment différentiable. La continuité de

3) Voir L. Schwartz: Théorie des distributions, Tome I (1957).

l'application $T_{a,b}$ de $\mathcal{E}'_{x,y}$ dans $\mathcal{D}'_{a,b}$ résulte de la théorie des espaces vectoriels topologiques[3] ou bien découle immédiatement de notre démonstration.

L'intégration par parties en a donne

$$-\int db \int \psi'_a(a, b) \log \{a-x+i(b^3-y^3)\}\, da\,.$$

Pour préciser le sens, on pose la coupure: $a \leqslant x$, $b=y$, et prend la branche du logarithme qui est réelle pour $a > x$, $y=b$. Compte tenu de la forme des intégrales indéfinies successives de $\log x$, les intégrations par parties donneront

$$\frac{(-1)^m}{(m-1)!}\int db \int \psi_{a^m}(a, b)[\{a-x+i(b^3-y^3)\}^{m-1}$$
$$\times \log \{a-x+i(b^3-y^3)\} + c_m\{a-x+i(b^3-y^3\}^{m-1}]\, da\,,$$

où c_m est une constante.

Or, à propos du dernier terme de l'intégrale, il n'y a aucune question, parce qu'il est un polynome en x, y. Envisageons donc

$$\varphi_m(x, y) = \iint \psi_{a^m}(a, b)\{a-x+i(b^3-y^3)\}^{m-1} \times \log\{a-x+i(b^3-y^3)\}\, dadb\,. \tag{11}$$

On va montrer qu'elle est $(m-3)$-fois continuement différentiable. La différentiation en y donne

$$\frac{\partial}{\partial y}\varphi_m(x, y) = \iint \psi_{a^m}(a, b)\frac{\partial}{\partial y}(\{a+x+i(b^3-y^3)\}^{m-1}$$
$$\times \log\{a-x+i(b^3-y^3)\})\, dadb$$
$$-2\pi i\int_{-\infty}^{x} \psi_{a^m}(a, y)(a-x)^{m-1} da\text{[4]}\,.$$

Si l'on prend la dérivée de φ_m en x, le dernier terme n'apparaît pas. Or, à propos du dernier terme, il n'y a pas de question. Or

4) On peut la déduire de la manière suivante:
Posons $F(y)=\varphi_m(x, y)$ (i.e. x étant fixé), $f(y)=\iint \psi_{a^m}(a, b)\frac{\partial}{\partial y}(\cdots\cdots)\, dadb$.
On constate facilement que $f(y)$ est continue. Or, d'après Fubini,
$\int_{y_1}^{y_2} f(y)dy = F(y_1)-F(y_2)+2\pi i \iint\limits_{\left[\substack{-\infty<a<x \\ y_1\leqslant b\leqslant y_2}\right]} \psi_{a^m}(a, b)(a-x)^{m-1} dadb\,,$
d'où le résultat voulu.

le premier terme a la même forme (modulo un polynome en x, y) que (11), où on pose $m=m-1$. On peut donc constater que $\varphi_m(x, y)$ est $(m-3)$-fois continuement différentiable. Comme m est arbitraire, on voit que $\varphi(x, y)$ est une fonction indéfiniment différentiable.

Remarque. Comme on le voit facilement, il en est de même pour les opérateurs de la forme $L=\left(y^{2n}\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, n étant un entier positif. Nous avons donc: l'opérateur $L=\left(y^n\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ est analytique-hypoelliptique pour n pair $\geqslant 0$, mais pour n impair positif L n'est même pas hypoelliptique.

BIBLIOGRAPHIES

[1] J. Hadamard, La propagation des ondes, Paris, (1903).

[2] J. Hadamard, Le problème de Cauchy, paris, (1932).

[3] L. Hörmander, Differential operators of principal type. Math. Ann., 140, 124–146 (1960).

[4] P. D. Lax, Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems, Duke Math. J., 24 (1957), 627–646.

[5] D. Ludwig, Exact and asymptotic solutions of the Cauchy problem, Comm. Pure Appl. Math. 13 (1960), 473–508.

[6] H. Lewy, On the local character of the solutions of an atypical linear differential equation in three variables and a related theorem for regular functions of two complex variables, Ann. of Math. 64 (1956), 514–522.

[7] I. Petrowsky, Sur l'analyticité des solutions des systèmes d'équations différentielles, Rec. Math. 2 (1939), 3–70.