J. Math. Kyoto Univ.
4-1 (1964) 191-205

Quelques propriétés locales des domaines intérieurement ramifiés. II

(dédié à Monsieur le Professeur A. Kobori, à l'occasion de son soixantième anniversaire)

Par

Hidekazu Onishi

(Reçu le 10 Septembre, 1964)

Introduction

Considérons, à l'espace de n $(n \geqq 3)$ variables complexes $(x_1, \cdots, x_n)$, un polycylindre $\underline{\Delta}$:

$$(\underline{\Delta}) \qquad |x_i| < r_i \quad (i = 1, \cdots, n),$$

et un domaine Δ intérieurement ramifié sur $\underline{\Delta}$, à ν feuillets.

Étant donnés $m\,(3 \leqq m \leqq n)$ domaines univalents $\underline{\Delta}_j\ (j=1,\cdots,m)$:

$$(\underline{\Delta}_j) \quad \rho_j < |x_j| < r_j, \ |x_i| < r_i \quad (i = 1, \cdots, j-1, j+1, \cdots, n),$$

considérons dans Δ, m domaines $\Delta_j = \pi^{-1}(\underline{\Delta}_j)$, π désignant l'opération de projection de Δ sur $\underline{\Delta}$.

Dans le mémoire précédent, [4], nous avons étudié quelques problèmes relatifs à un tel domaine Δ, sourtout les problèmes (A), (H), $(H_{\hat{\tau}})$ et $(H_{\hat{T}})$ concernant une triade des domaines Δ_1, Δ_2, Δ_3 expliqués ci-dessus (pour $m=3$). Le premier problème de Cousin a été traité dans le domaine $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3$.

Dans le présent mémoire, nous nous proposons de généraliser ces problèmes au cas de m domaines $\Delta_1, \cdots, \Delta_m$ $(3 \leqq m \leqq n)$. Les problèmes sont recoltés dans le § 1.

Dire que le problème (A) (n° 1) est affirmatif, c'ést équivalent à dire qu'on a, pour l'espace de cohomologie de dimension un,

$$H^1(\Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_m, \mathcal{O}) = 0,$$

$\mathcal{O}$ désignant le faisceau des germes de fonctions holomorphes, sur le domaine $\Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_m$.

Les problèmes qui correspondent aux problèmes (H) et (H_T^*) seront notés, dans ce mémoire, problèmes (H) et (H^*) respectivement. (Voir n° 2.)

Le théorème 1 (n° 3) montre l'équivalence des problèmes (A), (H), (H^*) et le premier problème de Cousin posé dans le domaine $\Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_m$.

On obtiendra dans le § 2, divers critères du problème (A) ou (H^*) [Théorèmes 4, 5, 5 bis et 6]. Surtout, le théorème 6 montre que la réponse au problème (A) ne dépend que de la variété double ordinaire T de la surface Σ de type (K) qui représente Δ.

§ 1. Problèmes

1. Problème (A). Soit $\underline{\Delta}$ un polycylindre dans l'espace de n $(n \geqq 3)$ variables complexes $(x_1, \cdots, x_n)$:

$$(\underline{\Delta}) \qquad |x_i| < r_i \quad (i = 1, \cdots, n),$$

et soit Δ' un domaine (connexe ou non) intérieurement ramifié, à ν feuillets, sur un voisinage $\underline{\Delta}'$ de la fermeture de $\underline{\Delta}$. En désignant par π l'opération de projection de Δ' sur $\underline{\Delta}'$, considérons le domaine intérieurement ramifié, à ν feuillets,

$$\Delta = \pi^{-1}(\underline{\Delta}).$$

Étant donnés m $(3 \leqq m \leqq n)$ domaines univalents $\underline{\Delta}_j$:

$$(\underline{\Delta}_j) \quad \rho_j < |x_j| < r_j, \ |x_i| < r_i \quad (i = 1, \cdots, n, i \neq j; j = 1, \cdots, m),$$

où ρ_j sont des nombres positifs ou nuls, considérons dans Δ, m domaines Δ_j:

$$\Delta_j = \pi^{-1}(\underline{\Delta}_j).$$

Pour abréger l'écriture, posons toujours

$$\Delta_{ij} = \Delta_i \cap \Delta_j, \ \Delta_{ijk} = \Delta_i \cap \Delta_j \cap \Delta_k \quad (i, j, k = 1, \cdots, m).$$

Dans ces conditions, posons le problème suivant :

Étant données des fonctions $g_{ij}(P)$ holomorphes dans Δ_{ij} telles que l'on ait dans Δ_{ijk}

$$g_{ij}+g_{jk}+g_{ki} = 0 \quad (i, j, k = 1, \cdots, m),$$

trouver m fonctions $h_j(P)$ holomorphes dans Δ_j, de façon que l'on ait dans Δ_{ij}

$$g_{ij} = h_i - h_j \quad (i, j = 1, \cdots, m).$$

Si ce problème est résoluble pour tout système $\{g_{ij}\}$, nous dirons que *le problème $(A)_\Delta$* [ou simplement *le problème (A)*][1] est affirmatif.

Lorsque le domaine Δ est univalent, le problème (A) est affirmatif, d'après l'unicité du développement de Laurent.

Comme d'habitude, on voit aisément que[2], *si le problème (A) est affirmatif, le premier problème de Cousin est résoluble dans $\Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_m$.*

On a immédiatement le lemme suivant :

Lemme 1. *Soient $\Delta^{(k)}$ $(k=1,\cdots,p)$ les composantes connexes de Δ:*

$$\Delta = \Delta^{(1)} \cup \cdots \cup \Delta^{(p)}.$$

Pour que le problème $(A)_\Delta$ soit affirmatif, il faut et il suffit que tous les problèmes $(A)_{\Delta^{(k)}}$ $(k=1, \cdots, p)$[1] *soient affirmatifs.*

2. Problèmes (H) et (H^*). Considérons le problème suivant :

Soit S une surface caractéristique (connexe ou non) à $n-1$ dimensions dans Δ, définie comme les zéros d'une fonction holomorphe dans Δ, n'admettant que les zéros du premier ordre. Étant donnée sur S une fonction holomorphe $f(Q)$ (où S est regardée comme un espace analytique (connexe ou non)), *qui est, pour tout j $(j = 1, \cdots, m)$, sur $S \cap \Delta_j$ la restriction d'une fonction $F_j(P)$ holomorphe dans Δ_j:*

$$f(Q) = F_j(Q) \quad (Q \in S \cap \Delta_j\,;\ j = 1, \cdots, m),$$

trouver une fonction $F(P)$ holomorphe dans Δ, de façon que $f(Q)$ soit la restriction à S de $F(P)$:

---

1) Les domaines univalents Δ_j $(j=1, \cdots, m)$ restent toujours fixés.

2) Voir [4], n° 2.

$$f(Q) = F(Q) \quad (Q \in S).$$

Si ce problème est résoluble pour toute S et toute f, nous dirons que *le problème* $(H)_\Delta$ [où simplement *le problème* (H)][1] est affirmatif.

On verra aisément[3] que *le problème* (H) *est affirmatif, si le premier problème de Cousin est résoluble dans* $\Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_m$.

Maintenant, soit $\eta(P)$ une fonction holomorphe et bornée dans Δ, dont les éléments de fonction aux points distincts de Δ situés sur un même point de $\underline{\Delta}$ sont toujours différents[4]. Considérons, à l'espace $((x), y)$, une surface caractéristique Σ:

$$(\Sigma) \qquad\qquad y = \eta(P) \quad (P \in \Delta);$$

Σ est contenue dans un polycylindre $(\underline{\Delta}, C)$, C désignant un cercle $|y| < r$ sur le plan de y.

Tout point P de Δ, sauf les points P appartenant à une surface τ à $n-1$ dimensions dans Δ[5], correspond biunivoquement au point $(\underline{P}, \eta(P))$ de Σ. Notons σ la surface critique de Δ, et posons $\underline{\sigma} = \pi(\sigma)$, $\underline{\tau} = \pi(\tau)$ et $\hat{\tau} = \pi^{-1}(\underline{\tau})$.

Dans ce qui suit, l'opération de projection de Σ sur $\underline{\Delta}$ sera désignée par π_0.

Comme nous avons démontré dans [4], n° 9, on peut prendre pour $\eta(P)$ une fonction ayant *la propriété* (K) suivante:

1° Σ *n'a pas de variété singulière de dimension* $n-1$, *en dehors de l'image* T *de* τ *sur* Σ;

2° $\underline{\tau}$ *ne possède aucune composante commune avec* $\underline{\sigma}$;

3° τ *est un revêtement intérieurement ramifié de* $\underline{\tau}$, *à deux feuillets*; *autrement dit, l'image* $\hat{T}$ *de* $\hat{\tau}$ *sur* Σ (*dont on a* $\hat{T} = \pi_0^{-1}(\underline{T})$) *est un revêtement intérieurement ramifié de* $\underline{T}$, *à* $\nu-1$ *feuillets*;

4° *au point* M *de* T, *sauf aux points* M *appartenant à une sous-variété de dimension* $n-2$ *sur* T, *les plans tangents* (*à* n *dimensions*) *aux deux branches de* Σ *passant par* M *sont distincts.*

Nous dirons dans ce cas que la surface Σ est *de type* (K), et nous appelerons T *variété double ordinaire* de Σ.

---

3) Voir [4], n° 3 (au cas où $m=3$).
4) H. Grauert et R. Remmert, [1].
5) K. Oka, [3], n° 7.

Dans ces circonstances, considérons le problème suivant :

Étant donnée une fonction $f(M)$ holomorphe sur $\hat{T}$, qui est sur $\hat{T}\frown(\underline{\Delta}_j, C)$ la restriction d'une fonction $F_j((x), y)$ holomorphe dans $(\underline{\Delta}_j, C)$ $(j=1, \cdots, m)$, trouver une fonction $F((x), y)$ holomorphe dans $(\underline{\Delta}, C)$ telle qu'on ait sur $\hat{T}$

$$f = F .$$

Si ce problème est résoluble pour toute fonction $f(M)$, nous dirons que *le problème* $(H^*)_\Sigma$ [ou simplement *le problème* (H^*)][6] est affirmatif.

Le problème (H^*) étant posé seulement pour la variété $\hat{T}$ une fois fixée, il n'est qu'un cas particulier du problème (H)[7].

3. Equivalence des problèmes. On a le théorème suivant :

Théorème 1. *Les problèmes (A), (H), (H^*) et le premier problème de Cousin posé dans le domaine $\Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_m$ sont équivalents.*

Pour démontrer le théorème, il suffit, d'après ce que nous venons de voir jusqu'ici, de résoudre le problème (A) à condition que le problème (H^*) soit affirmatif. Mais, ceci est immédiat, car les démonstrations des théorèmes 2 et 2 bis du mémoire [4] s'appliquent mot à mot au cas actuel, en remplaçant seulement les trois domaines Δ_1, Δ_2, Δ_3 par les m domaines $\Delta_1, \cdots, \Delta_m$, et en appliquant le lemme 4 et le théorème 1 du même mémoire. c.q.f.d.

On a le corollaire suivant :

Corollaire 1. *Le problème (A) est affirmatif, si le domaine Δ se représente par une surface $\Sigma : y=\eta(P)$ $(P\in\Delta)$, n'admettant pas de variété singulière de dimension $n-1$.*

Ceci est évident, puisque, dans ce cas, le problème (H^*) est trivialement affirmatif.

En particulier, lorsque le domaine Δ admet deux feuillets, le problème (A) est toujours affirmatif. Dans ce cas, en effet, Δ peut se représenter par une surface de Riemann $\Sigma : y=\sqrt{\varphi(x_1, \cdots, x_n)}$,

---

6) Ce problème correspond au problème $(H_{\hat{T}})$ traité dans [4], n° 12. Les domaines univalents $\underline{\Delta}_j$ $(j=1, \cdots, m)$ restent toujours fixés.

7) Voir [4], n° 5. Le même raisonnement s'applique au cas actuel.

où φ est une fonction holomorphe dans $\underline{\Delta}$, sans facteur multiple ; alors, Σ n'a pas de variété singulière de dimension $n-1$.

Correspondant au lemme 1, on a encore le corollaire suivant :

Corollaire 2. *Soit* Σ : $y=\eta(P)$ $(P\in\Delta)$ *la surface caractéristique expliquée jusqu'ici, de type* (K), *et qui représente* Δ ; *et soient* $\Sigma^{(k)}$ $(k=1, \cdots, p)$ *les composantes connexes de* Σ :

$$\Sigma = \Sigma^{(1)}\cup \cdots \cup\Sigma^{(p)}.$$

Pour que le problème $(H^*)_\Sigma$ *soit affirmatif, il faut et il suffit que tous les problèmes* $(H^*)_{\Sigma^{(k)}}$ $(k=1, \cdots, p)$ *soient affirmatifs.*

4. Problèmes $(A)_{j_1,\cdots,j_m}$. Reprenons le domaine Δ intérieurement ramifié, à ν feuillets, sur le polycylindre $\underline{\Delta}$: $|x_i|<r_i$ $(i=1, \cdots, n)$, et considérons, à l'espace $((x), y)$, la surface Σ de type (K) qui représente Δ ; Σ est contenue dans un polycylindre $(\underline{\Delta}, C)$.

Soit T la variété double ordinaire de Σ. Posons $\underline{T}=\pi_0(T)$, $\hat{T}=\pi_0^{-1}(\underline{T})$.

Considérons, à l'espace $(x_1, \cdots, x_n)$, n domaines $\underline{\Delta}_j$:

$$(\underline{\Delta}_j)\quad \rho_j<|x_j|<r_j,\ |x_i|<r_i\quad (i=1,\cdots,j-1,j+1,\cdots,n\,;\,j=1,\cdots,n),$$

et posons $\Delta_j=\pi^{-1}(\underline{\Delta}_j)$ $(j=1, \cdots, n)$.

Soit m un entier tel que $3\leqq m\leqq n$. Étant donnés m entiers $j_1, \cdots, j_m$ tels que $1\leqq j_k\leqq n$ $(k=1, \cdots, m)$, considérons le problème (A) pour une combinaison des m domaines $\Delta_{j_1}, \cdots, \Delta_{j_m}$, et notons-le *problème* $(A)_{j_1,\cdots,j_m}$. De même, notons *problème* $(H^*)_{j_1,\cdots,j_m}$ le problème (H^*) posé sur $\hat{T}$ pour la combinaison $\{\Delta_{j_1}, \cdots, \Delta_{j_m}\}$.

On a facilement le théorème suivant :

Théorème 2. *Si le problème* $(A)_{j_1,\cdots,j_m}$ *est affirmatif, tous les problèmes* $(A)_{j_1,\cdots,j_m,j_{m+1},\cdots,j_{m+p}}$ *le sont aussi* $(3\leqq m<m+p\leqq n)$.

En effet, puisque les problèmes (A) et (H^*) sont équivalents mutuellement, il suffit pour nous de démontrer que :

Si le problème $(H^*)_{j_1,\cdots,j_m}$ est affirmatif, tous les problèmes $(H^*)_{j_1,\cdots,j_m,j_{m+1},\cdots,j_{m+p}}$ le sont aussi.

Mais, ceci est évident, car la condition du problème $(H^*)_{j_1,\cdots,j_m,j_{m+1},\cdots,j_{m+p}}$ entraîne trivialement la condition du problème $(H^*)_{j_1,\cdots,j_m}$. c.q.f.d.

Maintenant, pour un entier m $(3 \leqq m \leqq n-1)$, désignons par $\underline{\delta}_{j_1,\cdots,j_m}$ le polycylindre :

$$|x_j| \leqq \rho_j \quad (j=j_1, \cdots, j_m), \qquad |x_i| < r_i \quad (i = 1, \cdots, n).$$

On a le théorème suivant :

Théorème 3. *Si le domaine $\underline{\Delta}_{j_{m+1}}$ ne contient pas de point de $\underline{T} \cap \underline{\delta}_{j_1,\cdots,j_m}$, les problèmes $(A)_{j_1,\cdots,j_m}$ et $(A)_{j_1,\cdots,j_m,j_{m+1}}$ sont équivalents* $(3 \leqq m \leqq n-1)$.

En effet, il suffit de démontrer, sous la même condition que du théorème, que, si le problème $(H^*)_{1,\cdots,m,m+1}$ est affirmatif, le problème $(H^*)_{1,\cdots,m}$ l'est aussi.

Soit $f(M)$ une fonction holomorphe sur $\hat{T}$. Supposons que $f(M)$ soit sur $\hat{T} \cap (\underline{\Delta}_j, C)$ la restriction d'une fonction $F_j((x), y)$ holomorphe dans $(\underline{\Delta}_j, C)$:

$$f = F_j \quad (j = 1, \cdots, m).$$

En prenant un point quelconque M de $\hat{T} \cap (\underline{\Delta}_{m+1}, C)$, soient (x) les coordonnées de $\underline{M} = \pi_0(M)$, qui appartient à $\underline{T} \cap \underline{\Delta}_{m+1}$. Puisqu'on peut trouver, par hypothèse, au moins un indice j $(1 \leqq j \leqq m)$ tel que l'on ait

$$|x_j| > \rho_j,$$

$\underline{M}$ appartient à $\underline{T} \cap \underline{\Delta}_j$, et donc, M appartient à $\hat{T} \cap (\underline{\Delta}_j, C)$.

Par suite, f est la restriction à $\hat{T}$ de la fonction F_j, au voisinage du point M. D'après le théorème de K. Oka[8], il existe une fonction $F_{m+1}((x), y)$ holomorphe dans $(\underline{\Delta}_{m+1}, C)$ telle que l'on ait sur $\hat{T} \cap (\underline{\Delta}_{m+1}, C)$

$$f = F_{m+1}.$$

Or, le problème $(H^*)_{1,\cdots,m,m+1}$ étant, par hypothèse, résoluble, il existe une fonction $F((x), y)$ holomorphe dans $(\underline{\Delta}, C)$ telle que l'on ait sur $\hat{T} \cap (\underline{\Delta}, C)$

$$f = F;$$

8) K. Oka, [2], Théorème II. Il s'applique aussi au cas actuel.

ce qui montre que le problème $(H^*)_{1,\cdots,m}$ est résolu affirmativement.

c.q.f.d.

De ce théorème, on obtient aussitôt le corollaire suivant :

Corollaire du théorème 3. *Lorsque* $\rho_k=0$ $(k=1,\cdots,n)$, *supposons que, pour un indice* j, *la droite* L_j: $x_k=0$ $(k=1,\cdots,j-1, j+1,\cdots,n)$ *ne rencontre* $\underline{T}$ *qu'à l'origine*; *alors, les problèmes* $(A)_{1,\cdots,j-1,j+1,\cdots,n}$ *et* $(A)_{1,\cdots,n}$ *sont équivalents.*

§ 2. Critères pour les problèmes

5. Un critère pour le problème (H^*). Reprenons la fonction $\eta(P)$ ayant la propriété (K) dans Δ, et considérons la surface $\Sigma: y=\eta(P)$, de type (K). Σ est exprimée par une équation de degré ν en y:

$$\Phi((x), y) = y^\nu + A_1(x)y^{\nu-1} + \cdots + A_\nu(x) = 0\,,$$

$A_j(x)$ étant des fonctions holomorphes dans $\underline{\Delta}$.

Soit T la variété double ordinaire de Σ. Posons $\hat{T}=\pi_0^{-1}(\underline{T})$; $\hat{T}$ est un revêtement intérieurement ramifié (connexe ou non) de $\underline{T}$, à $\nu-1$ feuillets, et T est un revêtement univalent de $\underline{T}$.

T s'exprime sur $\underline{T}$ comme

$$(T) \qquad y = \omega(\underline{M}) \quad (\underline{M}\in \underline{T}),$$

où ω est une fonction uniforme et holomorphe sur $\underline{T}$, $\underline{T}$ étant considérée comme un espace analytique.

Soient $M_1,\cdots,M_{\nu-1}$ les points de $\hat{T}$ situés sur un même point $\underline{M}$ de $\underline{T}$, et $(\underline{M}, \eta_j(\underline{M}))$ $(j=1,\cdots,\nu-1)$ leurs coordonnées.

Comme nous avons vu dans [4], n° 11, le produit

$$U(\underline{M}, y) = \prod_{j=1}^{\nu-1}[y-\eta_j(\underline{M})]$$

s'écrit

$$U(\underline{M}, y) = y^{\nu-1} + \alpha_1(\underline{M})y^{\nu-2} + \cdots + \alpha_{\nu-1}(\underline{M})\,,$$

où $\alpha_j(\underline{M})$ sont des fonctions holomorphes sur $\underline{T}$. La variété $\hat{T}$ s'exprime alors sur $\underline{T}$ par une équation

$$(\hat{T}) \qquad U(\underline{M}, y) = 0 \quad (\underline{M}\in \underline{T}).$$

Comme on a identiquement sur $(\underline{T}, C)$

$$\Phi((x), y) = [y-\omega(\underline{M})]U(\underline{M}, y),$$

on a sur $\underline{T}$, en posant identiquement $\alpha_0(\underline{M})=1$ et $\alpha_\nu(\underline{M})=0$,

$$A_j(x) = \alpha_j(\underline{M})-\alpha_{j-1}(\underline{M})\omega(\underline{M}) \quad (j = 1, \cdots, \nu);$$

d'où on obtient sur $\underline{T}$, en posant $A_0(x)\equiv 1$,

$$(1) \qquad \alpha_j = \sum_{k=0}^{j} A_{j-k}\omega^k \quad (j = 1, \cdots, \nu-1).$$

Soit maintenant $\mathcal{O}$ l'anneau des fonctions holomorphes dans $\underline{\Delta}$. En posant $\mu=\nu-1$, considérons un système $(\beta_1, \cdots, \beta_\mu)$ de μ fonctions $\beta_1(\underline{M}), \cdots, \beta_\mu(\underline{M})$ holomorphes sur $\underline{T}$. L'ensemble $\mathfrak{A}$ de tels systèmes (β) forme un module sur $\mathcal{O}$.

Étant donné un domaine univalent $\underline{\mathfrak{D}}$ contenu dans $\underline{\Delta}$, nous dirons qu'un élément $(\beta_1, \cdots, \beta_\mu)$ de $\mathfrak{A}$ est *de type* $(\mathcal{X})$ *par rapport à* $\underline{\mathfrak{D}}$, s'il existe $\mu+1$ $(=\nu)$ fonctions $b_0(x), b_1(x), \cdots, b_\mu(x)$ holomorphes dans $\underline{\mathfrak{D}}$ telles qu'on ait sur $\underline{T}\cap\underline{\mathfrak{D}}$

$$\beta_j = b_j-b_0\alpha_j \quad (j = 1, \cdots, \mu)^{9)}.$$

L'ensemble des systèmes de type $(\mathcal{X})$ par rapport à $\underline{\mathfrak{D}}$ forme évidemment un sous-module $\mathfrak{B}(\underline{\mathfrak{D}})$ de $\mathfrak{A}$.

Avec ces terminologies, le théorème 4 du mémoire précédent [4], s'énonce comme il suit :

Pour qu'une fonction $f(M)$ donnée et holomorphe sur $\hat{T}$ soit restriction d'une fonction holomorphe dans $(\underline{\Delta}, C)$, il faut et il suffit qu'il existe (de façon unique) un système $(\beta_1, \cdots, \beta_\mu)$ de type $(\mathcal{X})$ par rapport à $\underline{\Delta}$ tel que l'on ait sur $\hat{T}$

$$f = \beta_1 y^{\mu-1}+\beta_2 y^{\mu-2}+\cdots+\beta_\mu.$$

Par le même raisonnement que du théorème 5, [4], on voit facilement que :

Pour qu'une fonction $f(M)$ holomorphe sur $\hat{T}$ soit, pour $j=1, \cdots, m$, sur $\hat{T}\cap(\underline{\Delta}_j, C)$ la restriction d'une fonction holomorphe dans $(\underline{\Delta}_j, C)$, il faut et il suffit qu'il existe un système $(\beta_1, \cdots, \beta_\mu)$ qui est de type $(\mathcal{X})$, à la fois par rapport à $\underline{\Delta}_1, \cdots, \underline{\Delta}_m$, de façon que l'on ait sur $\hat{T}$

9) Cette expression de (β) n'est pas unique.

$$f = \beta_1 y^{\mu-1} + \beta_2 y^{\mu-2} + \cdots + \beta_\mu .$$

Ensuite, correspondant au théorème 5, [4], on obtient un critère du problème (H^*) comme suit :

Théorème 4. *Pour que le problème* (H^*) *soit affirmatif, il faut et il suffit que tout système* $(\beta_1, \cdots, \beta_\mu)$ *de type* $(\mathfrak{X})$ *à la fois par rapport à* $\underline{\Delta}_1, \cdots, \underline{\Delta}_m$*, soit aussi de type* $(\mathfrak{X})$ *par rapport à* $\underline{\Delta}$ *; autrement dit, qu'on ait*

$$\mathfrak{B}(\underline{\Delta}_1) \cap \cdots \cap \mathfrak{B}(\underline{\Delta}_m) = \mathfrak{B}(\underline{\Delta}) .$$

6. Deuxième critère. Pour obtenir un autre critère plus maniable, nous allons chercher d'associer au système (β) de type $(\mathfrak{X})$ un autre système de type plus simple que de type $(\mathfrak{X})$.

1° Nous dirons qu'un élément $(\beta_1^*, \cdots, \beta_\mu^*)$ de $\mathfrak{A}$ est *de type* $(\mathfrak{X}^*)$ *par rapport à* $\underline{\mathfrak{D}}$, s'il existe $\mu+1$ $(=\nu)$ fonctions $B_0(x), \cdots, B_\mu(x)$ holomorphes dans $\underline{\mathfrak{D}}$ telles qu'on ait sur $\underline{T} \cap \underline{\mathfrak{D}}$

$$\beta^* = B_j - B_0 \omega^j \ (j = 1, \cdots, \mu) .$$

L'ensemble des éléments (β^*) de type $(\mathfrak{X}^*)$ par rapport à $\mathfrak{D}$ forme un sous-module $\mathfrak{B}^*(\underline{\mathfrak{D}})$ de $\mathfrak{A}$.

On a le lemme suivant :

Lemme 2. *Il existe un automorphisme* ψ^* *de* $\mathfrak{A}$*, qui donne, quel que soit* $\underline{\mathfrak{D}}$*, un isomorphisme entre* $\mathfrak{B}^*(\underline{\mathfrak{D}})$ *et* $\mathfrak{B}(\underline{\mathfrak{D}})$.

En effet, à un élément quelconque (β^*) de $\mathfrak{A}$, associons un élément (β) de $\mathfrak{A}$, par les formules

$$\beta_j = \sum_{k=1}^{j} A_{j-k} \beta_k^* \quad (j = 1, \cdots, \mu) ,$$

$A_i(x) \in \mathcal{O}$ étant des coefficients de $\Phi((x), y)$, et $A_0(x) \equiv 1$, comme expliqué au n° précédent. C'est une application linéaire de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{A}$, et l'on obtient l'application réciproque par les formules

$$\beta_1^* = \beta_1 , \quad \beta_j^* = \beta_j - \sum_{k=1}^{j-1} A_{j-k} \beta_k^* \quad (j = 2, \cdots, \mu) ;$$

l'application $\psi^* : (\beta^*) \to (\beta)$ est donc un automorphisme de $\mathfrak{A}$.

Or, montrons que, si (β^*) est de type $(\mathfrak{X}^*)$ par rapport à $\underline{\mathfrak{D}}$, son image (β) est de type $(\mathfrak{X})$ par rapport à $\underline{\mathfrak{D}}$.

Supposons, en effet, qu'on ait sur $\underline{T}\cap\underline{\mathfrak{D}}$

$$\beta_k^* = B_k - B_0\omega^k \quad (k = 1, \cdots, \mu),$$

$B_0, \cdots, B_\mu$ étant holomorphes dans $\underline{\mathfrak{D}}$. Alors, on a sur $\underline{T}\cap\underline{\mathfrak{D}}$

$$\beta_j = \sum_{k=0}^{j} A_{j-k}(B_k - B_0\omega^k) = \sum_{k=0}^{j} A_{j-k}B_k - B_0\sum_{k=0}^{j} A_{j-k}\omega^k .$$

Donc, si on pose dans $\underline{\mathfrak{D}}$

$$b_j = \sum_{k=0}^{j} A_{j-k}B_k \quad (j = 0, 1, \cdots, \mu),$$

on obtient, d'après la relation (1) du n° précédent, sur $\underline{T}\cap\underline{\mathfrak{D}}$

$$\beta_j = b_j - b_0\alpha_j \quad (j = 1, \cdots, \mu);$$

ce qui montre que (β) est de type $(\mathcal{X})$ par rapport à $\underline{\mathfrak{D}}$.

Inversement, si (β) est de type $(\mathcal{X})$ par rapport à $\underline{\mathfrak{D}}$, son image réciproque (β^*) est de type $(\mathcal{X}^*)$ par rapport à $\underline{\mathfrak{D}}$.

Supposons, en effet, qu'on ait sur $\underline{T}\cap\underline{\mathfrak{D}}$

$$\beta_j = b_j - b_0\alpha_j \quad (j = 1, \cdots, \mu),$$

$b_0, \cdots, b_\mu$ étant holomorphes dans $\underline{\mathfrak{D}}$.

D'abord, pour $j=1$, on a sur $\underline{T}\cap\underline{\mathfrak{D}}$

$$\beta_1^* = \beta_1 = b_1 - b_0\alpha_1 ,$$

et, puisqu'on a $\alpha_1 = A_1 + \omega$, d'après (1) du n° précédent, on a sur $\underline{T}\cap\underline{\mathfrak{D}}$

$$\beta_1^* = (b_1 - b_0A_1) - b_0\omega .$$

Donc, si on pose dans $\underline{\mathfrak{D}}$

$$B_0 = b_0 \quad \text{et} \quad B_1 = b_1 - b_0A_1 ,$$

on a sur $\underline{T}\cap\underline{\mathfrak{D}}$

$$\beta_1^* = B_1 - B_0\omega .$$

Supposons ensuite que l'on ait, pour $k=1, \cdots, j-1$,

$$\beta_k^* = B_k - B_0\omega^k ,$$

$B_k(x)$ étant holomorphes dans $\underline{\mathfrak{D}}$. Alors, on a sur $\underline{T}\cap\underline{\mathfrak{D}}$

$$\beta_j^* = (b_j - b_0\alpha_j) - \sum_{k=0}^{j-1} A_{j-k}(B_k - B_0\omega^k)$$
$$= (b_j - \sum_{k=0}^{j-1} A_{j-k}B_k) - B_0(\alpha_j - \sum_{k=0}^{j-1} A_{j-k}\omega^k)\,.$$

Donc, si on pose dans $\underline{\mathfrak{D}}$

$$B_j = b_j - \sum_{k=0}^{j-1} A_{j-k}B_k\,,$$

on a, d'après (1) du n° précédent, sur $\underline{T} \cap \underline{\mathfrak{D}}$

$$\beta_j^* = B_j - B_0\omega^j\,;$$

ce qui montre que (β^*) est de type (X^*) par rapport à $\underline{\mathfrak{D}}$, par récurrence sur j.

Par suite, l'automorphisme ψ^* de $\mathfrak{A}$ donne un isomorphisme entre $\mathfrak{B}^*(\underline{\mathfrak{D}})$ et $\mathfrak{B}(\underline{\mathfrak{D}})$, quel que soit $\underline{\mathfrak{D}} \subset \underline{\Delta}$. c.q.f.d.

De ce lemme et du théorème 4, on obtient le deuxième critère pour le problème (H^*):

Théorème 5. *Pour que le problème* (H^*) *soit affirmatif, il faut et il suffit qu'on ait*

$$\mathfrak{B}^*(\underline{\Delta}_1) \cap \cdots \cap \mathfrak{B}^*(\underline{\Delta}_m) = \mathfrak{B}^*(\underline{\Delta})\,;$$

autrement dit, que tout système $(\beta_1^*, \cdots, \beta_\mu^*)$ *à la fois de type* (X^*) *par rapport à* $\underline{\Delta}_1, \cdots, \underline{\Delta}_m$ *soit aussi de type* (X^*) *par rapport à* $\underline{\Delta}$.

2°. Nous dirons qu'un élément $(\beta_1, \cdots, \beta_\mu)$ de $\mathfrak{A}$ est *de type* (X^{**}) *par rapport à* $\underline{\mathfrak{D}}$, s'il existe $\mu+1$ $(=\nu)$ fonctions $B_0(x), \cdots, B_\mu(x)$ holomorphes dans $\underline{\mathfrak{D}}$ telles que l'on ait sur $\underline{T} \cap \underline{\mathfrak{D}}$

$$\beta_j = B_j - B_{j-1}\omega \quad (j = 1, \cdots, \mu)\,.$$

L'ensemble des éléments (β) de type (X^{**}) par rapport à $\underline{\mathfrak{D}}$ forme un sous-module $\mathfrak{B}^{**}(\underline{\mathfrak{D}})$ de $\mathfrak{A}$.

On a le lemme suivant:

Lemme 3. *Il existe un automorphisme* ψ^{**} *de* $\mathfrak{A}$, *qui donne, quel que soit* $\underline{\mathfrak{D}}$, *un isomorphisme entre* $\mathfrak{B}^{**}(\underline{\mathfrak{D}})$ *et* $\mathfrak{B}(\underline{\mathfrak{D}})$.

En effet, d'après le lemme 2, il suffit de démontrer qu'il existe un automorphisme ψ de $\mathfrak{A}$, qui donne, quel que soit $\underline{\mathfrak{D}}$, un isomorphisme entre $\mathfrak{B}^*(\underline{\mathfrak{D}})$ et $\mathfrak{B}^{**}(\underline{\mathfrak{D}})$.

Pour cela, associons à un élément quelconque (β^*) de $\mathfrak{A}$ un élément (β) de $\mathfrak{A}$, par les formules

$$\beta_1 = \beta_1^*,\ \beta_j = \beta_j^* - \beta_{j-1}^*\omega \quad (j = 2, \cdots, \mu).$$

Puisqu'on a l'application réciproque

$$\beta_1^* = \beta_1,\ \beta_j^* = \beta_j + \beta_{j-1}^*\omega \quad (j = 2, \cdots, \mu),$$

cette application linéaire $\psi : (\beta^*) \to (\beta)$ est un automorphisme de $\mathfrak{A}$.

Comme on voit aisément, l'image (β) de (β^*) est de type (X^{**}) par rapport à $\underline{\mathfrak{D}}$, si (β^*) est de type (X^*) par rapport à $\underline{\mathfrak{D}}$.

Inversement, si (β) est de type (X^{**}) par rapport à $\underline{\mathfrak{D}}$, son image réciproque (β^*) est de type (X^*) par rapport à $\underline{\mathfrak{D}}$.

En effet, d'abord pour $j=1$, on a sur $\underline{T} \frown \underline{\mathfrak{D}}$

$$\beta_1^* = B_1 - B_0\omega .$$

Supposons donc que l'on ait sur $\underline{T} \frown \underline{\mathfrak{D}}$

$$\beta_{j-1}^* = B_{j-1} - B_0\omega^{j-1} .$$

On a sur $\underline{T} \frown \underline{\mathfrak{D}}$

$$\beta_j^* = (B_j - B_{j-1}\omega) + (B_{j-1} - B_0\omega^{j-1})\omega = B_j - B_0\omega^j ;$$

ce qui montre que (β^*) est de type (X^*) par rapport à $\underline{\mathfrak{D}}$ par récurrence sur j.

Donc, l'automorphisme ψ donne un isomorphisme entre $\mathfrak{B}^*(\underline{\mathfrak{D}})$ et $\mathfrak{B}^{**}(\underline{\mathfrak{D}})$. Alors, $\psi^{**} = \psi^*\psi^{-1}$ est l'automorphisme voulu. c.q.f.d.

De ce lemme et du théorème 4, on a le théorème suivant, comme un critère aussi maniable que le théorème 5:

Théorème 5 bis. *Pour que le problème* (H^*) *soit affirmatif, il faut et il suffit que l'on ait*

$$\mathfrak{B}^{**}(\underline{\Delta}_1) \frown \cdots \frown \mathfrak{B}^{**}(\underline{\Delta}_m) = \mathfrak{B}^{**}(\underline{\Delta}) ;$$

autrement dit, que tout système $(\beta_1, \cdots, \beta_\mu)$ *à la fois de type* (X^{**}) *par rapport à* $\underline{\Delta}_1, \cdots, \underline{\Delta}_m$ *soit aussi de type* (X^{**}) *par rapport à* $\underline{\Delta}$.

7. Famille des surfaces ayant une même variété double ordinaire. Le problème (H^*) étant posé sur la variété $\hat{T} = \pi_0^{-1}(\underline{T})$: $U(\underline{M}, y) = 0$, l'énoncé du théorème 4 renferme en fait les coefficients $\alpha_j(\underline{M})$ de $U(\underline{M}, y)$ [d'après la définition de type (X)]. Par contre, l'énoncé du théorème 5 ne renferme que $\underline{T}$, $\omega(\underline{M})$ et ν ; autrement dit, il ne dépend que de la variété double ordinaire T et que du nombre de feuillets ν de Σ. Ce théorème admettra de plus une application à la famille des surfaces Σ (à un nombre *quelconque* de feuillets) ayant la même variété double ordinaire T.

Reprenons, à l'espace $(x_1, \cdots, x_n)$, le polycylindre $\underline{\Delta}$:

$$(\underline{\Delta}) \qquad |x_i| < r_i \quad (i = 1, \cdots, n),$$

et m $(3 \leqq m \leqq n)$ domaines univalents $\underline{\Delta}_j$ $(j = 1, \cdots, m)$:

$$(\underline{\Delta}_j) \quad \rho_j < |x_j| < r_j, \quad |x_i| < r_i \quad (i = 1, \cdots, j-1, j+1, \cdots, m).$$

Soit $\underline{T}$ une surface caractéristique (à $n-1$ dimensions) dans $\underline{\Delta}$, et $\omega(\underline{M})$ une fonction uniforme, bornée et holomorphe sur $\underline{T}$, et soit à l'espace $((x), y)$, T une variété analytique de dimension $n-1$, définie par :

$$(T) \qquad y = \omega(\underline{M}) \quad (\underline{M} \in \underline{T}).$$

Étant donné un domaine intérieurement ramifié Δ sur $\underline{\Delta}$, à un nombre *quelconque* de feuillets, prenons une fonction $\eta(P)$ holomorphe et bornée dans Δ, et ayant la propriété (K) ; le domaine Δ est représenté par la surface caractéristique Σ de type (K) :

$$(\Sigma) \qquad y = \eta(P) \quad (P \in \Delta).$$

Supposons que cette surface Σ ait la variété donnée T pour sa variété double ordinaire, sans avoir aucune singularité de dimension $n-1$ en dehors de T ; et désignons par $\mathfrak{F}_T$ la famille de tels domaines Δ intérieurement ramifiés sur le même polycylindre $\underline{\Delta}$.

Dans ces conditions, on a finalement le théorème suivant :

Théorème 6. *Si on s'est donné une variété analytique T de dimension $n-1$ comme expliqué ci-dessus, et si le problème (A) est affirmaitif pour l'un des domaines appartenant à $\mathfrak{F}_T$, il en est de même pour tous les domaines appartenant à $\mathfrak{F}_T$; autrement dit, le problème (A) est ou bien affirmatif pour tous les domaines appartenant à $\mathfrak{F}_T$, ou bien toujours négatif.*

Prenons, en effet, deux domaines Δ et Δ' appartenant à $\mathfrak{F}_T$, à ν, ν' feuillets respectivement. Soient $\Sigma : y = \eta(P)\ (P \in \Delta)$ et $\Sigma' : y =$

$\eta'(P')$ $(P' \in \Delta')$ deux surfaces caractéristiques de type (K) ayant T pour variété double ordinaire, sans singularité de dimension $n-1$ en dehors de T, et qui représentent Δ, Δ' respectivement.

D'abord, lorsqu'on a $\nu=\nu'$, on constate aisément, d'après le théorème 5, que:

si l'un des problèmes $(A)_\Delta$ et $(A)_{\Delta'}$ [ou l'un des problèmes $(H^*)_\Sigma$ et $(H^*)_{\Sigma'}$] est affirmatif, il en est de même de l'autre.

Maintenant, supposons qu'on ait $\nu'<\nu$. Prenons $\nu-\nu'$ nombres complexes distincts c_j $(j=1, \cdots, \nu-\nu')$, plus grands que la borne supérieure de $|\eta'(P')|$ dans Δ' et considérons, à l'espace $((x), y)$, $\nu-\nu'$ plans Σ_j $(j=1, \cdots, \nu-\nu')$, de dimension n, définis par:

$$(\Sigma_j) \qquad\qquad y = c_j .$$

Alors, la surface $\Sigma''=\Sigma' \cup \Sigma_1 \cup \cdots \cup \Sigma_{\nu-\nu'}$ admet la variété donnée T pour variété double ordinaire, sans avoir aucune singularité de dimension $n-1$ en dehors de T. En considérant Σ'' comme un domaine intérieurement ramifié sur $\underline{\Delta}$, notons-le Δ''; Δ'' appartient à $\mathfrak{F}_T$, et admet ν feuillets.

Donc, si l'un des problèmes $(A)_\Delta$ et $(A)_{\Delta''}$ est affirmatif, il en est de même de l'autre comme on le voit plus haut.

Mais, d'après le lemme 1, on sait bien que, pour que le problème $(A)_{\Delta''}$ soit affirmatif, il faut et il suffit que le problème $(A)_{\Delta'}$ soit affirmatif; donc, il en résulte que, si l'un des problèmes $(A)_\Delta$ et $(A)_{\Delta'}$ est affirmatif, il en est de même de l'autre; d'où l'énoncé du théorème 6.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Grauert et R. Remmert, Komplexe Räume, Math. Annalen 136 (1958).

[2] K. Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. VII-Sur quelques notions arithmétiques. Bull. Soc. Math. de France 78 (1950).

[3] K. Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. VIII-Lemme fondamental. Journ. Math. Soc. Japan 3 (1951).

[4] H. Onishi, Quelques propriétés locales des domaines intérieurement ramifiés, Journ. Math. Kyoto Univ. 3 (1964).