J. Math. Kyoto Univ.
10-1 (1970) 83-102

Domaine d'holomorphie sur un espace projectif complexe

par

Etuko HIRAI

(Reçu le 22 Août, 1969)

Introduction

Le but du mémoire actuel est de chercher quelques propriétés élémentaires des domaines d'holomorphie sur l'espace projectif complexe $\boldsymbol{P}^n$.

Dans le champ de l'espace euclidien $\boldsymbol{C}^n$, on a établi, grâce aux Hartogs[1], Cartan-Thullen[2] et Oka[3], les théorèmes fondamentaux comme ce qui suit: Tout domaine d'holomorphie sur $\boldsymbol{C}^n$ est toujours pseudoconvexe; il est aussi holomorphiquement convexe; la réciproque est vraie pour tous les deux. Dans un domaine d'holomorphie dans $\boldsymbol{C}^n$, on peut toujours résoudre le premier problème de Cousin et il en est ainsi pour le deuxième problème de Cousin sous certaines conditions topologiques. Enfin, pour toute fonction holomorphe $f(p)$ dans un domaine d'holomorphie D, on peut trouver une branche univalente sur E d'une fonction algébrique $\varphi(p)$ telle que l'on ait $|f-\varphi|<\varepsilon$ en E, où E est un ensemble compact donné arbitrairement dans D et ε est un nombre positif quelconque.

Dans le champ de l'espace projectif $\boldsymbol{P}^n$, il n'y a rien de nouveau,

---

1) F. Hartogs: Einige Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformal bei Funktionen mehrerer Veränderlichen. Münch. Berichte, 1906.

2) H. Cartan und P. Thullen: Zur Theorie der Singularitäten der Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen. Regularitäts-und Konvergenzbereich. Math. Annalen, 1932.

3) K. Oka: Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables.
II. Domaine d'holomorphie.
III. Deuxième problème de Cousin.
V. L'integrale de Cauchy.
Iwanami Shoten 1961.

quant au théorème de Hartogs et aux premier et deuxième problèmes de Cousin. Mais il n'en est pas ainsi pour les autres problèmes. Nous traiterons, dans la suite, le problème holomorphiquement convexe et celui d'approximation, puisque le problème inverse de Hartogs a été déjà résolu par Fujita[4] et Takeuchi[5].

Ce mémoire consiste en deux parties. Dans la première partie, nous montrerons que tout domaine d'holomorphie D sur l'espace projectif $\boldsymbol{P}^n$ est aussi holomorphiquement convexe. Ceci a été déjà obtenu par Fujita et Takeuchi, puisque un tel domaine est toujours pseudoconvexe. Nous rétablirons ce théorème directement, au cas du domaine n'ayant qu'un nombre fini de feuillets, au moyen d'une fonction dont le domaine d'holomorphie sur $\boldsymbol{P}^n$ est justment égal au domaine en question. Dans la deuxième partie, on traitera le problème d'approximation. Je dit ici que, pour toute fonction holomorphe $f(p)$ dans un domaine d'holomorphie D sur $\boldsymbol{P}^n$, on peut aussi trouver une fonction algébrique $\varphi(p)$ admettant une branche φ^0, univalente sur E, de φ, telle que l'on ait $|f-\varphi^0|<\varepsilon$ en E, où E est un ensemble compact donné arbitrairement dans D et ε est un nombre positif quelconque, pourvu qu'il existe au moins une surface algébrique S qui se trouve en dehors de E. Malheureusement, je ne sait pas si la dernière hypothèse imposée à D est indispensable.

Première Partie. Domaine d'holomorphie sur $\boldsymbol{P}^n$.

1. Fonction holomorphe sur $\boldsymbol{P}^n$. Considérons un espace projectif complexe à n dimensions ayant $(\omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_n)$ pour un système de coordonnées homogènes. Posons

$$x_i=\frac{a_{i0}\,\omega_0+a_{i1}\,\omega_1+\cdots+a_{in}\,\omega_n}{a_{00}\,\omega_0+a_{01}\,\omega_1+\cdots+a_{0n}\,\omega_n}\quad (i=1, \cdots, n),$$

où a_{ij} sont des nombres complexes quelconques tels que l'on ait

4) R. Fujita: Domaines sans point critique intérieur sur l'espace projectif complexe. J. Math. Soc. Japan, **15** (1963), 443-473.

5) A. Takeuchi: Domaines pseudoconvexes infinis et la métrique riemannienne dans un espace projectif. J. Math. Soc. Japan, **16** (1964), 159-181.

$$|a_{ij}| \neq 0 \quad (i, j=0, 1, \cdots, n).$$

Alors $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est un système de coordonnées inhomogènes de $\boldsymbol{P}^n$.

Un point $p=(\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n)$ de $\boldsymbol{P}^n$ sera appelé *point à distance finie* ou *point à l'infini par rapport à un système de coordonnées inhomogènes* $(x_1, \cdots, x_n)$ suivant que l'on a $a_{00}\xi_0+a_{01}\xi_1+\cdots+a_{0n}\xi_n \neq 0$ ou non.

Soit D[1] un domaine multivalent sans point critique intérieur sur $\boldsymbol{P}^n$; c'est-à-dire, D est une variété analytique ayant une transformation analytique, que l'on désigne dans toute la suite par π, de D dans $\boldsymbol{P}^n$ qui est homéomorphe localement. Pour un point p de D, le point $\pi(p)$ dans $\boldsymbol{P}^n$ est appelé *projection du point* p, et exprimé par $\underline{p}$ pour simplifier l'écriture. Un point p de D sera dit point à l'infini par rapport à (x) s'il en est ainsi pour $\underline{p}$, où (x) est un système de coordonnées inhomogènes.

Il s'ensuit que, pour tout point p de D, on peut toujours prendre un système de coordonnées inhomogènes par rapport auquel p est à distance finie. Un tel système est alors un système de coordonnées locales autour de p.

Une fonction continue et uniforme à valeurs complexes $f(p)$ définie dans un domaine D est dite *holomorphe* dans D si, pour tout point p de D, $f(p)$ est holomorphe par rapport à un système de coordonnées locales en p. En ce moment, on peut considérer des points frontières de D et la prolongement analytique de la fonction holomorphe $f(p)$ au delà d'un point frontière de D, puisque D s'étale sur $\boldsymbol{P}^n$.

On dit qu'un domaine D sur $\boldsymbol{P}^n$ est *domaine d'holomorphie* s'il y a au moins une fonction holomorphe dans D telle qu'elle possède toujours des éléments de Taylor différents en deux points distincts, mais ayant mêmes coordonnées de D et que l'on ne puisse la prolonger analytiquement au delà d'aucun point frontière de D.

---

1) Dans ce mémoire, nous nous restreindrons à considérer des domaine sur $\boldsymbol{P}^n$ n'ayant pas de point critique intérieur.

Comme on sait bien, on peut toujours dire, grâce à Hartogs[2], que *tout domaine d'holomorphie ayant au moins un point frontière sur* $\boldsymbol{P}^n$ *est pseudoconvexe.*[3]

Considérons un domaine D sur $\boldsymbol{P}^n$ et une fonction holomorphe $f(p)$ dans D. Prenons un système de coordonnées inhomogènes quelconque $(x_1, \cdots, x_n)$ de $\boldsymbol{P}^n$. Alors, on peut considérer des dérivées partielles de f par rapport aux (x)

$$\frac{\partial^{i_1+i_2+\cdots+i_n}}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\cdots\partial x_n^{i_n}} f$$

en tout point p de D à distance finie par rapport à (x), où i_m $(m=1, \cdots, n)$ sont des nombres entiers non négatifs.

Nous allons ici indiquer que toute dérivée partielle de f comme ci-dessus peut être prolongée analytiquement à tout point à l'infini par rapport à (x) dans D. Ecrivons

$$x_i = \frac{\alpha_{i0}\omega_0 + \alpha_{i1}\omega_1 + \cdots + \alpha_{in}\omega_n}{\alpha_{00}\omega_0 + \alpha_{01}\omega_1 + \cdots + \alpha_{0n}\omega_n} \qquad \text{où} \quad |\alpha_{ij}| \neq 0$$

et soit p_0 un point à l'infini par rapport à (x) de D, c'est-à-dire

$$\alpha_{00}\xi_0 + \alpha_{01}\xi_1 + \cdots + \alpha_{0n}\xi_n = 0$$

où $\underline{p}_0 = (\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n)$.

On peut ici supposer, sans restreindre la généralité, que

$$\alpha_{10}\xi_0 + \alpha_{11}\xi_1 + \cdots + \alpha_{1n}\xi_n \neq 0.$$

Considérons un autre système de coordnnées inhomogènes (x') défini par

$$x_1' = \frac{\alpha_{00}\omega_0 + \alpha_{01}\omega_1 + \cdots + \alpha_{0n}\omega_n}{\alpha_{10}\omega_0 + \alpha_{11}\omega_1 + \cdots + \alpha_{1n}\omega_n}$$

---

2) Voir p. 83.

3) Oka: Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. IX. Domaines finis sans point critique intérieur. Iwanami Shoten 1961. p. 175.

$$x'_i = \frac{\alpha_{i0}\,\omega_0 + \alpha_{i1}\,\omega_1 + \cdots + \alpha_{in}\,\omega_n}{\alpha_{10}\,\omega_0 + \alpha_{11}\,\omega_1 + \cdots + \alpha_{1n}\,\omega_n} \quad (i=2, \cdots, n),$$

tel que p_0 devienne un point à distance finie par rapport à (x'), et que $x_1^{0\prime}, \cdots, x_n^{0\prime}$ étant les coordonnées de p_0, on ait $x_1^{0\prime}=0$.

En ce moment, on aura facilement

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -\frac{\partial f}{\partial x'_1}\,x_1'^2 - \frac{\partial f}{\partial x'_2}\,x'_1\,x'_2 - \cdots - \frac{\partial f}{\partial x'_n}\,x'_1\,x'_n$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{\partial f}{\partial x'_i}\,x'_1 \quad (i=2, \cdots, n),$$

en tout point de D, à distance finie par rapport à (x) et à (x') à la fois. Ceci signifie évidemment que les premiers membres des équations ci-dessus peuvent se prolonger analytiquement, d'après le théorème de Riemann, en tout point de D où $\alpha_{00}\,\omega_0 + \alpha_{01}\,\omega_1 + \cdots + \alpha_{0n}\,\omega_n = 0$, donc en particulier en p_0, puisqu'en tout tel point, on a $x'_1=0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ sont finies. D'ailleurs, tous s'annulent en p_0.

On voit par récurrence que toutes les dérivées partielles de f ont mêmes propriétés. Nous appellerons désormais ces fonctions ainsi prolongées analytiquement dérivées partielles de f par rapport à (x). On a donc le lemme suivant.

Lemme 1. *Soit D un domaine multivalent sans point critique intérieur sur $\boldsymbol{P}^n$. Toutes les dérivées partielles d'une fonction holomorphe dans D par rapport à un système de coordonnées inhomogènes quelconque (x) sont aussi holomorphes dans D et elles prennent la valeur nulle en tout point de D à l'infini par rapport à (x), s'il existe.*

2. Distance à la frontière. Le but des sections successives est de généraliser du théorème bien connu dû à Cartan-Thullen aux domaines sur $\boldsymbol{P}^n$. Pour cela, introduisons la notion de distance à la frontière d'un domaine D sur $\boldsymbol{P}^n$.

Fixons, d'abord, $n+1$ systèmes de coordonnées inhomogènes particulières $(x_1^\mu, \cdots, x_n^\mu)\,(\mu=0, 1, \cdots, n)$ définis par

$$x_1^\mu=\frac{\omega_0}{\omega_\mu},\ \cdots,\ x_\mu^\mu=\frac{\omega_{\mu-1}}{\omega_\mu},\ x_{\mu+1}^\mu=\frac{\omega_{\mu+1}}{\omega_\mu},\ \cdots,\ x_n^\mu=\frac{\omega_n}{\omega_\mu}.$$

Pour un point à distance finie p_0 par rapport à (x^μ) de $\boldsymbol{P}^n$, on considérera un domaine $S_\mu(p_0, r)$ de $\boldsymbol{P}^n$ de la forme

$$|x_i^\mu-a_i^\mu|<r \quad (i=1, \cdots, n)$$

par rapport à (x^μ), où (a^μ) sont les coordonnées de p_0 par rapport à (x^μ).

Pour un point p_0 de $\boldsymbol{P}^n$, posons

$$S(p_0, r)=\bigcup_\mu S_\mu(p_0, r),$$

où μ sont des nombres ayant p_0 pour point à distance finie par rapport à (x^μ). Evidemment, *il est un ensemble ouvert et connexe et, si* $r_1<r_2$, *on a* $S(p_0, r_1)\subset S(p_0, r_2)$.

Soit donné un domaine D sur $\boldsymbol{P}^n$ et soit p un point de D. Soit r_0 la borne supérieur des nombres positifs r tels qu'il existe un voisinage de p dans D, que l'on désigne par $S^*(p, r)$, homéomorphe par π à $S(\underline{p}, r)$. On appellera r_0 *la distance de* p *à la frontière de* D et l'on la désigne par $r(D, p)$[1].

De la définition, on verra par un calcul facile[2] que

$r(D, p)$ *est une fonction continue,*[3] *positive et non nulle, de* p *définie dans* D.

Soit E un ensemble de points dans D tel que $\bar{E}$ soit compact dans D. Posons

$$r(D, E)=\inf_{p\in E} r(D, p).$$

1) On permet à $r(D, p)$ de prendre la valuer $+\infty$. Par exemple, soit D un ensemble de tous les points de $\boldsymbol{P}^n$ excepté la surface algébrique donnée par $\omega_0=0$ et soit p_0 un point ayant un système de coordonnées homogènes $(\alpha, 0, 0, \cdots, 0)$ $(\alpha\neq 0)$.

2) R. Fujita, Voir p. 84.

3) Lorsque $r(D, p_0)=+\infty$, cela veut dire que, pour toute suite de points p_i de D tendant vers p_0, $r(D, p_i)$ tend toujours vers $+\infty$.

On l'appellera *la distance de E à la frontière de D. Elle est évidemment positive et non nulle.*

Posons, pour un nombre $\rho(0<\rho<r(D, E))$,

$$E^{(\rho)}=\bigcup_{p\in E} S^*(p, \rho).$$

Cet ensemble est évidemment un domaine situé à l'intérieur complet de D.

3. Théorème principal de H. Cartan. Soit D un domaine sur P^n et soit $\mathscr{F}$ une famille de fonctions holomorphes dans D. Nous dirons que $\mathscr{F}$ est *famille* ($\mathscr{F}$) *dans D*, si elle satisfait aux conditions suivantes; soit f une fonction quelconque de $\mathscr{F}$, alors

1°. Toutes les dérivées partielles de f par rapport à tous les systèmes de coordonnées inhomogènes (x^μ) définis dans la section précédent, appartiennent aussi à $\mathscr{F}$,

2°. Pour tout nombre complexe c et pour tout nombre entier positif k, cf^k appartient aussi à $\mathscr{F}$.

D'après la définition et d'après le lemme 1, l'ensemble de toutes les fonctions holomorphes dans D est certainement une famille ($\mathscr{F}$) dans D.

Théorème principal de H. Cartan. *Soit D un domaine sans point critique intérieur sur $\mathbf{P}^n$ et soit $\mathscr{F}$ une famille ($\mathscr{F}$) dans D. Considérons un ensemble compact E dans D et posons $r=r(D, E)$. Soit p_0 un point de D tel que l'on ait $|f(p_0)|\leqq\max_{p\in E}|f(p)|$ quelle que soit la fonction f appartenant à $\mathscr{F}$. Alors,*

1°. *Pour toute fonction f de $\mathscr{F}$, $f\pi^{-1}$ est holomorphe dans $S(\underline{p}_0, r)$,*

2°. *Pour tout nombre ρ avec $0<\rho<r$, l'inégalité suivante subsiste:*

$$\sup_{\underline{p}\in S(\underline{p}_0,\rho)} |f\pi^{-1}(\underline{p})|\leqq\sup_{p\in E^{(\rho)}} |f(p)|,$$

quelle que soit la fonction holomorphe f appartenant à $\mathscr{F}$.

En effet, prenant un système de coordonnées inhomogènes (x^μ), défini dans la section précédente, par rapport auquel p_0 est à distance finie, nous pouvons ramener le problème à celui dans l'espace euclidien.

Donc, du théorème de *Cartan et Thullen*,[1] on peut déduire que toute fonction holomorphe f appartenant à $\mathscr{F}$ est holomorphe dans $S_\mu(\underline{p}^0, r)$ et que l'on a

$$\sup_{S_\mu(\underline{p}_0, \rho)} |f\pi^{-1}(\underline{p})| \leqq \sup_{E_\mu^{(\rho)}} |f(p)| \leqq \sup_{E^{(\rho)}} |f(p)|,$$

puisque toutes les dérivées de f par rapport à (x^μ) $(\mu=0, 1, \cdots, n)$ appartiennent à $\mathscr{F}$, où $E_\mu^{(\rho)} = \bigcup_{p \in E} S_\mu(p, \rho)$.

Ceci signifie évidemment que théorème actuel est certainement vrai. C.Q.F.D.

D'après le théorème principal, on voit que, si D est un domaine d'holomorpie sur $\boldsymbol{P}^n$, alors, pour tout ensemble compact E dans D et pour tout point p_0 de D, il existe au moins une fonction holomorphe dans D telle que l'on ait

$$|f(p_0)| > \max_{p \in E} |f(p)|,$$

pourvu que $r(D, E) > r(D, p_0)$.

4. Domaine d'holomorphie. Soit D un domaine sur $\boldsymbol{P}^n$ et soit $\mathscr{F}$ une famille $(\mathscr{F})$ dans D. Nous dirons que le domaine D est *convexe par rapport à* $\mathscr{F}$, si, pour tout ensemble compact E dans D, l'ensemble, que l'on désigne dans toute la suite par $\hat{E}$, des points p_0 en lequels on a

$$|f(p_0)| \leqq \max_{p \in E} |f(p)|$$

pour toute f appartenant à $\mathscr{F}$ est aussi compact.

1) Cartan-Thullen. Voir p. 83.

Lorsque $\mathscr{F}$ est particulièrement un ensemble de toutes les fonctions holomorphes dans D, le domaine D convexe par rapport à $\mathscr{F}$ est dit *holomorphiquement convexe.*

Un domaine holomorphiquement convexe comme ci-dessus est dit *variété de Stein*, lorsque,[1] pour tout couple de points distincts p_1 et p_2 de D, il y a au moins une fonction f, holomorphe dans le domaine, telle que l'on ait $f(p_1) \neq f(p_2)$.

Soit V une variété de Stein et soit $\mathfrak{P}$ un ensemble compact dans V. On dit que $\mathfrak{P}$ est un polyèdre analytique, s'il satisfait aux conditions suivantes:

1°. Il est défini par un nombre fini d'inégalités

$$|f_j(p)| \leqq 1 \quad (j=1, \cdots, \nu)$$

avec des fonctions holomorphes f_j dans V,

2°. La correspondance entre les points de $\mathfrak{P}$ et les systèmes de valeurs $(f_1(p), \cdots, f_\nu(p))$ prises dans $\mathfrak{P}$ est biunivoque.

Théorème 1. *Tout domaine d'holomorphie D n'ayant qu'un nombre fini de feuillets et n'ayant aucun point critique intérieur sur $\boldsymbol{P}^n$ est une variété de Stein, pourvu qu'il y a au moins un point frontière.*

En effet, soit E un ensemble compact dans D et soit p_0 un point de D tel que $r(D, p_0) < r(D, E)$. D'après le théorème principal, on peut alors trouver une fonction holomorphe dans D telle que

$$|f(p_0)| > \max_{p \in E} |f(p)|.$$

Ceci signifie que nous avons $r(D, \hat{E}) = r(D, E)$.

Comme $\boldsymbol{P}^n$ est compact et D est un domaine n'ayant qu'un nombre fini de feuillets, E est un ensemble compact dans D. D est donc holomorphiquement convexe.

---

1) R. Remmert: Sur les espaces analytiques holomorphiquement séparables et holomorphiquement convexe. C. R. Paris 1956. 2 semestre tome 243, 1.

Prenons, ensuite, deux points distincts p_1 et p_2 de D, mais d'ailleurs quelconque. Si p_1 et p_2 ont mêmes coordonnées, prenons une fonction f, ayant D pour son domaine d'holomorphie, et prenons un système de coordonnées inhomogènes (x^μ) par rapport auquel p_1 et p_2 sont des points à distance finie.

Alors, parmi les dérivées partielles de f par rapport à (x^μ), nous pouvons trouver une fonction holomorphe $\varphi(p)$ dans D telle que $\varphi(p_1)\neq\varphi(p_2)$, puisque f a des éléments différents en p_1 et en p_2.

Au contraire, si p_1 et p_2 ont coordonnées différentes, prenons une fonction holomorphe non constante dans D et prenons un système de coordonnées inhomogènes (x) par rapport auquel p_1 est à distance finie mais p_2 est à l'infini.

Alors, nous aurons une fonction holomorphe $\varphi(p)$ dans D telle que $\varphi(p_1)\neq\varphi(p_2)$, puisque toutes les dérivées de f par rapport à (x) prennent la valeur nulle en p_1. C.Q.F.D.

Deuxième Partie. Problème d'approximation.

5. Domaines de la classe $(\mathfrak{G}_0)$ et ensembles de la classe $(\mathfrak{G}_1)$. Dans la première partie, on a vu que tout domaine d'holomorphie n'ayant qu'un nombre fini de feuillets sur $\boldsymbol{P}^n$ est une variété de Stein, pourvu qu'il y a au moins un point frontière. Par suite, tout énoncé établi à propos des variétés de Stein est aussi vrai pour un tel domaine.

Dans cette partie, nous traiterons dans le champ de l'espace le problème d'approximation d'une fonction holomorphe par une fonction algébrique, ce problème a été abordé par Oka dans le champ de l'espace euclidien.

Ici nous nous bornons à considérer des domaines univalents dans $\boldsymbol{P}^n$. Dans cette section, on préparera, d'abord, quelques notions et quelques lemmes préliminaires.

Soit $\Phi(\omega)$ un polynome homogènes de degré s de la forme

$$\Phi(\omega)=\sum_{i_0+i_1+\cdots+i_n=s} a_{i_0,i_1,\dots,i_n}\,\omega_0^{i_0}\omega_1^{i_1}\cdots\omega_n^{i_n}$$

où $(\omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_n)$ est un système de coordonnées homogènes et $a_{i_0,i_1,\dots,i_n}$ sont des nombres complexes quelconques. L'ensemble de tous les points (ω) de $\boldsymbol{P}^n$, où $\Phi(\omega)=0$, est dit *surface algébrique de degré s.*

Soient $\Phi(\omega)$ et $\Psi(\omega)$ deux polynomes homogènes de même degré s. Alors, le rapport $\Psi(\omega)/\Phi(\omega)$ définit une fonction méromorphe dans $\boldsymbol{P}^n$, c'est-à-dire une fonction rationnelle, à moins que $\Phi(\omega)$ ne s'annule identiquement. Elle est holomorphe en dehors de la surface algébrique donnée par $\Phi(\omega)=0$.

Considérons, ensuite, un espace produit de $\boldsymbol{P}^n(\omega)$ et de $\boldsymbol{C}^m(y)$ que l'on désigne par $\boldsymbol{P}^n\times\boldsymbol{C}^m$, où n et m sont des nombres entiers positifs quelconques. L'expression

$$F(\omega, y)=\sum_{i_1+\cdots+i_m=0}^{N}\alpha_{i_1,\dots,i_m}y_1^{i_1}\cdots y_m^{i_m},$$

où $y_1, \cdots, y_m$ sont les coordonnées de $\boldsymbol{C}^m$ et $\alpha_{i_1,\dots,i_m}(\omega)$ sont des fonction rationnelles, définit une fonction méromorphe dans tout l'espace $\boldsymbol{P}^n\times\boldsymbol{C}^m$. Considérons, enfin, la famille de toutes les fonctions méromorphes dans $\boldsymbol{P}^n\times\boldsymbol{C}^m$ de la forme ci-dessus et dénotons la *famille* $\mathfrak{G}$.

Au moyen de la famille $\mathfrak{G}$, nous introduisons, avec Oka, la notion d'enveloppe convexe extérieure par rapport à la famille $\mathfrak{G}$ d'un ensemble compact E donné arbitrairement dans $\boldsymbol{P}^n\times\boldsymbol{C}^m$.

Considérons, d'abord, un domaine $\mathfrak{P}$ dans l'espace produit $\boldsymbol{P}^n\times\boldsymbol{C}^m$ défini par les inégalités

$$|y_i|<r_i,\ \ |F_j(\omega, y)|<1\quad (i=1, \cdots, m,\ j=1, \cdots, \nu)$$

où r_i $(i=1, \cdots, m)$ sont des nombres positifs et F_j $(j=1, \cdots, \nu)$ sont des fonctions appartenant à la famille $\mathfrak{G}$. Nous supposons ici que les conditions suivantes sont remplies,

1°. Aucun des points d'indétermination de ces fonctions $F_j(j=1, \cdots, \nu)$ ne se trouve sur la frontière de $\mathfrak{P}$,

2°. La correspondance entre les points (p_0, y_0) de $\mathfrak{P}$ et les systèmes de valeurs $(F_1(p_0, y_0), \cdots, F_\nu(p_0, y_0)\ y_1^0, \cdots, y_m^0)$ prises dans $\mathfrak{P}$ est biunivoque.

Sous ces conditions, $\mathfrak{P}$ sera appelé *domaine de la classe* $(\mathfrak{G}_0)$. *Le domaine* $\mathfrak{P}$ *est certainement une variété de Stein.* Pour un point $p(\omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_n)$ quelconque de $\mathfrak{P}$, si $\omega_j \neq 0$, la correspondance entre les points de certain voisinage $U(p)$ de p et les systèmes de valeurs $(\omega_0 \omega_j^{s-1}/\Phi(\omega), \cdots, w_{j-1} w_j^{s-1}/\Phi(w), w_j^s/\Phi(\omega), w_{j+1} w_j^{s-1}/\Phi(w), \cdots, \omega_n \omega_j^{s-1}/\Phi(\omega), y_1, \cdots, y_m)$ prises dans $U(p)$ est biunivoque, où $\Phi(\omega)$ est le dénominateur d'un coefficient d'une fonction F_j, dont les coefficients ne sont pas tous constants et s est le degré de Φ.

Par suite, on peut développer une fonction holomorphe sur $\mathfrak{P}$ en série, dont les termes sont des polynomes en des fonctions de la famille $\mathfrak{G}$ et qui converge uniformément sur $\overline{\mathfrak{P}}$.

On dira ensuite qu'un ensemble compact E dans $\boldsymbol{P}^n \times \boldsymbol{C}^m$ est *ensemble de la classe* $(\mathfrak{G}_1)$, si l'on peut trouver une suite décroissante de domaines de la classe $(\mathfrak{G}_0)$ ayant E pour sa limite. En ce moment, lorsqu'on se donne un ensemble compact E dans $\boldsymbol{P}^n \times \boldsymbol{C}^m$, on peut voir facilement qu'il n'existe pas nécessairement un ensemble de la classe $(\mathfrak{G}_1)$ contenant E.

Pour qu'un tel ensemble existe, il faut et il suffit qu'il existe au moins une surface algébrique dans $\boldsymbol{P}^n$ qui ne recontre pas la projection $\underline{E}$ de E sur $\boldsymbol{P}^n$.

Soit E un ensemble compact dans $\boldsymbol{P}^n \times \boldsymbol{C}^m$. S'il y a au moins un ensemble G de la classe $(\mathfrak{G}_1)$ contenant E, nous pouvons considérer la partie commune $\hat{E}$ de tous les ensembles de la classe $(\mathfrak{G}_1)$ contenant E.

Le lemme suivant vous permet d'appeler $\hat{E}$ *le plus petit ensemble de la classe* $(\mathfrak{G}_1)$ *contenant* E.

Lemme 2. $\hat{E}$, *s'il existe, est aussi un ensemble de la classe* $(\mathfrak{G}_1)$.

En effet, $\hat{E}$ est nécessairement un ensemble compact. Pour établier le lemme, il reste à montrer que, pour tout voisinage V de $\hat{E}$, on peut trouver un domaine $\mathfrak{P}$ de la classe $(\mathfrak{G}_0)$, contenu dans V et contenant $\hat{E}$. Sans diminuer la généralité, on peut supposer que V est contenu dans $\boldsymbol{P}^n \times \Delta$, où Δ est un polycylindre compact dans $\boldsymbol{C}^m$ assez grand.

A chaque point Q de $(\boldsymbol{P}^n \times \Delta) - V$, il est facile d'associer un voisinage U_Q de Q et un domaine $\mathfrak{P}_Q$ de la classe $(\mathfrak{G}_0)$ contenant $\hat{E}$, de manière que U_Q ne rencontre pas $\mathfrak{P}_Q$. D'après le théorème de Borel-Lebesgue, en recouvrant $(\boldsymbol{P}^n \times \Delta) - V$ d'un nombre fini de U_Q, soient $U_{Q_1}, \cdots, U_{Q_q}$, on obtiendra un domaine demandé $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_{Q_1} \cap \cdots \cap \mathfrak{P}_{Q_q}$. Car, toute intersection finie de domaines de la classe $(\mathfrak{G}_0)$ est évidemment de la classe $(\mathfrak{G}_0)$, pourvu qu'elle ne soit pas vide. C.Q.F.D.

Lemme 3. *Soit E un ensemble compact dans $\boldsymbol{P}^n \times \boldsymbol{C}^m$, admettant le plus petit ensemble $\hat{E}$ de la classe $(\mathfrak{G}_1)$ contenant E. Alors, on ne peut jamais donner une famille $\{\sigma_t\}$ de la surfaces analytiques définies par l'équation*

$$\sigma_t : f(P, t) = 0 \quad P \in U,\ 0 \leqq t \leqq 1,$$

où U est un domaine dans $\boldsymbol{P}^n \times \boldsymbol{C}^m$, $f(P, t)$ est une fonction uniforme, continue sur $P \in \bar{U}$, $0 \leqq t \leqq 1$, holomorphe en tout point de l'ensemble et pour toute valeur t de l'intervalle, non identiquement nulle, de manière que

1°. *Pour toute surface de la famille, sa frontière reste à l'extérieur d'un certain voisinage V de $\hat{E}$,*

2°. *Aucune des surfaces de la famille ne rencontre pas E,*

3°. *La surface (σ_0) passe par un point de $\hat{E}$, tandis que (σ_1) reste à l'extérieur de V.*

Le lemme de la forme comme ci-dessus a été proposé pour la première fois par Oka,[1] en 1937 dans son deuxième mémoire dans le cas de l'espace euclidien. Comme on peut voire facilement, il n'y a aucune difficulte pour passer au cas de l'espace projectif. Car tout domaine de la classe $(\mathfrak{G}_0)$ est une variété de Stein. D'ailleures, tout premier probrème de Cousin peut être résolu dans une variété de Stein. Et, en outre, d'après ce que nous avons remarqué, toute fonction holomorphe dans un

---

1) Oka: Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, II. Domaine d'holomorphie. Iwanami Shoten 1961. p. 13.

domaine de la classe $(\mathfrak{G}_0)$ peut se développer en série de polynomes de fonctions de la famille $\mathfrak{G}$.

6. Généralisation d'un théorème d'Oka. Soit D un domaine d'holomorphie univalent dans $\boldsymbol{P}^n$, et soit $\mathfrak{P}$ un polyèdre analytique dans D défini par un système d'inégalités

$$|f_j(p)|\leqq 1 \quad (j=1, \cdots, m),$$

où $f_j(p)$ $(j=1, \cdots, m)$ sont des fonctions holomorphes dans D.

Considérons dans l'espace produit $\boldsymbol{P}^n\times\boldsymbol{C}^m$ un domaine fermé produit $\boldsymbol{P}^n\times\varDelta$, où $\varDelta$: $|y_j|\leqq 1$ $(j=1, \cdots, m)$, et formons dans $\boldsymbol{P}^n\times\varDelta$ l'ensemble analytique Σ donné par les équations

$$y_j=f_j(p) \quad p\in\mathfrak{P} \quad (j=1, \cdots, m).$$

Cela posé, on aura le

Théorème 1. *Σ est un ensemble de la classe $(\mathfrak{G}_1)$, pourvu qu'il existe au moins une surface algébrique S qui ne rencontre pas $\mathfrak{P}$ dans $\boldsymbol{P}^n$.*

Ceci est une généralisation du théorème 2 dans le mémoire d'Oka. Cette généralisation sera réalisée, comme ce qui suit, en vertu d'une idée due à Takeuchi,[1] qui l'a proposée dans son mémoire récent.

Remarquons d'abord que le domaine $G=\boldsymbol{P}^n-S$ est une variété de Stein, puisqu'il est un domaine d'holomorphie.

Par suite, comme on sait bien, il y a une fonction fortement[2] plur-

---

1) A. Takeuchi: Une remarque sur le deuxième Mémoire de M. K. Oka. J. Math. Kyoto Univ, **9**-1 (1969), 1-4.

2) Nous entendons ici par fonction fortement plurisousharmonique une fonction plurisousharmonique $\varphi(p)$ satisfaitsant à la condition suivante: pour tout point p_0 de G, on peut décrire un voisinage U assez petit et une famille $\{\sigma_t\}$ de surfaces analytiques

$$\sigma_t:\ g(p, t)=0 \quad p\in U,\ 0\leqq t\leqq 1,$$

où $g(p, t)$ est une fonction uniforme, continue sur $p\in\bar{U}$, $0\leqq t\leqq 1$, et holomorphe en tout point de l'ensemble, et pour tout t fixé, non identiquement nulle, de manière que isousharmonique $\varphi(p)$ dans G telle que, pour tout nombre réel α, l'ensemble G_α de tous les points p de G où $\varphi(p) \leqq \alpha$ soit compact.

Formons le plus petit ensemble $\mathfrak{A}$ de la classe $(\mathfrak{G}_1)$ contenant Σ. Il existe en vertu de l'hypothèse et il se trouve évidemment dans le domaine produit $G \times \Delta$. Nous allons maintenant démontrer le fait que $\Sigma = \mathfrak{A}$, ce qui achèverons manifestement la démonstration du théorème.

Pour cela, il suffira de montrer que, pour tout point $p = (\omega^0)$ dans P^n, on a $\Sigma_p = \mathfrak{A}_p$, où Σ_p et $\mathfrak{A}_p$ sont les sections de Σ et de $\mathfrak{A}$ par le plan analytique $(p) \times \boldsymbol{C}^m$ donné par $\omega_j = \omega_j^0$ $(j = 0, 1, \cdots, n)$, respectivement.

Supposons, pour le réduire à l'absurde, que l'on ait $\Sigma \neq \mathfrak{A}$. Alors on peut déterminer le plus petit nombre α_0 (pouvant être $-\infty$), tel qu'il n'y ait aucun point p de G en lequel $\varphi(p) > \alpha_0$ et $\Sigma_p \neq \mathfrak{A}_p$.

Sur la frontière de G_{α_0}, où φ est égale à α_0, il y a un point p_0, ou bien tel que l'on ait $\Sigma_{p_0} \neq \mathfrak{A}_{p_0}$ ou bien tel que l'on ait $\Sigma_{p_0} = \mathfrak{A}_{p_0}$ mais on puisse trouver une suite de points (p_i), tendent vers p_0, en lesquels $\varphi(p_i) < \alpha_0$ et $\Sigma_{p_i} \neq \mathfrak{A}_{p_i}$. Je dis ici que, dans ces deux cas tous deux, *la section Σ_{p_0} est non vide.*

En effet, supposons que Σ_{p_0} était vide. Dans le premier cas où $\Sigma_{p_0} \neq \mathfrak{A}_{p_0}$, $\mathfrak{A}_{p_0}$ ne serait pas vide. Il y aurait un voisinage u de p_0 tel que, pour tout point p de $\bar{u}$, Σ_p soit vide, puisque Σ est fermé. De la définition de α_0, si p est un point de $\bar{u}$ tel que $\varphi(p) > \alpha$, alors $\mathfrak{A}_p$ est vide. D'autre part, d'après ce que φ est fortement plurisousharmonique, on peut décrire dans u, u étant diminué convenablement si nécessaire, une famille de surfaces analytiques σ_t débordant continûment de p_0 en sens de φ.

$g(p, t) = 0$ étant l'équation qui définit cette famille-ci, considérons ensuite, dans le domaine produit U de u et du polycylindre $|y_j| < 2$ $(j = 1, \cdots, m)$ dans $\boldsymbol{C}^m$, la famille de surfaces analytiques σ'_t définie par

---

1°. σ_0 passe par p_0 et rest dans la portion donnée par $\varphi(p) > \varphi(p_0)$ toute excepté le point p_0,

2°. Tout $\sigma_t (t \neq 0)$ reste dans la portion donnée par $\varphi(p) > \varphi(p_0)$.

Dans ce mémoire, nous appelons désormais une telle famille de surfaces analytiques celle débordant continûment de p_0 en sens de φ.

la même équation $g(p, t)=0$.

σ_t' est alors le produit de σ_t et de ce polycylindre. D'après ce que nous avons dit jusqu'ici, nous voyons aisément que la famille (σ_t') jouirait des propriétés indiquées dans le lemme 3 à propos de Σ et de $\mathfrak{A}$. Or, $\mathfrak{A}$ étant le plus petit ensemble de la classe $(\mathfrak{G}_1)$ contenant Σ, on est arrivé à une contradiction.

Dans le deuxième cas où $\Sigma_{p_0}=\mathfrak{A}_{p_0}$, $\mathfrak{A}_{p_0}$ serait aussi vide. Comme $\mathfrak{A}$ est fermé, $\mathfrak{A}_{p_i}$ serait aussi vide pour p_i assez voisin de p_0. D'où, Σ_{p_i} serait vide, puisqu'on a toujours $\Sigma_p \subset \mathfrak{A}_p$. Ceci est en contradiction avec $\Sigma_{p_i} \neq \mathfrak{A}_{p_i}$. Donc, l'énoncé a été démontré: Σ_{p_0} n'est pas vide.

De cet énoncé, il suit que p_0 se trouve dans $\mathfrak{P}$. Décrivons à nouveau, un voisinage u de p_0 et une famille de surfaces analytiques σ_t au voisinage de $\bar{u}$, débordant continûment de p_0 en sens de φ. Soit $g(p, t)=0$ l'équation définissant la famille. Posons

$$\gamma=\min|g(p, t)|,$$

p parcourant l'ensemble des points sur la frontière de u en lesquels on a $\varphi(p) \leqq \alpha_0$ et t parcourant l'intervalle $0 \leqq t \leqq 1$. On a certainment $\gamma>0$. En suite, prenons un point p^* dans u et un nombre réel t^* avec $0 \leqq t^* \leqq 1$, de façon que l'on ait

(1) $\Sigma_{p^*} \neq \mathfrak{A}_{p^*}$ et

(2) $0<|g(p^*, t^*)|<\gamma$.

Ceci est certainement possible.

Car, ou bien on a $\Sigma_{p_0} \neq \mathfrak{A}_{p_0}$ ou bien p_0 est limite d'une suite de points p_i tels que $\Sigma_{p_i} \neq \mathfrak{A}_{p_i}$; et, en outre, on a $\varphi(p)>\alpha_0$ quel que soit le point p sur σ_t pour $0<t \leqq 1$.

Soit (p^*, y^*) un point de $\mathfrak{A}_{p^*}$ qui n'appartient pas à Σ_{p^*}. Alors, parmi les f_j, il y a au moins une f_j telle que

$$\delta=y_j^*-f_j(p^*) \neq 0.$$

Enfin, prenons une valeur réelle α_1 avec $\alpha_1>\alpha_0$ telle que $g(p, t^*)$ ne prenne jamais la valeur nulle sur l'ensemble des points p dans $\bar{u}$ en lesquels on a $\varphi(p) \leqq \alpha_1$ et désignons par u_1 l'intersection de u et du domaine $\varphi(p) < \alpha_1$.

Cela posé, considérons dans le produit du domaine u_1 et de l'espace $\boldsymbol{C}^m$, la famille de surfaces analytiques σ'_t, paramétrée par $t \geqq 1$ et définie par l'équation

$$y_j - f_j(p) - \delta t(g(p, t^*)/g(p^*, t^*))^l = 0,$$

où l est un entier positif qui sera déterminé plus tard.

Nous allons montrer que, l étant déterminé convenablement, cette famille-ci (σ'_t) jouit des propriétés indiquées dans le lemme 3. On voit premièrement que toute surface σ'_t de la famille ne passe par aucun point de Σ, puisque $g(p, t^*)$ ne s'annule jamais dans u_1. Deuxièmement en vertu de la forme de l'équation définissant σ'_1, la surface σ'_1 passe actuellement par le point (p^*, y^*) de $\mathfrak{A}$. Mais, comme le coefficient de t dans l'équation ne s'annule jamais pour $p \in u_1$ et pour $t \geqq 1$, σ'_t ne passe par aucun point de $\mathfrak{A}$ dès que t surpasse ou est égal à un certaine nombre positif t_1 assez grand.

Enfin, prenons le nombre entier positif l assez grand pour que, pour tout point p sur la forontière de u_1 avec $\varphi(p) \leqq \alpha_0$ et pour tout nombre réel t avec $t \geqq 1$, on ait

$$|f_j(p) + \delta t(g(p, t^*)/g(p^*, t^*))^l| > 2.$$

Alors, V étant l'intersection d'un voisinage de $\mathfrak{A}$ qui ne rencontre aucun de σ'_t pour $t \geqq t_0$ et du domaine produit de G et du polycylindre $|y_k| < 2$ $(k=1, \cdots, m)$, on verra troisièmement qu'aucun des points frontières des σ'_t pour $1 \leqq t \leqq t_0$ ne se trouve dans V. Car, tout point frontière de σ'_t se trouve sur l'ensemble produit de la frontière de u_1 et de $\boldsymbol{C}^m$; et il n'y a aucun point frontière de σ'_t sur la partie de la frontière de u_1 en laquelle $\varphi(p) \leqq \alpha_0$; et, en outre, pour tout point frontière p de u_1 en lequel on a $\varphi(p) > \alpha_0$, on a $\Sigma_p = \mathfrak{A}_p$ donc le membre à gauche de l'équation de s'annule jamais.

Donc, la famille (σ_i') jouit des propriétés indiquées dans le lemme 3. D'après le lemme 3, c'est en contradiction avec ce que $\mathfrak{A}$ est le plus petit ensemble de la classe $(\mathfrak{G}_1)$ contenant Σ. Donc le théorème a été certainement démontré.

7. Problèmes d'approximation. Soit D un domaine d'holomorphie univalent dans $\boldsymbol{P}^n$. Supposons ici qu'il y a, pour tout ensemble compact E dans D, une surface algébrique qui ne rencontre pas E. Prenons d'abord, un polyèdre analytique $\mathfrak{P}$ contenu dans D, défini par un système d'inégalités

$$|f_j(p)|\leqq 1 \quad (j=1, \cdots, \nu),$$

où $f_j(p)$ sont des fonctions holomorphes dans D.

Toute fonction $g(p)$ holomorphe sur $\mathfrak{P}$ peut se développer toujours en série de polynomes des f_j, en adjoignant, si nécessaire, quelques fonctions convenables holomorphes dans D, de la façon que la série converge uniformément sur $\mathfrak{P}$.

Considérons, ensuite, dans le domaine fermé produit de l'espace $\boldsymbol{P}^n$ et du polycylindre fermé $\Delta:|y_j|\leqq 1$ $(j=1, \cdots, \nu)$ l'ensemble analytique Σ défini par

$$y_j=f_j(p) \quad p\in\mathfrak{P} \quad (j=1, \cdots, \nu).$$

D'après le théorème 1, Σ est un ensemble de la classe $(\mathfrak{G}_1)$. Par suit, il y a un domaine U de la classe $(\mathfrak{G}_0)$ contenant Σ tel que la projection de tout point de $\bar{U}$ sur $\boldsymbol{P}^n$ se trouve dans D. Alors, toute fonction holomorphe $y_j-f_j(p)$ $(j=1, \cdots, \nu)$ étant regardée comme fonction sur $\bar{U}$, est développable en série de polynomes des y_j $(j=1, \cdots, \nu)$ et des fonctions appartenant à la famille $\mathfrak{G}$, tellement que la série converge uniformément sur $\bar{U}$.

Par suite, pour tout nombre réel positif ε, on peut trouver, d'après le même raisonnement qui a été fait dans le mémoire 5 d'Oka, un système de fonctions algébriques $\varphi_j(p)$, holomorphes et univalentes sur $\bar{U}$, telles que l'on ait

$$|f_j(p)-\varphi_j(p)|<\varepsilon \text{ sur } \bar{U}.$$

Soient données une fonction holomorphe $g(p)$ sur $\mathfrak{P}$ quelconque et un nombre réel positif quelconque ε. Alors, on peut trouver, comme on a dit ci-dessus, un polynome $F=\sum^N a_{i_1,\dots,i_\nu} f_1^{i_1}\cdots f_\nu^{i_\nu}$ de f_j $(j=1,\cdots,\nu)$ tel que l'on ait

$$|F-g|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{sur } \mathfrak{P}.$$

Ensuite, prenons des fonction algébrique φ_j, chacune suffisamment voisine de f_j, telles que

$$\left|\sum^N a_{i_1,\dots,i_\nu} f_1^{i_1}\cdots f_\nu^{i_\nu}-\sum^N a_{i_1,\dots,i_\nu}\varphi_1^{i_1}\cdots\varphi_\nu^{i_\nu}\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

La fonction $\sum^N a_{i_1,\dots,i_\nu}\varphi_1^{i_1}\cdots\varphi_\nu^{i_\nu}$ est une branche univalente de la fonction algébrique et satisfait l'inégalité

$$\left|g-\sum^N a_{i_1,\dots,i_\nu}\varphi_1^{i_1}\cdots\varphi_\nu^{i_\nu}\right|<\varepsilon \quad \text{sur } \mathfrak{P}.$$

D'après ce que nous avons dit jusqu'ici, on obetient le

Théorème 2. *Soit D un domaine d'holomorphie dans $\boldsymbol{P}^n$. Supposons ici que, pour tout ensemble compact E dans D, il existe toujours une surface algébrique qui ne rencontre pas E.*

Alors, lorsqu'on donne une fonction holomorphe $f(p)$ dans D arbitrairement, pour tout compact E_0 dans D et pour tout nombre réel positif ε, on peut trouver une fonction algébrique ayant une branche $\varphi(p)$ univalent dans E_0 tel que, on ait

$$|f(p)-\varphi(p)|<\varepsilon$$

sur E_0.

Malheureusement, je ne sais pas, s'il existe une surface algébrique dont nous venons de supposer l'existence, quel que soit le domaine d'holomorphie univalent dans $\boldsymbol{P}^n$.

Kyoto Sangyo University