J. Math. Kyoto Univ.
3-2 (1964) 193-206.

Sur une extension du théorème de MM. H. Cartan et P. Thullen

Par

Hidekazu ÔNISHI

(Reçu le 15 Janvier, 1964)

Introduction

1. En 1931, M. H. Cartan[1] a introduit une notion de convexité d'un domaine par rapport aux familles de fonctions holomorphes. D'autre part, en 1932, M. P. Thullen[2] a trouvé un «théorème fondamental» sur les prolongements analytiques des fonctions holomorphes dans un domaine univalent. Ensuite, MM. Cartan et Thullen[3] ont publié en 1932 un nouveau travail, dans lequel les idées de leurs premiers travaux ont été combinés dans le cas des domaines multivalents sans points critiques intérieurs.

Dans ce dérnier travail, le théorème fondamental sur le prolongement analytique a été énoncé sous la forme suivante :

Théorème de MM. Cartan et Thullen[4]**.** *Soit $\mathfrak{D}$ un domaine sur l'espace de n variables complexes $(x_1, \cdots, x_n)$ sans point critique intérieur, et $\mathfrak{F}$ une famille de fonctions holomorphes dans $\mathfrak{D}$ satisfaisant à la condition suivante :*

si une fonction $f(P)$ appartient à $\mathfrak{F}$, alors,

a) ses dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ $(j=1, \cdots, n)$ par rapport aux coordonnées $x_1, \cdots, x_n$, appartiennent à $\mathfrak{F}$, et,

---

1) H. Cartan, Sur les domaines d'existence des fonctions de plusieurs variables complexes, Bull. Soc. Math. France (1931).

2) P. Thullen, Zur Theorie der Singularitäten der Funktionen zweier komplexen Veränderlichen. Die Regularitätshüllen, Math. Annalen 106 (1932).

3) H. Cartan et P. Thullen, Zur Theorie der Singularitäten der Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen. Regularitäts- und Konvergenzbereiche, Ibid.

4) Pour définitions et terminologies, voir l'Ouvrage de MM. H. Behnke et P. Thullen, Theorie der Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen, Ergebnisse der Math. (1934).

b) quels que soient l'entier $k \geqq 0$ *et le nombre complexe c, la fonction* $c[f(P)]^k$ *appartient à* $\mathcal{F}$.

Soit $\mathcal{D}_0$ *un domaine complètement intérieur à* $\mathcal{D}$, *et* ρ *la distance de* $\mathcal{D}_0$ *à la frontière de* $\mathcal{D}$ *(Minimaldistanz von* $\mathcal{D}_0$ *in Bezug auf* $\mathcal{D}$)[5], *et soit A un point quelconque de* $\mathcal{D}$. *Si, pour toute fonction* $f(P)$ *de* $\mathcal{F}$, *le module de la valeur de* $f(P)$ *au point A est inférieur à la borne supérieure de* $|f(P)|$ *dans* $\mathcal{D}_0$:

$$|f(A)| \leqq \sup_{P \in \mathcal{D}_0} |f(P)|,$$

alors,

1° toute fonction $f(P)$ *de* $\mathcal{F}$ *est holomorphe dans un polycylindre* $C(A, \rho)$ *de centre A et de rayon* ρ[6];

2° pour un nombre positif ρ' *tel que* $\rho' < \rho$, *la borne supérieure de* $|f(P)|$ *dans le polycylindre* $C(A, \rho')$ *de centre A et de rayon* ρ' *est inférieure à celle de* $|f(P)|$ *dans le domaine* $\mathcal{D}_0(\rho')$:

$$\sup_{P \in C(A, \rho')} |f(P)| \leqq \sup_{P \in \mathcal{D}_0(\rho')} |f(P)|,$$

où $\mathcal{D}_0(\rho')$ *signifie le domaine complètement intérieur à* $\mathcal{D}$ *et contenant* $\mathcal{D}_0$, *constitué par les points P de* $\mathcal{D}$ *dont la distance à au moins un point de* $\mathcal{D}_0$ *soit inférieure à* ρ', *c'est-à-dire, la réunion des polycylindres* $C(P, \rho')$ *sur* $\mathcal{D}$ *ayant leurs centres P dans* $\mathcal{D}_0$ *et de rayon* ρ' :

$$\mathcal{D}_0(\rho') = \bigcup_{P \in \mathcal{D}_0} C(P, \rho').$$

Le but du présent mémoire est à généraliser ce théorème, sous une condition, au cas des domaines intérieurement ramifiés sur l'espace de n variables complexes $(x_1, \cdots, x_n)$, mais sans points critiques transcendants[7]. (Voir le numéro 4.)

---

5) La borne supérieure des rayons des polycylindres ayant leurs centres au point donné P et complètement intérieurs à $\mathcal{D}$ est applée distance de P à la frontière de $\mathcal{D}$. La distance de $\mathcal{D}_0$ à la frontière de $\mathcal{D}$ est, par définition, la borne inférieure des distances de tous les points de $\mathcal{D}_0$ à la frontière de $\mathcal{D}$.

6) Précisément dit, l'élément de fonction $f^*(x)$ défini par $f(P)$ au point $\underline{A} = (a)$ se prolonge en une fonction holomorphes dans le polycylindre $C((a), \rho)$.

7) C'est un domaine localement algébroïde qui est appelé par MM. H. Grauert et R. Remmert 《Riemannsches Gebiet》. Voir : H. Grauert et R. Remmert, Singularitäten komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannsche Gebiete, Math. Zeitschr. 67 (1957), § 3 ; K. Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, VIII—Lemme fondamental, Journ. Math. Soc. Japan. 3 (1951), § 5.

Nous ne traiterons pas ici l'application du théorème que nous allons établir.

Dérivées partielles

2. Soit $\mathscr{D}$ un domaine intérieurement ramifié sur l'espace de n variables complexes $(x_1, \cdots, x_n)$ sans point critique transcendant, et soit σ la surface critique de $\mathscr{D}$. Nous nous occuperons, dans ce paragraphe, d'observer les allures des dérivées partielles par rapport aux coordonnées $x_1, \cdots, x_n$, d'une fonction $f(P)$ holomorphe dans $\mathscr{D}$.

Désignons par $\mathscr{D}'$ le domaine constitué par tous les points réguliers de $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'=\mathscr{D}-\sigma$; $\mathscr{D}'$ est un domaine sans point critique intérieur. Dans un voisinage univalent d'un point de $\mathscr{D}'$, la fonction $f(P)$ est considérée comme une fonction uniforme et holomorphe de n variables $(x_1, \cdots, x_n)$; et on peut y différentier la fonction $f(P)$ successivement par rapport aux $x_1, \cdots, x_n$, pour obtenir les dérivées partielles $\dfrac{\partial^k f(P)}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}}$ de $f(P)$ d'ordre quelconque $k=k_1+\cdots+k_n$, $k_1 \geqq 0, \cdots, k_n \geqq 0$. Toutes ces dérivées sont donc des fonctions holomorphes dans $\mathscr{D}'$.

Envisageons maintenant les dérivées partielles de $f(P)$ au voisinage d'un point régulier de la surface critique σ de $\mathscr{D}$. Pour cela, soit Q un point régulier de σ, et soit $\underline{Q}=(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ la trace (Grundpunkt) de Q. Q est alors un point régulier d'une seule composante de σ, soit σ_0, tel qu'aucune des autres composantes de σ ne passe par Q. Soit $\nu-1$ l'ordre de ramification de σ_0 (c'est-à-dire, ν est le nombre des feuillets de $\mathscr{D}$ le long de σ_0).

On peut trouver un voisinage V de Q ayant pour sa trace $\underline{V}$ un polycylindre de centre (ξ) et d'un certain rayon, soit δ,

$$(\underline{V}) \qquad |x_1-\xi_1|<\delta, \cdots, |x_n-\xi_n|<\delta,$$

tel que V s'exprime comme une surface caractéristique Σ définie, dans un polycylindre de l'espace de $((x), y)$ de la forme :

$$|x_1-\xi_1|<\delta, \cdots, |x_n-\xi_n|<\delta, \ |y|<R,$$

avec R suffisamment grand, par une équation

$$(\Sigma) \qquad y^{\nu}-\varphi(x_1, \cdots, x_n) = 0\,,$$

où $\varphi(x)$ est une fonction holomorphe dans $\underline{V}$, ayant la trace $\underline{\sigma \frown V}$ de $\sigma \frown V = \sigma_0 \frown V$ pour zéros du *premier* ordre, sans s'annuler d'ailleurs dans $\underline{V}$.

La trace de la fonction y sur Σ étant considérée comme une fonction holomorphe dans V sur $\mathcal{D}$, désignons-la par $\eta(P)$, et nous avons sur V la relation

$$[\eta(P)]^{\nu} = \varphi(x)\,.$$

En différentiant cette relation en tous les points de $V-\sigma$, par rapport à x_j $(j=1, \cdots, n)$, on a dans $V-\sigma$,

$$\nu\eta^{\nu-1}\frac{\partial\eta(P)}{\partial x_j} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\,.$$

Puisque la dérivée $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_j}$ au second membre est une fonction holomorphe dans $\underline{V}$, il en résulte que la fonction $\eta^{\nu-1}\dfrac{\partial\eta}{\partial x_j}$ est holomorphe dans V.

Or, comme la fonction $f(P)$ holomorphe dans V est considérée comme une fonction holomorphe sur la surface caractéristique Σ, on peut trouver, en vertu de la forme de Σ dans l'espace de $(x_1, \cdots, x_n, y)$, une fonction $F((x), y)$ holomorphe dans le polycylindre:

$$|x_1-\xi_1|<\delta, \cdots, |x_n-\xi_n|<\delta, \ |y|<R\,,$$

telle que la fonction $f(P)$ soit la trace de $F((x), y)$ sur Σ:

$$f(P) = F((x), \eta(P))\,.$$

En différentiant cette relation en tous les points P de $V-\sigma$, on a

$$\frac{\partial f(P)}{\partial x_j} = \frac{\partial F}{\partial x_j}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial\eta(P)}{\partial x_j}\,,$$

et, en multipliant les deux membre par $\eta^{\nu-1}$, on a dans $V-\sigma$,

$$\eta^{\nu-1}\frac{\partial f}{\partial x_j} = \eta^{\nu-1}\frac{\partial F}{\partial x_j}+\frac{\partial F}{\partial y}\left(\eta^{\nu-1}\frac{\partial\eta}{\partial x_j}\right).$$

Puisque le second membre de cette relation est une fonction holomorphe dans V, il en résulte que, pour les dérivées partielles

$\dfrac{\partial f(P)}{\partial x_j}$ du premier ordre, la fonction $[\eta(P)]^{\nu-1}\dfrac{\partial f(P)}{\partial x_j}$ est holomorphe dans le voisinage V de Q.

Nous allons démontrer par récurrence sur l'entier k que, *pour les dérivées partielles* $\dfrac{\partial^k f(P)}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}}$ *d'ordre* $k=k_1+\cdots+k_n\geqq 1$, *toutes les fonctions*

$$g_{k_1,\cdots,k_n}(P)=[\eta(P)]^{k\nu-1}\frac{\partial^k f(P)}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}}$$

sont holomorphes dans le voisinage V *de* Q.

Pour l'effet, supposons que la fonction $g_{k_1,\cdots,k_n}(P)$ soit holomorphe dans V. En différentiant cette fonction par rapport à x_j dans $V-\sigma$, on a

$$\frac{\partial}{\partial x_j}g_{k_1,\cdots,k_n}=(k\nu-1)\eta^{k\nu-2}\frac{\partial\eta}{\partial x_j}\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}}+\eta^{k\nu-1}\frac{\partial^{k+1}f}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_j^{k_j+1}\cdots\partial x_n^{k_n}},$$

et, en multipliant les deux membres par η^ν, on a dans $V-\sigma$,

$$\begin{aligned}g_{k_1,\cdots,k_j+1,\cdots,k_n}&=\eta^{(k+1)\nu-1}\frac{\partial^{k+1}f}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_j^{k_j+1}\cdots\partial x_n^{k_n}}\\&=\eta\Big(\eta^{\nu-1}\frac{\partial}{\partial x_j}g_{k_1,\cdots,k_n}\Big)-(k\nu-1)\Big(\eta^{\nu-1}\frac{\partial\eta}{\partial x_j}\Big)\Big(\eta^{k\nu-1}\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}}\Big).\end{aligned}$$

Puisque, par les hypothèses de récurrence, les deux termes au troisième membre de cette relation sont des fonctions holomorphes dans V, la fonction $g_{k_1,\cdots,k_j+1,\cdots,k_n}(P)$ est aussi holomorphe dans V. Comme l'énoncé est vrai pour $k=1$ d'après ce qui précède, il en résulte la proposition par récurrence.

3. Maintenant, nous pouvons énoncer un lemme concernant les dérivées partielles d'une fonction holomorphe dans $\mathfrak{D}$, sous une forme assez maniable pour la suivante.

Lemme. *Soit* $\mathfrak{D}$ *un domaine intérieurement ramifié sur l'espace de n variables complexes* $(x_1,\cdots,x_n)$, *sans point critique transcendant. Soient* σ_i $(i=1,2,\cdots)$ *les composantes de la surface critique* σ *de* $\mathfrak{D}$, *et* ν_i-1 *l'ordre de ramification de* σ_i. *Supposons pour* $\mathfrak{D}$ *qu'il* *existe*[8] *une fonction* $\lambda(P)$ *holomorphe et non identiquement nulle dans* $\mathfrak{D}$ *qui s'annule sur toute* σ_i *avec l'ordre de zéros*[9] *au moins* ν_i. *Alors, pour toute fonction* $f(P)$ *holomorphe dans* $\mathfrak{D}$, *et pour tout entier* $k=k_1+\cdots+k_n$, $k_1\geqq 0, \cdots, k_n\geqq 0$, *les dérivées partielles* $\frac{\partial^k f(P)}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}}$ *de* $f(P)$ *d'ordre* k *sont des fonctions méromorphes dans* $\mathfrak{D}$, *qui n'admettent pour leurs pôles que* σ, *de sorte que les fonctions*

$$h_{k_1,\cdots,k_n}(P) = [\lambda(P)]^k \frac{\partial^k f(P)}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}}$$

soient holomorphes dans $\mathfrak{D}$.

En effet, l'énoncé est évident pour $k=0$. Soit alors $k=k_1+\cdots+k_n$ un entier positif quelconque, et soit Q un point régulier de σ. Q est un point régulier d'une seule composante de σ, soit σ_i, tel qu'aucune des autres composantes de σ ne passe par Q. Reprenons le voisinage V de Q, que nous venons d'utiliser dans le numéro précédent. Alors, la fonction

$$g_{k_1,\cdots,k_n}(P) = [\eta(P)]^{k\nu_i-1} \frac{\partial^k f(P)}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}}$$

est holomorphe dans V. La fonction $[\lambda(P)]^k$ étant, par hypothèse, divisible par $[\eta(P)]^{k\nu_i}$ dans V, la fonction

$$h_{k_1,\cdots,k_n}(P) = [\lambda(P)]^k \frac{\partial^k f(P)}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}}$$

est divisible par $g_{k_1,\cdots,k_n}(P)$ dans V, et par conséquent, $h_{k_1,\cdots,k_n}(P)$ est holomorphe dans le voisinage V de Q.

Or, la fonction $h_{k_1,\cdots,k_n}(P)$ étant définie et holomorphe en tous les points de $\mathfrak{D}'=\mathfrak{D}-\sigma$, et Q étant un point régulier quelconque de la surface critique σ, $h_{k_1,\cdots,k_n}(P)$ est holomorphe dans $\mathfrak{D}$ sauf peut-être une variété de dimension $n-2$ constituée par les points

8) $\lambda(P)$ existe, si, par exemple, $\mathfrak{D}$ est un domaine complètement intérieur à un domaine holomorphiquement convexe, en vertu du théorème de M. H. Cartan. Voir : H. Cartan, Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes, Bull. Soc. Math. France 78 (1950), Théorème 7, p. 51 ; et, K. Oka, loc. cit., § 3.

9) Pour définition, voir K. Oka, loc. cit., § 3. Par exemple, la fonction $\eta(P)$ du numéro précédent a σ_0 pour zéros du premier ordre dans V.

singuliers de σ. Donc, la fonction $h_{k_1,\cdots,k_n}(P)$ est holomorphe dans $\mathcal{D}$ tout entier. C.q.f.d.

Un théorème sur le prolongement analytique

4. Soit $\mathcal{D}$ un domaine intérieurement ramifié sur l'espace de n variables complexes $(x_1, \cdots, x_n)$ sans point critique transcendant. *Supposons qu'il existe dans $\mathcal{D}$ une fonction holomorphe et non identiquement nulle, $\lambda(P)$, qui s'annule sur chaque composante σ_i de la surface critique σ de $\mathcal{D}$ avec l'ordre de zéros au moins ν_i, $\nu_i - 1$* étant l'ordre de ramification de σ_i. Dans ces conditions, on a le

Théorème. *Soit $\mathcal{D}_0$ un domaine complètement intérieur à $\mathcal{D}$. Alors, on peut trouver un ensemble E*[10] *complètement intérieur au domaine $\mathcal{D}' = \mathcal{D} - \sigma$, tel qu'il jouisse de la propriété suivante:*

Soit A un point régulier quelconque de $\mathcal{D}$ tel qu'on ait $\lambda(A) \neq 0$. Si, pour toute fonction $f(P)$ holomorphe dans $\mathcal{D}$, on a au point A l'inégalité

$$|f(A)| \leqq \sup_{P \in \mathcal{D}_0} |f(P)|,$$

alors,

1° pour toute fonction $f(P)$ holomorphe dans $\mathcal{D}$, l'élément de fonction $f^*(x)$ défini par $f(P)$ au point $\underline{A} = (a)$ se prolonge en une fonction holomorphe dans un polycylindre $C((a), \rho)$ de centre (a) et de rayon

$$\rho = \frac{|\lambda(A)|}{\Lambda} r,$$

où r est la distance de E à la frontière de $\mathcal{D}'$, et que Λ est la borne supérieure de $|\lambda(P)|$ dans $\mathcal{D}_0$;

2° pour tout nombre positif $\rho' < \rho$, on a l'inégalité

$$\sup_{(x) \in C((a), \rho')} |f^*(x)| \leqq \sup_{P \in E(r')} |f(P)|,$$

où $r' = \frac{r}{\rho} \rho' (< r)$, et $E(r') = \bigcup_{P \in E} C(P, r')$.

---

10) On peut trouver cet ensemble E aussi voisin de $\mathcal{D}_0$ qu'on le veut, de sorte qu'il ne soit différent de $\mathcal{D}_0$ qu'un ensemble contenu dans le voisinage donné de σ.

Remarques. Si l'on veut établir le théorème pour une famille $\mathcal{F}$ de fonctions holomorphes dans $\mathcal{D}$, il suffira de supposer que $\mathcal{F}$ satisfasse à la condition suivante :

si une fonction $f(P)$ appartient à $\mathcal{F}$, alors,

a) pour toutes les dérivées partielles $\dfrac{\partial^k f(P)}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}}$ *de $f(P)$, les fonctions* $[\lambda(P)]^k \dfrac{\partial^k f(P)}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}}$ *appartiennent à $\mathcal{F}$, et,*

b) quels que soient l'entier $k\geqq 0$ et le nombre complexe c, la fonction $c[f(P)]^k$ appartient à $\mathcal{F}$.

En outre, dans le cas où $\mathcal{D}$ est un domaine sans aucun point critique intérieur, on peut choisir pour $\lambda(P)$ la fonction constante qui est égale à 1 identiquement sur $\mathcal{D}$, et pour E le domaine $\mathcal{D}_0$, d'où r deviendra la distance de $\mathcal{D}_0$ à la frontière de $\mathcal{D}$. Donc, dans ce cas, le théorème se réduit au théorème classique.

Démonstration du théorème

5. Pour démontrer le théorème, commençons par construire un ensemble E (qui deviendra l'ensemble E énoncé dans le théorème), complètement intérieur à $\mathcal{D}'=\mathcal{D}-\sigma$, tel qu'il satisfasse aux deux conditions suivantes :

1° le module de la fonction $\lambda(P)$ ne dépasse pas Λ sur E, Λ étant la borne supérieure de $|\lambda(P)|$ dans $\mathcal{D}_0$;

2° si une fonction quelconque $f(P)$ holomorphe dans $\mathcal{D}$ est majorée en module sur E par un certain nombre M, le module de $f(P)$ est aussi majoré dans $\mathcal{D}_0$ par le même nombre M.

Pour cela, soit Q un point *quelconque* de la surface critique σ, et soit $\underline{Q}=(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ la trace de Q. Soit V un voisinage connexe de Q qui est regardé comme une surface caractéristique Σ définie, dans un polycylindre de l'espace de $((x), y)$ de la forme :

$$|x_1-\xi_1|<\eta, \cdots, |x_n-\xi_n|<\eta, \quad |y|<R,$$

par une équation

$$(\Sigma) \qquad y^\nu + A_1(x)y^{\nu-1}+\cdots+A_\nu(x) = 0\,,$$

où les coefficients $A_j(x)$ sont des fonctions holomorphes dans le polycylindre $\underline{V}$:

$$(\underline{V}) \qquad |x_1-\xi_1|<\eta, \cdots, |x_n-\xi_u|<\eta,$$

qui s'annulent au point (ξ), et que le pseudo-polynôme dans l'équation (Σ) est irréductible au point $((\xi), 0)$.

Si l'on choisit le rayon η de $\underline{V}$ suffisamment petit, on a dans V l'inégalité

$$|\lambda(P)| \leqq \Lambda,$$

parce que la fonction holomorphe $\lambda(P)$ s'annule au point Q.

Soit maintenant σ' l'intersection de σ et V, et soit $\underline{\sigma}'$ la trace de σ'. Grâce à Weierstrass, on peut trouver un nouveau système de coordonnées, soient $u_1, \cdots, u_n$, de l'espace $(x_1, \cdots, x_n)$, de telle manière que le point $\underline{Q}$ ait les coordonnées $(u)=(0)$, et qu'il existe un voisinage $\underline{U}$ du point $\underline{Q}$ complètement intérieur à $\underline{V}$, de la forme :

$$(\underline{U}) \qquad |u_1|<\delta, \cdots, |u_{n-1}|<\delta, \; |u_n|<\varepsilon,$$

et satisfaisant à la condition suivante :

le sous-ensemble fermé $\underline{B}$ de la frontière de $\underline{U}$, de la forme :

$$(\underline{B}) \qquad |u_1| \leqq \delta, \cdots, |u_{n-1}| \leqq \delta, \; |u_n| = \varepsilon,$$

n'a aucun point commun avec $\underline{\sigma}'$.

Cela étant, considérons sur $\mathscr{D}$ un domaine U constitué par tous les points P de V dont les traces $\underline{P}$ appartiennent à $\underline{U}$. U est évidemment un voisinage de Q qui est complètement intérieur à V.

Soit B l'ensemble des points P de V dont les traces $\underline{P}$ appartiennent à $\underline{B}$. Puisque $\underline{B}$ et $\underline{\sigma}'$ n'ont aucun point commun, l'ensemble B n'a aucun point commun avec $\sigma' = \sigma \frown V$, et par conséquent, l'ensemble B n'a aucun point commun avec la surface critique σ de $\mathscr{D}$. L'ensemble B est donc compact dans le domaine $\mathscr{D}' = \mathscr{D} - \sigma$.

De plus, on voit que l'ensemble B jouit des propriétés suivantes :

1° $|\lambda(P)|$ ne dépasse pas Λ sur B ;

2° si une fonction quelconque $f(P)$ holomorphe dans $\mathscr{D}$ est majorée en module sur B par un certain nombre M, le module de $f(P)$ est aussi majoré dans U par le même nombre M.

En effet, la première propriété est évidente, car B est contenu dans V, qui jouit de cette propriété comme expliqué ci-dessus.

Soit maintenant $(u_1^0, \cdots, u_{n-1}^0)$ un point quelconque d'un polycylindre Δ de l'espace de $n-1$ variables $(u_1, \cdots, u_{n-1})$, de la forme

$$(\Delta) \qquad |u_1| < \delta, \cdots, |u_{n-1}| < \delta;$$

et soit $\underline{W}$ l'ensemble à une dimension de l'espace de $(u_1, \cdots, u_n)$, de la forme

$$(\underline{W}) \qquad u_1 = u_1^0, \cdots, u_{n-1} = u_{n-1}^0, \ |u_n| < \varepsilon.$$

Désignons par W l'ensemble des points P de U dont les traces $\underline{P}$ appartiennent à $\underline{W}$. Alors, W est considéré comme une surface de Riemann (connexe ou non), ramifié sur le cercle $|u_n| < \varepsilon$ du plan d'une seule variable complexe u_n. La restriction de $f(P)$ sur W devient alors une fonction holomorphe sur la surface de Riemann W, qui satisfait sur la frontière de W l'inégalité

$$|f(P)| \leq M.$$

Donc, d'après le principe du module maximal, on a la même inégalité sur W.

En faisant parcourir le point $(u_1^0, \cdots, u_{n-1}^0)$ dans Δ, on a dans le voisinage U l'inégalité voulue

$$|f(P)| \leq M,$$

ce qui vérifie la deuxième propriété de B.

6. Construisons dans ce numéro, l'ensemble E voulu au début du numéro précédent. Étant donné un domaine $\mathcal{D}_0$ complètement intérieur à $\mathcal{D}$, soit σ^* l'intersection de la surface critique σ de $\mathcal{D}$ et de la fermeture $\overline{\mathcal{D}}_0$ de $\mathcal{D}_0$. On sait évidemment que l'intersection σ^* est compacte dans $\mathcal{D}$.

Comme nous venons de voir dans le numéro précédent, on peut trouver, pour chaque point Q de σ^*, un voisinage ouvert U de Q complètement intérieur à $\mathcal{D}$, tel qu'il existe un sous-ensemble B de la frontière de U, qui est complètement intérieur à $\mathcal{D}' = \mathcal{D} - \sigma$, et qui jouit des deux propriétés suivantes :

1° $|\lambda(P)|$ ne dépasse pas Λ sur B, où $\Lambda = \sup_{P \in \mathcal{D}_0} |f(P)|$;

2° si une fonction quelconque $f(P)$ holomorphe dans $\mathcal{D}$ est majorée en module sur B par un nombre M, le module de $f(P)$ est aussi majoré dans U par le même nombre M.

Puisque σ^* est compacte dans $\mathcal{D}$, on peut trouver un nombre fini de tels voisinages U, soient $U_1, \cdots, U_k$, dont la réunion

$$U^* = U_1 \cup \cdots \cup U_k$$

recouvre σ^*. Alors, l'ensemble $\mathcal{D}_0 - U^*$ est complètement intérieur à $\mathcal{D}'$.

Soit B^* la réunion de tous les B_j correspondants aux $U_j, j=1, \cdots, k$,

$$B^* = B_1 \cup \cdots \cup B_k .$$

L'ensemble B^* est complètement intérieur à $\mathcal{D}'$, et jouit des propriétés suivantes :
1° le module de $\lambda(P)$ ne dépasse pas Λ sur B^* ;
2° si une fonction quelconque $f(P)$ holomorphe dans $\mathcal{D}$ est majorée en module sur B^* par un certain nombre M, le module de $f(P)$ est aussi majoré dans U^* par le même nombre M.

Posons maintenant

$$E = (\mathcal{D}_0 - U^*) \cup B^* .$$

Alors, l'ensemble E est complètement intérieur à $\mathcal{D}' = \mathcal{D} - \sigma$. De plus, on voit aisément que :
1° le module de $\lambda(P)$ ne dépasse pas $\Lambda = \sup\limits_{P \in \mathcal{D}_0} |\lambda(P)|$ sur $\mathcal{D}_0 \cup B^*$, et par conséquent sur E;
2° si une fonction quelconque $f(P)$ holomorphe dans $\mathcal{D}$ est majorée en module sur E par un nombre M, le module de $f(P)$ est aussi majoré dans $\mathcal{D}_0$ par le même nombre M. En effet, le module de $f(P)$ étant majoré sur E par M, il est majoré sur B^* par M, donc sur U^*, et par suite sur $E \cup U^*$, qui contient $\mathcal{D}_0$.

L'ensemble voulu E est ainsi obtenu.

7. Soit r la distance de E à la frontière de $\mathcal{D}' = \mathcal{D} - \sigma$ qui est un domaine sans aucun point critique intérieur. Alors, pour tout nombre positif $r' < r$, l'ensemble $E(r') = \bigcup\limits_{P \in E} C(P, r')$ est complètement intérieur à $\mathcal{D}'$. Étant donnée une fonction $f(P)$ holomorphe dans $\mathscr{D}$, désignons par $M(r')$ $(r'<r)$ la borne supérieure de $|f(P)|$ dans $E(r')$.

Soit A un point de $\mathscr{D}'$ tel qu'on ait $\lambda(A)\neq 0$, et que, pour toute fonction $f(P)$ holomorphe dans $\mathscr{D}$, on ait toujour l'inégalité

$$|f(A)|\leqq \sup_{P\in\mathscr{D}_0}|f(P)|.$$

Nous allons montrer que, *pour les dérivées partielles* $\dfrac{\partial^k f(P)}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}}$ *de* $f(P)$ *d'ordre quelconque* $k=k_1+\cdots+k_n$, $k_1\geqq 0$, $\cdots$, $k_n\geqq 0$, *on a au point* A *les inégalités*

$$\frac{1}{k_1!\cdots k_n!}\left|\frac{\partial^k f(A)}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}}\right|\leqq M(r')\left(\frac{\Lambda}{r'|\lambda(A)|}\right)^k,$$

Λ *étant la borne supérieure de* $|\lambda(P)|$ *dans* $\mathscr{D}_0$.

En effet, puisque tout point P de E est centre d'un polycylindre $C(P, r')$, sur lequel $f(P)$ est holomorphe et $|f(P)|\leqq M(r')$, on a sur E, en vertu de la formule intégrale de Cauchy,

$$\left|\frac{\partial^k f(P)}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}}\right|\leqq k_1!\cdots k_n!\,\frac{M(r')}{r'^k}.$$

Posons

$$h(P) = [\lambda(P)]^k\,\frac{\partial^k f(P)}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}}.$$

Alors, la fonction $h(P)$ est holomorphe dans $\mathscr{D}$, d'après le lemme du numéro 3. Comme on a sur E

$$|\lambda(P)|\leqq\Lambda,$$

on a sur E l'inégalité

$$|h(P)|\leqq k_1!\cdots k_n!\,M(r')\left(\frac{\Lambda}{r'}\right)^k.$$

Donc, en vertu de la seconde propriété de E, on a la même inégalité dans $\mathscr{D}_0$.

D'autre part, on a, pour la valeur absolue de $h(A)$, l'inégalité

$$|h(A)|\leqq\sup_{P\in\mathscr{D}_0}|h(P)|.$$

Par conséquent, on a l'inégalité

$$|h(A)| \leqq k_1! \cdots k_n!\ M(r') \left(\frac{\Lambda}{r'}\right)^k ,$$

d'où découlent les inégalités voulues, car $\lambda(A)$ n'est pas nulle.

8. Enfin, nous pouvons maintenant démontrer le théorème; la démonstration s'opérera tout pareillement à celle due à MM. Cartan et Thullen.

En effet,

1° le développement de Taylor de l'élément de fonction $f^*(x)$ défini par $f(P)$ au point $\underline{A}=(a_1, \cdots, a_n)$, qui peut s'écrire

$$f^*(x) = \sum_{k_1,\cdots,k_n \geqq 0} \frac{1}{k_1! \cdots k_n!} \frac{\partial^k f(A)}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}} (x_1 - a_1)^{k_1} \cdots (x_n - a_n)^{k_n} ,$$

converge, en vertu des inégalités obtenues au numéro précédent, dans le polycylindre $C((a), \rho')$ de centre (a) et de rayon

$$\rho' = \frac{|\lambda(A)|}{\Lambda} r' .$$

Puisque r' $(0 < r' < r)$ est quelconque, $f^*(x)$ se prolonge analytiquement dans le polycylindre $C((a), \rho)$ de rayon

$$\rho = \frac{|\lambda(A)|}{\Lambda} r .$$

2° Soit ρ'' un nombre positif $< \rho'$, et posons

$$r'' = \frac{\Lambda}{|\lambda(A)|} \rho'' = \frac{r}{\rho} \rho'' ;$$

on a alors $r'' < r'$ $(< r)$. Pour le module de la fonction $f^*(x)$, on a évidemment en tout point (x) du polycylindre $C((a), \rho'')$ de rayon ρ'', l'inégalité

$$|f^*(x)| \leqq \frac{M(r')}{\left(1 - \frac{r''}{r'}\right)^n} .$$

Considérons d'autre part, pour tout entier positif m, une fonction $g_m(P)$ holomorphe dans $\mathfrak{D}$, définie par une identité

$$g_m(P) = \left(\frac{f(P)}{M(r')}\right)^m ;$$

et soit $g_m^*(x)$ l'élément de fonction défini par $g_m(P)$ au point $\underline{A}$. Pour le module de $g_m^*(x)$, on a, en remplaçant $f^*(x)$ à l'inégalité ci-dessus par $g_m^*(x)$, l'inégalité en tout point (x) de $C((a), \rho'')$,

$$|g_m^*(x)| \leqq \frac{1}{\left(1-\frac{r''}{r'}\right)^n},$$

dont second membre est une constante indépendante de l'entier m.

Or, s'il existait dans $C((a), \rho'')$ un point (x^0) auquel le module de la fonction $f^*(x)$ dépasse $M(r')$:

$$|f^*(x^0)| > M(r'),$$

le module $|g_m^*(x^0)| = \left|\frac{f^*(x^0)}{M(r')}\right|^m$ deviendrait indéfiniment grand avec m ; mais cela ne peut pas être compatible avec l'inégalité ci-dessus pour le module $|g_m^*(x)|$. Donc, on a dans $C((a), \rho'')$,

$$|f^*(x)| \leqq M(r').$$

Le nombre positif ρ'' étant quelconque $(<\rho')$, on a la même inégalité dans $C((a), \rho')$ tout entier, ce qui prouve l'énoncé 2° du théorème.