J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
13-3 (1973) 513-528

Eine Verallgemeinerung der Cohen-Macaulay Ringe und Anwendungen auf ein Problem der Multiplizitätstheorie.

Von

Jürgen STÜCKRAD und Wolfgang VOGEL

(Communicated by Professor Nagata, October 31, 1972)

§ **1.** Sei A ein lokaler Ring (kommutativ mit Einselement und noethersch) mit dem einzigen maximalen Ideal $\mathfrak{m}$. Sei $\mathfrak{q}$ ein Parameterideal, d.h. ein $\mathfrak{m}$-primäres Ideal, das von einem System von Parametern erzeugt wird (für die Grundbegriffe verweisen wir auf [5]). Mit $\dim(A)$ bezeichnen wir die Krull-Dimension von A. Für genügend grosses n betrachten wir das Hilbert-Samuel Polynom, das wir wie folgt aufschreiben:

$$\ell(A/\mathfrak{q}^{n+1})=e_0(\mathfrak{q}, A)\binom{n+d}{d}-e_1(\mathfrak{q},A)\binom{n+d-1}{d-1}+\cdots+ +(-1)^d e_d(\mathfrak{q}, A),$$

wobei $d=\dim(A)$ und die Koeffizienten ganzrationale Zahlen sind.

D.A. Buchsbaum stellt in [2], S.228 das Problem (P), die Differenz $\ell(A/\mathfrak{q})-e_0(\mathfrak{q}, A)$ durch eine Invariante zu bestimmen, die also von $\mathfrak{q}$ unabhängig sein soll. Insbesondere wird vermutet, dass gilt:

$$\ell(A/\mathfrak{q})-e_0(\mathfrak{q}, A)=\dim(A)-\operatorname{codh}(A),$$

wobei $\operatorname{codh}(A)$ die homologische Kodimension bezeichnet, siehe hierzu z.B. [7], S.IV-14, Prop. 6.

In [9] wird nun unter anderem gezeigt, dass es lokale Ringe A

und Parameterideale $\mathfrak{q}$ gibt, so dass die Differenz $\ell(A/\mathfrak{q})-e_0(\mathfrak{q}, A)$ von $\mathfrak{q}$ abhängt.

In dieser Note wollen wir die lokalen Ringe charakterisieren, in denen das Problem (P) von D. A. Buchsbaum gelöst werden kann, d. h. $\ell(A/\mathfrak{q})-e_0(\mathfrak{q}, A)$ ist von $\mathfrak{q}$ unabhängig. Diese Ringe stellen eine Verallgemeinerung der (lokalen) Cohen-Macaulay Ringe dar. Wir nennen sie I-Ringe, siehe Definition 2. Einige Charakterisierungen von diesen I-Ringen geben wir im §2, Satz 5.

Im §3 zeigen wir dann, dass ein lokaler Ring A dann und nur dann ein I-Ring ist, wenn $\ell(A/\mathfrak{q})-e_0(\mathfrak{q}, A)$ von $\mathfrak{q}$ unabhängig ist, d. h. in I-Ringen existiert eine Invariante $I(A)$, so dass gilt

$$\ell(A/\mathfrak{q})-e_0(\mathfrak{q}, A)=I(A).$$

Abschliessend geben wir im §4 einige Beispiele und Bemerkungen, die weitere Informationen über I-Ringe und das Problem (P) liefern.

§ **2.** Für ein Ideal $\mathfrak{a}\subset A$ bezeichnen wir mit $\dim(\mathfrak{a})$ die Dimension des Ringes $A/\mathfrak{a}$, $\dim(\mathfrak{a})=\dim(A/\mathfrak{a})$. $\mathrm{Ass}(\mathfrak{a})$ bezeichne die Menge aller Primideale $\mathfrak{p}$, die zu einer Primärzerlegung von $\mathfrak{a}$ gehören. Ferner vereinbaren wir

$$\mathrm{Assh}(\mathfrak{a})=:\{\mathfrak{p}\in \mathrm{Ass}(\mathfrak{a})/\dim(\mathfrak{p})=\dim(\mathfrak{a})\}.$$

$U(\mathfrak{a})$ bezeichne den Durchschnitt aller Primärideale von $\mathfrak{a}$, deren zugehörige Primideale in Assh $(\mathfrak{a})$ liegen, d. h. es gilt $\mathrm{Assh}(\mathfrak{a})=\mathrm{Ass}(U(\mathfrak{a}))=\mathrm{Assh}(U(\mathfrak{a}))$. $\mathfrak{a}$ ist also ungemischt, wenn $\mathfrak{a}=U(\mathfrak{a})$.

Folgender Hilfssatz wird oft von Nutzen sein, der sich aus [7], I-3, Prop. 2.2 ergibt.

Hilfssatz 1: *Sei $\mathfrak{a}\subset A$ ein Ideal und $\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_n$, Primideale aus A mit* $\dim(\mathfrak{p}_i)\geqq\dim(\mathfrak{a})$ *und* $\mathfrak{p}_i\notin \mathrm{Ass}(\mathfrak{a})$ *für alle $i=1,\dots,n$. Dann gibt es ein Element $a\in\mathfrak{a}$ mit $a\notin\mathfrak{p}_i$ für alle $i=1,\dots,n$.*

Definition 1: *Ein System von Elementen $a_1,\dots, a_r\in\mathfrak{m}$ heisst schwache A-Sequenz, wenn fur jedes $i=1,\dots, r$ gilt:*

$$\mathfrak{m}\cdot[(a_1,\dots, a_{i-1}): a_i]\subseteqq(a_1,\dots, a_{i-1}).$$

(Für $i=1$ setzen wir $(a_1,\dots, a_{i-1})=:(0)\subset A$).

Korollar 2: *Jede A-Sequenz (oder Primsequenz) ist eine schwache A-Sequenz.*

Über maximale schwache A-Sequenzen siehe die Bemerkung im §4.

Wir geben zunächst einen Zusammenhang mit den reduzierten Parametersystemen im Sinne von [1], §4, Definition, S. 643.

Hilfssatz 3: *Sei $a_1,\dots, a_r$ ein System von Elementen aus $\mathfrak{m}$. Wenn $a_1,\dots,a_r$ eine schwache A-Sequenz ist, dann gilt für jedes $i=1,\dots,r$:*

$$a_i\notin\mathfrak{p} \text{ für alle } \mathfrak{p}\in \mathrm{Ass}((a_1,\dots, a_{i-1})) \text{ mit } \dim(\mathfrak{p})\geqq 1.$$

Umgekehrt sei für jedes $i=,1\dots, r$ $a_i\notin\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}((a_1,\dots, a_{i-1}))$ mit $\dim(\mathfrak{p})\geqq 1$ und $\mathfrak{m}\cdot(\mathfrak{q}_{i-1}: a_i)\subseteqq\mathfrak{q}_{i-1}$, wobei $\mathfrak{q}_{i-1}$ eine $\mathfrak{m}$-primäre Komponente von $(a_1,\dots,a_{i-1})$ ist (wenn keine solche Komponente auftritt, setzen wir $\mathfrak{q}_{i-1}=:A$), dann ist $a_1,\dots, a_r$ eine schwache A-Sequenz.

Beweis: Sei $a_1,\dots, a_r$ eine schwache A-Sequenz. Da für jedes $i=1,\dots, r$ $a_i\in\mathfrak{m}$ ist, folgt aus der Definition 1, dass gilt:

$$(a_1,\dots, a_{i-1}): a_i=(a_1,\dots, a_{i-1}): \mathfrak{m}.$$

Angenommen nun, dass ein $\mathfrak{p}\in \mathrm{Ass}((a_1,\dots, a_{i-1}))$ existiert mit $\mathfrak{p}\neq\mathfrak{m}$ und $a_i\in\mathfrak{p}$. Sei dann $\mathfrak{q}$ eine Primärkomponente von $(a_1,\dots, a_{i-1})$, die zu $\mathfrak{p}$ gehört. Wir wählen eine nichtnegative ganze Zahl n, so dass $(a_1,\dots, a_{i-1}): a_i^n$ eine $\mathfrak{p}$-primäre Komponente besitzt, aber $(a_1,\dots, a_{i-1}): a_i^{n+1}$ keine besitzt. Es habe $\mathfrak{m}$ noch eine Basis $\mathfrak{m}=(m_1,\dots, m_t)$, dann gilt:

$$\begin{aligned}(a_1,\dots, a_{i-1}):a_i^{n+1}&=((a_1,\dots, a_{i-1}): a_i): a_i^n=((a_1,\dots,a_{i-1}): \mathfrak{m}): a_i^n\\ &=\Big(\bigcap_{j=1}^{t}((a_1,\dots,a_{i-1}): m_j\Big): a_i^n=\bigcap_{j=1}^{t}(a_1,\dots,a_{i-1}):(a_i^n\cdot m_j)\\ &=\bigcap_{j=1}^{t}((a_1,\dots,a_{i-1}): a_i^n): m_j=((a_1,\dots,a_{i-1}): a_i^n):\mathfrak{m}.\end{aligned}$$

Nun besitzt das Ideal $(a_1,\dots,a_{i-1})\colon a_i^{n+1}$ keine $\mathfrak{p}$-primäre Komponente, aber das Ideal $((a_1,\dots,a_{i-1})\colon a_i^n)\colon \mathfrak{m}$. Dies liefert den Widerspruch und beweist die erste Aussage von Hilfssatz 3.

Die Umkehrung ist klar, q.e.d.

Dieser Hilfssatz 3 und die Ergebnisse in [1], §4 ergeben das

Korollar 4: *Jede schwache A-Sequenz $a_1,\dots,a_r$ ist Teil eines reduzierten Parametersystems und somit Teil eines Parametersystems. Insbesondere gilt $r \leqq \dim(A)$.*

Wir kommen nun zu dem Hauptergebnis in diesem §2.

Satz 5: *Die folgenden Bedingungen sind für einen d-dimensionalen lokalen Ring A äquivalent:*

(i) Jedes Parametersystem ist eine schwache A-Sequenz.

(ii) Für jeden Teil $a_1,\dots,a_k$ eines beliebigen Parametersystems gilt

$$\mathfrak{m}\cdot U((a_1,\dots,a_k)) \subseteqq (a_1,\dots,a_k),\quad 0 \leqq k < d.$$

(iii) Für jeden Teil $a_1,\dots,a_k$ eines beliebigen Parametersystems gilt:

$$(a_1,\dots,a_{k-1})\colon a_k = (a_1,\dots,a_{k-1})\colon a \text{ für all } a \in \mathfrak{m} \text{ mit}$$
$$\dim((a_1,\dots,a_{k-1},a)) = d-k \text{ und } k = 1,\dots,d.$$

(iv) Für jedes Parametersystem $a_1,\dots,a_d$ gilt:

$$(a_1,\dots,a_{d-1})\colon a_d = (a_1,\dots,a_{d-1})\colon a \text{ für alle } a \in \mathfrak{m} \text{ mit}$$
$$\dim((a_1,\dots,a_{d-1},a)) = 0.$$

Beweis: (ii)$\Rightarrow$(i): Wenn $a_1,\dots,a_d$ ein beliebiges Parametersystem ist, dann gilt $U((a_1,\dots,a_{i-1})) = U((a_1,\dots,a_{i-1}))\colon a_i$, also $(a_1,\dots,a_{i-1})\colon a_i \subseteqq U(a_1,\dots,a_{i-1})$. Daher haben wir:

$$\mathfrak{m}\cdot[(a_1,\dots,a_{i-1})\colon a_i] \subseteqq \mathfrak{m}\cdot U((a_1,\dots,a_{i-1})) \subseteqq (a_1,\dots,a_{i-1})$$
$$\text{für alle } i = 1,\dots,d.$$

(i)$\Rightarrow$(iii): Da in (iii) $a_1,\dots,a_k$ und $a_1,\dots,a_{k-1}, a$ für $k=1,\dots,d$ Teile von Parametersystemen sind, bilden sie nach Voraussetzung schwache A-Sequenzen. Daher gilt für $\mathfrak{a}=:(a_1,\dots,a_{k-1})$

$$\mathfrak{a}: a_k \subseteqq \mathfrak{a}: \mathfrak{m} \subseteqq \mathfrak{a}: a, \text{ weil } a\in\mathfrak{m} \text{ und}$$
$$\mathfrak{a}: a \subseteqq \mathfrak{a}: \mathfrak{m} \subseteqq \mathfrak{a}: a_k, \text{ weil } a_k\in\mathfrak{m}.$$

Damit ist $\mathfrak{a}: a_k=\mathfrak{a}: a$ für alle $k=1,\dots,d$.

(iii)⇒(ii): Wir setzen in (ii) $\mathfrak{a}=:(a_1,\dots,a_k)$ mit $k=0,\dots,d-1$. Sei $a\in\mathfrak{m}$, so dass $a_1,\dots,a_k$, a Teil eines Parametersystems ist. Wir setzen $\mathfrak{a}=: U(\mathfrak{a})\cap\mathfrak{r}$, wobei $\mathfrak{r}$ also ein Ideal mit $\dim(\mathfrak{r})<d-k$ ist, $\mathfrak{r}\subseteqq\mathfrak{m}$. Nach Hilfssatz 1 existiert dann ein Element $a'\in\mathfrak{r}$, so dass $a_1,\dots,a_k$, a' Teil eines Parametersystems ist. Daher gilt:

$$U(\mathfrak{a})=(U(\mathfrak{a}): a')\cap(\mathfrak{r}: a')=\mathfrak{a}: a'=\mathfrak{a}: a, \text{ nach (iii).}$$

Folglich haben wir

$$(*) \quad a\cdot U(\mathfrak{a})=a\cdot(\mathfrak{a}: a)\subseteqq\mathfrak{a}.$$

Sei nun $m\in\mathfrak{m}$ ein beliebiges Element, und wir setzen Assh $(\mathfrak{a})=:\{\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_n\}$. Wir nehmen an, dass $m\in\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_t$, aber $m\notin\mathfrak{p}_{t+1},\dots,\mathfrak{p}_n$ für ein t mit $0\leqq t\leqq n$. Nach Hilfssatz 1 wählen wir ein Element $m'\in\mathfrak{r}\cap\mathfrak{p}_{t+1}\cap\dots\cap\mathfrak{p}_n$, aber $m'\notin\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_t$. Damit bildet das System $a_1,\dots,a_k$, $m+m'$ Teil eines Parametersystems. Nach (*) haben wir, dass $(m+m')\cdot U(\mathfrak{a})\subseteqq\mathfrak{a}$. Da $m'\in\mathfrak{r}$ ist, gilt $m'\cdot U(\mathfrak{a})\subseteqq U(\mathfrak{a})\cap\mathfrak{r}=\mathfrak{a}$ und somit ist $m\cdot U(\mathfrak{a})\subseteqq\mathfrak{a}$. Da m beliebig aus $\mathfrak{m}$ war, gilt (ii).

(iii)⇒(iv) ist trivial.

(iv)⇒(iii): Seien $a_1,\dots,a_k$ und $a_1,\dots,a_{k-1}$, a Teile von Parametersystemen für $k=1,\dots,d$. Nach Hilfssatz 1 konstruieren wir Elemente $a_{k+1},\dots,a_d$ aus $\mathfrak{m}$, so dass $a_1,\dots,a_k,a_{k+1},\dots,a_d$ und $a_1,\dots,a_{k-1},a,a_{k+1},\dots,a_d$ Parametersysteme sind. Dann sind auch für jedes $n\geqq 1$ $a_1,\dots,a_{k-1}$, $a_{k+1}^n,\dots,a_d^n$, a_k und $a_1,\dots,a_{k-1}$, $a_{k+1}^n,\dots,a_d^n$, a Parametersysteme. Daher gilt für $\mathfrak{a}=:(a_1,\dots,a_{k-1})$:

$$\mathfrak{a}: a_k\subseteqq\Big[\bigcap_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{a}+(a_{k+1}^n,\dots,a_d^n))\Big]: a_k=\Big[\bigcap_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{a}+(a_{k+1}^n,\dots,a_d^n))\Big]: a,$$

wegen der Voraussetzung (iv)

$$\subseteqq\Big[\bigcap_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{a}+(a_{k+1},\dots,a_d)^n)\Big]: a=\mathfrak{a}: a.$$

Analog erhält man auch $\mathfrak{a}: a \subseteq \mathfrak{a}: a_k$, also $\mathfrak{a}: a_k = \mathfrak{a}: a$ für alle $k=1,\dots, d$. Damit ist unser Satz 5 bewiesen, q.e.d.

Definition 2: *Ein lokaler Ring, der die vier äquivalenten Bedingungen von Satz* 5 *erfüllt, heisst I-Ring.*

Korollar 6: *Sei* $a_1,\dots, a_k$ *Teil eines Parametersystems in dem I-Ring A. Dann ist auch*

$$A/(a_1,\dots, a_k) \text{ ein } I\text{-Ring}.$$

Korollar 7: *Jeder (lokale) Cohen-Macaulay Ring ist ein I-Ring.*

Im §4 werden wir sehen, dass es I-Ringe gibt, die keine Cohen-Macaulay Ringe sind. Daher ist es im Hinblick auf das Problem (P) von D. A. Buchsbaum und §3 von Interesse, wann ein lokaler Ring, der kein Cohen-Macaulay Ring ist, ein I-Ring ist. Wir geben eine notwendige Bedingung an. Hierzu bemerken wir zunächst, dass in [10] bewiesen wird, dass ein d-dimensionaler lokaler Ring A dann und nur dann ein Cohen-Macaulay Ring ist, wenn für ein Parametersystem $a_1,\dots, a_d$ von A folgendes gilt:
a_k ist in keinem $(d-k)$-dimensionalen Primideal enthalten, das zu $(a_1,\dots, a_{k-1})$ gehört für alle $k=1,\dots, d$.
Hieraus und aus Satz 5, (i) und Hilfssatz 3 folgt

Proposition 8: *Sei A ein d-dimensionaler lokaler Ring. Wenn A ein I-Ring, aber kein Cohen-Macaulay Ring ist, dann gilt: Für jedes Parametersystem* $a_1,\dots, a_d$ *in A besitzt das Ideal* $(a_1,\dots, a_{d-1})$ *eine* $\mathfrak{m}$-*primäre Komponente.*

Siehe diese Proposition z.B. im Zusammenhang mit Satz 5, (iv). Proposition 8 besitzt auch brauchbare Anwendungen in der Theorie der Polynomideale, siehe hierzu die erste Bemerkung im §4.

§3. Bevor wir diejenigen lokalen Ringe charakterisieren, die das

Problem (P) von D. A. Buchsbaum positiv lösen, geben wir noch den

Hilfssatz 9: *Sei A ein d-dimensionaler lokaler Ring. Wenn $\ell(A/\mathfrak{q})-e_0(\mathfrak{q}, A)$ für alle Parametersysteme den gleichen Wert liefert, dann ist jedes Parametersystem reduziert (im Sinne von* [1], §4).

Beweis: Sei $\mathfrak{q}=:(a_1,\dots, a_d)$ ein beliebiges Parameterideal. Dann ist $\mathfrak{q}'=:(a_1,\dots, a_d^2)$ auch ein Parameterideal. Wir setzen für alle $k=0, \dots, d-1$ $\mathfrak{q}_k=:(a_1,\dots, a_k)$ und $E_k=:\mathfrak{q}_{k-1}:a_k/\mathfrak{q}_{k-1}$. Wenn wir das Hilbert-Samuel Polynom $\ell(E/\mathfrak{q}^{n+1}\cdot E)$ für einen A-Modul E vom endlichen Typ betrachten, dann bezeichnen wir den Leitkoeffizienten mit $e_0(\mathfrak{q}, E)$. Nach [1], Cor. 4. 3. haben wir dann:

$$\begin{aligned}
0&=\ell(A/\mathfrak{q}')-e_0(\mathfrak{q}', A)-\ell(A/\mathfrak{q})+e_0(\mathfrak{q}, A), \text{ nach Voraussetzung}\\
&=\sum_{k=1}^{d-1}[e_0(\mathfrak{q}'/\mathfrak{q}_k, E_k)-e_0(\mathfrak{q}/\mathfrak{q}_k, E_k)]+\ell(\mathfrak{q}_{d-1}:a_d^2/\mathfrak{q}_{d-1})\\
&\quad-\ell(\mathfrak{q}_{d-1}:a_d/\mathfrak{q}_{d-1})\\
&=\sum_{k=1}^{d-1}e_0(\mathfrak{q}/\mathfrak{q}_k, E_k)+\ell(\mathfrak{q}_{d-1}:a_d^2/\mathfrak{q}_{d-1}:a_d),
\end{aligned}$$

weil $e_0(\mathfrak{q}'/\mathfrak{q}_k, E_k)=2\cdot e_0(\mathfrak{q}/\mathfrak{q}_k, E_k)$ ist.

Da alle Summanden grösser oder gleich null sind, folgt insbesondere $e_0(\mathfrak{q}/\mathfrak{q}_k, E_k)=0$ für alle $k=0, 1, \dots, d-1$. Dies bedeutet nach [1], §4, Definition, dass $a_1,\dots,a_d$ ein reduziertes Parametersystem ist. Damit ist der Hilfssatz bewiesen, q.e.d.

Wir kommen jetzt zu dem Hauptergebnis in diesem §3.

Satz 10: *Für einen d-dimensionalen lokalen Ring A sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(*i*) *Es gibt eine von $\mathfrak{q}$ unabhängige Invariante $I(A)$ des lokalen Ringes A, so dass für jedes Parameterideal $\mathfrak{q}\subset A$ gilt:*

$$\ell(A/\mathfrak{q})-e_0(\mathfrak{q}, A)=I(A).$$

(*ii*) *A ist ein I-Ring.*

Beweis: (i)$\Rightarrow$(ii): Sei $a_1,\dots, a_d$ ein beliebiges Parametersystem und

$a \in \mathfrak{m}$, so dass $a_1, \dots, a_{d-1}$, a wieder ein Parametersystem ist. Dann ist auch $a_1, \dots, a_{d-1}$, $a \cdot a_d$ ein Parametersystem. Wir setzen $\mathfrak{a} =: (a_1, \dots, a_{d-1})$. Nach Hilfssatz 9 ist jedes Parametersystem reduziert, d.h.

$$\ell(A/\mathfrak{q}) - e_0(\mathfrak{q}, A) = \ell(\mathfrak{a} : a_d/\mathfrak{a}).$$

Da die linke Seite von $\mathfrak{q}$ unabhängig ist, gilt insbesondere

$$\ell(\mathfrak{a} : a_d/\mathfrak{a}) = \ell(\mathfrak{a} : a \cdot a_d/\mathfrak{a}) = \ell(\mathfrak{a} : a/\mathfrak{a}), \text{ und somit}$$
$$\mathfrak{a} : a_d = \mathfrak{a} : a \cdot a_d = \mathfrak{a} : a.$$

Da $a_1, \dots, a_d; a$ beliebig waren, ist nach Satz 5, (iv) A ein I-Ring.
(ii)$\Rightarrow$(i): Wir benutzen Induktion nach $d = \dim(A)$. Für $d = 1$ folgt aus Satz 5, (iii), dass für alle $a' \in \mathfrak{m}$ mit $\dim(a') = \dim(a_1) = 0$ gilt: $(0) : a_1 = (0) : a'$. Daher haben wir:

$$\ell(A/((a_1)) - e_0((a_1), A) - \ell(A/(a')) + e_0((a'), A) =$$
$$\ell((0) : a) - \ell((0) : a') = 0,$$

weil a_1 und a' reduzierte Parametersysteme bilden.

Sei nun $a_1, \dots, a_d$ ein beliebiges Parametersystem in A und $\mathfrak{q} =: (a_1, \dots, a_d)$. Nach Korollar 4 ist $a_1, \dots, a_d$ ein reduziertes Parametersystem und somit gilt:

$$\ell(A/\mathfrak{q}) - e_0(\mathfrak{q}, A) = \ell((a_1, \dots, a_{d-1}) : a_d/(a_1, \dots, a_{d-1})).$$

Da die linke Seite unabhängig von der Reihenfolge der Elemente $a_1, \dots, a_d$ ist, bemerken wir, dass es auch die rechte Seite in dieser Gleichung ist.
Sei nun $a'_1, \dots, a'_d$ ein weiteres Parametersystem in A. Wir setzen $\mathfrak{a} =: (a_1, \dots, a_{d-1})$ und $\mathfrak{a}' =: (a_1', \dots, a'_{d-1})$. Nach Hilfasstz 1 wählen wir ein Element $a \in \mathfrak{m}$ mit $a \notin \mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Assh}(\mathfrak{a}) \cup \mathrm{Assh}(\mathfrak{a}')$. Dann gilt nach Satz 5, (iii), dass

$$\mathfrak{a} : a_d = \mathfrak{a} : a \text{ und } \mathfrak{a}' : a'_d = \mathfrak{a}' : a.$$

Wir setzen weiter $\bar{A} =: A/(a)$, $\mathfrak{b} =: (a, a_1, \dots, a_{d-2})$, $\mathfrak{b}' =: (a, a'_1, \dots, a'_{d-2})$, $\bar{\mathfrak{b}} =: \mathfrak{b} \cdot \bar{A}$, $\bar{\mathfrak{b}}' =: \mathfrak{b}' \bar{A}$. Nach Korollar 6 ist $\bar{A}$ wieder ein I-Ring und $\bar{\mathfrak{b}} + a_{d-1} \cdot \bar{A}$ bzw. $\bar{\mathfrak{b}}' + a'_{d-1} \cdot \bar{A}$ sind Parameterideale in $\bar{A}$. Hieraus erhalten wir mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung die folgenden Gleichungen:

$\ell(A/\mathfrak{q})-e_0(\mathfrak{q}, A)=\ell(\mathfrak{a}: a_d/\mathfrak{a})$, da das Parametersystem reduziert ist
$=\ell(\mathfrak{a}: a/\mathfrak{a})$, da $\mathfrak{a}: a_d=\mathfrak{a}: a$
$=\ell(\mathfrak{b}: a_{d-1}/\mathfrak{b})$, weil nach der obigen Bemerkung der Ausdruck unabhängig von der Reihenfolge der Elemente ist
$=\ell(\bar{\mathfrak{b}}: \bar{a}_{d-1}/\bar{\mathfrak{b}})$, da $\bar{\mathfrak{b}}: \bar{a}_{d-1}/\bar{\mathfrak{b}} \cong \mathfrak{b}: a_{d-1}/\mathfrak{b}$
$=\ell(\bar{\mathfrak{b}}': \bar{a}'_{d-1}/\bar{\mathfrak{b}}')$, nach Induktionsvoraussetzung
$=\ell(\mathfrak{b}': a'_{d-1}/\mathfrak{b}')=\ell(\mathfrak{a}': a/\mathfrak{a}')=\ell(\mathfrak{a}': a'_d/\mathfrak{a}')$
$=\ell(A/\mathfrak{q}')-e_0(\mathfrak{q}', A)$ mit $\mathfrak{q}'=:(a'_1, \dots, a'_d)$.

Damit ist auch (i) bewiesen, q.e.d.
Wir geben jetzt noch ein notwendiges und ein hinreichendes Kriterium dafür an, wann ein lokaler Ring ein I-Ring ist. Ausserdem geben wir in diesen Spezialfällen die Invariante $I(A)$ an. Die Beispiele im §4 zeigen jedoch, dass diese Kriterien nicht umkehrbar sind. Zunächst schicken wir einen Hilfssatz voraus.

Hilfssatz 11: *Sei A ein lokaler Ring und $\mathfrak{a}$ ein Ideal aus A, so dass $A/\mathfrak{a}$ ein I-Ring ist. Dann gilt für jedes System von Elementen* $a_1, \dots, a_k \in \mathfrak{m}$ *mit* $\dim(\mathfrak{a}, a_1, \dots, a_k)=\dim(\mathfrak{a})-k$ *und* $k \geqq 0$ $(a_0=:0)$:

$$U(\mathfrak{a}) \cap (a_1, \dots, a_k) \subseteqq \mathfrak{a}.$$

Beweis: Wir führen vollständige Induktion nach k. Für $k=0$ ist die Aussage trivial. Wir setzen $\mathfrak{b}=:(a_1, \dots, a_k)$ und $\mathfrak{b}'=:(a_1, \dots, a_{k-1})$ mit $k \geqq 1$. Sei $u=:\sum_{i=1}^{k} r_i \cdot a_i \in U(\mathfrak{a}) \cap \mathfrak{b}$. Nach Satz 5, (ii) (für $k=0$) erhält man $\mathfrak{m} \cdot U(\mathfrak{a}) \subseteqq \mathfrak{a}$. Daher ist $r_k \cdot a_k^2 \in \mathfrak{a}+\mathfrak{b}'$, also $r_k \in (\mathfrak{a}+\mathfrak{b}'): a_k^2=(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}'): a_k$, da $a_1, \dots, a_k$ modulo $\mathfrak{a}$ in $A/\mathfrak{a}$ Teil eines Parametersystems und daher nach Voraussetzung eine schwache A-Sequenz bilden. Damit erhalten wir $r_k a_k \in \mathfrak{a}+\mathfrak{b}'$, d.h. $r_k a_k=a'+\sum_{i=1}^{k-1} r'_i a_i$, mit $a' \in \mathfrak{a}$. Somit gilt:

$$u-a'=\sum_{i=1}^{k-1}(r_i+r'_i)a_i\in U(\mathfrak{a})\cap\mathfrak{b}'\subseteq\mathfrak{a},$$

nach Induktionsvoraussetzung. Daher ist auch $u\in\mathfrak{a}$, q.e.d.

Proposition 12: *Wenn A ein I-Ring ist, so ist auch $A/U(0)$ ein I-Ring, und es gilt*:

$$I(A)=I(A/U(0))+\ell(U(0)).$$

Beweis: Sei $\mathfrak{q}=:(a_1,\ldots,a_d)$ ein beliebiges Parameterideal. Aus den folgenden exakten Sequenzen:

$$0\to U(0)\to A\to A/U(0)\to 0 \text{ und}$$
$$0\to U(0)/U(0)\cap\mathfrak{q}\to A/\mathfrak{q}\to A/U(0)+\mathfrak{q}\to 0$$

erhält man:

$$\ell(A/\mathfrak{q})-e_0(\mathfrak{q},A)=\ell(A/U(0)+\mathfrak{q})-e_0(\mathfrak{q},A/U(0))+$$
$$+\ell(U(0)/U(0)\cap\mathfrak{q})-e_0(\mathfrak{q},U(0)).$$

Nach Hilfssatz 11 (für $\mathfrak{a}=(0)$) bekommt man:

$$U(0)\cap\mathfrak{q}=(0).$$

Da nach Satz 5, (ii) $a_kU(0)\subseteq\mathfrak{m}U(0)=(0)$ ist, gilt:

$$e_0(\mathfrak{q},U(0))=0.$$

Für $\bar{\mathfrak{q}}=:(a_1,\ldots,a_d)\cdot A/U(0)$ erhalten wir daher:

$$\ell(A/U(0)+\mathfrak{q})-e_0(\bar{\mathfrak{q}},A/U(0))=\ell(A/\mathfrak{q})-e_0(\mathfrak{q},A)-\ell(U(0)).$$

Da nun $a_1,\ldots,a_d$ modulo $U(0)$ genau dann ein Parametersystem in $A/U(0)$ ist, wenn $a_1,\ldots,a_d$ ein Parametersystem in A ist, folgen dann die Behauptungen der Proposition 12, q.e.d.

Korallar 13: *Wenn A ein I-Ring ist und $a_1,\ldots,a_k$ Teil eines Parametersystems in A ist* ($0\leqq k<\dim(A)$), *dann ist $A/U(a_1,\ldots,a_k)$ ein I-Ring, und es gilt*:

$$I(A)=I(A/U(a_1,\ldots,a_k))+\ell(U(a_1,\ldots,a_k)/(a_1,\ldots,a_k)).$$

Beweis: Korollar 6 und Proposition 12.

Bevor wir ein hinreichendes Kriterium herleiten, müssen wir zunächst den folgenden Hilfssatz beweisen.

Hilfssatz 14: *Sei A ein lokaler Ring und $\mathfrak{a}\subset A$ ein Ideal. Seien $a_1, \ldots, a_s$ Elemente aus A, die eine $A/\mathfrak{a}$-Sequenz bilden, dann gilt für $\mathfrak{b}=:(a_1, \ldots, a_s)$ und $s\geqq 0$ ($a_0=:(0)$ in A):*

$$\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}=\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}.$$

Beweis: Wir benutzen vollständige Induktion nach s. Für $s=0$ ist die Aussage trivial. Wir setzen $\mathfrak{b}'=:(a_1, \ldots, a_{s-1})$. Sei $x=:\sum_{i=1}^{s} r_i a_i \in\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$, dann ist $r_s a_s\in\mathfrak{a}+\mathfrak{b}'$, d.h. $r_s\in(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}'):a_s=(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}')$, nach Voraussetzung. Daher ist $r_s=x'+\sum_{i=1}^{s-1} r'_i a_i$, mit $x'\in\mathfrak{a}$, also $x-x'a_s\in\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}'=\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}'$, nach Induktionsvoraussetzung. Damit haben wir, dass $x\in\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$ ist, q.e.d.

Proposition 15: *Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring. Wenn $A/U(0)$ ein Cohen-Macaulay Ring und $\mathfrak{m}\cdot U(0)=0$ sind, dann ist A ein I-Ring, und es gilt $I(A)=\ell(U(0))$.*

Beweis: Sei $\mathfrak{q}=:(a_1, \ldots, a_d)$ ein beliebiges Parameterideal in A. Nach Hilfssatz 14 ($\mathfrak{a}=: U(0)$) folgt $U(0)\cap\mathfrak{q}=U(0)\cdot\mathfrak{q}\subseteqq U(0)\cdot\mathfrak{m}=(0)$, also $U(0)\cap\mathfrak{q}=(0)$. Da $A/U(0)$ ein Cohen-Macaulay Ring ist, gilt auch $\ell(A/U(0)+\mathfrak{q})-e_0(\mathfrak{q}, A/U(0))=0$. Daher folgt aus dem Beweis von Proposition 12:

$$\ell(A/\mathfrak{q})-e_0(\mathfrak{q}, A)=\ell(U(0)),\ \text{q.e.d.}$$

§**4.** Abschliessend geben wir Beispiele und Bemerkungen, die einige Ergebnisse aus §2 und §3 neu beleuchten.

Proposition 16: *Seien m und n natürliche Zahlen. Es existie-*

ren I-Ringe der homologischen Kodimension 0, *codh*$(A)=0$, *und der Dimension* n, $\dim(A)=n$, *so dass* $I(A)=m$ *ist.*

Beweis: Sei K ein beliebiger Körper und r,s natürliche Zahlen mit $r<s$. Seien $x_1, \ldots, x_s$ Unbestimmte und $R_s=: K[x_1, \ldots, x_s]$ der Polynomring über K. Wir setzen $\mathfrak{a}_r=: (x_1, \ldots, x_r) \cap [(x_1, \ldots, x_r)^2+(x_{r+1}, \ldots, x_s)] \subset R_s$. Wir bilden den lokalen Ring:

$$A_{r,s}=: R_{s(x_1, \ldots, x_s)}/\mathfrak{a}_r \cdot R_{s(x_1, \ldots, x_s)},$$

und es gilt $\dim(A_{r,s})=s-r$ und codh $(A_{r,s})=0$. Nach Proposition 15 folgt, dass $A_{r,s}$ ein I-Ring und dass $I(A_{r,s})=\ell(U(0))=r$ sind. Setzt man $s=n+m$, $r=m$, so ist die Proposition bewiesen, q.e.d.

Wir geben jetzt ein Beispiel für einen lokalen Ring, der kein Cohen-Macaulay Ring, aber ein I-Ring ist.

Beispiel: Sei K wieder ein beliebiger Köprer. In dem Polynomring $R=: K[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$ betrachten wir das (homogene) imperfekte Ideal $\mathfrak{a}=: (x_1, x_2) \cap (x_3, x_4)=(x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3, x_2x_4)$, siehe [4], 153.5. Damit bilden wir den lokalen Ring

$$A=: R_{(x_1, \ldots, x_4)}/\mathfrak{a} \cdot R_{(x_1 \ldots, x_4)}.$$

Nach [4] ist A kein Cohen-Macaulay Ring.
Indem man die Struktur von $\mathfrak{a}$ ausnutzt, zeigt man, dass $(x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot U(\mathfrak{a}, F) \subseteqq (\mathfrak{a}, F)$ in R für alle Elemente $F \in (x_1, \ldots, x_4)$. Nach Satz 5, (ii) folgt dann, dass A ein I-Ring ist.

Dieses Beispiel zeigt auch, dass von Proposition 15 nicht die Umkehrung gilt.

Bemerkung: Wir haben gesehen, dass wir mit Hilfe von (homogenen) imperfekten Polynomideale I-Ringe bilden können, die keine Cohen-Macaulay Ringe sind. Daher liefert die Proposition 8 eine brauchbare Anwendung für derartige Polynomideale, die wir an dem folgenden Beispiel demonstrieren wollen:

In $R=:K[x_0, x_1, x_2, x_3]$ betrachten wir wieder das imperfekte Ideal $\mathfrak{a}=(x_0x_2, x_0x_3, x_1x_2, x_1x_3)$. Für jede Form $F\in R$ mit $\mathfrak{a}:F=\mathfrak{a}$ besitzt dann nach Proposition 8 das Ideal $(\mathfrak{a}, F)$ eine triviale Komponente, d.h. ein Primärideal, das zu dem Primideal (x_0, x_1, x_2, x_3) gehört. Andere Methoden, um solche Aussagen zu gewinnen, werden in [4], 144.10. und 152.13. entwickelt.
Wir zeigen nun durch ein weiteres Beispiel, dass das notwendige Kriterium in Proposition 12 nicht hinreichend ist.

Beispiel: Wir wählen wieder R und $\mathfrak{a}$ wie im obigen Beispiel, und wir setzen $\mathfrak{b}=:\mathfrak{a}\cap(x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2, x_1x_3, x_2x_4)$ und

$$B=:R_{(x_1, \dots, x_4)}/\mathfrak{b}\cdot R_{(x_1, \dots, x_4)}.$$

Man bestätigt leicht, dass $x_2 U(\mathfrak{b}, x_1+x_3)\nsubseteq(\mathfrak{b}, x_1+x_3)$, also gilt $\mathfrak{m}\cdot U((x_1+x_3)\cdot B)\nsubseteq(x_1+x_3)\cdot B$.
Nach Satz 5, (ii) folgt, dass B kein I-Ring ist, obwohl $B/U(0)$ ein I-Ring ist, wie wir oben gesehen haben.

Bemerkungen: Wie in der Theorie der (lokalen) Cohen-Macaulay Ringe könnte man auch hier eine nichtnegative ganze Zahl s-codh(A), die schwache homologische Kodimension, für einen lokalen Ring A wie folgt einführen:
s-codh(A) ist die maximale Anzahl der Elemente in allen schwachen A-Sequenzen. Nach Korollar 4 gilt dann:

$$\mathrm{codh}(A)\leqq s\text{-}\mathrm{codh}(A)\leqq \dim(A).$$

Man könnte jetzt das Ergebnis vermuten, dass A dann und nur dann ein I-Ring ist, wenn s-codh$(A)=\dim(A)$. Das folgende Korollar zeigt aber, dass dieses Resultat nicht zu erwarten ist.

Korollar 17: *Es existieren lokale Ringe A mit* $\dim(A)=$ *s-codh(A), aber A ist kein I-Ring.*

Beweis: Wir betrachten das Ideal $\mathfrak{a}=(x_1)\cap(x_1^2, x_2)$ in dem Polynomring $R=:K[x_0, x_1, x_2, x_3]$. Wir bilden den lokalen Ring

$$A=:R_{(x_1, x_2, x_3)}/\mathfrak{a}\cdot R_{(x_1, x_2, x_3)},$$

und es gilt $\dim(A)=2$ und $\mathrm{codh}(A)=1$.
Man rechnet im Sinne der Definition 1 nach, dass gilt:

x_3, x_2 bilden eine schwache A-Sequenz, aber

x_2, x_3 bilden keine schwache A-Sequenz.

Hieraus folgt, dass s-$\mathrm{codh}(A)=\dim(A)$, aber nach Satz 5, (i) gilt, dass A kein I-Ring ist.
In der Tat bestätigt man, dass die Differenz $\ell(A/\mathfrak{q})-e_0(\mathfrak{q}, A)$ von den Parameteridealen abhängt. Hierzu betrachtet man $\mathfrak{q}=:(x_2, x_3^n)\cdot A$, $n\geqq 1$. Dann ist $\ell(A/\mathfrak{q})=2n$. Den Koeffizienten $e_0(\mathfrak{q}, A)$ berechnet man sehr einfach mit Hilfe der Formel (8) in [3] und Satz 1 in [7], S.V-21. Danach gilt:

$$h_0(\mathfrak{a})\cdot h_0(x_2, x_3^n)=e_0(\mathfrak{q}, A)\cdot h_0(x_1, x_2, x_3),$$

wobei $h_0(\ )$ die idealtheoretische Ordnung der entsprechenden Polynomideale in R bezeichnet, siehe hierzu [4], 141.15. Diese Ordnungen kann man leicht nach [4], 143. oder in nicht so einfachen Situationen nach [8], §1 bestimmen. Hieraus ergibt sich schliesslich, dass $e_0(\mathfrak{q}, A)=n$ ist, also

$$\ell(A/\mathfrak{q})-e_0(\mathfrak{q}, A)=n,$$

das also von $\mathfrak{q}$ abhängt (zu dieser Methode siehe auch [9]), q.e.d.

Die schwache A-Sequenz x_3, x_2 in diesem Beweis von Korollar 17 zeigt auch, dass die hinreichende Bedingung für eine schwache A-Sequenz im Hilfssatz 3 nicht notwendig ist.

Offen bleibt nach [9] noch das folgende Problem, das für die Schnittheorie interessant ist:
Seien V und W zwei irreduzible algebraische projektive Varietäten im n-dimensionalen projektiven Raum über einem beliebigen Grundkörper k. Sei C eine irreduzible Schnittkomponente von V und W, $C\subset V\cap W$. Wir setzen voraus, dass sich V und W eigentlich in C schneiden, d.h.

$$\dim(C)=\dim(V)+\dim(W)-n.$$

Mit $i(C, V\cdot W)$ bezeichnen wir die Schnittmultiplizität von V und W in C im Sinne von A. Weil [11]. Hierzu dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit nach [11] voraussetzen, dass eine Varietät, etwa W, ein vollständiger Durchschnitt ist; dies bedeutet idealtheoretisch, dass das definierende homogene Primideal $\mathfrak{p}_W$ von W ein Ideal der Hauptklasse in $R=:k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ ist, also

$$\mathfrak{p}_W=(F_1, \dots, F_r) \text{ mit Formen } F_i\in R \text{ und } r=n-\dim(\mathfrak{p}_W).$$

Mit $\mu(C, V\cdot W)$ bezeichnen wir die idealtheoretische Schnittmultiplizität von V und W in C, siehe z.B. [4], 127.16. In dieser Situation haben wir dann das Problem (P′):

Existiert eine nichtnegative ganze Zahl $N(V, C)$, die nur von V und C abhängt, so dass gilt

$$\mu(C, V\cdot W)-i(C, V\cdot W)=N(V, C)\,?$$

Wir kennen bisher kein Gegenbeispiel für (P′). Für nicht triviale Beispiele, die gewisse Informationen über (P′) liefern, siehe [6]. Der Zusammenhang von (P′) mit dem Problem von D. A. Buchsbaum (P) wird durch den Reduktionssatz von P. Samuel gegeben, siehe z.B. [7], S. V-26.

J. Stückrad: TH Merseburg, Sektion Mathematik, Merseburg, DDR.
W. Vogel: Martin-Luther Universität Halle-Wittenberg,
Sektion Mathematik, 401 Halle, DDR.

Literatur

[1] Auslander, M. and D. A. Buchsbaum: Codimension and multiplicity. Ann. of Math. **68** (1958), 625–657.
[2] Buchsbaum, D. A.: Complexes in local ring theory. In: Some aspects of ring theory. C.I.M.E. Rom 1965.
[3] Budach, L. und W. Vogel: Cohen-Macaulay Moduln und der Bezoutsche Satz. Monatsh. Math. **73** (1969), 97–111.
[4] Gröbner, W.: Moderne algebraische Geometrie: Die idealtheoretischen Grundlagen. Springer-Verlag Wien-Innsbruck 1949.

[5] Nagata, M.: Local rings. Interscience Publ., New York, 1962.
[6] Renschuch, B., Stücked J. und W. Vogel: Weitere Bemrkungen über ein Problem der Multiplizitätstheorie und ein Mass von A. Seidenberg für die Imperfektheit. Math. Nachr., in Vorbereitung.
[7] Serre, J.-P.: Algèbre Locale. Multiplicités. Lecture Notes in Math., No. 11, Springer-Verlag 1965.
[8] Vogel, W.: Grenzen für die Gültigkeit des Bezoutschen Satzes. Monatsb. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin, **8** (1966), 1–7.
[9] Vogel, W.: Über eine Vermutung von D. A. Buchsbaum. J. of Algebra **25** (1973). 106–112.
[10] Vogel, W.: Über eine Konstruktion von Primsequenzen und lokal vollständige Durchschnitte. (Eingereicht).
[11] Weil, A.: Foundations of algebraic geometry. 2ed., Amer. Math. Soc. Coll. Publ. **29**, Providence 1962.

Note added in proof: Siehe auch die folgende Arbeit: J. Stückrad und W. Vogel: Über das Amsterdammer Programm von W. Gröbner und Buchsbaum Varietäten. Monatsh. Math (im Druck).