J. Math. Kyoto Univ.
4-1 (1964) 245-254

Propriétés asymptotiques des valeurs propres des opérateurs elliptiques auto-adjoints

(dédié à Monsieur le Professeur A. Kobori, à l'occasion de son soixantième anniversaire)

Par

Sigeru MIZOHATA et Reiko ARIMA

(Reçu le 10 september, 1964)

---

1. Introduction

Le but de cet article est de montrer une formule asymptotique concernant les distributions des valeurs propres vis-à-vis le problème aux limites pour les opérateurs elliptiques auto-adjoints.

Avant d'expliquer notre résultat, nous allons préciser ce problème. Considérons un domaine Ω fini dans un espace R^n dont la frontière est une hypersurface S assez régulière.

Soit $A(x;D)$ un opérateur différentiel elliptique d'ordre $m(=2b)$, défini dans Ω. Nous supposons que $A(x;D)$ est formellement auto-adjoint :

$$A^*(x;D)=A(x;D). \tag{1.1}$$

Cette condition implique que les coefficients correspondant à la partie principale de $A(x;D)$ sont tous réels.

Il s'agit du problème aux limites de la forme suivante :

$$\begin{cases} A(x;D)u(x)=f(x) & \text{dans } \Omega. \\ B_j(x;D)u(x)=0 & \text{sur } S,\ j=1,2,\cdots,b\ (=m/2). \end{cases} \tag{1.2}$$

Ici, $\{B_j\}_{j=1,2,\cdots,b}$ est un système de b opérateurs différentiels définis sur S. Désignons les parties principales de A et de B_j par A_0 et B_{0j} respectivement. On suppose ici que $\{B_j\}$ est un système normal :

(1.3)
1) *A* tout point de la frontière, S n'est pas caractéristique pour B_j.
2) Soit m_j l'ordre de B_j, on a $m_j \neq m_k$.

On suppose de plus que $m_j \leq m-1$, $j=1, 2, \cdots, b$.

Naturellement on suppose que le système $\{B_j\}$ recouvre A. En d'autres termes : Soit N_x la normale (intérieure) à S au point x. Pour tout point x de S et pour tout $\eta \neq 0$, vecteur appartenant à l'hyperplan tangent au point x, les polynomes (en z) $\{B_{0j}(x\,;\,\eta+zN_x)\}_{j=1,2,\cdots,b}$ sont linéairement indépendants modulo $A_{0+}(x\,;\,\eta+zN_x)=(z-z_1(x\,;\,\eta))(z-z_2(x\,;\,\eta))\cdots(z-z_b(x\,;\,\eta))$, où $z_i(x\,;\,\eta)$ sont des racines ayant la partie imaginaire positive de l'équation $A_0(x\,;\,\eta+zN_x)=0$.

Nous dirons que deux systèmes normaux $\{B_j\}$ et $\{B_j'\}$ sont équivalents, si l'espace des fonctions $u(x)$ définies par $B_ju=0$, $(j=1, 2, \cdots, b)$, et celui des fonctions $u(x)$ définies par $B_j'u=0$, $(j=1, 2, \cdots, b)$ coïncident. Comme on sait (voir [7]), on peut associer au système $\{A\,;\,B_j(j=1, 2, \cdots, b)\}$ un autre système normal $\{B_j'\}_{j=1,2,\cdots,b}$, appelé un système *adjoint* au système $\{A\,;\,B_j\}$. Ce système n'est pas déterminé uniquement, mais deux systèmes adjoints au même système $\{A\,;\,B_j\}$ sont toujours équivalents l'un à l'autre.

Ceci remarqué, nous donnons la définition.

Definition 1.1. *Nous dirons que le système* $\{A\,;\,B_j\ (j=1, 2, \cdots, b)\}$ *est formellent auto-adjoint, si* $A=A^*$ *et que le système adjoint* $\{B_j'\}$ *est équivalent à* $\{B_j\}$.

Nous supposerons désormais que les coefficients de A et de B_j sont assez réguliers dans $\overline{\Omega}$. Remarquons que, si A est formellement auto-adjoint, alors en désignant

$$D(A) = \{u \in C^m(\overline{\Omega})\,;\, B_ju = 0\,,\ j = 1, 2, \cdots, b\}\,,$$

on a

$$(Au,\ v) = (u,\ Av)$$

pour tout u, $v \in D(A)$.

A étant supposé formellemeut auto-adjont, on suppose maintenant que la forme $(Au,\ u)$ est restée bornée inférieurement, c'est-à-dire qu'il existe une coustante γ telle que

(1.4) $\qquad (Au,\ u) \geq \gamma \|u\|^2, \qquad$ pour toute $\ u(x) \in D(A)$.

Dans les conditions ci-dessus, en prenant le domaine de définition de A comme

(1.5) $\qquad \mathfrak{D}(A) = \{u \in \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)\,;\ B_j u = 0,\ j = 1, 2, \cdots, b\}$,

il est facile de voir que A est un opérateur auto-adjoint dans $L^2(\Omega)$, et que cette extension auto-adjointe est unique. En prenant β de manière que $\beta+\gamma>0$, on voit que l'opérateur de Green $G_\beta=(A+\beta I)^{-1}$ est complètement continu dans $L^2(\Omega)$. De là il suit que l'opérateur A a une infinité de valeurs propres $\{\lambda_j\}$: $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_j \leq \cdots \rightarrow +\infty$.

Nous sommes en état d'énoncer notre résultat. Soit

$$A(x\,;\,D) = (-1)^b a_0(x\,;\,D) + (\text{termes d'ordre } \leq m-1)\,, \quad b = m/2\,,$$

(remarquons que $a_0(x\,;\,\xi)>0$, pour tout $\xi \neq 0$).

Théorème. *Soit $N(T)$ le nombre des valeurs propres telles que $\lambda_j < T$. Soit*

$$w(\Omega) = \int_\Omega dx \int_{a_0(x;\,\xi)<1} d\xi\,,$$

on a

(1.6) $\qquad N(T) \sim (2\pi)^{-n} w(\Omega) T^{n/m} \qquad (T \rightarrow \infty)$.[1]

Pour démontrer ce théorème, nous allons suivre le travail de Minakshisundaram ([6]). Dans ce raisonnement, ce qui est essentiel est d'utiliser une estimation assez précise du noyau de Green $G(t\,;\,x,\,y)$ de l'opérateur parabolique

(1.7) $$\frac{\partial}{\partial t} u + Au = 0$$

Or, l'un des auteurs a déjà obtenu telle estimation (voir [2]). Dans ce qui suit, nous allons indiquer quelques points qu'il faudra confirmer pour la démonstration du Théorème.

2. Ordres de croissance des λ_j et des $\omega_j(x)$.

S'il est nécessaire, en prenant $A+\beta I$ au lieu de A, pour dé-

1) Cette formule a été montrée par Cårding pour le problème de Dirichlet (voir [3]).

montrer le lemme 2. 1, qui suit, il suffit de supposer que A soit défini-positif, c'est-à-dire que γ soit positif dans (1. 4). Désormais nous le sopposons dans cette section. Alors on a $\lambda_j>0$, $j=1, 2, \cdots$. Dans cette condition, pour $s\geq 0$, on a

$$A^{-s}f = \sum_j \frac{(f, \omega_j)}{\lambda_j^s}\omega_j(x), \tag{2. 1}$$

où $\omega_j(x)$ est une fonction propre correspondant à la valeur propre λ_j, et de plus $\{\omega_j(x)\}$ forme un système ortho-normal dans $L^2(\Omega)$.

Lemme 2. 1.

1) $\sup_{x\in\Omega} |\omega_j(x)|\leq \text{const.}\ \lambda_j^s$ $(j=1, 2, \cdots)$, *si* s(*entier*)$>n/2m$

2) $\sum_j \frac{1}{\lambda_j^{2s}}<+\infty$, *si* s(*entier*)$>n/2m$.

Démonstration.

1) On utilise le fait suivant (voir, [7], Théorème 6. 1):

$$Au = f,\quad f\in\mathcal{E}_{L^2}^s(\Omega),\ u\in\mathfrak{D}(A)\quad \text{entraînent}\quad u\in\mathcal{E}_{L^2}^{m+s}(\Omega).$$

Supposons que A soit inversible, alors l'application biunivoque $u\to Au$ est continue de $\mathcal{E}_{L^2}^{m+s}(\Omega)\cap\mathfrak{D}(A)$ sur $\mathcal{E}_{L^2}^s(\Omega)$. Or, d'après le théorème de Banach, cette application est bicontinue, d'où

$$||u||_{m+s}\leq C_s||Au||_s,\quad \text{pour toute}\quad u(x)\in\mathcal{E}_{L^2}^{m+s}(\Omega)\cap\mathfrak{D}(A).$$

Appliquons cette inégalité à $\omega_j(x)$, on a

$$||\omega_j(x)||_{km}\leq \text{const.}\ ||A\omega_j||_{(k-1)m} = \text{const.}\ \lambda_j||\omega_j||_{(k-1)m}$$

En prenant $k=1, 2, 3, \cdots$, on a

$$||\omega_j(x)||_{sm}\leq \text{const.}\ \lambda_j^s\quad (s = 1, 2, \cdots). \tag{2. 2}$$

En appliquant le lemme de Sobolev, on achève la démonstration.

2) Tout d'abord on va montrer que, si $s>n/2m$

$$A^{-s}f = \int_\Omega K_s(x, y)f(y)dy,\quad f(x)\in L^2(\Omega), \tag{2. 3}$$

où

$$\iint_{\Omega\times\Omega} |K_s(x, y)|^2dxdy<+\infty$$

Ce fait est déjà connu (voir, par exemple [4]), mais pour faciliter au lecteur la compréhension de cet article, nous donnons la démonstration.

D'après ce qui précède, on a

$$||A^{-s}u||_{sm} \leq C_s ||u||_{L^2} \qquad \text{pour toute} \quad u(x) \in L^2(\Omega)\,.$$

Or, si l'on prend $s > n/2m$, alors d'après le lemme de Sobolev, pour tout point x fixé de Ω, l'application $u(x) \in L^2(\Omega) \to (A^{-s}u)(x)$ est une forme linéaire continue de $L^2(\Omega)$. On la désigne par $L_x[u]$. Nous avons

$$(A^{-s}u)(x) = L_x[u]\,, \quad |L_x[u]| \leq C||u||_{L^2}\,,$$

où C est une constante indépendante de x. De plus, $L_x[u]$ est une fonction continue de x dans $\overline{\Omega}$.

Considérons maintenant la forme linéaire définie par

$$\langle K, f(x, y)\rangle = \sum \int_\Omega v_i(x) L_x[u_i] dx$$

où $$f(x, y) = \sum_{\text{fini}} v_i(x) u_i(y)\,, \ u_i(y) \in L^2(\Omega)\,, \ v_i(x) \in L^2(\Omega)\,.$$

Evidemment telles fonctions $f(x, y)$ forment un sous-espace dense dans $L^2(\Omega \times \Omega)$.

Maintenant,

$$|\langle K, f\rangle| \leq \left| \int_\Omega L_x[\sum v_i(x) u_i(y)] dx \right|, \qquad \text{et}$$

$$|L_x[\sum v_i(x) u_i(y)]| \leq C \left(\int |f(x, y)|^2 dy \right)^{1/2},$$

d'où

$$|\langle K, f\rangle| \leq C \operatorname{mes}(\Omega)^{1/2} ||f(x, y)||_{L^2(\Omega\times\Omega)}\,.$$

Ceci montre que $\langle K, f\rangle$ est une forme linéaire continue de $L^2(\Omega \times \Omega)$ définie sur un sous-espace dense dans $L^2(\Omega \times \Omega)$. D'où, d'après le théorème de F. Riesz, il s'ensuit qu'il existe une fonction $K_s(x, y) \in L^2(\Omega \times \Omega)$ telle que

$$\langle K, f\rangle = \int_\Omega \int_\Omega K_s(x, y) f(x, y) dx dy\,.$$

En posant $f(x, y) = v(x) u(y)$, on a

$L_x[u]=\int_\Omega K_s(x, y)u(y)dy$, presque partout dans Ω. Nous avons donc prouvé (2. 3).

De (2. 1) et de (2. 3), il suit que

$$\iint |K_s(x, y)|^2 dxdy = \sum_j \int_\Omega \frac{|\omega_j(x)|^2}{\lambda_j^{2s}} dx = \sum_j \frac{1}{\lambda_j^{2s}} < +\infty$$

c.q.f.d.

Corollaire. *D'après le lemme on a*

(2. 4) $\lambda_j > \text{const.}\, j^{1/2s}$, $j = 1, 2, 3, \cdots$, $s(entier) > n/2m$.

3. Noyau de Green pour l'opérateur parabolique

Comme on sait, la solution $u(x, t)$ de l'équation parabolique avec la donnée initiale $f(x) \in L^2(\Omega)$ est donnée par

(3. 1) $$e^{-tA}f = \sum_j e^{-\lambda_j t}(f, \omega_j)\omega_j(x), \quad t > 0,$$

où le second membre s'écrit

$$= \int_\Omega \{\sum_j e^{-\lambda_j t}\omega_j(x)\overline{\omega_j(y)}\} f(y)dy.$$

Or, d'après le lemme 2. 1 et (2. 4), la série entre parenthèse est uniformément convergente pour $t > \delta$ (>0 arbitraire). Ceci montre que

(3. 2) $$G(t\,;\, x, y) = \sum_j e^{-\lambda_j t}\omega_j(x)\overline{\omega_j(y)}.$$

Ceci posé, en multipliant t^{s-1} à

$$G(t\,;\, x, y) - \sum_{\lambda_j \leq 0} e^{-\lambda_j t}\omega_j(x)\overline{\omega_j(y)} = \sum_{\lambda_j > 0} e^{-\lambda_j t}\omega_j(x)\overline{\omega_j(y)},$$

on intègre les deux membres en t de 0 à $+\infty$, en supposant que $Re\ s$ est assez grand. En tenant compte de

$$\int_0^\infty t^{s-1}e^{-\lambda_j t}dt = \frac{1}{\lambda_j^s}\Gamma(s),$$

on a

$$\int_0^{+\infty} [G(t\,;\, x, y) - \sum_{\lambda_j \leq 0} e^{-\lambda_j t}\omega_j(x)\overline{\omega_j(y)}]\, t^{s-1}dt$$

$$= \Gamma(s) \sum_{\lambda_j > 0} \frac{\omega_j(x)\overline{\omega_j(y)}}{\lambda_j^s}.$$

Ce calcul est justifié d'après le lemme 2. 1.

Maintenant, on regarde le premier membre. On divise l'intégration dans (0, 1) et dans $(1, +\infty)$. La seconde intégrale est

$$\sum_{\lambda_j>0} \omega_j(x)\overline{\omega_j(y)} \int_1^\infty e^{-\lambda_j t} t^{s-1} dt ,$$

qui est visiblement une fonction entière de s. Ensuite, la première intégrale est

$$-\sum_{\lambda_j\leq 0} \omega_j(x)\overline{\omega_j(y)} \int_0^1 e^{-\lambda_j t} t^{s-1} dt + \int_0^1 G(t\,;\ x, y) t^{s-1} dt .$$

En résumé, en désignant

$$\zeta_s(x, y) = \sum_{\lambda_j>0} \frac{\omega_j(x)\overline{\omega_j(y)}}{\lambda_j^s} \tag{3.3}$$

on a

$$\zeta_s(x, y) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 G(t\,;\ x, y) t^{s-1} dt + E_s(x, y) , \tag{3.4}$$

où

$$\begin{aligned} E_s(x, y) = &\sum_{\lambda_j>0} \omega_j(x)\overline{\omega_j(y)} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_1^\infty e^{-\lambda_j t} t^{s-1} dt \\ &-\sum_{\lambda_j\leq 0} \omega_j(x)\overline{\omega_j(y)} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 e^{-\lambda_j t} t^{s-1} dt . \end{aligned}$$

Comme on voit facilement, $E_s(x, y)$ est une fonction entière de s.

Maintenant, nous utilisons des résultats dans l'article [2]. Explicitons un de ses résultats. On considère l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t} u - A(x\,;\ D) u = 0 \tag{3.5}$$

où on suppose

(A. 1) $\quad Re\, A_0(x\,;\ i\xi) < 0 \quad$ pour $\quad \xi \in R^n - \{0\} , \quad x \in \overline{\Omega} ,$

et de plus

(A. 2) $\quad R(p, \eta\,;\ x) \neq 0 \quad$ pour $\quad Re\, p \geq 0,\ \eta \in T_x,\ (p, \eta) \neq 0,\ x \in S .$

Cette condition équivaut à dire que les polynomes (en z) $\{B_{0j}(x\,;\ \eta + zN_x)\}_{j=1,2,\cdots,b}$ sont linéairement indépendants modulo le polynome $(z - z_1(x, p\,;\ \eta)) \cdots (z - z_b(x, p\,;\ \eta))$, où z_i sont des racines ayant la partie imaginaire positive de l'équation

$$A_0(x\,;\,\eta+zN_x)-p=0\,,\quad Re\,p\geq 0\,,$$

Or, cette condition est encore équivalente à la condition suivante (voir, [1], Théorème 2.1): l'opérateur A avec le domaine de définition (1.5) a l'ensemble résolvant tout au moins dans un demi-plan $Re\,\lambda\geq\lambda_0$ (si l'on prend assez grand), et d'ailleurs on a

$$\|(\lambda I-A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2\,;\,L^2)}\leq\frac{\text{const}}{|\lambda|}\,,\quad Re\,\lambda\geq\lambda_0\,. \tag{3.6}$$

En d'autres termes, A est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe *analytique.*

Reproduisons le résultat ([2], Théorème 2) comme le

Lemme 3.1. *Le noyau de Green s'écrit sous la forme*

$$G(t\,;\,x,\,y)=G_0(t,\,x-y\,;\,y)+G_1(t\,;\,x,\,y)+G_c(t\,;\,x,\,y)\,,$$

où (G_0+G_1) *est la solution fondamentale et* G_c *est le noyau de compensateur.*

$$G_0(t,\,y\,;\,x)=(2\pi)^{-n}\int e^{iy\xi}\exp\{A_0(x\,;\,i\xi)t\}d\xi\,, \tag{3.7}$$

où $A_0(x\,;\,D)$ *est la partie principale de* $A(x\,;\,D)$.

Quant à G_1, *et* G_c, *on a les évaluations suivantes*:

$$|G_1(t\,;\,x,\,y)|\leq\frac{c_1}{t^{n-1/m}}\exp\left\{-c'\left(\frac{|x-y|}{t^\alpha}\right)^q\right\}, \tag{3.8}$$

$$|G_c(t\,;\,x,\,y)|\leq\frac{c_2}{t^{n/m}}\exp\left\{-c''\left(\frac{|x-y|}{t^\alpha}\right)^q\right\}\exp\left\{-c'''\left(\frac{l_y}{t^\alpha}\right)^q\right\}, \tag{3.9}$$

où $\alpha=1/m$, $q=m/m-1$, $l_y=$*distance*$(y,\,S)$.

Revenons à notre problème. Dans le cas actuel, l'opérateur $(-A)$ défini dans l'Introduction satisfait bien à la condition (3.6). Donc on peut appliquer le lemme 3.1. De ce lemme, en tenant compte de (3.4), on voit que la fonction $\zeta_s(x,\,y)$ est, pour $x\neq y$, une fonction entière de s.

Considérons maintenant le cas $x=y$. Dans le cas présent,

$$G_0(t,\,0\,;\,x)=(2\pi)^{-n}\int\exp\{-a_0(x\,;\,\xi)t\}d\xi\,,$$

où $a_0(x\,;\,\xi)$ a été définie dans l'Introduction. Alors, un calcul simple montre que

$$(3.10)\qquad G_0(t, 0; x) = (2\pi)^{-n} m/m\,\Gamma(n/m)t^{-n/m}\int_{a_0(x;\xi)<1} d\xi$$
$$\equiv (2\pi)^{-n} n/m\,\Gamma(n/m)t^{-n/m} w_{a_0}(x).$$

En résumé, pour $x \in \Omega$, on a

$$(3.11)\qquad \zeta_s(x, x) = (2\pi)^{-n} n/m\, w_{a_0}(x)\frac{1}{s-n/m} + g_s(x),$$

où $g_s(x)$ est une fonction holomorphe de s pour $Re\, s > (n-1)/m$.

Considérons maintenant

$$(3.12)\qquad \int_\Omega \zeta_s(x, x)dx = \sum_{\lambda_j>0}\frac{1}{\lambda_j^s}$$

qui est valable pour $Re\, s$ assez grand.

D'abord, il est facile de voir que

$$\int_\Omega dx\int_0^1 t^{s-1}G_1(t; x, x)dt$$

est une fonction holomorphe (de s) pour $Re\, s > \frac{n-1}{m}$. (d'après (3.8)).

Ce qui est délicat à vérifier est l'intégrale

$$(3.13)\qquad \int_\Omega dx\int_0^1 t^{s-1}G_c(t; x, x)dt.$$

Nous allons montrer que cette intégrale est aussi holomorphe pour $Re\, s > \frac{n-1}{m}$.

En effet, d'après (3.9), en désignant $Re\, s = \sigma$,

$$\int_\Omega dx\int_0^1 |t^{s-1}G_c(t; x, x)|dt$$
$$\leq \text{const}\int_0^\infty dl_x\int_0^1 t^{\sigma-1-\frac{n}{m}}\exp\left\{-c'''\left(\frac{l_x}{t^\alpha}\right)^q\right\}dt.$$

En posant $l_x/t^\alpha = u$, $t = v$, on a $dl_x dt = v^\alpha du dv$, d'où

$$= \text{const}\int_0^\infty \exp\{-c''' u^q\}du\int_0^1 v^{\sigma-1-\frac{n-1}{m}}dv.$$

Ce qui montre notre assertion.

En résumé, en tenant compte de (3. 11), nous avons

$$\sum_{\lambda_j>0}\frac{1}{\lambda_j^s}=(2\pi)^{-n}\frac{n}{m}\int_\Omega w_{a_0}(x)dx\frac{1}{s-\dfrac{n}{m}}+g(s)\,, \tag{3.14}$$

où $g(s)$ est holomorphe pour $Re\, s>(n-1)/m$.

En appliquant le théorème d'Ikehara, on a

$$N(T)\sim(2\pi)^{-n}\int_\Omega w_{a_0}(x)dx\ T^{\frac{n}{m}}\,.$$

Remarque. Si l'on applique le thoérème d'Ikehara à (3. 11), on a

$$\sum_{\lambda_j<T}|\omega_j(x)|^2\sim(2\pi)^{-n}w_{a_0}(x)\,T^{\frac{n}{m}}\,,\quad (T\to+\infty)\,. \tag{3.15}$$

REFERENCES

[1] S. Agmon; On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems. Comm. Pure Appl. Math. 15 (1962), 119-147.

[2] R. Arima; On general boundary value problem for parabolic equations, this journal 207-244.

[3] L. Gårding; On the asymptotic distribution of the eigenvalues and eigenfunctions of elliptic differential operators, Math. Scand. 1 (1953), 232-255.

[4] L. Gårding; Applications of the theory of direct integrals of Hilbert spaces to some integral and differential operators, University of Maryland, 1954.

[5] K. Kotake-M. S. Narasimhan; Regularity theorems for fractional powers of a linear elliptic operator, Bull. Soc. Math. France 90 (1962), 449-471.

[6] S. Minakshisundaram; A generalization of Epstein Zeta functions, Can. J. Math. 1 (1947), 320-326.

[7] M. Schechter; General boundary value problems for elliptic partial differential equations, Comm Pure Appl. Math. 12 (1959), 457-482.