J. Math. Kyoto Univ.
4-3 (1965) 627-635.

Sur les suites de surfaces analytiques

Par

Osamu FUJITA

(Communiqué par Prof. Kobori le 10 avril, 1965)

Introduction. En 1962, Oka a indiqué une restricton intéressante, à laquelle sont soumises les aires de surfaces analytiques.(1)

Dans le Mémoire d'Oka, les problèmes sont traités dans l'espace de deux variables complexes. Dans le présent Mémoire, nous verrons que le lemme et le théorème d'Oka subsistent pour l'espace d'un nombre quelconque de variables complexes. (Voir Lemme au N° 2 et Théorème au N° 3).

1. Dans l'espace (x) de n variables complexes, considérons un domaine univalent fini D. Soit S une surface analytique dans D, et soit M_0 un point de S. Supposons qu'au voisinage de M_0, on pusisse représenter le point $M(x)$ de S par

$$x_j=f_j(t_1, t_2, \cdots, t_m) \quad (j=1, 2, \cdots, n;\ m=n-1),$$

où $f_j(t)$ sont les fonctions holomorphes de m variables complexes $t_1, t_2, \cdots, t_m$ pour $|t_1|<1$, $|t_2|<1$, $\cdots$, $|t_m|<1$. Il s'agit de l'élément de volume (de dimension 2m) de la surface S.

Exprimons les parties réelles et imaginaires de x_j et de t_k, comme ce qui suit

$$x_j=\xi_{2j-1}+i\xi_{2j},\ t_k=\tau_{2k-1}+i\tau_{2k}$$

$(j=1, 2, \cdots, n;\ k=1, 2, \cdots, m)$, i étant l'unité imaginaire. Soit $\underline{S_j}$ la projection de la surface S sur l'espace $(x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_n)$, j étant quelconque. Dans l'espace cartésien à 2m dimensions réelles

---

1) Oka [1] p. 11 Lemme et Théorème.

$(\xi_1, \cdots, \xi_{2j-2}, \xi_{2j+1}, \cdots, \xi_{2n})$, l'élément de volume de $\underline{S}_j$ est donné par

$$dv_j = \frac{D(\xi_1, \cdots, \xi_{2j-2}, \xi_{2j+1}, \cdots, \xi_{2n})}{D(\tau_1, \tau_2, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \tau_{2m})} d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_{2m},$$

ce qui, en vertu de la condition de Cauchy-Riemann, se réduit à

$$dv_j = \left| \frac{D(x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_n)}{D(t_1, t_2, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, t_m)} \right|^2 d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_{2m}.$$

Considérons la somme

$$\sum_{j=1}^{n} \left| \frac{D(x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_n)}{D(t_1, t_2, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, t_m)} \right|^2 = \det(X^* X),$$

où X est la matrice $\left(\frac{\partial x_k}{\partial t_l}\right)$ $(k=1, 2, \cdots, n;\ l=1, 2, \cdots, m)$ à n lignes et m colonnes, et $X^* = (y_{kl})$ est la matrice à m lignes et n colonnes dont les éléments sont donnés par la formule

$$y_{kl} = \frac{\overline{\partial x_l}}{\partial t_k} \quad (k=1, 2, \cdots, m;\ l=1, 2, \cdots, n),$$

$\frac{\overline{\partial x_l}}{\partial t_k}$ étant la valeur conjuguée de $\frac{\partial x_l}{\partial t_k}$. La valeur de la somme ci-dessus est invariante par toute transformation linéaire de l'espace (x) de la forme

$$x'_k - x^0_k = \sum a_{kl}(x_l - x^0_l) \quad (k, l = 1, 2, \cdots, n),$$

a_{kl} étant des constantes, qui conserve la distance (euclidienne).[2] Donc, l'élément de volume de S dans l'espace cartésien à 2n dimensions réelles $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{2n})$ sera donné par

$$\begin{aligned} dv &= \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{D(x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_n)}{D(t_1, t_2, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, t_m)} \right|^2 d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_{2m} \\ &= \sum_{j=1}^{n} dv_j. \end{aligned}$$

Nous voyons donc que *le volume de la surface analytique S s'exprime par la somme de ceux des projections sur les espaces* $(x_1, \cdots, x_{j-1},$

2) "Rotation de l'espace (x) autour d'un point (x°)" d'après Oka. La matrice $A = (a_{kl})$ d'ordre n est unitaire; c'est-à-dire $A^* A = E$, où E est la matrice-unité.

$x_{j+1}, \cdots, x_n)(j=1, 2, \cdots n)$.[3]

2. Soit (C) un cercle sur le plan complexe x, et soit (Γ) un cercle à l'intérieur de (C). Soient (C'), (C'') deux cercles concentriques sur le plan complexe y, dont (C'') est intérieur. Nous désignerons la couronne comprise entre les circonférences par $(C''$, $C')$. Soit S une surface analytique dans le dicylindre $[(C), (C')]$ (d'un seul tenant ou non), telle que l'aire A' de la portion de S dans $[(C), (C'', C')] \leqq \Omega$ et qu'il en soit de même pour l'aire A'' de la projection de la portion $S \cap [(\Gamma), (C')]$ sur le plan x (en tenant compte de la multiplicité). Soit Δ un domaine à l'intérieur de $[(C)$, $(C')]$. Alors, *grâce à Oka, l'aire A de la portion de S dans Δ est bornée de telle manière qu'elle soit $\leqq K\Omega$, où K est une constante positive indépendante de S et de Ω.*[4] En particulier, $A \leqq K(A'+A'')$.

Nous allons étandre ce lemme d'abord pour l'espace de trois variables complexes x_1, x_2, x_3. Soient (C_j) $(j=1, 2)$ des cercles respectivemet sur les plans x_j et soient (Γ_j) $(j=1, 2)$ des cercles respectivement à l'intérieur de (C_j). Soient (C_3), (C_3^0) deux cercles concentriques sur le plan x_3, dont (C_3^0) est intérieur. Soit S une surface analytique dans le polycylindre $(C)=[(C_1), (C_2), (C_3)]$ (d'un seul tenant ou non), telle que le volume V' de la portion $S \cap [(C_1), (C_2), (C_3^0, C_3)]$ soit $\leqq \Omega$ et qu'il en soit de même pour le volume V'' de la projection de la portion $S \cap [(\Gamma_1), (\Gamma_2), (C_3)]$ sur l'espace (x_1, x_2) (en tenant compte de la multiplicité). Soit (C') $=[(C_1'), (C_2'), (C_3')]$ un polycylindre à l'intérieur (C). Il s'agit de montrer qu'il existe une constante positive K indépendante de S et de Ω telle que le volume V de la portion $S \cap (C')$ soit $\leqq K\Omega$.

1° Supposons pour la simplicité que toute intersection de S et un ensemble analytique de la forme $x_j=a_j$, $x_k=a_k$ soit au plus de dimension 0, où j, k sont des nombres entières $1 \leqq j < k \leqq 3$, mais

3) C'est une généralisation du résultat d'Oka [1] p. 2.

4) Cette proposition est légèrement différente de celle d'Oka [1], précisément-dit, elle est plus générale que celle d'Oka. Mais, d'après le mode de raisonnement d'Oka, on peut trouver facilement qu'elle reste valable.

d'ailleurs quelconques et a_j, a_k sont des nombres complexes quelconques. Soit $\boldsymbol{R}'_1$ la surface de Riemann (connexe ou non) sur l'espace (x_2, x_3), correspondant à la portion de S dans (C'), et soient $\boldsymbol{R}'_2$, $\boldsymbol{R}'_3$ celles sur les espaces (x_1, x_3), (x_1, x_2) respectivement. Soient W_j $(j=1, 2, 3)$ les volumes de $\boldsymbol{R}'_j$ respectivement. Alors, d'après ce que nous avons vu au N° 1,

$$(1) \qquad V = W_1 + W_2 + W_3.$$

Evaluons d'abord le volume

$$(2) \qquad W_3 = \int_{\boldsymbol{R}'_3} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4 = \int_{(C'_1)} d\xi_1 d\xi_2 \int_{\boldsymbol{R}'_3(x_1)} d\xi_3 d\xi_4,$$

où $x_j = \xi_{2j-1} + i\xi_{2j}$ et $\boldsymbol{R}'_3(a)$ est la section de $\boldsymbol{R}'_3$ par le plan analytique $x_1 = a$. Soit $S(a)$ $(a \in (C_1)$ la section de la surface analytique S par le plan analytique $x_1 = a$. Alors sa projection $\underline{S(a)}$ sur l'espace (x_2, x_3) est une surface analytique dans le polycylindre $[(C_2), (C_3)]$. $\int_{\boldsymbol{R}'_3(x_1)} d\xi_3 d\xi_4$ étant l'aire de la projection de la portion $\underline{S(x_1)} \cap [(C''_2), (C'_3)]$ sur le plan x_2, on a

$$(3) \qquad \int_{\boldsymbol{R}'_3(x_1)} d\xi_3 d\xi_4 \leqq A(x_1),$$

où $A(x_1)$ est l'aire de $\underline{S(x_1)} \cap [(C'_2), (C'_3)]$.

Soit (C''_3) un cercle concentrique à (C_3) sur le plan x_3, contenu à l'intérieur de (C_3) et contenant les cercles (C'_3), (C^0_3) avec leurs frontières. $\underline{S(x_1)}$ étant une surface analytique dans $[(C_2), (C_3)]$, on a d'après le lemme d'Oka,

$$(4) \qquad A(x_1) \leqq k[A'(x_1) + A''(x_1)],$$

où $A'(x_1)$ est l'aire de $\underline{S(x_1)} \cap [(C_2), (C^0_3, C''_3)]$, $A''(x_1)$ est l'aire de la projection de $\underline{S(x_1)} \cap [(\Gamma_2), (C''_3)]$ sur le plan x_2 et k est une constante positive indépendante de $\underline{S(x_1)}$.

Les formules (2), (3), (4) entraînent

$$(5) \qquad W_3 \leqq k\left[\int_{(C'_1)} A'(x_1) d\xi_1 d\xi_2 + \int_{(C'_1)} A''(x_1) d\xi_1 d\xi_2\right].$$

$\int_{(C_1')} A'(x_1)d\xi_1 d\xi_2$ étant la somme des volumes des projecttions de $S\cap[(C_1'), (C_2), (C_3^0, C_3'')]$ sur les espaces (x_1, x_2) et (x_1, x_3), on a

$$(6)\qquad \int_{(C_1')} A'(x_1)d\xi_1 d\xi_2 \leqq V'.$$

De l'autre côté,

$$\int_{(C_1')} A''(x_1)d\xi_1 d\xi_2 = \int_{\boldsymbol{R}_3''} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4 = W_3',$$

où $\boldsymbol{R}_3''$ est la surface de Riemann sur l'espace (x_1, x_2) correspondant à la portion $S\cap[(C_1'), (\Gamma_2), (C_3'')]$. Puisque

$$W_3' = \int_{(\Gamma_2)} d\xi_3\, d\xi_4 \int_{\boldsymbol{R}_3''(x_2)} d\xi_1 d\xi_2,$$

$\boldsymbol{R}_3''(a)$ étant la section de $\boldsymbol{R}_3''$ par le plan analytique $x_2=a$, on voit que

$$W_3' \leqq k'\left[V' + \int_{(\Gamma_2)} B''(x_2)d\xi_3\, d\xi_4\right],$$

où $\int_{(\Gamma_2)} B''(x_2)d\xi_3 d\xi_4$ est le volume de la projection de $S\cap[(\Gamma_1), (\Gamma_2), (C_3)]$ sur l'espace (x_1, x_2) et k' est une constante positive indépendante de S. Donc

$$(7)\qquad W_3' \leqq k'(V'+V'').$$

D'après les formules (5), (6), (7), on arrive à

$$(8)\qquad W_3 \leqq K_3(V'+V''),$$

K_3 étant une constante positive indépendant de S.

Quant à W_1, ècrivons d'abord

$$W_1 = \int_{\boldsymbol{R}_1'} d\xi_3 d\xi_4 d\xi_5 d\xi_6 = \int_{(C_2')} d\xi_3\, d\xi_4 \int_{\boldsymbol{R}_1'(x_2)} d\xi_5 d\xi_6,$$

où $\boldsymbol{R}_1'(a)$ est la section de $\boldsymbol{R}_1'$ par le plan analytique $x_2=a$. Soit $S(a)$ $(a\in(C_2))$ la section de S par le plan analytique $x_2=a$. Alors sa projection $\underline{S(a)}$ sur l'espace (x_1, x_3) est une surface analytique dans $[(C_1), (C_3)]$. $\int_{\boldsymbol{R}_1'(x_2)} d\xi_5 d\xi_6$ étant l'aire de la projection de $\underline{S(x_2)}\cap[(C_1'), (C_2')]$ sur le plan x_3, on a

$$\int_{R_1'(x_2)} d\xi_5 d\xi_6 \leqq A(x_2),$$

où $A(x_2)$ est l'aire de $\underline{S(x_2)} \cap [(C_1'), (C_3')]$. Nous avons donc, tout pareillement au cas de W_3,

$$(9) \qquad W_1 \leqq K_1(V' + V''),$$

K_1 étant indépendante de S.

Il en est de même pour W_2, c'est-à-dire

$$(10) \qquad W_2 \leqq K_2(V' + V''),$$

où K_2 est indépendante de S.

D'après les formules (1), (8), (9), (10), on obtient finalement

$$(11) \qquad V \leqq K_4(V' + V''),$$

où $K_4 = K_1 + K_2 + K_3$ est une constante positive indépendant de S.

2° Dans le cas générale, grâce à Grauert, il existe une transformation linéaire non-singulière de l'espace (x)

$$(T) \qquad y_j = \sum_{k=1}^{3} a_{jk} x_k \quad (j = 1, 2, 3),$$

tell que toute intersection de S et un ensemble analytique de la forme $y_j = b_j$, $y_k = b_k$ soit au plus de dimension 0, où j, k sont des nombres entières $1 \leqq j < k \leqq 3$, mais d'ailleurs quelconques et b_j, b_k sont des nombres complexes quelconques.[5] De plus, il existe une telle transformation satisfaisant aux conditions suivante:

$$|a_{jj} - 1| < \delta, \quad |a_{jk}| < \delta \quad (j \neq k, j, k = 1, 2, 3),$$

δ étant un nombre positif dont nous expliquerons plus tart.

Si (C_j) $(j = 1, 2, 3)$ sont respectivement les cercles $|x_j - a_j| < R_j$ sur les plans x_j, nous désignerons les cercles $|y_j - a_j| < R_j$ sur les plans y_j aussi par (C_j). Il en sera de même pour les cercles (C_j'), (Γ_j), (C_3^0) et pour les polylindres (C), (C'). Soient $(\tilde{C}_j)$ $(j = 1, 2)$ des cercles respectivement sur les plans y_j contenus à l'intérieur de (C_j) et contenant les cercles (Γ_j), (C_j') avec leurs frontières, et soit

5) Voir: Grauert [2] p. 249 Satz 9. Nishino [3] p. 382 Théorème I.

$(\tilde{C}_3)$ un cercle sur le plan y_3 contenu à l'intérieur de (C_3) et contenant les cercles (C_3^0), (C_3') avec leurs frontières. Posons $(\tilde{C}) = [(\tilde{C}_1), (\tilde{C}_2), (\tilde{C}_3)]$. Étant donné un nombre positif quelconque ε, choisissons δ suffisamment petit pour que les conditions suivantes soient remplies.

(i) Dans l'espace (y) l'ensemble $T(S) \cap (\tilde{C}) = \tilde{S}$ est une surface analytique dans $(\tilde{C})$, $T(S)$ étant l'image de S dans l'espace (y).

(ii) Le volume $\tilde{V}'$ de $\tilde{S} \cap [(\tilde{C}_1), (\tilde{C}_2), (C_3^0, \tilde{C}_3)]$ dans l'espace (y) est plus petit que $\Omega+\varepsilon$, et il en est de même pour le volume $\tilde{V}''$ de la projection de $\tilde{S} \cap [(\Gamma_1), (\Gamma_2), (\tilde{C}_3)]$ sur l'espace (y_1, y_2).

(iii) Le volume $\tilde{V}$ de $\tilde{S} \cap (C')$ dans l'espace (y) est plus grand que $V-\varepsilon$, V étant le volume de $S \cap (C')$ dans l'espace (x).

D'après ce que nous avons vu au 1°, nous avons

$$\tilde{V} \leqq \tilde{K}_4(\tilde{V}' + \tilde{V}''),$$

$\tilde{K}_4$ étant une constante positive indépendante de S. D'après les conditions (ii), (iii), on a

$$V-\varepsilon < 2\tilde{K}_4(\Omega+\varepsilon).$$

$\varepsilon > 0$ étant quelconque, nous avons donc

$$V \leqq K\Omega,$$

où $K = 2\tilde{K}_4$ est une constante positive indépendant de S et de Ω.

En raisonnant tout pareillement, on peut établir le lemme suivant:

Lemme. *Soient (C_j) $(j=1, 2, \cdots, n-1)$ des cercles respectivement sur les plans complexes x_j et soient (Γ_j) $(j=1, 2, \cdots, n-1)$ des cercles respectivement à l'intérieur de (C_j). Soient (C_n), (C_n^0) deux cercles concentriques sur le plan complexe x_n, dont (C_n^0) est intérieur. Soit S une surface analytique dans le polycylindre $(C) = [(C_1), (C_2), \cdots, (C_n)]$ (d'un seul tenant ou non), telle que le volume de la portions $S \cap [(C_1), \cdots, (C_{n-1}), (C_n^0, C_n)]$ soit $\leqq \Omega$ et qu'il en soit de même pour le volume de la projection de $S \cap [(\Gamma_1), \cdots, (\Gamma_{n-1}), (C_n)]$ sur l'espace $(x_1, \cdots, x_{n-1})$ (en tenant compte* *de la multiplicité). Le volume de S est alors borné à l'intérieur de (C) de telle manière qu'il soit* $\leqq K\Omega$, *K étant une constante positive indépendante de S et de* Ω.

3. Considérons dans l'espace de n variables complexes x_1, x_2, $\cdots$, x_n un domaine univalent D, que nous supposons fini pour simplifier le langage. Considérons dans D une suite de surfaces analytiques

$$(1)\qquad S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots,$$

et une suite de nombres positifs

$$(2)\qquad \nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n, \cdots.$$

La suite (2) est quelconque, mais nous la regardons pour être non borné en général.

Pour ces suites (1), (2), nous distinguons deux espèces de points dans D:

1° Soit P_0 un point de D. S'il existe un polyindre (γ) de centre P_0 tel que, ω_n étant le volume (de dimension $2n-2$) de S dans (γ), la suite

$$\frac{\omega_1}{\nu_1}, \frac{\omega_2}{\nu_2}, \cdots, \frac{\omega_n}{\nu_u}, \cdots,$$

soit bornée, nous dirons que P_0 *est de première espèce.*

2° S'il n'existe aucun polycylindre (γ) jouissant de la propriété précédente, nous dirons que P_0 *est de deuxième espèce.*

Soit D' un domaine (connexe ou non) contenu dans D. Si, pour tout point frontière M de D' contenu dans D, il existe un polycylindre (γ) de centre M tel que $(\gamma)\cap D'$ soit pseudoconvexe, nous dirons que *D' est pseudoconvexe dans D.* Soit E un ensemble des points de D. *Si* l'ensemble E est fermé à l'intérieur de D, et si l'ensemble $D-E$ est pesudoconvexe dans D, nous dirons que *l'ensemble E est pseudoconcave dans D.*

Alors, *d'après le lemme*, nous verrons facilement que:

Théorème. *L'ensemble des points de première espèce est pseudoconvexe dans le domaine D. En d'autres termes, l'ensemble des points de deuxième espèce est pseudoconcave dans D.*[6]

Université féminine de Nara

BIBLIOGRAPHIE

[1] K. Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables X-Une mode nouvelle engendrant les domaines pseudocovexes, Japan J. Math., 32 (1962), 1-12.
[2] H. Grauert, Charakterisierung der holomorph vollständigen komplexen Räume, Math Ann., 129 (1955), 233-259.
[3] T. Nishino, Les ensembles analytiques et les domaines, J. Math. Kyoto Univ., 1 (1962). 379-384.

6) Sa démonstration est tout pareille à celle d'Oka [1].