J. Math. Kyoto Univ.
1-2 (1962) 247-254.

Sur les espaces analytiques holomorphiquement complets

Par

Toshio NISHINO

(Communiqué par Prof. A. Kobori, le 2 décembre, 1961)

---

1. Pour développer la théorie des fonctions holomorphes sur un espace analytique de la même manière que dans un domaine d'holomorphie sur l'espace des variables complexes, cet espace analytique faut satisfaire quelques conditions. En 1951, *K. Stein* a indiqué ces conditions[1], on dit donc qu'une variété analytique ayant ces propriétés est *une variété de Stein* d'aprés *H. Cartan* ou, au cas de l'espace analytique, holomorphiquement complet. Pour améliorer les conditions de *Stein*, on a étudié. En 1955, *H. Grauert* a introduit la notion "K-complet" et il a indiqué que tout espace analytique est holomorphiquement complet s'il est holomorphe-convexe et K-complet[2]. En 1956 *R. Remmert* a indiqué qu'il en est ainsi s'il est holomorphe-convexe et holomorphiquement séparable[3]. On veut obtenir la condition non analytique. En 1957, *T. Asami* a défini une fonction de Levi strictement positive et il a aussi indiqué qu'il en est ainsi s'il est holomorphe-convexe et admet l'existence de telle fonction[4]. Il s'agit maintenant de la condition "holomorphe-convexe". En 1957, *H. Grauert* a indiqué qu'un domaine sur une variété analytique $\mathfrak{M}$ est holomorph-convexe

---

1) K. Stein, Analytische Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen zu vorgegebenen Periodizitätsmoduln und das zweite Cousinsche Problem. (Math. Annalen 123, 1951).

2) H. Grauert, Characterisierung der holomorph vollständigen Räume. (Math. Annalen 127, 1955).

3) R. Remmert, Sur les espaces analytiques holomorphiquement séparables et holomorphiquement convexes. (C. R. Paris 243, 1956).

4) T. Asami, On the condition of a Stein variety. (Osaka Math. J. 9, 1957).

s'il est relativement compact dans $\mathfrak{M}$ et fortement pseudoconvexe par le moyen de la théorie de cohomologie et du théorème de *Schwartz.*[5] Ceci a été généralisé au cas sur l'espace analytique[6].

Dans le présent mémoire on verra que, sous la condition legèrment différente mais d'après l'idée d'*Oka* seulement, un espace analytique se rédui à celui qui est holomorphiquement complet; c'est-à-dire, si un espace analytique admet l'existence d'une fonction de Levi strictement positive $L(p)$ telle qu'elle est continue et pour tout nombre réel α, une partie donnée par $L(p) \leqq \alpha$ est toujours compacte, il est holomorphiquement complet. C'est à prouver ce fait que le présent mémoire se propose.

2. Préliminaire. Soit E un espace analytique de dimension n au sens de *Behnke-Stein.*[7] Grâce à *H. Grauert* et *R. Remmert*, on peut dire qu'il y a pour tout point p de E un voisinage U de p tel qu'il est homéomorphe à un ensemble analytique dans un polycylindre en l'espace numérique de dimension suffisamment grand, et tel que toute fonction holomorphe dans U est obtenuée par l'image de la trace d'une fonction holomorphe dans le polycylindre par cette homéomorphisme[8]. U sera dit un voisinage polyédrique.

Définition 1.[9] Soit E un espace analytique qui est réunion dénombrable de compacts. On dit que E est *holomorphiquement complet* s'il satisfait les conditions suivantes:
1°. Il est holomorphe-convexe; c'est-à-dire, pour tout compact K de E un ensemble de tous les points p tels que $|f(p)| \leqq \max|f(K)|$ pour toutes les fonctions holomorphes dans E est aussi compact.
2°. Pour toute paire des points p et q de E, il y a au moins une fonction holomorphe dans E telle que $f(p) \neq f(q)$.

---

5) H. Grauert, On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifold. (Ann. of Math. 68, 1958). F. Docquier und H. Grauert, Levisches Problem und Rungescher Satz für Teilgebiete Steinscher Mannigfaltigkeiten. (Math. Annalen 140, 1960).

6) R. Narasimhan, The Levi problem for complex spaces. (Math. Annalen 142, 1961).

7) H. Behnke und K. Stein, Modifikationen komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannscher Gebiete. (Math. Annalen 124, 1951).

8) H. Grauert et R. Remmert, Sur les revêtements analytiques des variétés analytiques (C. R. Paris 245, 1957).

9) loc. cit. en faisant des petites modifications de l'expression. page 212.

3°. Pour tout point p_0 de E il y a un voisinage U de p_0 et un système de fonctions $f_1(p), f_2(p), \cdots, f_\nu(p)$ holomorphes dans E telles que l'image par $x_i = f_i(p)$ $(i=1, 2, \cdots, \nu)$, où p est un point de U, forme un ensemble analytique qui est homéomorphe à U et que tous ses points possèdent la propriété (H)[10], dans l'espace (x).

Comme on sait bien, on peut établir les principes générals de la théorie des fonctions analytiques au cas sur l'espace ayant les propriétés ci-dessus.

Définition 2.[11] Soit $L(p)$ une fonction semi-continue supérieurement prenant la valeur réele ou $-\infty$ définie sur un espace analytique E. $L(p)$ est dit *une fonction de Levi strictement positive* si elle satisfait à la condition suivante:

Pour tout point p_0 de E il y a un voisinage U de p_0 et une famille de surfaces analytiques $\{\sigma_t\}$ dans U définie par l'équation $f(p, t)=0$ $(p \in U,\ 0 \leqq t \leqq 1)$, où $f(p, t)$ est analytique par rapport à p et continue par rapport à p et t, telle que:

1°. σ_0 passe par p_0, et se trouve dans une partie donnée par $L(p) > L(p_0)$ sauf un seul point p_0.

2°. Tout σ_t $(t \neq 0)$ se trouve dans une partie donnée par $L(p) > L(p_0)$.

D'où, grâce à *Asami*, on a:

Un espace analytique holomorphe-convexe est holomorphiquement complet s'il admet l'existence au moins d'une fonction de Levi strictement positive.

Définition 3. Une fonction de Levi strictement positive $L(p)$ sur l'espace analytique E sera dit *complète à E*, si elle est continue et pour tout nombre réel α une partie donnée par $L(p) \leqq \alpha$, si elle existe, est toujours compacte.

Le but de présent mémoire est d'indiquer le fait:

Si un espace analytique E admet une fonction de Levi strictement positive et complète à E, il est holomorphiquement complet.

---

10) Voir, K. Oka, Mémoire VIII (J. of Mathematical Society of Japan) page 260.

11) loc. cit. page 216. "*a positive definite Levi function*" d'après *Asami*.

3. L'idée d'Oka. Dans cette section on tâchera de réaliser l'idée d'*Oka* sur un espace analytique[12].

Soit D un domaine relativement compact[13] sur un espace analytique E tel que:

1°. Il est une réunion de deux domaines D_1 et D_2 qui sont respectivement holomorphiquement complets.

2°. Une partie commune de D_1 et D_2, que l'on désigne par D_3, est représentée par $a_1 < \Re(\varphi_1) < a_2$[14], dont a_1 et a_2 sont deux nombres réels et $a_1 < 0 < a_2$, et $\varphi_1(p)$ est une fonction holomorphe dans un domaine contenant la fermeture $\bar{D}_3$ de D_3 et de plus $|\varphi_1| < 1$ dans D_3[15].

3°. D admet l'existence d'une fonction de Levi strictement positive et complète à D, que l'on désigne par $l(p)$.

Nous formons un domaine partie de D comme suivant:

Soit D' un domaine dans D donné par $l(p) < \alpha_0$, α_0 étant un nombre réel, positif et suffisamment grand, et nous posons $D_i' = D_i \cap D'$ $(i=1, 2, 3)$. Soient $\varphi_j(p)$ $(j=2, 3, \cdots, \nu)$ des fonctions holomorphes dans D_3', soit Δ un des composant connexe de l'ensemble de tous les points en dehors de D_3' dans D' et de points de D_3' satisfaisant à $|\varphi_j| < 1$ $(j=2, 3, \cdots, \nu)$, et supposons, relativement à Δ-ci, que le système de fonctions (φ) satisfasse aux conditions suivantes:

1°. Il existe un nombre positif δ_1, tel qu'on a $\mathfrak{A} \Subset D_3'$, si $\mathfrak{A}$ est une partie de Δ satisfaisant à l'inégalité $|\Re(\varphi_1)| < \delta_1$.

2°. Il existe des nombres positifs δ_2 et ε_0 plus petit que 1, tels que tous les points de D_3' qui satisfons à l'inégalité $|\varphi_j(p)| \geqq 1-\varepsilon_0$, j étant quelconque de $2, 3, \cdots, \nu$, restent en dehors de $|\Re(\varphi_1) - a_1| < \delta_2$ et $|\Re(\varphi_1) - a_2| < \delta_2$.

3°. Soit C un polycylindre de la forme $|x_j| < 1$ $(j=1, 2, \cdots, \nu)$ dans l'espace des variables complexes $x_1, x_2, \cdots, x_\nu$, et A une partie de C donnée par $|u| \leqq \delta_1$, où u est la partie réelle de x_1, et soit Σ

12) Dans ce qui suit, quelques propriétés indiqués dans le mémoire IX d'Oka sont employées sans démonstration. (Japanese J. of Math. 1953) page 138-146.

13) C'est-à-dire, la fermeture $\bar{D}$ de D est compact.

14) $\Re(\varphi_1)$ signifie la partie réelle d'une fonction $\varphi_1(p)$.

15) Soient les hypersurfaces $\Re(\varphi_1) = a_2$ et $\Re(\varphi_1) = a_1$ les frontières de D_1 et D_2 respectivement.

l'image donnée par $x_j=\varphi_j(p)$ $(j=1, 2, \cdots, \nu)$, p étant un point de $\mathfrak{A}$. Alors Σ est un ensemble analytique dans A homéomorphe à $\mathfrak{A}$ tel que tous ses points possèdent la propriété (H).

D'après l'hypothèse pour D, on peut dire que D peut être approximé par une suite croissante de domaines du type de Δ comme ci-dessus.

Prenant un nombre réel ρ_0 tel que $1-\varepsilon_0<\rho_0<1$, nous considérons dans Δ un domaine Δ_0 qui est formé par tous les points de Δ qui sont en dehors de D_3' et les points de D_3' satisfaisant à $|\varphi_j|<\rho_0$ $(j=2, 3, \cdots, \nu)$, et désignons par Δ_0' la partie de $\Delta_0\frown D_1'$ sauf la partie $\Re(\varphi_1)>0$ et par Δ_0'' celle de $\Delta_0\frown D_2'$ sauf celle $\Re(\varphi_1)<0$. Dans ces circonstances on dit:

Pour toute fonction $f(p)$ qui est holomorphe dans $\mathfrak{A}$, il existe une fonction holomorphe $f'(p)$ dans Δ_0' et une fonction holomorphe $f''(p)$ dans Δ_0'', de façon qu'elles restent holomorphes en tout point où $\Re(\varphi_1)=0$ dans Δ_0, et que l'on ait identiquement $f'(p)-f''(p)=f(p)$.

En effet, soit C' un polycylindre de la forme $|x_1|<\rho_1$, $|x_j|<\rho_2$ $(j=2, 3, \cdots, \nu)$, soit A' une partie de C' donnée par $|u|<\delta$, où $\rho_1>1$, $\rho_0<\rho_2<1$ et $\delta<\delta_1$. Alors il y a dans A' une fonction $F(x)$ holomorphe telle que $F=f$ sur Σ indentiquement. Grâce à *Cauchy* on a

$$F(x)=\frac{1}{(2\pi i)^{\nu-1}}\int_{\Gamma_2}\frac{dx_2'}{x_2'-x_2}\int_{\Gamma_3}\frac{dx_3'}{x_3'-x_3}, \cdots, \int_{\Gamma_\nu}\frac{F(x_1x_2'\cdots x_\nu')}{x_\nu'-x_\nu}dx_\nu'$$

dont Γ_j sont les cercles de centre à l'origine et de rayon ρ_0 sur le plan x_j $(j=2, 3, \cdots, \nu)$.

Soit l un segment de l'axe imaginaire du plan x_1 contenant l'origine dans son intérieur et ayant les extrémités dans la couroune $1<|x_1|<\rho_1$; considérons l'intégrale de *Cousin*

$$\Psi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_l\frac{F(x_1'x_2\cdots x_\nu)}{x_1'-x_1}dx_1'$$

où l'intégrale est prise de bas en haut. Substituant $x_j=\varphi_j(p)$ dans l'expression de $F(x)$, on a, pour abréger,

$$\psi(p)=\int_{(l\Gamma)}\chi(x'p)F(x')dx_1'\cdots dx_\nu'$$

où

$$\chi(x'p) = [(2\pi i)^{\nu}(x_1' - \varphi_1(p)) \cdots (x_\nu' - \varphi_\nu(p))]^{-1}$$

Soient $\psi_1(p)$ et $\psi_2(p)$ les parties de $\psi(p)$ dans $\Delta_0' \cap D_3'$ et $\Delta_0'' \cap D_3'$ respectivement, ceux restent holomorphes en tout point où $\Re(\varphi_1) = 0$ dans Δ_0 et $\psi_1(p) - \psi_2(p) = f(p)$.

Soit V un domaine holomorphe-convexe contenant l'ensemble (l, Γ)[16] dans l'espace (x'), construisons une fonction méromorphe $\chi_1(x', p)$ dans (V, D_1') qui possède dans (V, D_3') les mêmes pôles que $\chi(x', p)$ et elle est d'ailleurs holomorphe. Ce qui est possible pourvu que V soit choisi suffisamment voisin de (l, Γ). Comme la fonction $\chi - \chi_1$ est holomorphe dans (V, D_3') et que (V, D_3') est holomorphe-convexe par rapport à (V, D_1')[17], pour un nombre positif donné ε, on peut construire une fonction $F_1(x', p)$ holomorphe dans (V, D_1'), telle que $|\chi - \chi_1 - F_1| < \varepsilon$ est dans $(V', \mathfrak{A})$, où $(l, \Gamma) \ll V' \ll V$. Construison tout pareillement χ_2 et F_2 pour D_2'. Formons

$$I_1(p) = \int_{(l\Gamma)} [\chi_1 + F_1] \cdot F dx'$$

$$I_2(p) = \int_{(l\Gamma)} [\chi_2 + F_2] \cdot F dx'$$

alors, en posant $f_1(p) = f(p) - [I_1(p) - I_2(p)]$, on a pour $\mathfrak{A}$

$$|f_1(p)| < 2\varepsilon N N_1 M$$

dont M est la borne supérieure de $|f(p)|$ dans $\mathfrak{A}$, $N_1 = 2\rho_1(2\pi\rho_2)^{\nu}$ et N est une constante qui ne dépend que de Σ. Prenant ε comme $2\varepsilon N N_1 < \lambda$, où $0 < \lambda < 1$, on peut obtenir comme d'habitude les fonctions f' et f'' en question par l'approximation successive. C.Q.F.D.

D'où et d'après le même raisonnement que du mémoire IX d'*Oka* on a :

16) (l, Γ) signifie l'ensemble de points $x_1' \in l$, $x_j' \in \Gamma_j$ $(j=2, 3, \cdots, \nu)$, Γ_j étant la circonférence; donc il est la limite d'une suite décroissante de domaines holomorphe-convexes qui le contiennent.

17) En effet, soit Δ un compact dans D_3' et Δ' un ensemble de tous les points p de D_1' satisfaisant la condition $|f(p)| \leqq \max |f(\Delta)|$ pour toutes les fonctions holomorphes dans D_1'. Alors on peut développer tout fonction holomorphe au voisinage de Δ' par la série de fonctions holomorphes dans D_1' convergeant uniformément dans Δ'; donc Δ' ne peut pas se couper par la hypersurface $\Re(\varphi_1) = a_1$ puisque sinon il y a un nombre réel b_1 tel que la surface analytique $\varphi_1 = a_1 + ib_1$ est en contact avec Δ' et pour tout nombre réel $b < b_1$ la surface analytique $\varphi_1 = a_1 + ib$ n'a auccune point avec Δ'.

Le domaine indiqué au commencement dans cette section est toujours holomorphiquement complet.

4. Résolution. Soit E un espace analytique admettant l'existence d'une fonction de Levi strictement positive et complète à E, que l'on désigne par $L(p)$, et soit D_α un domaine sur E donné par $L(p)<\alpha$. Il est évident :

Si pour tout nombre réel α qui est inférieur à un nombre réel α_0, D_α est, s'il existe, toujours holomorphiquement complet, il en est alors de même pour D_{α_0}.

Si D_{α_0} est holomorphiquement complet, pour tout α qui est inférieur à α_0, D_α est toujours holomorphiquement convexe par rapport à D_{α_0}.

Or, je dit que *si, pour un nombre réel α_0, D_{α_0} est holomorphiquement complet, il existe un nombre α plus grand que α_0 tel que D_α est aussi holomorphiquement complet.*

Soit Γ_0 un ensemble de tous les points frontières de D_{α_0}, il est évidemment compact et n'a aucun point intérieur. Pour tout point p_0 de Γ_0 il correspond un voisinage polyédrique U_0 et une fonction f_0 holomorphe dans U_0 telle que : 1°) la surface analytique $f_0=0$ passe par p_0 et situe dans la partie $L(p)>L(p_0)$ sauf un seul point p_0, 2°) il existe un nombre positif ε_0 de façon qu'une hypersurface S_0 donnée par $|f_0|=\varepsilon_0$ a sa frontière dans la partie $L(p)>L(p_0)$ seulement, 3°) $\log[f_0]$ est uniforme au voisinage de $S_0\cap D_{\alpha_0}$. D'après le théorème de *Borel-Lebesgue*, il y a un numbre fini de voisinages polyédriques U_i $(i=1, 2, \cdots, \mu)$ de points p_i sur Γ_0 et fonctions f_i holomorphes dans U_i ayant les propriétés ci-dessus telles que la somme des parties de Γ_0 données par $|f_i|<\varepsilon_i$ $(i=1, 2, \cdots, \mu)$ recourver tout Γ_0, où ε_i sont des nombres réels correspondant à f_i comme ci-dessus, et désignons par S_i la hypersurface $|f_i|=\varepsilon_i$. Par suite on peut dire qu'il existe un nombre α, plus grand que α_0 tel que les frontières des toutes S_i $(i=1, 2, \cdots, \mu)$ sont situées en dehors de D_α, et toutes les fonctions $\log[f_i]$ sont uniformes en voisinage de $S_i\cap D_\alpha$. Désignons par δ_i la partie de D_α donnée par $|f_i|<\varepsilon_i$, $D_\alpha-\bigcup_{i=\lambda}^{\mu}\delta_i$ par $\Delta_{\lambda-1}$ et D_α par Δ_μ. Alors $\Delta_0 \Subset D_{\alpha_0}$ et Δ_0 est holomorphiquement complet.

Si $\Delta_{\lambda-1}$ est holomorphiquement complet, Δ_λ peut être regardé comme un domaine D qu'on a traité dans la section précédente.

En effet, la frontière de $\Delta_{\lambda-1}$ qui n'est pas celle de Δ_λ est S_λ: $|f_\lambda|=\delta_\lambda$. Prenant des nombres réels positifs ε_λ' et ε_λ'', $\varepsilon_\lambda<\varepsilon_\lambda''<\varepsilon_\lambda'$ tels que les hypersurfaces $|f_\lambda|=\varepsilon_\lambda'$ et $|f_\lambda|=\varepsilon_\lambda''$ ont ses frontières en dehors de D_α et $\log[f_\lambda]$ est uniforme dans la partie de D_α définie par $\varepsilon_\lambda<|f_\lambda|<\varepsilon_\lambda'$. Désignons par D_2 la partie de Δ_λ donnée par $|f_\lambda|<\varepsilon_\lambda'$ et $\Delta_{\lambda-1}$ par D_1, ils satisfont évidement les conditions 1°) et 2°) en question.

Il s'agit d'une fonction de Levi strictement positive et complète à Δ_λ. La frontière de Δ_λ consiste de celle de D_α et S_j ($j=\lambda+1, \lambda+2, \cdots, \mu$). Dans la partie de U_j donnée par $|f_j|>\varepsilon_j$ il existe une fonction de Levi strictement positive qui tend vers ∞ si et seulement si un point tend vers la hypersurface S_j de l'intérieur de cette partie que l'on désigne par $l_j(p)$[18]; et posons $l_0(p)=[\alpha-L(p)]^{-1}$.

Formons une fonction dans Δ_λ comme suivante:

$$l(p)=\begin{cases} l_0(p) & \text{dans } \Delta_\lambda-\bigcup_{j=\lambda+1}^{\mu} U_j\cap D_\alpha \\ \max\,[l_0(p),\, l_{j_1}(p)-R,\, \cdots,\, l_{j_n}(p)-R] & \text{dans } U_{j_1}\cap\cdots\cap U_{j_n}\cap\Delta_\lambda \end{cases}$$

où $(j_1, j_2, \cdots, j_n)$ sont toutes les combinaisons de $\lambda+1, \lambda+2, \cdots, \mu$ tel que $\Delta_\lambda\cap U_{j_1}\cap\cdots\cap U_{j_n}$ n'est pas null et R est un nombre réel tel que toutes les surfaces $l_j(p)=R$ ont leurs frontières en dehors de D_α. Il est évident que $l(p)$ est une fonction demandée. C.Q.F.D.

Cet énoncé est vrai autant que Γ_0 n'est pas null même si D_{α_0} est null, et la fonction $L(p)$ prend la valeur minimum certainement.

D'après ce que nous avons vu jusqu'ici on a:

Théorème. *Un espace analytique admettant une fonction de Levi strictement positive et complète à cet espace analytique est toujours holomorphiquement complet.*

---

18) En effet, soit Σ un ensemble analytique, homéomorphe à U_j, tous ses points possèdant la propriété (H) dans un polycylindre Γ dans l'espace des variables complexes $x_1, x_2, \cdots, x_N$, et soit Φ_j une fonction holomorphe dans Γ telle que $\Phi_j=f_j$ sur Σ. Formons une fonction

$$L_j=(|x_1|^2+\cdots+|x_N|^2)+[|\Phi_j|-\varepsilon_j]^{-1}$$

L'image de la trace de L_j sur Σ par la homéomorphisme est une fonction demandée.