J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
17-3 (1977) 465-499

Sur une condition suffisante pour que le problème de Cauchy faiblement hyperbolique soit bien posé

Cas de multiplicité de caractéristiques au plus triple

Par

Keiichiro KITAGAWA et Takashi SADAMATSU

(Communicated by Prof. S. Mizohata Nov. 8, 1976)

§ 1. Introduction.

Nous envisageons le problème de Cauchy (C):

$$(C)\quad \begin{cases} P(t, x, D_t, D_x)u(t, x)=f(t, x) & \left(D_t=\dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial t},\quad D_x=\dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial x}\right) \\ D_t{}^j u(0, x)=\phi_j(x) \qquad j=0, 1, \cdots, m-1. & (t, x)\in\Omega\equiv[0, T]\times R_x{}^l \end{cases}$$

pour un opérateur différentiel linéaire $P(t, x, D_t, D_x)$ de type kowalevskien:

$$P(t, x, D_t, D_x)=D_t{}^m-\sum_{j=1}^{m}\sum_{|\alpha|\leqq j} a_{j\alpha}(t, x)D_x^\alpha D_t^{m-j}\ (\alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_l))$$

à coefficients indéfiniment différentiables, à partie principale hyperbolique et à caractéristiques multiples.

Il est connu que, pour de tels opérateurs, le problème de Cauchy (C) est en général mal posé dans la classe de fonctions indéfiniment différentiables à moins que les termes d'ordre inférieur vérifient de certaines conditions. Le cas où la multiplicité de caractéristiques est constante, il a été abordé par plusieurs auteurs. Notamment Mizohata-Ohya [3], [4] a montré que, si la multiplicité est au plus double, "la condition de Levi" est nécessaire et suffisante pour que le problème de Cauchy (C) soit $\mathcal{E}$-bien posé. Et ensuite Ohya [5] l'a généralisé au cas de multiplicité au plus triple et a montré que la condition de Levi est suffisante. Oleinik [6], Ivrii [1] et Menikoff [2] ont envisagé le cas où la multiplicité de caractéristiques est variable. Oleinik a envisagé des opérateurs d'ordre 2 et a donné une belle condition suffisante. Pour des opérateurs d'ordre supérieur, Ivrii a donné une condition nécessaire et récemment Menikoff a donné une condition suffisante comme une généralisation de celle d'Oleinik.

Dans cette note, nous envisageons le cas de multiplicité variable et au plus triple et nous montrons une condition suffisante comme une généralisation de celle de Menikoff et d'Ohya. Précisons la situation où nous nous plaçons et l'énonçons comme l'hypothèse.

Nous supposons l'hypothèse (H_0) suivante.

Hypothèse (H_0)

H_0-0) Les coefficients $a_{j\alpha}(t,x)$ de $P(t,x,D_t,D_x)$ soient indéfiniment différentiables et bornés avec leurs dérivées.

H_0-1) Le symbole de partie principale $P_m(t,x,D_t,D_x)$ de $P(t,x,D_t,D_x)$ se factorise

$$P_m(t,x,\tau,\xi)=\tau^m-\sum_{j=1}^m\sum_{|\alpha|=j}a_{j\alpha}(t,x)\xi^\alpha\tau^{m-j}=\prod_{i=1}^m(\tau-\lambda_i(t,x,\xi))$$

et les caractéristiques $\lambda_i(t,x,\xi)$ $(i=1,\cdots,m)$ soient de classe $C^\infty(\Omega\times R_\xi^l/\{0\})$ où nous entendons que $\lambda_i(t,x,\xi)$ sont non seulement indéfiniment différentiables mais bornés dans $\Omega\times\{|\xi|=1\}$ avec leurs dérivées.

H_0-2) Les $\lambda_i(t,x,\xi)$ $(i=1,\cdots,m)$ soient réels dans $\Omega\times R_\xi^l/\{0\}$.

H_0-3) A l'exception des couples (j,k) tels que $k=s+j$ $(j=1,\cdots,2s)$ ou $k=2s+j$ $(j=1,\cdots,s)$, les $\lambda_j(t,x,\xi)$ et $\lambda_k(t,x,\xi)$ soient distincts en sens que l'on a

$$\operatorname*{Inf.}_{(t,x)\in\Omega,|\xi|=1}|\lambda_j(t,x,\xi)-\lambda_k(t,x,\xi)|>0\qquad(j\neq k).$$

H_0-4) Pour de tels couples (j,k) exceptés à H_0-3), il existe des fonctions $C_j^1(t,x,\xi)$ et $C_j^2(t,x,\xi)$ $(j=1,\cdots,s)$ de classe $C^\infty(\Omega\times R_\xi^l/\{0\})$ telles que

(1) $\lambda_j(t,x,\xi)-\lambda_{s+j}(t,x,\xi)=C_j^1(t,x,\xi)(\lambda_j(t,x,\xi)-\lambda_{2s+j}(t,x,\xi))$

(2) $\lambda_j(t,x,\xi)-\lambda_{s+j}(t,x,\xi)=C_j^2(t,x,\xi)(\lambda_{s+j}(t,x,\xi)-\lambda_{2s+j}(t,x,\xi))$.

§ 2. L'énoncé du théorème.

Introduisons les notations nécessaires pour énoncer le théorème.

Soient

$$P_k(t,x,\tau,\xi)=\sum_{j=1}^m\sum_{|\alpha|+(m-j)=k}a_{j\alpha}(t,x)\xi^\alpha\tau^{m-j}\qquad k=0,1,\cdots,m,$$

en sorte que l'on a

$$P(t,x,D_t,D_x)=\sum_{k=0}^m P_k(t,x,D_t,D_x).$$

Soient, pour un multi-index $\alpha=(\alpha_0,\alpha')=(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_l)$, (bien qu'imprécis)

$$D_x^\alpha=D_t^{\alpha_0}D_x^{\alpha'},\quad \partial_\xi^\alpha=\partial_\tau^{\alpha_0}\partial_\xi^{\alpha'}.$$

Soient, pour une fonction $u(t,x)$ de classe $\mathcal{E}_t^\infty(\mathcal{D}_{L^2}^\infty)$,

$$\|u(t)\|=\Big(\int_{R^l}|u(t,x)|^2dx\Big)^{1/2},\quad \|u(t)\|_{k,j}=\Big(\sum_{\substack{|\alpha'|\leq k\\ \alpha_0\leq j}}\|D_x^\alpha u(t)\|^2\Big)^{1/2},$$

et $$|||u(t)|||_{k,j}=\Big(\sum_{i=0}^{m-1}\|\partial_t^i u(t)\|^2_{k+m-1-i,j}\Big)^{1/2}.$$

Introduisons ici deux opérations sur des fonctions $F=F(t, x, \tau, \xi)$. Soient

$$\partial_{j(0)}^{(0)}F=F(t, x, \lambda_j(t, x, \xi), \xi)$$

et $$\partial_{j(\beta)}^{(\alpha)}=\sum_{\alpha^1+\alpha^2=\alpha}\ \sum_{\beta^1+\beta^2=\beta}(-1)^{|\alpha^2+\beta^2|}\frac{\alpha!\beta!}{\alpha^1!\alpha^2!\beta^1!\beta^2!}\partial_\xi^{\alpha^1}D_x^{\beta^1}\partial_{j(0)}^{(0)}\partial_\xi^{\alpha^2}D_x^{\beta^2}.$$

On remarque aisément que $\partial_{j(\beta)}^{(\alpha)}$ est aussi définie inductivement par

$$\partial_{j(\beta)}^{(\alpha)}=[\partial_\xi^{\alpha^1}, \partial_{j(\beta)}^{(\alpha-\alpha^1)}]=[D_x^{\beta^1}, \partial_{j(\beta-\beta^1)}^{(\alpha)}] \quad \text{où} \quad |\alpha^1|=|\beta^1|=1$$

et satisfait

$$\partial_{j(\beta)}^{(\alpha)}=\sum_{\alpha^1+\alpha^2=\alpha}(-1)^{|\alpha^2|}\frac{\alpha!}{\alpha^1!\alpha^2!}\partial_\xi^{\alpha^1}\partial_{j(\beta)}^{(0)}\partial_\xi^{\alpha^2}.$$

Et soit, comme la deuxième opération,

$$\delta_j^{(\alpha)}=\sum_{\alpha^1+\alpha^2=\alpha}\frac{\alpha!}{\alpha^1!\alpha^2!}\partial_\xi^{\alpha^1}\partial_{j(\alpha)}^{(0)}\partial_\xi^{\alpha^2}.$$

Remarques.

1) Quand F est indépendante de τ, $\partial_{j(\beta)}^{(\alpha)}(FG)=F\partial_{j(\beta)}^{(\alpha)}G$.
2) L'on a $\delta_j^{(0)}=\partial_{j(0)}^{(0)}$ que nous confondons dans la suite.
3) Pour $|\alpha|=|\beta|=1$, nous avons

$$\begin{aligned}
&\partial_{j(0)}^{(\alpha)}=\partial_\xi^\alpha\partial_{j(0)}^{(0)}-\partial_{j(0)}^{(0)}\partial_\xi^\alpha=-\partial_\xi^\alpha(\tau-\lambda_j)\delta_j^{(0)}\partial_\tau,\quad \partial_{j(\beta)}^{(0)}=D_x^\beta\lambda_j\delta_j^{(0)}\partial_\tau,\\
&\partial_{j(0)}^{(\alpha+\beta)}=\partial_\xi^{\alpha+\beta}\partial_{j(0)}^{(0)}-\partial_\xi^\alpha\partial_{j(0)}^{(0)}\partial_\xi^\beta-\partial_\xi^\beta\partial_{j(0)}^{(0)}\partial_\xi^\alpha+\partial_{j(0)}^{(0)}\partial_\xi^{\alpha+\beta}\\
&\qquad=\partial_\xi^{\alpha+\beta}\lambda_j\delta_j^{(0)}\partial_\tau+\partial_\xi^\alpha(\tau-\lambda_j)\partial_\xi^\beta(\tau-\lambda_j)\delta_j^{(0)}\partial_\tau^2,\\
&\partial_{j(\beta)}^{(\alpha)}=\partial_\xi^\alpha D_x^\beta\lambda_j\delta_j^{(0)}\partial_\tau-\partial_\xi^\alpha(\tau-\lambda_j)D_x^\beta\lambda_j\delta_j^{(0)}\partial_\tau^2,\\
&\partial_{j(\alpha+\beta)}^{(0)}=D_x^{\alpha+\beta}\lambda_j\delta_j^{(0)}\partial_\tau+D_x^\alpha\lambda_jD_x^\beta\lambda_j\delta_j^{(0)}\partial_\tau^2.
\end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned}
\sum_{|\alpha|=1}\delta_j^{(\alpha)}&=\sum_{|\alpha|=1}(\partial_\xi^\alpha\partial_{j(\alpha)}^{(0)}+\partial_{j(\alpha)}^{(0)}\partial_\xi^\alpha)\\
&=\sum_{|\alpha|=1}(\partial_\xi^\alpha D_x^\alpha\delta_j^{(0)}-\partial_\xi^\alpha\delta_j^{(0)}D_x^\alpha+D_x^\alpha\delta_j^{(0)}\partial_\xi^\alpha-\delta_j^{(0)}\partial_\xi^\alpha D_x^\alpha)\\
&=\sum_{|\alpha|=1}(2D_x^\alpha\lambda_j\delta_j^{(0)}\partial_\xi^\alpha\partial_\tau-\partial_\xi^\alpha(\tau-\lambda_j)D_x^\alpha\lambda_j\delta_j^{(0)}\partial_\tau^2+\partial_\xi^\alpha D_x^\alpha\lambda_j\delta_j^{(0)}\partial_\tau),
\end{aligned}$$

$$\sum_{|\alpha|=2}\frac{1}{\alpha!}\delta_j^{(\alpha)}=\frac{1}{2}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}(\partial_\xi^{\alpha+\beta}\partial_{j(\alpha+\beta)}^{(0)}+2\partial_\xi^\alpha\partial_{j(\alpha+\beta)}^{(0)}\partial_\xi^\beta+\partial_{j(\alpha+\beta)}^{(0)}\partial_\xi^{\alpha+\beta}).$$

Pour la simplicité de l'écriture, nous écriverons, pour deux fonctions f, g de classe $C^\infty(\Omega\times R_\xi^l/\{0\})$, $f=\theta(g)$ s'il existe une troisième fonction h de classe $C^\infty(\Omega\times R_\xi^l/\{0\})$ telle qu'on a $f(t, x, \xi)=h(t, x, \xi)g(t, x, \xi)$. Par la même raison, nous abrégerons les écritures en supprimant les variables. Par exemple, nous écriverons tout simplement λ_j au lieu de $\lambda_j(t, x, \xi)$.

Théorème. *Sous l'hypothèse* (H_0), *si les termes d'ordre inférieur vérifient les trois conditions suivantes* $[C_1]$, $[C_2]$ *et* $[C_3]$, *alors le problème de Cauchy* (C) *est* $\mathcal{E}_t^\infty(\mathcal{D}_{L^2}^\infty)$*-bien posé et comme l'estimation de solution, on a, avec de certaines constantes positives* C *et* N_0,

$$|||u(t)|||_{k,j}^2 \leqq C\Big(t^{2N_0+5}\int_0^t \|f(s)\|_{k+j+4,\, j+N_0+4}^2 ds + |||u(0)|||_{k+3j+2N_0+14,0}^2 + \sum_{h=0}^{N_0+3+j} \|f(0)\|_{k+3j+2N_0+12-2h,\,h}^2\Big) \qquad (k, j \geqq 0)$$

où $\quad |||u(0)|||_{h,0}^2 = \sum_{i=0}^{m-1} \|\phi_i\|_{m-1-i+h,0}^2.$

$[C_1]$ $$\delta_j^{(0)} P_{m-1} + \frac{1}{2}\sum_{|\alpha|=1} \delta_j^{(\alpha)} P_m = t^{-1}\theta((\lambda_j-\lambda_{s+j})(\lambda_j-\lambda_{2s+j})), \qquad j=1, \cdots, s,$$

$[C_2]$ $$\delta_j^{(0)}\partial_\tau P_{m-1} + \frac{1}{2}\sum_{|\alpha|=1}\delta_j^{(\alpha)}\partial_\tau P_m + \frac{1}{6}\sum_{|\alpha|=1}\delta_j^{(0)}\partial_\tau^3 P_m(\partial_\xi^\alpha(\tau-\lambda_{2s+j})D_x^\alpha(\lambda_{s+j}-\lambda_j) + \partial_\xi^\alpha(\lambda_{s+j}-\lambda_j)D_x^\alpha\lambda_j) = t^{-1}\theta(\lambda_j-\lambda_{2s+j}), \qquad j=1, \cdots, s,$$

$[C_3]$ $$\delta_j^{(0)} P_{m-2} + \frac{1}{2}\sum_{|\alpha|=1}\delta_j^{(\alpha)} P_{m-1} + \frac{1}{4}\sum_{|\alpha|=2}\frac{1}{\alpha!}\delta_j^{(\alpha)} P_m + \frac{1}{24}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}(\partial_{j(0)}^{(\alpha+\beta)}\partial_\tau^2 P_m D_x^\alpha\lambda_j D_x^\beta\lambda_j + 2\partial_{j(\beta)}^{(\alpha)}\partial_\tau^2 P_m D_x^\alpha\lambda_j\partial_\xi^\beta(\tau-\lambda_j) + \partial_{j(\alpha+\beta)}^{(0)}\partial_\tau^2 P_m\partial_\xi^\alpha(\tau-\lambda_j)\partial_\xi^\beta(\tau-\lambda_j)) - \frac{1}{2(\lambda_j-\lambda_{2s+j})}\sum_{|\alpha|=1}(\partial_\xi^\alpha(\delta_j^{(0)}P_{m-1} + \frac{1}{2}\sum_{|\beta|=1}\delta_j^{(\beta)}P_m)D_x^\alpha\lambda_j + D_x^\alpha(\delta_j^{(0)}P_{m-1} + \frac{1}{2}\sum_{|\beta|=1}\delta_j^{(\beta)}P_m)\partial_\xi^\alpha(\tau-\lambda_{2s+j})) = t^{-2}\theta(\lambda_j-\lambda_{2s+j}), \qquad j=1, \cdots, s.$$

Remarques.

1) Si l'on a $\lambda_j \neq \lambda_{2s+j}$, pour quelques uns des $j (j=1, \cdots, s)$, alors on a, d'après H_0-4), $\lambda_{s+j} \neq \lambda_{2s+j}$ et c'est le cas de caractéristiques doubles. Si l'on suppose H_0-3) pour de tels couples $(j, 2s+j)$, alors la condition $[C_1]$ est la seule condition à considérer. Remarquons ici que, si l'on suppose H_0-3) pour de tels couples $(j, 2s+j)$, alors supposer H_0-4) pour de tels couples $(j, s+j)$, $(j, 2s+j)$ est équivalent à supposer H_0-3) pour de tels couples $(s+j, 2s+j)$.

2) On remarque aisément que l'on a, d'après H_0-4),

$$(\lambda_j-\lambda_{s+j})\partial(\lambda_j-\lambda_{2s+j}) = (\lambda_j-\lambda_{2s+j})\partial(\lambda_j-\lambda_{s+j}) + \theta((\lambda_j-\lambda_{2s+j})^2)$$

où ∂ représente la dérivation d'ordre 1, soit ∂_ξ^α, soit D_x^α.

Si nous ajoutons une autre hypothèse H_0-5)

H_0-5) $$\partial_\xi^\alpha(\lambda_j-\lambda_{s+j}) = t^{-1}\theta(\lambda_j-\lambda_{2s+j}), \qquad D_x^\alpha(\lambda_j-\lambda_{s+j}) = t^{-1}\theta(\lambda_j-\lambda_{2s+j}),$$
$$|\alpha|=1, \ j=1, \cdots, s,$$

alors, d'après la remarque faite ci-haut, les conditions $[C_1]$, $[C_2]$ et $[C_3]$ sont équivalentes à

$$[\tilde{C}_1]\quad \delta_j{}^{(0)}P_{m-1}+\frac{1}{2}\sum_{|\alpha|=1}\delta_j{}^{(\alpha)}P_m=t^{-1}\theta((\lambda_j-\lambda_{s+j})(\lambda_j-\lambda_{2s+j})),\qquad j=1,\cdots,s,$$

$$[\tilde{C}_2]\quad \delta_j{}^{(0)}\partial_\tau P_{m-1}+\frac{1}{2}\sum_{|\alpha|=1}\delta_j{}^{(\alpha)}\partial_\tau P_m=t^{-1}\theta(\lambda_j-\lambda_{2s+j}),\qquad j=1,\cdots,s,$$

$$\begin{aligned}[\tilde{C}_3]\quad & \delta_j{}^{(0)}P_{m-2}+\frac{1}{2}\sum_{|\alpha|=1}\delta_j{}^{(\alpha)}P_{m-1}+\frac{1}{4}\sum_{|\alpha|=2}\frac{1}{\alpha!}\delta_j{}^{(\alpha)}P_m+\\ & \frac{1}{24}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}(\partial_{(0)}^{(\alpha+\beta)}\partial_\tau{}^2P_mD_x{}^\alpha\lambda_jD_x{}^\beta\lambda_j+2\partial_{j(\beta)}^{(\alpha)}\partial_\tau{}^2P_mD_x{}^\alpha\lambda_j\partial_\xi{}^\beta(\tau-\lambda_j)\\ & +\partial_{j(\alpha+\beta)}^{(0)}\partial_\tau{}^2P_m\partial_\xi{}^\alpha(\tau-\lambda_j)\partial_\xi{}^\beta(\tau-\lambda_j))=t^{-2}\theta(\lambda_j-\lambda_{2s+j}),\qquad j=1,\cdots,s.\end{aligned}$$

3) Si nous ajoutons, au lieu de H_0-5), une autre hypothèse $H_0\text{-}5)_{\mathrm{bis}}$, plus forte que H_0-5),

$$H_0\text{-}5)_{\mathrm{bis}}\quad \begin{aligned}&\partial_\xi{}^\alpha(\lambda_j-\lambda_{2s+j})=t^{-1}\theta(\lambda_j-\lambda_{2s+j}),\\ &D_x{}^\alpha(\lambda_j-\lambda_{2s+j})=t^{-1}\theta(\lambda_j-\lambda_{2s+j})\end{aligned}\qquad |\alpha|=1, j=1,\cdots,s,$$

alors les conditions $[C_1]$, $[C_2]$, et $[C_3]$ sont équivalentes à

$$[C_1{}^0]\quad \delta_j{}^{(0)}(P_{m-1}-\frac{1}{2}\sum_{|\alpha|=1}\partial_\xi{}^\alpha D_x{}^\alpha P_m)=t^{-1}\theta((\lambda_j-\lambda_{s+j})(\lambda_j-\lambda_{2s+j})),\qquad j=1,\cdots,s,$$

$$[C_2{}^0]\quad \delta_j{}^{(0)}(\partial_\tau P_{m-1}-\frac{1}{2}\sum_{|\alpha|=1}\partial_\xi{}^\alpha D_x{}^\alpha\partial_\tau P_m)=t^{-1}\theta(\lambda_j-\lambda_{2s+j}),\qquad j=1,\cdots,s,$$

$$\begin{aligned}[C_3{}^0]\quad & \delta_j{}^{(0)}(P_{m-2}-\frac{1}{2}\sum_{|\alpha|=1}\partial_\xi{}^\alpha D_x{}^\alpha P_{m-1}+\frac{1}{8}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}\partial_\xi{}^{\alpha+\beta}D_x{}^{\alpha+\beta}P_m\\ & -\frac{1}{24}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}(\partial_\xi{}^{\alpha+\beta}\partial_\tau{}^2P_mD_x{}^\alpha\lambda_jD_x{}^\beta\lambda_j+2\partial_\xi{}^\alpha D_x{}^\beta\partial_\tau{}^2P_mD_x{}^\alpha\lambda_j\partial_\xi{}^\beta(\tau-\lambda_j)\\ & +D_x{}^{\alpha+\beta}\partial_\tau{}^2P_m\partial_\xi{}^\alpha(\tau-\lambda_j)\partial_\xi{}^\beta(\tau-\lambda_j)))=t^{-2}\theta(\lambda_j-\lambda_{2s+j}),\qquad j=1,\cdots,s.\end{aligned}$$

Sa vérification se fait par un calcul simple et direct si on remarque

$$\partial^3\delta_j{}^{(0)}\partial P_m=t^{-2}\theta(\lambda_j-\lambda_{2s+j}),\qquad \partial^2\delta_j{}^{(0)}\partial^2P_m=t^{-2}\theta(\lambda_j-\lambda_{2s+j})$$

où ∂ représente la dérivation d'ordre 1, soit $\partial_\xi{}^\alpha$, soit $D_x{}^\alpha$.

4) Ce serait intéressant de voir l'affirmation de notre théorème aux exemples simples.

Ex. 1) $P(t, x, D_t, D_x)=D_t{}^3-(t^{2s}D_x{}^2+at^jD_x)D_t-(bt^kD_x{}^2+ct^hD_x)$.

Le théorème affirme que si $k\geqq 2s-1$, $j\geqq s-1$ et $h\geqq s-2$, le problème de Cauchy (C) pour cet opérateur est bien posé.

Ex. 2) $$\begin{aligned}P(t, x, D_t, D_x)=&D_t{}^3-(x^{2s}D_x{}^2+a_1x^{j_1}D_x+a_2x^{j_2}D_y)D_t\\ &-(b_1x^{k_1}D_x{}^2+b_2x^{k_2}D_y{}^2+c_1x^{h_1}D_x+c_2x^{h_2}D_y).\end{aligned}$$

Par l'application du théorème nous savons que si $k_1 \geqq 2s, j_1, h_1 \geqq s$ et $a_2=b_2=c_2=0$, le problème de Cauchy (C) pour cet opérateur est bien posé. Remarquons que l'on sait d'ailleurs d'après Ivrii [1] que ces conditions aux exemples 1) et 2) sont aussi nécessaires.

§ 3. Réduction au système.

Dans la suite, nous exprimerons, pour la simplicité de l'écriture, l'opérateur pseudo-différentiel $a(t, x, D_x)$ (ou $a(t, x, D_t, D_x)$) par $a(D_x)$ (ou $a(D_t, D_x)$ respectivement). Le symbole de l'opérateur $a(D_x)$ sera écrit par $\sigma(a)$ ou tout simplement par a et sa partie homogène d'ordre j par $\sigma_j(a)$. Pour un opérateur pseudo-différentiel $a(D_x)$, $\mathcal{D}_t a(D_x)$ signifiera l'operateur pseudo-différentiel dont le symbole est $D_t\sigma(a)$.

Soeint $\lambda_j(D_x)=\lambda_j(t, x, D_x)$ l'opérateur pseudo-différentiel dont le symbole est le caractéristique $\lambda_j=\lambda_j(t, x, \xi)$ et $\varDelta_j$ l'opérateur pseudo-différentiel en x, différentiel en t, défini par $\varDelta_j=D_t-\lambda_j(D_x)$.

Soient $q_0(D_t, D_x)=1$, $q_j(D_t, D_x)=\varDelta_j\varDelta_{j-1}\cdots\varDelta_1$, $(j=1, 2, \cdots, m)$. Alors il est facile de voir que l'on a

$$q_j(D_t, D_x)=D_t{}^j+\sum_{k=1}^{j} q_j{}^k(D_x)D_t{}^{j-k}$$

avec
$$q_j{}^1(D_x)=q_{j-1}^1(D_x)-\lambda_j(D_x)$$
$$q_j{}^k(D_x)=q_{j-1}^k(D_x)+\mathcal{D}_t q_{j-1}^{k-1}(D_x)-\lambda_j(D_x)q_{j-1}^{k-1}(D_x)$$
$$(k=2, \cdots, j-1, j=1, \cdots, m)$$
$$q_j{}^j(D_x)=\mathcal{D}_t q_{j-1}^{j-1}(D_x)-\lambda_j(D_x)q_{j-1}^{j-1}(D_x)$$

et
$$\sigma_j(q_m{}^j)=\sum_{|\alpha|=j} a_{j\alpha}(t, x)\xi^\alpha.$$

De là, par récurrence, nous voyons facilement que l'on a

$$D_t{}^j=\sum_{k=0}^{j-1} r_j{}^k(D_x)q_k(D_t, D_x)+q_j(D_t, D_x)$$

avec de certains opérateurs pseudo-différentiels $r_j{}^k(D_x)$ d'ordre $j-k$.

Il est alors aisé de voir le lemme suivant.

Lemme 3.1. *Il existe des opérateurs pseudo-différentiels $a_j(D_x)$ d'ordre j tels que*

$$P(t, x, D_t, D_x)=q_m(D_t, D_x)-\sum_{j=1}^{m} a_{m-j}(D_x)q_{j-1}(D_t, D_x). \tag{3.1}$$

Quant aux symboles des $a_{m-j}(D_x)$, nous avons, par le calcul de symboles de deux membres de (3.1),

Lemme 3.2.

$$\left\{ \sum_{j=1}^{m} \sigma_{m-j}(a_{m-j})\prod_{i=1}^{j-1}(\tau-\lambda_i)=F_1-P_{m-1}\right.$$

$$(3.2)\ \left\{\begin{array}{l}\sum_{j=1}^{m}\sigma_{m-j-1}(a_{m-j})\prod_{i=1}^{j-1}(\tau-\lambda_i)-\sum_{j=1}^{m}\sigma_{m-j}(a_{m-j})\sum_{k=1}^{j-1}\prod_{i=1}^{k-1}(\tau-\lambda_i)\times\\ \sum_{|\alpha|=1}D_x{}^\alpha\lambda_k\partial_\xi{}^\alpha\prod_{i=k+1}^{j-1}(\tau-\lambda_i)+\sum_{j=1}^{m}\sum_{|\alpha|=1}\partial_\xi{}^\alpha\sigma_{m-j}(a_{m-j})D_x{}^\alpha\prod_{i=1}^{j-1}(\tau-\lambda_i)=F_2-P_{m-2}\end{array}\right.$$

où $\quad F_1=\sigma_{m-1}(q_m-P_m),\quad$ et $\quad F_2=\sigma_{m-2}(q_m-P_m)$.

Lemme 3.3. *Soient* $a(D_t, D_x)=\Delta_m\cdots\Delta_{2s+1}$, $b(D_t, D_x)=\Delta_{2s}\cdots\Delta_{s+1}$, *et* $c(D_t, D_x)=\Delta_s\cdots\Delta_1$ *en sorte que l'on a* $q_m(D_t, D_x)=a(D_t, D_x)b(D_t, D_x)c(D_t, D_x)$. *Soient encore*

$$\begin{array}{lll} a_0=\sigma_{m-2s}(a)=\prod_{i=2s+1}^{m}(\tau-\lambda_i), & a_1=\sigma_{m-2s-1}(a), & a_2=\sigma_{m-2s-2}(a)\\ b_0=\sigma_s(b)=\prod_{i=s+1}^{2s}(\tau-\lambda_i), & b_1=\sigma_{s-1}(b), & b_2=\sigma_{s-2}(b)\\ c_0=\sigma_s(c)=\prod_{i=1}^{s}(\tau-\lambda_i), & c_1=\sigma_{s-1}(c), & c_2=\sigma_{s-2}(c). \end{array}$$

Alors nous avons

$$(3.3)\ \left\{\begin{array}{l}F_1=(a_1b_0+a_0b_1)c_0+a_0b_0c_1+\sum_{|\alpha|=1}(\partial_\xi{}^\alpha(a_0b_0)D_x{}^\alpha c_0+\partial_\xi{}^\alpha a_0D_x{}^\alpha b_0c_0)\\ F_2=(a_2b_0+a_1b_1+a_0b_2)c_0+(a_1b_0+a_0b_1)c_1+a_0b_0c_2+\sum_{|\alpha|=1}(\partial_\xi{}^\alpha(a_1b_0\\ \quad+a_0b_1)D_x{}^\alpha c_0+\partial_\xi{}^\alpha(a_0b_0)D_x{}^\alpha c_1+(\partial_\xi{}^\alpha a_1D_x{}^\alpha b_0+\partial_\xi{}^\alpha a_0D_x{}^\alpha b_1)c_0\\ \quad+\partial_\xi{}^\alpha a_0D_x{}^\alpha b_0c_1)+\sum_{|\alpha+\beta|=2}\frac{1}{\alpha!\beta!}\partial_\xi{}^\alpha(\partial_\xi{}^\beta a_0D_x{}^\beta b_0)D_x{}^\alpha c_0.\end{array}\right.$$

Envisageons alors le problème de Cauchy (C).

$$(C)\quad\left\{\begin{array}{l}P(t, x, D_t, D_x)u(t, x)=f(t, x)\\ D_t^ju(0, x)=\phi_j(x)\qquad j=0, 1, \cdots, m-1.\end{array}\right.$$

Et posons

$$(3.4)\quad\left\{\begin{array}{l}u^j(t, x)=q_j(D_t, D_x)u(t, x)\qquad j=0, 1, \cdots, m-1\\ U_1(t, x)={}^t(u^0(t, x), \cdots, u^{m-1}(t, x)).\end{array}\right.$$

Alors, grâce au lemme 3.1 le problème de Cauchy (C) se réduit au suivant.

$$(C_1)\quad\left\{\begin{array}{l}D_tU_1(t, x)=T_1(D_x)U_1(t, x)+F_1(t, x)\\ U_1(0, x)=\Psi_1(x)\end{array}\right.$$

avec $T_1(D_x)=\begin{pmatrix}\lambda_1(D_x), & 1 & & 0\\ & 0 & \lambda_{m-1}(D_x), & 1\\ a_{m-1}(D_x), & \cdots\quad\cdots, & a_1(D_x), & \lambda_m(D_x)+a_0(D_x)\end{pmatrix}$

$$F_1(t, x)={}^t(0, \cdots, 0, f(t, x)),\quad \Psi_1(x)={}^t(\psi^0(x), \cdots, \psi^{m-1}(x))$$

où $\quad\psi^0(x)=\phi_0(x),\quad \psi^j(x)=\phi_j(x)+\sum_{k=1}^{j}q_j{}^k(D_x)\big|_{t=0}\phi_{j-k}(x).$

Soient Λ l'opérateur pseudo-différentiel de symbole $|\xi|$ et $E(\Lambda)$ l'opérateur matriciel défini par

$$E(\Lambda)=\begin{pmatrix} (\Lambda+1)^{m-3} & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & (\Lambda+1)^{m-s-2} & & & & \\ & & & (\Lambda+1)^{m-s-2} & & & \\ & 0 & & & \ddots & & \\ & & & & & (\Lambda+1)^{m-2s-1} & \\ & & & & & & (\Lambda+1)^{m-2s-1} \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Et posons

$$U_2(t, x)=E(\Lambda)\,U_1(t, x).$$

Alors le problème de Cauchy (C_1) se réduit au suivant.

$$(C_2)\quad \begin{cases} D_t U_2(t, x)=T_2(D_x)\,U_2(t, x)+F_2(t, x) \\ U_2(0, x)=\Psi_2(x) \end{cases}$$

avec $T_2(D_x)=\begin{pmatrix} T_2{}^1(D_x) & Q_2(D_x) & 0 \\ 0 & T_2{}^2(D_x) & R_2(D_x) \\ A_2{}^2(D_x) & A_2{}^1(D_x) & T_2{}^3(D_x)+A_2{}^0(D_x) \end{pmatrix}$

où

$$(3.5)\quad \begin{cases} T_2{}^1(D_x)=\begin{pmatrix} \tilde\lambda_1(D_x) & (\Lambda+1) & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & (\Lambda+1) \\ 0 & & & \tilde\lambda_s(D_x) \end{pmatrix} \\ \qquad =\begin{pmatrix} (\Lambda+1)^{m-3}\lambda_1(D_x)(\Lambda+1)^{-(m-3)} & (\Lambda+1) & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & (\Lambda+1) \\ 0 & & & (\Lambda+1)^{m-s-2}\lambda_s(D_x)(\Lambda+1)^{-(m-s-2)} \end{pmatrix} \\ T_2{}^2(D_x)=\begin{pmatrix} \tilde\lambda_{s+1}(D_x) & (\Lambda+1) & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & (\Lambda+1) \\ 0 & & & \tilde\lambda_{2s}(D_x) \end{pmatrix} \\ \qquad =\begin{pmatrix} (\Lambda+1)^{m-s-2}\lambda_{s+1}(D_x)(\Lambda+1)^{-(m-s-2)} & (\Lambda+1) & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & (\Lambda+1) \\ 0 & & & (\Lambda+1)^{m-2s-1}\lambda_{2s}(D_x)(\Lambda+1)^{-(m-2s-1)} \end{pmatrix} \\ T_2{}^3(D_x)=\begin{pmatrix} \tilde\lambda_{2s+1}(D_x) & (\Lambda+1) & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & (\Lambda+1) \\ 0 & & & \tilde\lambda_m(D_x) \end{pmatrix} \\ \qquad =\begin{pmatrix} (\Lambda+1)^{m-2s-1}\lambda_{2s+1}(D_x)(\Lambda+1)^{-(m-2s-1)} & (\Lambda+1) & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & (\Lambda+1) \\ 0 & & & \lambda_m(D_x) \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&Q_2(D_x)=\begin{pmatrix} & 0 \\ 1 & \end{pmatrix} \qquad R_2(D_x)=\begin{pmatrix} & 0 \\ 1 & \end{pmatrix} \\
&A_2{}^2(D_x)=\begin{pmatrix} & 0 & \\ \tilde{a}_{m-1}(D_x) & \cdots & \tilde{a}_{m-s}(D_x) \end{pmatrix} \\
&\qquad=\begin{pmatrix} & 0 & \\ a_{m-1}(D_x)(\Lambda+1)^{-(m-3)} & \cdots & a_{m-s}(D_x)(\Lambda+1)^{-(m-s-2)} \end{pmatrix} \\
&A_2{}^1(D_x)=\begin{pmatrix} & 0 & \\ \tilde{a}_{m-s-1}(D_x) & \cdots & \tilde{a}_{m-2s}(D_x) \end{pmatrix} \\
&\qquad=\begin{pmatrix} & 0 & \\ a_{m-s-1}(D_x)(\Lambda+1)^{-(m-s-2)} & \cdots & a_{m-2s}(D_x)(\Lambda+1)^{-(m-2s-1)} \end{pmatrix} \\
&A_2{}^0(D_x)=\begin{pmatrix} & 0 & \\ \tilde{a}_{m-2s-1}(D_x) & \cdots & \tilde{a}_0(D_x) \end{pmatrix} \\
&\qquad=\begin{pmatrix} & 0 & \\ a_{m-2s-1}(D_x)(\Lambda+1)^{-(m-2s-1)} & \cdots & a_0(D_x) \end{pmatrix}
\end{aligned}\right.$$

et $\quad F_2(t, x)=E(\Lambda)F_1(t, x)$

$\quad\quad \Psi_2(x)=E(\Lambda)\Psi_1(x).$

§ 4. Diagonalisation I.

Dans cette section nous voulons diagonaliser les opérateurs matriciels $T_2{}^i(D_x)$ $(i=1,2,3)$ au (C_2). Commençons par préparer, dans ce but, quelques lemmes.

Lemme 4.1. *Soient $a_{ij}(D_x)$ $(i<j,\ i, j=1, \cdots, n)$ les opérateurs pseudo-différentiels et $H(D_x)$ l'opérateur matriciel de la forme,*

$$H(D_x)=\begin{pmatrix} 1 & & a_{ij}(D_x) \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Alors $H(D_x)$ est inversible et son inverse $H^{-1}(D_x)$ est donnée par

$$H^{-1}(D_x)=\begin{pmatrix} 1 & & \tilde{a}_{ij}(D_x) \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

avec

$$\tilde{a}_{ij}(D_x)=-\sum_{\substack{i+1\leq p_1<p_2<\cdots<p_k\leq j-1 \\ k\geq 1}} (-1)^k a_{ip_1}(D_x)a_{p_1p_2}(D_x)\cdots a_{p_kj}(D_x) - a_{ij}(D_x) \tag{4.2}$$

où la sommation est prise pour tout le choix de tels $k, p_1, \cdots, p_k$ entiers.

Démonstration. Il suffit de montrer que l'opérateur matriciel $\tilde{H}(D_x)$

défini par le deuxième membre de (4.1) satisfait à l'identité $H(D_x)\tilde{H}(D_x)=\tilde{H}(D_x)H(D_x)=I$, et par suite de montrer

$$\sum_{k=i}^{j} a_{ik}(D_x)\tilde{a}_{kj}(D_x)=\sum_{k=i}^{j}\tilde{a}_{ik}(D_x)a_{kj}(D_x)=0 \qquad (i<j) \tag{4.3}$$

Or celle-ci est évidente d'après (4.2). C.Q.F.D.

Nous disons qu'un opérateur matriciel est d'ordre p si tous ses éléments sont des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre p. Etant donné un opérateur matriciel de la forme (celle de $T_2{}^i(D_x)$ au (C_2))

$$S(D_x)=\begin{pmatrix} s_1(D_x) & (A+1) & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & (A+1) \\ 0 & & & s_n(D_x) \end{pmatrix}$$

avec $s_i(D_x)$ opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 1, nous disons qu'un opérateur matriciel $N^{(p)}(D_x)$ p-diagonalise $S(D_x)$ si nous avons avec un certain opérateur matriciel $S^{(p)}(D_x)$ d'ordre $-p$,

$$(N^{(p)}(D_x)S(D_x)+\mathcal{D}_t N^{(p)}(D_x))N^{(p)}(D_x)^{-1}=\begin{pmatrix} s_1(D_x) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s_n(D_x)\end{pmatrix}+S^{(p)}(D_x).$$

Lemme 4.2. *Soit $S(D_x)$ l'opérateur matriciel de la forme,*

$$S(D_x)=\begin{pmatrix} s_1(D_x) & (A+1) & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & (A+1) \\ 0 & & & s_n(D_x) \end{pmatrix}$$

avec $s_i(D_x)$ opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 1 *et dont le symboles principaux sont distincts, c'est-à-dire,*

$\sigma_1(s_i)\neq\sigma_1(s_j)$ $(i\neq j)$ *en ce même sens que celui dans H_0-3).*

Et soit $N^{(0)}(D_x)$ l'opérateur matriciel défini par

$$N^{(0)}(D_x)=\begin{pmatrix} 1 & & n_{ij}^{(0)}(D_x) \\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}$$

avec $n_{ij}^{(0)}(D_x)$ opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 0 *et dont les symboles sont*

$$\sigma(n_{ij}^{(0)})=n_{ij}^{(0)}=|\xi|^{j-i}\prod_{k=i+1}^{j}(\sigma_1(s_i)-\sigma_1(s_k))^{-1}. \tag{4.4}$$

Alors $N^{(0)}(D_x)$ 0-diagonalise $S(D_x)$.

Remarque. Quant à l'inverse $N^{(0)}(D_x)^{-1}$ de $N^{(0)}(D_x)$, dont l'existence est assurée par le lemme 4.1, nous avons

$$N^{(0)}(D_x)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & & \tilde{n}_{ij}^{(0)}(D_x) \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$(4.5)\qquad \sigma_0(\tilde{n}_{ij}^{(0)})=|\xi|^{j-i}\prod_{k=i}^{j-1}(\sigma_1(s_j)-\sigma_1(s_k))^{-1}.$$

Nous le montrons après la démonstration du lemme 4.2.

Démonstration. Les (i, j)-éléments de $(N^{(0)}(D_x)S(D_x)+\mathcal{D}_t N^{(0)}(D_x))$ $N^{(0)}(D_x)^{-1}$, soient $\gamma_{ij}(D_x)$, sont $\gamma_{ij}(D_x)=0$ pour $i>j$, $\gamma_{ij}(D_x)=s_i(D_x)$ pour $i=j$ et pour $i<j$

$$\gamma_{ij}(D_x)=\sum_{k=i}^{j}(n_{ik}^{(0)}(D_x)s_k(D_x)+n_{ik-1}^{(0)}(D_x)(\Lambda+1)+\mathcal{D}_t n_{ik}^{(0)}(D_x))\tilde{n}_{kj}^{(0)}(D_x).$$

Et celle-ci s'écrit, grâce à l'identité (4.3),

$$\gamma_{ij}(D_x)=\sum_{k=i}^{j}(n_{ik}^{(0)}(D_x)s_k(D_x)-s_i(D_x)n_{ik}^{(0)}(D_x)+n_{ik-1}^{(0)}(D_x)(\Lambda+1)$$
$$+\mathcal{D}_t n_{ik}^{(0)}(D_x))\tilde{n}_{kj}^{(0)}(D_x).$$

Le calcul de symbole nous montre que le symbole principal $\sigma_1(\gamma_{ij})$ de $\gamma_{ij}(D_x)$ est nul. Ceci montre que les $\gamma_{ij}(D_x)$ sont d'ordre 0 pour $i<j$. C.Q.F.D.

Montrons ici (4.5). Si nous opérons $N^{(0)}(D_x)^{-1}$ par la gauche aux deux membres de $(N^{(0)}(D_x)S(D_x)+\mathcal{D}_t N^{(0)}(D_x))N^{(0)}(D_x)^{-1}=(\gamma_{ij}(D_x))$, nous avons

$$S(D_x)N^{(0)}(D_x)^{-1}+N^{(0)}(D_x)^{-1}\mathcal{D}_t N^{(0)}(D_x)N^{(0)}(D_x)^{-1}=N^{(0)}(D_x)^{-1}(\gamma_{ij}(D_x)).$$

Par le calcul de symboles principaux des (i, j)-éléments de ses deux membres nous avons

$$\sigma_1(s_i)\sigma_0(\tilde{n}_{ij}^{(0)})+|\xi|\sigma_0(\tilde{n}_{i+1j}^{(0)})=\sigma_0(\tilde{n}_{ij}^{(0)})\sigma_1(s_j).$$

Et celle-ci donne (4.5).

Lemme 4.3. *Soit $S(D_x)$ celui qui est donné dans le lemme 4.2. Soit $N^{(1)}(D_x)$ l'opérateur matriciel défini par*

$$N^{(1)}(D_x)=\begin{pmatrix} 1 & & n_{ij}^{(1)}(D_x) \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

avec $n_{ij}^{(1)}(D_x)$ opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 0 dont les symboles sont $\sigma(n_{ij}^{(1)})=n_{ij}^{(1)}=\sigma_0(n_{ij}^{(1)})+\sigma_{-1}(n_{ij}^{(1)})$ $(i<j)$ avec

$$(4.6)\quad \begin{cases} \sigma_0(n_{ij}^{(1)})=|\xi|^{j-i}\prod_{k=i+1}^{j}(\sigma_1(s_i)-\sigma_1(s_k))^{-1} \\ \sigma_{-1}(n_{ij}^{(1)})=\dfrac{1}{\sigma_1(s_i)-\sigma_1(s_j)}\{|\xi|\sigma_{-1}(n_{ij-1}^{(1)})-\sigma_0(n_{ij}^{(1)})(\sigma_0(s_i)-\sigma_0(s_j)) \\ \qquad +\sigma_0(n_{ij-1}^{(1)})+D_t\sigma_0(n_{ij}^{(1)})+\sum_{|\alpha'|=1}(\partial_\xi^{\alpha'}\sigma_0(n_{ij}^{(1)})D_x^{\alpha'}\sigma_1(s_j) \\ \qquad -\partial_\xi^{\alpha'}\sigma_1(s_i)D_x^{\alpha'}\sigma_0(n_{ij}^{(1)}))\}. \end{cases}$$

Alors $N^{(1)}(D_x)$ *1-diagonalise* $S(D_x)$.

Remarque. Quant à l'inverse $N^{(1)}(D_x)^{-1}=(\tilde{n}_{ij}^{(1)}(D_x))$ de $N^{(1)}(D_x)$, nous avons

$$(4.7)\quad \begin{cases} \sigma_0(\tilde{n}_{ij}^{(1)})=|\xi|^{j-i}\prod_{k=i}^{j-1}(\sigma_1(s_j)-\sigma_1(s_k))^{-1} \\ \sigma_{-1}(\tilde{n}_{ij}^{(1)})=\dfrac{1}{\sigma_1(s_j)-\sigma_1(s_i)}\{|\xi|\sigma_{-1}(\tilde{n}_{i+1j}^{(1)})+\sigma_0(\tilde{n}_{ij}^{(1)})(\sigma_0(s_i)-\sigma_0(s_j)) \\ \qquad +\sigma_0(\tilde{n}_{i+1j}^{(1)})-D_t\sigma_0(\tilde{n}_{ij}^{(1)})+\sum_{|\alpha'|=1}(\partial_\xi^{\alpha'}\sigma_1(s_i)D_x^{\alpha'}\sigma_0(\tilde{n}_{ij}^{(1)}) \\ \qquad -\partial_\xi^{\alpha'}\sigma_0(\tilde{n}_{ij}^{(1)})D_x^{\alpha'}\sigma_1(s_j)+\partial_\xi^{\alpha'}|\xi|D_x^{\alpha'}\sigma_0(\tilde{n}_{i+1j}^{(1)}))\}. \end{cases}$$

que nous montrons après la démonstration du lemme 4.3.

Démonstration. Posons $(\gamma_{ij}(D_x))=(N^{(1)}(D_x)S(D_x)+\mathcal{D}_tN^{(1)}(D_x))N^{(1)}(D_x)^{-1}$. Nous avons alors comme dans la démonstration du lemme 4.2, pour $i<j$,

$$\begin{aligned}\sigma_1(\gamma_{ij})=&\sum_{k=i}^{j}\sigma_1(n_{ik}^{(1)}(D_x)s_k(D_x)-s_i(D_x)n_{ik}^{(1)}(D_x)+n_{ik-1}^{(1)}(D_x)(\Lambda+1)\\ &+\mathcal{D}_tn_{ik}^{(1)}(D_x))\sigma_0(\tilde{n}_{kj}^{(1)})\\ \sigma_0(\gamma_{ij})=&\sum_{k=i}^{j}\sigma_1(n_{ik}^{(1)}(D_x)s_k(D_x)-s_i(D_x)n_{ik}^{(1)}(D_x)+n_{ik-1}^{(1)}(D_x)(\Lambda+1)\\ &+\mathcal{D}_tn_{ik}^{(1)}(D_x))\sigma_{-1}(\tilde{n}_{kj}^{(1)})+\sum_{|\alpha'|=1}\sum_{k=i}^{j}\partial_\xi^{\alpha'}\sigma_1(n_{ik}^{(1)}(D_x)s_k(D_x)\\ &-s_i(D_x)n_{ik}^{(1)}(D_x)+n_{ik-1}^{(1)}(D_x)(\Lambda+1)+\mathcal{D}_tn_{ik}^{(1)}(D_x))D_x^{\alpha'}\sigma_0(\tilde{n}_{kj}^{(1)})\\ &+\sum_{k=i}^{j}\sigma_0(n_{ik}^{(1)}(D_x)s_k(D_x)-s_i(D_x)n_{ik}^{(1)}(D_x)+n_{ik-1}^{(1)}(D_x)(\Lambda+1)\\ &+\mathcal{D}_tn_{ik}^{(1)}(D_x))\sigma_0(\tilde{n}_{kj}^{(1)}).\end{aligned}$$

Il est alors aisé de voir $\sigma_1(\gamma_{ij})=0$ et $\sigma_0(\gamma_{ij})=0$ pour $i\neq j$. C.Q.F.D.

Pour montrer (4.7), il suffit de remarquer

$$D_t\sigma_0(\tilde{n}_{ij}^{(1)})=-\sigma_0(\sum_{k=i}^{j}\sum_{m=i}^{k}\tilde{n}_{im}^{(1)}(D_x)\mathcal{D}_tn_{mk}^{(1)}(Dx)\tilde{n}_{kj}^{(1)}(D_x))$$

et de tracer le même calcul fait pour montrer (4.5).

Ayant ainsi preparé, revenons au problème de Cauchy (C_2). Les opérateurs matriciels $T_2{}^i(D_x)$ $(i=1, 2, 3)$ satisfaisant, grâce à l'hypothèse H_0-3), la condition imposée au $S(D_x)$ du lemme 4.2 ou 4.3, nous y appliquons ces lemmes. Soient $N^1(D_x)=(n_{ij}^1(D_x))$ l'opérateur matriciel 1-diagonalisant $T_2{}^1(D_x)$, $N^k(D_x)=(n_{ij}^k(D_x))$ $(k=2, 3)$ les opérateurs matriciels 0-diagonalisant $T_2{}^k(D_x)$, et $N^k(D_x)^{-1}=(\tilde{n}_{ij}^k(D_x))$ leurs inverses dont l'existence est assurée par le lemme 4.1 $(k=1, 2, 3)$. Soit $N(D_x)$ l'opérateur matriciel défini par

$$N(D_x)=\begin{pmatrix} N^1(D_x) & & 0 \\ & N^2(D_x) & \\ 0 & & N^3(D_x)\end{pmatrix}$$

Posons

$$U_3(t, x)=N(D_x)U_2(t, x)$$

Alors le problème de Cauchy (C_2) se réduit au suivant.

$$(C_3)\quad \begin{cases} D_t U_3(t, x)=T_3(D_x)U_3(t, x)+F_3(t, x) \\ U_3(0, x)=\Psi_3(x) \end{cases}$$

avec $T_3(D_x)=\begin{pmatrix} T_3{}^1(D_x) & Q_3(D_x) & 0 \\ 0 & T_3{}^2(D_x) & R_3(D_x) \\ A_3{}^2(D_x) & A_3{}^1(D_x) & T_3{}^3(D_x)+A_3{}^0(D_x) \end{pmatrix}$

où $\begin{cases} T_3{}^1(D_x)=(a^1_{ij}(D_x)) \text{ avec } a^1_{ii}(D_x)=\tilde{\lambda}_i(D_x) \text{ et } a^1_{ij}(D_x) \text{ d'ordre } -1 \text{ pour } i\neq j. \\ T_3{}^2(D_x)=(a^2_{ij}(D_x)) \text{ avec } a^2_{ii}(D_x)=\tilde{\lambda}_{s+i}(D_x) \text{ et } a^2_{ij}(D_x) \text{ d'ordre } 0 \text{ pour } i\neq j. \\ T_3{}^3(D_x)=(a^3_{ij}(D_x)) \text{ avec } a^3_{ii}(D_x)=\tilde{\lambda}_{2s+i}(D_x) \text{ et } a^3_{ij}(D_x) \text{ d'ordre } 0 \text{ pour } i\neq j. \\ Q_3(D_x)=N^1(D_x)Q_2(D_x)N^2(D_x)^{-1}, \quad R_3(D_x)=N^2(D_x)R_2(D_x)N^3(D_x)^{-1}. \\ A_3{}^2(D_x)=N^3(D_x)A_2{}^2(D_x)N^1(D_x)^{-1}, \quad A_3{}^1(D_x)=N^3(D_x)A_2{}^1(D_x)N^2(D_x)^{-1}. \\ A_3{}^0(D_x)=N^3(D_x)A_2{}^0(D_x)N^3(D_x)^{-1}. \end{cases}$

et $F_3(t, x)=N(D_x)F_2(t, x), \quad \Psi_3(x)=N(D_x)|_{t=0}\Psi_2(x).$

Nous faisons ici un petit truc utile dans la suite.

Lemme 4.4. *Soit $G^0(D_x)=(g_{ij}(D_x))$ l'opérateur $s\times s$-matriciel défini par*

$$(4.8)\quad \begin{cases} \sigma(g_{ij})=\dfrac{1}{\lambda_i-\lambda_{s+j}}\sigma_0(n^1_{is})\sigma_0(\tilde{n}^2_{1j}) \qquad i\neq j,\ i=1, \cdots, s, j=1, \cdots, s-1. \\ \sigma(g_{ii})=\dfrac{-1}{\sigma(n^2_{is})}\Big(\dfrac{1}{\lambda_1-\lambda_{2s}}\sigma_0(n^1_{is})\sigma_0(\tilde{n}^2_{1s})+\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{s-1}\sigma(g_{ik})\sigma(n^2_{ks})\Big), \quad i=1, \cdots, s-1, \\ g_{is}(D_x)=-\sum\limits_{k=1}^{s-1}g_{ik}(D_x)n^2_{ks}(D_x), \qquad i=1, \cdots, s. \end{cases}$$

Alors nous avons $G^0(D_x)R_3(D_x)=0$ et les (i, j)-éléments de

$$Q_3(D_x)+G^0(D_x)T_3{}^2(D_x)-T_3{}^1(D_x)G^0(D_x)+\mathcal{D}_tG^0(D_x).$$

sont des opérateurs d'ordre -1 pour $i\neq j$.

Démonstration. Les (i, s)-éléments de $G^0(D_x)N^2(D_x)$ étant nuls, il est clair que nous avons $G^0(D_x)R_3(D_x)=G^0(D_x)N^2(D_x)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}N^3(D_x)^{-1}=0$. Les (i, j)-éléments, soient $\gamma_{ij}(D_x)$, de $Q_3(D_x)+G^0(D_x)T_3{}^2(D_x)-T_3{}^1(D_x)G^0(D_x)+\mathcal{D}_tG^0(D_x)$ sont

$$\begin{aligned}\gamma_{ij}(D_x)=&n^1_{is}(D_x)\tilde{n}^2_{1j}(D_x)+g_{ij}(D_x)\tilde{\lambda}_{s+j}(D_x)-\tilde{\lambda}_i(D_x)g_{ij}(D_x)\\ &+\sum_{k=1}^{j-1}g_{ik}(D_x)a^2_{kj}(D_x)-\sum_{k=i+1}^{s}a^1_{ik}(D_x)g_{kj}(D_x)+\mathcal{D}_tg_{ij}(D_x).\end{aligned}$$

Si $j \leqq s-1$ et $i \neq j$, alors on voit aisément, par le calcul de symboles, que les symboles principaux $\sigma_0(\gamma_{ij})$ sont nuls. Si $j=s$, nous avons

$$\gamma_{is}(D_x)=n^1_{is}(D_x)\tilde{n}^2_{1s}(D_x)-\sum_{k=1}^{s-1}(g_{ik}(D_x)n^2_{ks}(D_x)\tilde{\lambda}_{2s}(D_x)-\tilde{\lambda}_i(D_x)g_{ik}(D_x)n^2_{ks}(D_x)$$
$$-g_{ik}(D_x)a^2_{ks}(D_x))-\sum_{k=i+1}^{s}a^1_{ik}(D_x)g_{ks}(D_x)+\mathcal{D}_t g_{is}(D_x).$$

Il est alors facile de voir que les symboles principaux $\sigma_0(\gamma_{ij})$ sont nuls pour $i<s$. C.Q.F.D.

Soit $G(D_x)$ l'opérateur matriciel défini par

$$G(D_x)=\begin{pmatrix} I & G^0(D_x) & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

Posons

$$U(t, x)=G(D_x)U_3(t, x).$$

Alors le problème de Cauchy (C_3) se réduit au suivant.

$$(C_0)\quad \begin{cases} D_t U(t, x)=T(D_x)U(t, x)+F(t, x) \\ U(0, x)=\Psi(x) \end{cases}$$

avec $T(D_x)=\begin{pmatrix} T^1(D_x) & Q(D_x) & 0 \\ 0 & T^2(D_x) & R(D_x) \\ A^2(D_x) & A^1(D_x) & T^3(D_x)+A^0(D_x) \end{pmatrix}$

où $\begin{cases} T^i(D_x)=T_3{}^i(D_x)\ (i=1, 2, 3),\quad Q(D_x)=(q_{ij}(D_x)) \text{ avec } q_{ij}(D_x) \text{ d'ordre } 0 \\ \text{pour } i=j \text{ et d'ordre } -1 \text{ pour } i\neq j,\ R(D_x)=R_3(D_x)=(r_{ij}(D_x)),\ A^2(D_x) \\ =A_3{}^2(D_x),\quad A^1(D_x)=A_3{}^1(D_x)-A_3{}^2(D_x)G^0(D_x) \text{ et } A^0(D_x)=A_3{}^0(D_x) \\ =(a^0_{ij}(D_x)), \end{cases}$

et $F(t, x)=G(D_x)F_3(t, x),\quad \Psi(x)=G(D_x)|_{t=0}\Psi_3(x).$

Résumons ce que nous venons de voir en une proposition.

Proposition 4.1. *Le problème de Cauchy (C) se réduit au problème de Cauchy (C_0) ci-haut par*

$$U_1(t, x)={}^t(u(t, x), q_1(D_t, D_x)u(t, x), \cdots, q_{m-1}(D_t, D_x)u(t, x))$$
$$U(t, x)=G(D_x)N(D_x)E(\Lambda)U_1(t, x)$$

avec l'opérateur matriciel $G(D_x)N(D_x)E(\Lambda)$ inversible.

§ 5. Diagonalisation II. (Transformation dûe à Menikoff [2])

Soient $X(D_x)=(x_{ij}(D_x))$ l'opérateur $s\times s$-matriciel d'ordre 0, $Y(D_x)=(y_{ij}(D_x))$ l'opérateur $(m-2s)\times s$-matriciel d'ordre 0, $Z(D_x)=(z_{ij}(D_x))$ l'opérateur $(m-2s)\times s$-matriciel d'ordre 0, $W(D_x)=(w_{ij}(D_x))$ l'opérateur $(m-2s)\times s$-matriciel d'ordre 1, et $M(D_x)$ l'opératuer $m\times m$-matriciel défini par

$$M(D_x)=\begin{pmatrix} t^2I & 0 & 0 \\ tX(D_x) & tI & 0 \\ tW(D_x)+Z(D_x) & Y(D_x) & I \end{pmatrix}$$

Remarquons que $M(D_x)$ est inversible pour $t>0$ et que son inverse est

$$M(D_x)^{-1}=\begin{pmatrix} t^{-2}I & 0 & 0 \\ -t^{-2}X(D_x) & t^{-1}I & 0 \\ -t^{-2}(tW(D_x)+Z(D_x)-Y(D_x)X(D_x)) & -t^{-1}Y(D_x) & I \end{pmatrix}$$

Envisageons l'équation

$$(C_0) \qquad D_tU(t, x)=T(D_x)U(t, x)+F(t, x)$$

au problème de Cauchy (C_0) et posons

$$V(t, x)=M(D_x)^{-1}U(t, x).$$

Alors l'équation (C_0) se réduit à la suivante.

$$D_tV(t, x)=\tilde{T}(D_x)V(t, x)+M(D_x)^{-1}F(t, x)$$

avec $\tilde{T}(D_x)=\begin{pmatrix} \tilde{T}^1(D_x) & t^{-1}Q(D_x) & 0 \\ B^1(D_x) & \tilde{T}^2(D_x) & t^{-1}R(D_x) \\ B^3(D_x) & B^2(D_x) & \tilde{T}^3(D_x) \end{pmatrix}$

où $\tilde{T}^1(D_x)=\begin{pmatrix} \lambda_1(D_x) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_s(D_x) \end{pmatrix}+t^{-1}\tilde{T}_0{}^1(D_x)$, avec un certain $\tilde{T}_0{}^1(D_x)$ d'ordre 0,

$\tilde{T}^2(D_x)=\begin{pmatrix} \lambda_{s+1}(D_x) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{2s}(D_x) \end{pmatrix}+t^{-1}\tilde{T}_0{}^2(D_x)$, avec un certain $\tilde{T}_0{}^2(D_x)$ d'ordre 0.

$\tilde{T}^3(D_x)=\begin{pmatrix} \lambda_{2s+1}(D_x) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m(D_x) \end{pmatrix}+t^{-1}\tilde{T}_0{}^3(D_x)$, avec un certain $\tilde{T}_0{}^3(D_x)$ d'ordre 0,

$B^1(D_x)=B_1{}^1(D_x)+t^{-1}B_0{}^1(D_x)$, avec un certain $B_0{}^1(D_x)$ d'ordre 0 et
$B_1{}^1(D_x)=R(D_x)W(D_x)-(X(D_x)T^1(D_x)-T^2(D_x)X(D_x))$

$B^2(D_x)=B_1{}^2(D_x)+t^{-1}B_0{}^2(D_x)$, avec un certain $B_0{}^2(D_x)$ d'ordre 0 et
$B_1{}^2(D_x)=tA^1(D_x)-W(D_x)Q(D_x)-(Y(D_x)T^2(D_x)-T^3(D_x)Y(D_x))$

$B^3(D_x)=tB_2{}^3(D_x)+B_1{}^3(D_x)-Y(D_x)B_1{}^1(D_x)+t^{-1}B_0{}^3(D_x)$, avec un certain $B_0{}^3(D_x)$ d'ordre 0 et
$B_2{}^3(D_x)=tA^2(D_x)-(W(D_x)T^1(D_x)-T^3(D_x)W(D_x))$
$B_1{}^3(D_x)=(tA^1(D_x)-W(D_x)Q(D_x))X(D_x)-t\mathcal{D}_tW(D_x)-t^2D_t(t^{-1})\times$
$\times W(D_x)+tA^0(D_x)W(D_x)-(Z(D_x)T^1(D_x)-T^3(D_x)Z(D_x))$.

Or nous voulons choisir $M(D_x)$ pour que les $B^i(D_x)$ $(i=1, 2, 3)$ soient t^{-1}

fois opérateurs d'ordre 0. Mais cela ne se fait sans condition. Et posons ici les conditions.

$$(Cond.\ 1)_1 \quad \sigma_2(\sum_{k=1}^{j} \tilde{a}_{m-k}(D_x)\tilde{n}_{kj}^1(D_x))=\frac{\alpha_j}{t}(\lambda_j-\lambda_{s+j})(\lambda_j-\lambda_{2s+j}), \qquad j=1, 2, \cdots, s,$$

avec $\alpha_j=\alpha_j\ (t, x, \xi)$ de classe $C^\infty(\Omega\times R_\xi^l/\{0\})$.

$$(Cond.\ 2)_1 \quad \sigma_1(\sum_{k=1}^{j} \tilde{a}_{m-s-k}(D_x)\tilde{n}_{kj}^2(D_x)-\sum_{h=1}^{s}\sum_{k=1}^{h} \tilde{a}_{m-k}(D_x)\tilde{n}_{kh}^1(D_x)g_{hj}(D_x))$$

$$=\frac{\beta_j}{t}(\lambda_{s+j}-\lambda_{2s+j}), \qquad j=1, 2, \cdots, s,$$

avec $\beta_j=\beta_j\ (t, x, \xi)$ de classe $C^\infty(\Omega\times R_\xi^l/\{0\})$.

$$(Cond.\ 3)_1 \quad t\sigma_1(\sum_{k=1}^{j} \tilde{a}_{m-k}(D_x)\tilde{n}_{kj}^1(D_x))-\alpha_j\sum_{|\alpha'|=1}(\partial_\xi^{\alpha'}(\lambda_j-\lambda_{s+j})D_x^{\alpha'}\lambda_j$$

$$-\partial_\xi^{\alpha'}\lambda_{2s+j}D_x^{\alpha'}(\lambda_j-\lambda_{s+j}))+D_t(\lambda_j-\lambda_{s+j}))=\frac{\gamma_j}{t}(\lambda_{s+j}-\lambda_{2s+j}),$$

$$j=1, 2, \cdots, s,$$

avec $\gamma_j=\gamma_j\ (t, x, \xi)$ de classe $C^\infty(\Omega\times R_\xi^l/\{0\})$.

Lemme 5.1. *Sous ces trois conditions, nous pouvons choisir l'opérateur matriciel $M(D_x)$ afin que nous ayons, avec un certain opérateur matriciel $B(D_x)$ d'ordre 0,*

$$\tilde{T}(D_x)=\begin{pmatrix} \lambda_1(D_x) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m(D_x) \end{pmatrix}+t^{-1}B(D_x).$$

Démonstration. Nous le démontrons en quatre étapes.

1) Choix de $W(D_x)$. Les (i, j)-éléments de $B_2^3(D_x)$, soient $b_{2ij}^3(D_x)$, sont

$$b_{2ij}^3(D_x)=tn_{im-2s}^3(D_x)\sum_{k=1}^{j} \tilde{a}_{m-k}(D_x)\tilde{n}_{kj}^1(D_x)-(w_{ij}(D_x)\tilde{\lambda}_j(D_x)$$

$$-\tilde{\lambda}_{2s+i}(D_x)w_{ij}(D_x))-(\sum_{k=1}^{j-1} w_{ik}(D_x)a_{kj}^1(D_x)-\sum_{k=i+1}^{m-2s} a_{ik}^3(D_x)w_{kj}(D_x)).$$

Et leurs symboles principaux sont

$$\sigma_2(b_{2ij}^3)=tn_{im-2s}^3\sigma_2(\sum_{k=1}^{j} \tilde{a}_{m-k}(D_x)\tilde{n}_{kj}^1(D_x))-\sigma_1(w_{ij})(\lambda_j-\lambda_{2s+i}).$$

Nous choisissons donc $W(D_x)$ tel que

$$\sigma(w_{ij})=w_{ij}=n_{im-2s}^3\alpha_j(\lambda_j-\lambda_{s+j})(\lambda_j-\lambda_{2s+j})(\lambda_j-\lambda_{2s+i})^{-1}.$$

Alors, grâce à $(Cond.\ 1)_1$, $\sigma_2(b_{2ij}^3)$ sont nuls.

2) Choix de $X(D_x)$. Les (i, j)-éléments de $B_1^1(D_x)$, soient $b_{1ij}^1(D_x)$, sont

$$b_{1ij}^1(D_x)=\sum_{k=1}^{m-2s} r_{ik}(D_x)w_{kj}(D_x)-(x_{ij}(D_x)\tilde{\lambda}_j(D_x)-\tilde{\lambda}_{s+i}(D_x)x_{ij}(D_x))$$

$$-(\sum_{k=1}^{j-1} x_{ik}(D_x)a_{kj}^1(D_x)-\sum_{k=i+1}^{s} a_{ik}^2(D_x)x_{kj}(D_x)).$$

Et leurs symboles principaux sont

$$\sigma_1(b^1_{1ij})=\sum_{k=1}^{m-2s}\sigma_0(r_{ik})w_{kj}-\sigma_0(x_{ij})(\lambda_j-\lambda_{s+i}).$$

Nous choisissons donc $X(D_x)$ tel que

$$\sigma(x_{ij})=x_{ij}=\sum_{k=1}^{m-2s}\sigma_0(r_{ik})w_{kj}(\lambda_j-\lambda_{s+i})^{-1}$$

Alors $\sigma_1(b^1_{1ij})$ étant nuls, $B_1{}^1(D_x)$ est un opérateur matriciel d'ordre 0.
3) Choix de $Y(D_x)$. Les (i,j)-éléments de $B_1{}^2(D_x)$, soient $b^2_{1ij}(D_x)$, sont

$$\begin{aligned}b^2_{1ij}(D_x)=&tn^3_{i\,m-2s}(D_x)(\sum_{k=1}^{j}\tilde{a}_{m-s-k}(D_x)\tilde{n}^2_{kj}(D_x)-\sum_{h=1}^{s}\sum_{k=1}^{h}\tilde{a}_{m-k}(D_x)\\&\times\tilde{n}^1_{kh}(D_x)g_{hj}(D_x))-w_{ij}(D_x)q_{jj}(D_x)-(y_{ij}(D_x)\tilde{\lambda}_{s+j}(D_x)\\&-\tilde{\lambda}_{2s+i}(D_x)y_{ij}(D_x))-(\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{s}w_{ik}(D_x)q_{kj}(D_x)\\&+\sum_{k=1}^{j-1}y_{ik}(D_x)a^2_{kj}(D_x)-\sum_{k=i+1}^{m-2s}a^3_{ik}(D_x)y_{kj}(D_x)).\end{aligned}$$

Et leurs symboles principaux sont, grâce au lemme 4.4,

$$\begin{aligned}\sigma_1(b^2_{1ij})=&tn^3_{i\,m-2s}\sigma_1(\sum_{k=1}^{j}\tilde{a}_{m-s-k}(D_x)\tilde{n}^2_{kj}(D_x)-\sum_{h=1}^{s}\sum_{k=1}^{h}\tilde{a}_{m-k}(D_x)\\&\times\tilde{n}^1_{kh}(D_x)g_{hj}(D_x))-w_{ij}\sigma_0(q_{jj})-\sigma_0(y_{ij})(\lambda_{s+j}-\lambda_{2s+i}).\end{aligned}$$

Nous choisissons donc $Y(D_x)$ tel que

$$\sigma(y_{ij})=y_{ij}=(n^3_{i\,m-2s}\beta_j(\lambda_{s+j}-\lambda_{2s+j})-w_{ij}\sigma_0(q_{jj}))(\lambda_{s+j}-\lambda_{2s+i})^{-1}.$$

Alors y_{ij}, étant, d'après H_0-4) et le choix de w_{ij}, de classe $C^\infty(\Omega\times R_\xi{}^l/\{0\})$, rendent $\sigma_1(b^2_{1ij})$ nuls en sorte que $B_1{}^2(D_x)$ ainsi que $Y(D_x)B_1{}^2(D_x)$ sont des opérateurs matriciels d'ordre 0.
4) Choix de $Z(D_x)$. Les (i,j)-éléments $b^3_{ij}(D_x)$ de $tB_2{}^3(D_x)+B_1{}^3(D_x)$ sont

$$\begin{aligned}b^3_{ij}(D_x)=&tb^3_{2ij}(D_x)+tn^3_{i\,m-2s}(D_x)\sum_{n=1}^{s}(\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_{m-s-k}(D_x)\tilde{n}^2_{kn}(D_x)\\&-\sum_{h=1}^{s}\sum_{k=1}^{h}\tilde{a}_{m-k}(D_x)\tilde{n}^1_{kh}(D_x)g_{hn}(D_x))x_{nj}(D_x)-\sum_{k=1}^{s}w_{ik}(D_x)\\&\times q_{kk}(D_x)x_{kj}(D_x)-t\mathcal{D}_tw_{ij}(D_x)-t^2D_t(t^{-1})w_{ij}(D_x)+\\&t\sum_{k=1}^{m-2s}a^0_{ik}(D_x)w_{kj}(D_x)-(z_{ij}(D_x)\tilde{\lambda}_j(D_x)-\tilde{\lambda}_{2s+i}(D_x)z_{ij}(D_x))\\&-(\sum_{h=1}^{s}\sum_{\substack{k=1\\k\neq h}}^{s}w_{ik}(D_x)q_{kh}(D_x)x_{hj}(D_x)+\sum_{k=1}^{j-1}z_{ik}(D_x)a^1_{kj}(D_x)\\&-\sum_{k=i+1}^{m-2s}a^3_{ik}(D_x)z_{kj}(D_x)).\end{aligned}$$

où $a^0_{ij}(D_x)$ sont les (i,j)-éléments de $A^0(D_x)$.
Et leurs symboles principaux sont, compte tenu de $\sigma_2(b^3_{2ij})=0$ et l'effet du

choix de $N^1(D_x)$ et $G(D_x)$,

$$\sigma_1(b^3_{ij})=t(tn^3_{im-2s}\sigma_1(\sum_{k=1}^{j}\tilde{a}_{m-k}(D_x)\tilde{n}^1_{kj}(D_x))+t\sum_{|\alpha'|=1}\partial_\xi^{\alpha'}n^3_{im-2s}\times$$
$$D_x^{\alpha'}\sigma_2(\sum_{k=1}^{j}\tilde{a}_{m-k}(D_x)\tilde{n}^1_{kj}(D_x))-w_{ij}(\sigma_0(\tilde{\lambda}_j)-\sigma_0(\tilde{\lambda}_{2s+i}))$$
$$-\sum_{|\alpha'|=1}(\partial_\xi^{\alpha'}w_{ij}D_x^{\alpha'}\lambda_j-\partial_\xi^{\alpha'}\lambda_{2s+i}D_x^{\alpha'}w_{ij})+\sum_{k=i+1}^{m-2s}\sigma_0(a^3_{ik})w_{kj})$$
$$+tn^3_{im-2s}\sum_{n=1}^{s}\sigma_1(\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_{m-s-k}(D_x)\tilde{n}^2_{kn}(D_x)-\sum_{h=1}^{s}\sum_{k=1}^{h}a_{m-k}(D_x)$$
$$\times\tilde{n}^1_{kh}(D_x)g_{hn}(D_x))x_{nj}-\sum_{k=1}^{s}w_{ik}\sigma_0(q_{kk})x_{kj}-tD_tw_{ij}$$
$$-t^2D_t(t^{-1})w_{ij}+t\sum_{k=1}^{m-2s}\sigma_0(a^0_{ik})w_{kj}-\sigma_0(z_{ij})(\lambda_j-\lambda_{2s+i}).$$

Compte tenu de (*Cond.* 1)$_1$, (*Cond.* 2)$_1$, (*Cond.* 3)$_1$, les choix de w_{ij}, x_{ij}, y_{ij}, et H_0-4), il est aisé de voir

$$(\sigma_1(b^3_{ij})+\sigma_0(z_{ij})(\lambda_j-\lambda_{2s+j}))\Big|_{i=j}=\theta(\lambda_j-\lambda_{2s+j}).$$

Nous pouvons alors choisir $\sigma_0(z_{ij})=z_{ij}$ de classe $C^\infty(\Omega\times R_\xi^l/\{0\})$ telles que $\sigma_1(b^3_{ij})=0$, en sorte que $tB_2{}^3(D_x)+B_1{}^3(D_x)$ est un opérateur matriciel d'ordre 0.

C.Q.F.D.

Remarquons que nous avons ainsi eu

$$(M(D_x)^{-1}T(D_x)+\mathcal{D}_t(M^{-1})(D_x))M(D_x)=\begin{pmatrix}\lambda_1(D_x) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m(D_x)\end{pmatrix}+t^{-1}B(D_x).$$

En prenons l'adjoint de deux membres. Alors nous avons

$$(M^*(D_x)T^*(D_x)+\mathcal{D}_t(M^*)(D_x))M^*(D_x)^{-1}=\begin{pmatrix}\lambda_1(D_x)^* & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m(D_x)^*\end{pmatrix}+t^{-1}B^*(D_x).$$

Ainsi nous avons eu, compte tenu de H_0-2)

Proposition 5.1. *Si les trois conditions* (*Cond.* 1), (*Cond.* 2), (*Cond.* 3) *sont satisfaites, l'équation* (C_0) *du problème de Cauchy* (C_0) (*l'équation* ($C_0{}^*$) *du problème de Cauchy* ($C_0{}^*$) *adjoint à* (C_0) *resp.*) *se réduit, par une transformation, à l'aide de l'opérateur matriciel* $M(D_x)$ *choisi au lemme* 5.1,

$$V(t,x)=M(D_x)^{-1}U(t,x)\qquad (V(t,x)=M^*(D_x)U(t,x)\ resp.),$$

à l'équation

$$\partial_tV(t,x)=A_0(D_x)V(t,x)+t^{-1}B_0(D_x)V(t,x)+G(t,x)$$
$$(G(t,x)=M(D_x)^{-1}F(t,x))$$

avec $A_0(D_x)$ *opérateur matriciel d'ordre* 1 *tel que* $A_0(D_x)+A_0{}^*(D_x)$ *est d'ordre* 0 *et* $B_0(D_x)$ *opérateur matriciel d'ordre 0.* (*du même type*, *resp.*).

§ 6. Estimation.

Dans cette section nous supposons que les trois conditions (*Cond.* 1), (*Cond.

2) et (*Cond.* 3) soient satisfaites. Nous envisageons le problème de Cauchy (C_0) et en estimons la solution. Préparons dans ce but quelques lemmes. Rappelons-nous que, pour une fonction $f(t, x)$ de classe $\mathcal{E}_t^\infty(\mathcal{D}_{L^2}^\infty)$, on a défini $\|f(t)\|=(\int_{R^l}|f(t, x)|^2dx)^{1/2}$, $\|f(t)\|_{k,j}=(\sum_{\substack{|\alpha'|\leq k\\ \alpha_0\leq j}}\|D_x{}^\alpha f(t)\|^2)^{1/2}$. Et definissons ici, pour un vecteur $F(t, x)={}^t(f^1(t, x), \cdots, f^m(t, x))$ avec $f^i(t, x)$ fonctions de classe $\mathcal{E}_t^\infty(\mathcal{D}_{L^2}^\infty)$,

$$\|F(t)\|=(\sum_{i=1}^m\|f^i(t)\|^2)^{1/2}, \quad \|F(t)\|_{k,j}=(\sum_{i=1}^m\|f^i(t)\|_{k,j}^2)^{1/2}.$$

Lemme 6.1. *Soit $f(t, x)$ une fonction de classe $\mathcal{E}_t^\infty(\mathcal{D}_{L^2}^\infty)$ telle que*

$$\lim_{t\to 0}\|\partial_t{}^k f(t)\|=0, \qquad k=0, 1, \cdots, p.$$

Alors nous avons

1) $\displaystyle \|f(t)\|^2\leqq\frac{1}{(k!)^2}t^{2k+1}\int_0^t\|\partial_t^{k+1}f(s)\|^2ds, \qquad k=0, 1, \cdots, p$

2) $\displaystyle \int_0^t s^{-(2k+1)}\|f(s)\|^2ds\leqq\frac{t}{(k!)^2}\int_0^t\|\partial_t^{k+1}f(s)\|^2ds, \qquad k=0, 1, \cdots, p.$

Remarque. Ce lemme est encore vrai pour un vecteur $F(t, x)$ d'éléments de classe $\mathcal{E}_t^\infty(\mathcal{D}_{L^2}^\infty)$.

Démonstration. Il suffit de montrer pour $f(t, x)$ indéfiniment dérivable de support compact, mais ceci se fait aisément à l'aide de la formule de Taylor avec le reste en forme de l'intégral. C.Q.F.D.

Lemme 6.2. *Soit $y(t)$ une fonction de classe C^1 ((0, T]) satisfaisant*

$$\lim_{t\to 0}t^{-M}y(t)=0$$

$$t\frac{d}{dt}y(t)\leqq My(t)+M_1ty(t)+t^{M+1}g(t) \tag{6.1}$$

avec $M\geqq 0$, M_1 constantes et $g(t)$ fonction intégrable sur [0, T]. *Alors nous avons, avec de certaines constantes positives C et C_1,*

1) $\displaystyle y(t)\leqq Ct^M\int_0^t g(s)ds$

2) $\displaystyle \frac{d}{dt}y(t)\leqq C_1t^{M-1}\int_0^t g(s)ds+t^Mg(t).$

Démonstration. En multipliant $t^{-(M+1)}e^{-M_1t}$ aux deux membres de (6.1), nous avons $d/dt(t^{-M}e^{-M_1t}y(t))\leqq e^{-M_1t}g(t)$. En intégrant ses deux membres de ε à t, nous avons $y(t)\leqq t^M\int_\varepsilon^t e^{M_1(t-s)}g(s)ds+t^Me^{M_1(t-\varepsilon)}\varepsilon^{-M}y(\varepsilon)$. En faisant tendre ε à 0, nous avons 1). Quant à 2), il est clair. C.Q.F.D.

Lemme 6.3. *Soient $A(D_x)=A(t, x, D_x)$ un opérateur matriciel tel que*

$A(D_x)+A^*(D_x)$ est d'ordre 0, $B(D_x)=B(t, x, D_x)$ un opérateur matriciel d'ordre 0 et $M=\sup_{t\in[0,T]}|||B(t, x, D_x)|||+\delta$, où $|||*|||$ est la norme d'opérateur dans L^2 et $\delta>0$.

Soient $F(t, x)$ et $F_0(t, x)$ deux vecteurs d'éléments de classe $\mathcal{E}_t^\infty(\mathcal{D}_{L^2}^\infty)$ tels qu'on a respectivement,

$\lim_{t\to 0}\|F(t)\|_{0,p}=0$, *avec un $p\geqq M-1$, et*

$\|F_0(t)\|^2\leqq t^{n_0}g_0(t)$, *avec un $n_0\geqq 2M$ et $g_0(t)$ fonction intégrable sur $[0,T]$. Alors la solution $W(t,x)$ d'éléments de classe $\mathcal{E}_t^\infty(\mathcal{D}_{L^2}^\infty)$ satisfaisant $\lim_{t\to 0}t^{-q}\|W(t)\|=0$, avec un $q\geqq M$, de l'équation dans Ω*

$$\partial_t W(t, x)=A(D_x)W(t, x)+\frac{1}{t}B(D_x)W(t, x)+F(t, x)+F_0(t, x),$$

elle a une estimation avec une certaine constante positive C,

$$\|W(t)\|^2\leqq C(t^{2p+3}\int_0^t\|\partial_t^{p+1}F(s)\|^2 ds+t^{n_0+1}\int_0^t g_0(s)ds), \qquad t\in[0,T].$$

Démonstration. Soit $G_\tau=[0, \tau]\times R^l$ pour un $\tau\in[0, T]$ et écrivons pour deux vecteurs $W_i(t, x)={}^t(w_i^1(t, x), \cdots, w_i^m(t, x))$ $(i=1, 2)$,

$$(W_1(t, x), W_2(t, x))_\tau=\iint_{G_\tau}\sum_{j=1}^m w_1^j(t, x)\overline{w_2^j(t, x)}dtdx.$$

Alors nous avons

$$\|W(\tau)\|^2=((A(D_x)+A^*(D_x))W(t, x), W(t, x))_\tau+(\frac{1}{t}(B(D_x)$$
$$+B^*(D_x))W(t, x), W(t, x))_\tau+2\,\mathrm{Re}((F(t, x)+F_0(t, x)), W(t, x))_\tau.$$

Or nous avons d'après l'inégalite de Schwarz et le lemme 6.1,

$$|((A(D_x)+A^*(D_x))W(t, x)), W(t, x))_\tau|\leqq M_1\tau\int_0^\tau t^{-1}\|W(t)\|^2 dt$$

$$|(t^{-1}(B(D_x)+B^*(D_x))W(t, x), W(t, x))_\tau|\leqq 2(M-\delta)\int_0^\tau t^{-1}\|W(t)\|^2 dt$$

$$|((F(t, x)+F_0(t, x)), W(t, x))_\tau|\leqq\delta\int_0^\tau t^{-1}\|W(t)\|^2 dt$$
$$+C_\delta\int_0^\tau t(\|F(t)\|^2+\|F_0(t)\|^2)dt$$

$$\int_0^\tau t\|F(t)\|^2 dt\leqq\tau^{2p+3}\int_0^\tau\|\partial_t^{p+1}F(t)\|^2 dt$$

$$\int_0^\tau t\|F_0(t)\|^2 dt\leqq\tau^{n_0+1}\int_0^\tau g_0(t)dt$$

où $M_1=\sup_{t\in[0,T]}|||A(t, x, D_x)+A^*(t, x, D_x)|||$.

Par conséquent nous avons

$$\| W(\tau)\|^2 \leqq 2M \int_0^\tau t^{-1} \| W(t)\|^2 dt + M_1 \tau \int_0^\tau t^{-1} \| W(t)\|^2 dt + \tau^{2M+1} g(\tau)$$

avec $g(\tau) = 2C_\delta (\tau^{2(p+1-M)} \int_0^\tau \| \partial_t^{p+1} F(t)\|^2 dt + \tau^{n_0 - 2M} \int_0^\tau g_0(t) dt)$.

Si nous posons

$$y(\tau) = \int_0^\tau t^{-1} \| W(t)\|^2 dt,$$

$y(\tau)$ vérifie les conditions au lemme 6.2, et par son application nous avons

$$\frac{d}{d\tau} y(\tau) \leqq C_1 \tau^{2M-1} \int_0^\tau g(s) ds + \tau^{2M} g(\tau)$$

qui donne avec une certaine constante positive C

$$\| W(\tau)\|^2 \leqq C(\tau^{2p+3} \int_0^\tau \| \partial_t^{p+1} F(t)\|^2 dt + \tau^{n_0+1} \int_0^\tau g_0(t) dt).$$

C.Q.F.D.

Ayant ainsi préparé, envisageons alors l'équation (C_0) au problème de Cauchy (C_0). Ecrivons $L(D_t, D_x) = D_t - T(D_x)$. Alors (C_0) s'écrit

$$(C_0) \qquad L(D_t, D_x) U(t, x) = F(t, x).$$

Soient $U(t, x)$ une fonction indéfiniment différentiable dans Ω et de support compact, $\hat{U}(t, x) = \sum_{n=0}^N t^n/n!\, \partial_t^n U(0, x)$ où N sera déterminé ultérieurement, $\tilde{U}(t, x) = U(t, x) - \hat{U}(t, x)$, $F(t, x) = L(D_t, D_x) U(t, x)$, et $\tilde{F}(t, x) = L(D_t, D_x) \tilde{U}(t, x) = F(t, x) - L(D_t, D_x) \hat{U}(t, x)$. Soient $M(D_x)$ l'opérateur matriciel au lemme 5.1, $\tilde{V}(t, x) = M(D_x)^{-1} \tilde{U}(t, x)$, et $\tilde{G}(t, x) = M(D_x)^{-1} \tilde{F}(t, x)$.

Nous remarquons aisément

1) $\lim_{t \to 0} t^{j-N} \| \tilde{U}(t)\|_{k,j} = 0 \qquad k \geqq 0,\ 0 \leqq j \leqq N,$

2) $\lim_{t \to 0} t^{j-N+2} \| \tilde{V}(t)\|_{k,j} = 0 \qquad k \geqq 0,\ 0 \leqq j \leqq N-2,$

3) $\lim_{t \to 0} t^{j-N+1} \| \tilde{F}(t)\|_{k,j} = 0 \qquad k \geqq 0,\ 0 \leqq j \leqq N-1,$

4) $\lim_{t \to 0} t^{j-N+3} \| \tilde{G}(t)\|_{k,j} = 0 \qquad k \geqq 0,\ 0 \leqq j \leqq N-3.$

Et d'après la proposition 5.1 nous avons

$$(\tilde{C}_0) \qquad \partial_t \tilde{V}(t, x) = A_0(D_x) \tilde{V}(t, x) + t^{-1} B_0(D_x) \tilde{V}(t, x) + \tilde{G}(t, x).$$

Soit finalement $N_0 = \sup_{t \in [0, T]} ||| B_0(t, x, D_x) ||| + \delta$ avec un $\delta > 0$, où $||| * |||$ est la norme d'opérateur dans L^2.

En différentiant l'équation $(\tilde{C}_0)$, nous avons

Lemme 6.4.

$$\begin{aligned} \partial_t(\partial_t^j \Lambda^k \tilde{V}(t, x)) &= A_k(D_x) \partial_t^j \Lambda^k \tilde{V}(t, x) + t^{-1} B_0(D_x) \partial_t^j \Lambda^k \tilde{V}(t, x) + \partial_t^j \Lambda^k \tilde{G}(t, x) \\ &\quad + t^{-1} C_{jk}(D_x) \partial_t^j \tilde{V}(t, x) + \sum_{h=0}^{j+1} t^{-h} D_{jk}^h(D_t, D_x) \tilde{V}(t, x), \end{aligned} \tag{6.2}$$

$(j, k \geqq 0)$

avec $A_k(D_x)$ *l'opérateur matriciel tel que* $A_k(D_x)+A_k^*(D_x)$ *est d'ordre* 0, $C_{jk}(D_x)$ *celui d'ordre au plus* $(k-1)$, *et* $D_{jk}^h(D_x)$ *ceux tels que* $D_{jk}^0(D_x)$ *est d'ordre en* D_t *au plus* $(j-1)$ *et d'ordre en* D_x *au plus* $(k+1)$, *que* $D_{jk}^1(D_x)$ *est d'ordre en* D_t *au plus* $(j-1)$ *et d'ordre en* D_x *au plus* k, *et que* $D_{jk}^h(D_x)$ *pour* $h\geqq 2$ *est d'ordre en* D_t *au plus* $(j-h+1)$ *et d'ordre en* D_x *au plus* k.

Démonstration. Remarquons que l'on a, par l'application de Λ^k au deux membres de $(\tilde{C}_0)$,

$$\partial_t(\Lambda^k\tilde{V}(t,x))=A_k(D_x)\Lambda^k\tilde{V}(t,x)+t^{-1}B_0(D_x)\Lambda^k\tilde{V}(t,x)+\Lambda^k\tilde{G}(t,x)$$
$$+t^{-1}\sum_{i=0}^{k-1}D_k{}^i(D_x)\Lambda^i\tilde{V}(t,x)$$

avec $A_k(D_x)=A_{k-1}(D_x)+[\Lambda, A_{k-1}(D_x)](\Lambda+1)^{-1}$, et $D_k{}^i(D_x)$ d'ordre 0, que l'on démontre facilement par récurrence.

Différentions j fois $(\tilde{C}_0)$ par rapport à t. Alors nous avons avec de certaines constantes C_i et C_{hi},

$$\partial_t(\partial_t{}^j\tilde{V}(t,x))=A_0(D_x)\partial_t{}^j\tilde{V}(t,x)+t^{-1}B_0(D_x)\partial_t{}^j\tilde{V}(t,x)+\partial_t{}^j\tilde{G}(t,x)$$
$$+\sum_{i=0}^{j-1}C_i\mathcal{D}_t{}^{j-i}A_0(D_x)\partial_t{}^i\tilde{V}(t,x)$$
$$+\sum_{h=1}^{j+1}t^{-h}\sum_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{j-h+1}C_{hi}\mathcal{D}_t{}^{j-h-i+1}B_0(D_x)\partial_t{}^i\tilde{V}(t,x).$$

Alors d'après la remarque faite au début, on démontre aisément le lemme en appliquant Λ^k à ses deux membres. C.F.Q.D.

Lemme 6.5. *Soit* $N\geqq N_0+3$. *Alors, pour* $N_1(N\geqq N_1\geqq N_0+3)$, k $(k\geqq 0)$ *et* j $(0\leqq j\leqq N_1-N_0-3)$, *nous avons avec une certaine constante* C

$$\|\tilde{V}(t)\|_{k,j}^2\leqq Ct^{2(N_1-j)-3}\int_0^t\|\tilde{G}(s)\|_{j+k,N_1-2}^2 ds.$$

Démonstration. Montrons-le par récurrence.

1) Cas $(k,j)=(0,0)$. Le lemme 6.3 est appliquable à $(\tilde{C}_0)$ avec $p=N_1-3$, $q=N_1-2$ et $F_0=0$, et par son application nous avons

$$\|\tilde{V}(t)\|^2\leqq Ct^{2N_1-3}\int_0^t\|\tilde{G}(s)\|_{0,N_1-2}^2 ds.$$

2) Cas général. Supposons que nous ayons l'estimation du lemme pour (h,i) tels que h est arbitraire pour $i\leqq j-1$ et que $h\leqq k-1$ pour $i=j$. Et nous la montrons pour $(h,i)=(k,j)$. Nous envisageons l'équation (6.2) au lemme 6.4. D'après la supposition de l'induction et le lemme 6.4, nous avons

$$\|t^{-1}C_{jk}(D_x)\partial_t{}^j\tilde{V}(t,x)+\sum_{h=0}^{j+1}t^{-h}D_{jk}^h(D_t,D_x)\tilde{V}(t,x)\|^2$$
$$\leqq Ct^{2(N_1-j)-5}\int_0^t\|\tilde{G}(s)\|_{j+k,N_1-2}^2 ds.$$

Et alors le lemme 6.3 est appliquable à (6.2) avec $p=N_1-3-j$, $q=N_1-2-j$, $F_0(t,x)=t^{-1}C_{jk}(D_x)\partial_t^j\tilde{V}(t,x)+\sum_{h=0}^{j+1}t^{-h}D_{jk}^h(D_t,D_x)\tilde{V}(t,x)$ et $n_0=2(N_1-j)-5$. Et par son application nous avons l'estimation du lemme. C.Q.F.D.

Revenant à $\tilde{U}(t,x)=M(D_x)\tilde{V}(t,x)$ et $\tilde{G}(t,x)=M(D_x)^{-1}\tilde{F}(t,x)$, nous avons, d'après ce lemme-ci,

$$\|\tilde{U}(t)\|_{k,j}^2\leqq Ct^{2(N_1-j)-3}\int_0^t t^{-4}\|\tilde{F}(t)\|_{j+k+2,N_1-2}^2 ds \quad (k\geqq 0,\ 0\leqq j\leqq N_1-N_0-3).$$

Or si $N\geqq N_1+1$, nous avons par l'application du lemme 6.1,

$$\|\tilde{F}(t)\|_{j+k+2,N_1-2}^2\leqq t^5\int_0^t\|\tilde{F}(s)\|_{j+k+2,N_1+1}^2 ds.$$

Ainsi, si $N\geqq N_1+1$ et $N_1\geqq N_0+3$, nous avons pour $k(k\geqq 0)$ et $j(0\leqq j\leqq N_1-N_0-3)$

$$\|\tilde{U}(t)\|_{k,j}^2\leqq Ct^{2(N_1-j)-1}\int_0^t\|\tilde{F}(s)\|_{j+k+2,N_1+1}^2 ds.$$

Envisageons maintenant le problème de Cauchy (C_0). Nous avons alors

$$\|\hat{U}(t)\|_{k,j}^2\leqq C(\|\Psi\|_{k+2N,0}^2+\sum_{h=0}^{N-1}\|F(0)\|_{k+2(N-1-h),h}^2) \qquad (j\leqq N)$$

$$\|L(D_t,D_x)\hat{U}(t)\|_{k,j}^2\leqq C(\|\Psi\|_{k+2N+2,0}^2+\sum_{h=0}^{N-1}\|F(0)\|_{k+2(N-h),h}^2) \qquad (j\leqq N-1).$$

En les réunissant et en choisissant $N=N_0+4+j$, $N_1=N_0+3+j$ pour j donné, nous avons

$$\|U(t)\|_{k,j}^2\leqq C(t^{2N_0+5}\int_0^t\|F(s)\|_{k+j+2,N_0+4+j}^2 ds+\|\Psi\|_{3j+k+2N_0+12,0}^2$$
$$+\sum_{h=0}^{N_0+3+j}\|F(0)\|_{3j+k+2N_0+10-2h,h}^2).$$

Si nous envisageons le problème de Cauchy $(C_0{}^*)$, adjoint de (C_0), la situation étant la même d'après le lemme 5.2, nous avons la même estimation de solution (à quelques constantes près). Ainsi nous avons eu

Proposition 6.1. *Si les trois conditions* (*Cond*, 1), (*Cond.* 2) *et* (*Cond.* 3) *sont satisfaites, alors le problème de Cauchy* (C_0) *est* $\mathcal{E}_t^\infty(\mathcal{D}_{L^2}^\infty)$*-bien posé et l'on a, comme l'estimation de solution,*

$$\|U(t)\|_{k,j}^2\leqq C(t^{2N_0+5}\int_0^t\|F(s)\|_{k+j+2,N_0+4+j}^2 ds+\|\Psi\|_{k+3j+2N_0+12,0}^2$$
$$+\sum_{h=0}^{N_0+3+j}\|F(0)\|_{k+3j+2N_0+10-2h,h}^2).$$

Envisageons alors le problème de Cauchy (C). Le problème de Cauchy (C_0) s'est réduit de (C_1) par $U(t,x)=G(D_x)N(D_x)E(\Lambda)U_1(t,x)$ et (C_1), de sa part, s'est réduit de (C) par (3.4). Et, si nous nous souvenons que $|||u(t)|||_{k,j}$

est définie par $|||u(t)|||_{k,j}^2=\sum_{i=0}^{m-1}\|\partial_t^i u(t)\|_{k+m-1-i,j}^2$, nous avons avec deux constantes C_1 et C_2,

$$C_1\|U(t)\|_{k,j}\leqq |||u(t)|||_{k,j}\leqq C_2\|U(t)\|_{k+2,j}.$$

Car, d'une part $\|U(t)\|_{k,j}$ et $\|E(\Lambda)U_1(t)\|_{k,j}$ sont équivalentes et que l'on a, d'autre part, avec deux constantes C_1 et C_2,

$$C_1\|E(\Lambda)U_1(t)\|_{k,j}\leqq |||u(t)|||_{k,j}\leqq C_2\|E(\Lambda)U_1(t)\|_{k+2,j}.$$

Nous avons donc

Proposition 6.2. *Si les trois conditions (Cond. 1), (Cond. 2) et (Cond. 3) sont satisfaites, alors le problème de Cauchy (C) est $\mathcal{E}_t^\infty(\mathcal{D}_{L^2}^\infty)$-bien posé et l'on a, comme l'estimation de solution, avec une constante positive C,*

$$|||u(t)|||_{k,j}^2\leqq C(t^{2N_0+5}\int_0^t \|f(s)\|_{k+j+4,j+N_0+4}^2 ds+|||u(0)|||_{k+3j+2N_0+14,0}^2$$
$$+\sum_{h=0}^{N_0+3+j}\|f(0)\|_{k+3j+2N_0+12-2h,h}^2), \qquad (k,j\geqq 0)$$

où $$|||u(0)|||_{h,0}^2=\sum_{i=0}^{m-1}\|\phi_i\|_{m-1-i+h,0}^2.$$

§ 7. Réformation des conditions.

La réformation des conditions nécessite un calcul long et assez ennuyeux, surtout celle de (*Cond.* 3). Nous ferons ceci par deux étapes, mais nous en envoyerons à l'appendice les parties concernant (*Cond.* 3).

Lemme 7.1. *La condition (Cond.* $1)_1$ *est équivalente à*

(*Cond.* $1)_2$ $\quad \delta_j^{(0)}(P_{m-1}-F_1)=t^{-1}\theta((\lambda_j-\lambda_{s+j})(\lambda_j-\lambda_{2s+j}))$, $j=1, 2, \cdots, s$

où $$\delta_j^{(0)}(P_{m-1}-F_1)=(P_{m-1}-F_1)(t, x, \tau, \xi)\big|_{\tau=\lambda_j(t,x,\xi)}$$
$$=-\sum_{k=1}^{j}\sigma_{m-k}(a_{m-k})\prod_{i=1}^{k-1}(\lambda_j-\lambda_i).$$

Démonstration. D'après (3.5) et (4.7) nous avons

$$\sigma_2(\tilde{a}_{m-k})=\sigma_2(a_{m-k}(D_x)(\Lambda+1)^{-(m-k-2)})=|\xi|^{-(m-k-2)}\sigma_{m-k}(a_{m-k})$$

et $$\sigma_0(\tilde{n}_{kj}^1)=|\xi|^{j-k}\prod_{i=k}^{j-1}(\lambda_j-\lambda_i)^{-1}$$ en sorte que nous avons

$$\sigma_2(\sum_{k=1}^{j}\tilde{a}_{m-k}(D_x)\tilde{n}_{kj}^1(D_x))=\prod_{i=1}^{j-1}(\lambda_j-\lambda_i)^{-1}|\xi|^{-(m-j-2)}\times$$
$$\sum_{k=1}^{j}\sigma_{m-k}(a_{m-k})\prod_{i=1}^{k-1}(\lambda_j-\lambda_i).$$

Celle-ci montre grâce au lemme 3.2 l'équivalence entre (*Cond.* $1)_1$ et (*Cond.* $1)_2$

C.Q.F.D.

Lemme 7.2. *Sous la (Cond. 1), la condition (Cond.* $2)_1$ *est équivalente à*

$(Cond.\ 2)_2 \quad \delta_{s+j}^{(0)}(P_{m-1}-F_1)=t^{-1}\theta((\lambda_j-\lambda_{s+j})(\lambda_j-\lambda_{2s+j})), \qquad j=1, 2, \cdots, s$

Démonstration. Comme ci-haut nous avons

$$\sigma_1\Big(\sum_{k=1}^{j} \tilde{a}_{m-s-k}(D_x)\tilde{n}_{kj}^2(D_x)\Big)=|\xi|^{-(m-s-j-1)}\prod_{i=1}^{j-1}(\lambda_{s+j}-\lambda_{s+i})^{-1}$$
$$\times \sum_{k=1}^{j} \sigma_{m-s-k}(a_{m-s-k}) \prod_{i=1}^{k-1}(\lambda_{s+j}-\lambda_{s+i})$$

et
$$\sigma_1\Big(\sum_{h=1}^{s} \sum_{k=1}^{h} \tilde{a}_{m-k}(D_x)\tilde{n}_{kh}^1(D_x)g_{hj}(D_x)\Big)=\sum_{k=1}^{s} |\xi|^{-(m-k-2)}\sigma_{m-k}(a_{m-k})$$
$$\times \sum_{h=k}^{s} \sigma_0(\tilde{n}_{kh}^1)\sigma_{-1}(g_{hj}).$$

Nous allons calculer $\sum_{h=k}^{s} \sigma_0(\tilde{n}_{kh}^1)\sigma_{-1}(g_{hj})$.
D'après (4.8) nous avons

$$\sigma_{-1}(g_{hj})=(\lambda_h-\lambda_{s+j})^{-1}\sigma_0(n_{hs}^1)\sigma_0(\tilde{n}_{1j}^2), \qquad h\neq j,\ h=1, \cdots, s,\ j=1, \cdots, s-1.$$
$$\sigma_{-1}(g_{jj})=-\sigma_0(n_{js}^1)(n_{js}^2)^{-1} \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{s} (\lambda_j-\lambda_{s+k})^{-1}\sigma_0(\tilde{n}_{1k}^2)n_{ks}^2, \qquad j=1, \cdots, s-1.$$
$$\sigma_{-1}(g_{hs})=(\lambda_h-\lambda_{2s})^{-1}\sigma_0(n_{hs}^1)\sigma_0(\tilde{n}_{1s}^2), \qquad h=1, \cdots, s-1.$$
$$\sigma_{-1}(g_{ss})=-\sum_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{s} (\lambda_s-\lambda_{s+k})^{-1}\sigma_0(\tilde{n}_{1k}^2)n_{ks}^2.$$

Et par suite d'après (4.4), (4.5) et (4.6), nous avons

$$\sigma_{-1}(g_{hj})=|\xi|^{s-h+j-1}(\lambda_h-\lambda_{s+j})^{-1}\prod_{i=h+1}^{s}(\lambda_h-\lambda_i)^{-1}\prod_{i=1}^{j-1}(\lambda_{s+j}-\lambda_{s+i})^{-1},$$
$$h\neq i,\ h, j=1, \cdots, s.$$
$$\sigma_{-1}(g_{jj})=-|\xi|^{s-1}\prod_{i=j+1}^{s}(\lambda_j-\lambda_i)^{-1}\prod_{i=j+1}^{s}(\lambda_{s+j}-\lambda_{s+i})\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{s}(\lambda_j-\lambda_{s+k})^{-1}$$
$$\times \prod_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{s} (\lambda_{s+k}-\lambda_{s+i})^{-1}, \qquad j=1, \cdots, s.$$

Donc nous avons d'une part pour $k>j$,

$$\sum_{h=k}^{s} \sigma_0(\tilde{n}_{kh}^1)\sigma_{-1}(g_{hj})=|\xi|^{s-k+j-1}\prod_{i=1}^{j-1}(\lambda_{s+j}-\lambda_{s+i})^{-1}\sum_{h=k}^{s}(\lambda_h-\lambda_{s+j})^{-1}\prod_{\substack{i=k\\i\neq h}}^{s}(\lambda_h-\lambda_i)^{-1},$$

et d'autre part pour $k\leqq j$,

$$\sum_{h=k}^{s} \sigma_0(\tilde{n}_{kh}^1)\sigma_{-1}(g_{hj})=|\xi|^{s-k+j-1}\prod_{i=1}^{j-1}(\lambda_{s+j}-\lambda_{s+i})^{-1}\sum_{\substack{h=k\\h\neq j}}^{s}(\lambda_h-\lambda_{s+j})^{-1}\prod_{\substack{i=k\\i\neq h}}^{s}(\lambda_h-\lambda_i)^{-1}$$
$$+|\xi|^{s-k+j-1}\prod_{\substack{i=k\\i\neq j}}^{s}(\lambda_j-\lambda_i)^{-1}\prod_{i=j+1}^{s}(\lambda_{s+j}-\lambda_{s+i})\sum_{\substack{h=1\\h\neq j}}^{s}(\lambda_{s+h}-\lambda_j)^{-1}\prod_{\substack{i=1\\i\neq h}}^{s}(\lambda_{s+h}-\lambda_{s+i})^{-1}.$$

Ici nous demandons secours au lemme suivant dont la démonstration sera donnée juste après la démonstration actuelle.

Lemme. *Si $\lambda_i\neq\lambda_j$ $(i\neq j)$, on a les identités suivantes.*

1) $$\sum_{h=k}^{s}(\lambda_h-\mu)^{-1}\prod_{\substack{i=k\\ i\neq h}}^{s}(\lambda_h-\lambda_i)^{-1}=-\prod_{i=k}^{s}(\mu-\lambda_i)^{-1}$$

2) $$\sum_{\substack{h=k\\ h\neq j}}^{s}(\lambda_h-\mu)^{-1}\prod_{\substack{i=k\\ i\neq h}}^{s}(\lambda_h-\lambda_i)^{-1}=(\lambda_j-\mu)^{-1}\Big(\prod_{\substack{i=k\\ i\neq j}}^{s}(\mu-\lambda_i)^{-1}-\prod_{\substack{i=k\\ i\neq j}}^{s}(\lambda_j-\lambda_i)^{-1}\Big).$$

Grâce à ce lemme, nous avons d'une part pour $k>j$,

$$\sum_{h=k}^{s}\sigma_0(\tilde{n}^1_{kh})\sigma_{-1}(g_{hj})=-|\xi|^{s-k+j-1}\prod_{i=k}^{s+j-1}(\lambda_{s+j}-\lambda_i)^{-1}$$

et d'autre part pour $k\leqq j$,

$$\sum_{h=k}^{s}\sigma_0(\tilde{n}^1_{kh})\sigma_{-1}(g_{hj})=-|\xi|^{s-k+j-1}\prod_{i=k}^{s+j-1}(\lambda_{s+j}-\lambda_i)^{-1}\Bigg(1-\prod_{\substack{i=k\\ i\neq j,\,s+j}}^{2s}\frac{\lambda_{s+j}-\lambda_i}{\lambda_j-\lambda_i}\Bigg).$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned}&\sigma_1\Big(\sum_{k=1}^{j}\tilde{a}_{m-s-k}(D_x)\tilde{n}^2_{kj}(D_x)-\sum_{h=k}^{s}\sum_{k=1}^{h}\tilde{a}_{m-k}(D_x)\tilde{n}^1_{kh}(D_x)g_{hj}(D_x)\Big)\\ &\quad=(\lambda_{s+j}-\lambda_j)^{-1}|\xi|^{-(m-s-j-1)}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{s+j-1}(\lambda_{s+j}-\lambda_i)^{-1}\Big(\sum_{k=1}^{s+j}\sigma_{m-k}(a_{m-k})\prod_{i=1}^{k-1}(\lambda_{s+j}-\lambda_i)\\ &\qquad-\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j,\,s+j}}^{2s}\frac{\lambda_{s+j}-\lambda_i}{\lambda_j-\lambda_i}\sum_{k=1}^{j}\sigma_{m-k}(a_{m-k})\prod_{i=1}^{k-1}(\lambda_j-\lambda_i)\Big).\end{aligned}$$

L'équivalence entre $(Cond.\ 2)_1$ et $(Cond.\ 2)_2$ est alors claire grâce à $(Cond.\ 1)$ et H_0-4) C.Q.F.D.

Démontrons le lemme ci-haut.

Démonstration du lemme. Le premier membre de la première identité s'écrit

$$\sum_{h=k}^{s}(\lambda_h-\mu)^{-1}\prod_{\substack{i=k\\ i\neq h}}^{s}(\lambda_h-\lambda_i)^{-1}=\prod_{k\leqq i<j\leqq s}(\lambda_i-\lambda_j)^{-1}\prod_{i=k}^{s}(\lambda_i-\mu)^{-1}g(\mu)$$

avec $$g(\mu)=\sum_{h=k}^{s}(-1)^{h-k}\prod_{\substack{k\leqq i<j\leqq s\\ i,j\neq h}}(\lambda_i-\lambda_j)\prod_{\substack{i=k\\ i\neq h}}^{s}(\lambda_i-\mu).$$

Or $g(\mu)$ étant un polynôme de degré $(s-k)$ et ayant la même valeur

$$g(\lambda_h)=(-1)^{s-k}\prod_{k\leqq i<j\leqq s}(\lambda_i-\lambda_j)$$

aux $(s-k+1)$ points différents $\lambda_h(h=k,\cdots,s)$, $g(\mu)$ est identique à cette valeur. Donc nous avons

$$\sum_{h=k}^{s}(\lambda_h-\mu)^{-1}\prod_{\substack{i=k\\ i\neq h}}^{s}(\lambda_h-\lambda_i)^{-1}=(-1)^{s-k}\prod_{i=k}^{s}(\lambda_i-\mu)^{-1}.$$

Celle-ci n'est que la première identité au lemme. La deuxième est claire.

C.Q.F.D.

Lemme 7.3. *Sous les conditions* (*Cond.* 1) *et* (*Cond.* 2), *la condition* (*Cond.* 3)$_1$ *est équivalente a*

$$(\textit{Cond. } 3)_2 \quad \begin{aligned} &\delta_j^{(0)}(P_{m-2}-F_2)+\frac{1}{2}\sum_{|\alpha|=1}\delta_j^{(\alpha)}(P_{m-1}-F_1) \\ &-\frac{1}{2(\lambda_j-\lambda_{2s+j})}\sum_{|\alpha|=1}(D_x{}^\alpha\lambda_j\partial_\xi{}^\alpha\delta_j^{(0)}(P_{m-1}-F_1) \\ &+\partial_\xi{}^\alpha(\tau-\lambda_{2s+j})D_x{}^\alpha\delta_j^{(0)}(P_{m-1}-F_1))=t^{-2}\theta(\lambda_j-\lambda_{2s+j}), \quad j=1, \cdots s. \end{aligned}$$

Nous envoyons la démonstration à l'appendice.
Résumons-les en une proposition.

Proposition 7.1. *Les trois conditions* (*Cond.* 1)$_1$, (*Cond.* 2)$_1$ *et* (*Cond.* 3)$_1$ *sont équivalentes aux trois conditions* (*Cond.* 1)$_2$, (*Cond.* 2)$_2$ *et* (*Cond.* 3)$_2$.
Entrons à la deuxième étape.

Lemme 7.4. *La condition* (*Cond.* 1)$_2$ *est équivalente à*

$$[C_1] \quad \delta_j^{(0)}P_{m-1}+\frac{1}{2}\sum_{|\alpha|=1}\delta_j^{(\alpha)}P_m=t^{-1}\theta((\lambda_j-\lambda_{s+j})(\lambda_j-\lambda_{2s+j})), \quad j=1, \cdots, s.$$

Démonstration. Il suffit de remarquer les suivantes.
Nous avons d'une part d'après le lemme 3.3,

$$\delta_j^{(0)}F_1=\sum_{|\alpha|=1}\delta_j^{(0)}(\partial_\xi{}^\alpha(a_0b_0)D_x{}^\alpha c_0)+\theta((\lambda_j-\lambda_{s+j})(\lambda_j-\lambda_{2s+j})).$$

Et d'autre part, par un calcul simple, nous avons pour $|\alpha|=1$,

$$(7.1) \quad \delta_j^{(\alpha)}P_m=-2\delta_j^{(0)}(\partial_\xi{}^\alpha(a_0b_0)D_x{}^\alpha c_0)+\delta_j^{(0)}(a_0b_0)\delta_j^{(\alpha)}c_0.$$

Donc nous avons

$$\delta_j^{(0)}F_1=-\frac{1}{2}\sum_{|\alpha|=1}\delta_j^{(\alpha)}P_m+\theta((\lambda_j-\lambda_{s+j})(\lambda_j-\lambda_{2s+j})). \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Lemme 7.5. *Sous la condition* (*Cond.* 1), *la condition* (*Cond.* 2)$_2$ *est équivalente à*

$$\begin{aligned} [C_2] \quad &\delta_j^{(0)}\partial_\tau P_{m-1}+\frac{1}{2}\sum_{|\alpha|=1}\delta_j^{(\alpha)}\partial_\tau P_m+\frac{1}{6}\sum_{|\alpha|=1}\delta_j^{(0)}\partial_\tau{}^3P_m(\partial_\xi{}^\alpha(\tau-\lambda_{2s+j})D_x{}^\alpha(\lambda_{s+j}-\lambda_j) \\ &+\partial_\xi{}^\alpha(\lambda_{s+j}-\lambda_j)D_x{}^\alpha\lambda_j)=t^{-1}\theta(\lambda_j-\lambda_{2s+j}), \qquad j=1, \cdots, s. \end{aligned}$$

Démonstration. $P_{m-1}-F_1$ étant un polynôme en τ, si nous écrivons $f(\tau)=P_{m-1}-F_1$, nous avons

$$f(\lambda_{s+j})-f(\lambda_j)=(\lambda_{s+j}-\lambda_j)f_\tau'(\lambda_j)+\theta((\lambda_j-\lambda_{s+j})^2).$$

Donc compte tenu de la (*Cond.* 1), la condition (*Cond.* 2)$_2$ est équivalente à

$$(7.2) \quad \delta_j^{(0)}\partial_\tau(P_{m-1}-F_1)=f_\tau'(\lambda_j)=t^{-1}\theta(\lambda_j-\lambda_{2s+j}), \qquad j=1, \cdots, s.$$

Or nous avons d'une part d'après le lemme 3.3,

$$\delta_j^{(0)}\partial_\tau F_1=\sum_{|\alpha|=1}\delta_j^{(0)}(\partial_\xi^\alpha a_0\partial_\tau b_0 D_x^\alpha c_0+\partial_\tau a_0\partial_\xi^\alpha b_0 D_x^\alpha c_0)-\sum_{|\alpha|=1}\delta_j^{(0)}(\partial_\tau a_0\partial_\tau b_0\partial_\tau c_0)$$
$$\times\partial_\xi^\alpha(\tau-\lambda_{2s+j})D_x^\alpha\lambda_{s+j}+\theta(\lambda_j-\lambda_{2s+j})$$

et d'autre part

$$\delta_j^{(\alpha)}\partial_\tau P_m=-2\delta_j^{(0)}(\partial_\xi^\alpha a_0\partial_\tau b_0 D_x^\alpha c_0+\partial_\tau a_0\partial_\xi^\alpha b_0 D_x^\alpha c_0)+2\delta_j^{(0)}(\partial_\tau a_0\partial_\tau b_0\partial_\tau c_0)$$
$$\times(\partial_\xi^\alpha(\tau-\lambda_{2s+j})D_x^\alpha\lambda_j+\partial_\xi^\alpha(\lambda_j-\lambda_{s+j})D_x^\alpha\lambda_j)+\theta(\lambda_j-\lambda_{2s+j})$$

et $\quad \delta_j^{(0)}\partial_\tau^3 P_m=6\delta_j^{(0)}(\partial_\tau a_0\partial_\tau b_0\partial_\tau c_0)+\theta(\lambda_j-\lambda_{2s+j})$.

Donc nous avons

$$\delta_j^{(0)}\partial_\tau(P_{m-1}-F_1)=\delta_j^{(0)}\partial_\tau P_{m-1}+\frac{1}{2}\sum_{|\alpha|=1}\delta_j^{(\alpha)}\partial_\tau P_m+\frac{1}{6}\sum_{|\alpha|=1}\delta_j^{(0)}\partial_\tau^3 P_m$$
$$\times(\partial_\xi^\alpha(\tau-\lambda_{2s+j})D_x^\alpha(\lambda_{s+j}-\lambda_j)+\partial_\xi^\alpha(\lambda_{s+j}-\lambda_j)D_x^\alpha\lambda_j)$$
$$+\theta(\lambda_j-\lambda_{2s+j}). \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Lemme 7.6. *La condition* (*Cond.* 3)$_2$ *est équivalente à*

$$[C_3]\quad \delta_j^{(0)}P_{m-2}+\frac{1}{2}\sum_{|\alpha|=1}\delta_j^{(\alpha)}P_{m-1}+\frac{1}{4}\sum_{|\alpha|=2}\frac{1}{\alpha!}\delta_j^{(\alpha)}P_m$$
$$+\frac{1}{24}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}(\partial_{j(0)}^{(\alpha+\beta)}\partial_\tau^2 P_m D_x^\alpha\lambda_j D_x^\beta\lambda_j+2\partial_{j(\beta)}^{(\alpha)}\partial_\tau^2 P_m D_x^\alpha\lambda_j\partial_\xi^\beta(\tau-\lambda_j)$$
$$+\partial_{j(\alpha+\beta)}^{(0)}\partial_\tau^2 P_m\partial_\xi^\alpha(\tau-\lambda_j)\partial_\xi^\beta(\tau-\lambda_j))-\frac{1}{2(\lambda_j-\lambda_{2s+j})}$$
$$\times\sum_{|\alpha|=1}(\partial_\xi^\alpha(\delta_j^{(0)}P_{m-1}+\frac{1}{2}\sum_{|\beta|=1}\delta_j^{(\beta)}P_m)D_x^\alpha\lambda_j+D_x^\alpha(\delta_j^{(0)}P_{m-1}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{|\beta|=1}\delta_j^{(\beta)}P_m)\partial_\xi^\alpha(\tau-\lambda_{2s+j}))=t^{-2}\theta(\lambda_j-\lambda_{2s+j}),\qquad j=1,\cdots,s.$$

Nous le démontrons à l'appendice. Alors nous avons eu

Proposition 7.2. *Les trois conditions* (*Cond.* 1)$_2$, (*Cond.* 2)$_2$ *et* (*Cond.* 3)$_2$ *sont équivalentes aux trois conditions* $[C_1]$, $[C_2]$ *et* $[C_3]$.

Appendice

I] Démonstration du lemme 7.3.

Commençons par calculer $\sigma_1(\sum_{k=1}^j \tilde a_{m-k}(D_x)\tilde n_{kj}^1(D_x))$.

$$\sigma_1(\sum_{k=1}^j \tilde a_{m-k}(D_x)\tilde n_{kj}^1(D_x))=\sum_{k=1}^j\sigma_2(\tilde a_{m-k})\sigma_{-1}(\tilde n_{kj}^1)+\sum_{k=1}^j\sigma_1(\tilde a_{m-k})\sigma_0(\tilde n_{kj}^1)$$
$$+\sum_{k=1}^j\sum_{|\alpha'|=1}\partial_\xi^{\alpha'}\sigma_2(\tilde a_{m-k})D_x^{\alpha'}\sigma_0(\tilde n_{kj}^1).$$

Or nous avons d'après (3.5) et (4.7),

$$\sigma_2(\tilde a_{m-k})=\sigma_{m-k}(a_{m-k})|\xi|^{-(m-k-2)}$$
$$\sigma_1(\tilde a_{m-k})=\sigma_{m-k-1}(a_{m-k})|\xi|^{-(m-k-2)}-(m-k-2)\sigma_{m-k}(a_{m-k})|\xi|^{-(m-k-1)}$$
$$\sigma_0(\tilde n_{kj}^1)=|\xi|^{j-k}\prod_{i=k}^{j-1}(\lambda_j-\lambda_i)^{-1}.$$

Nous avons donc

$$\sigma_1(\sum_{k=1}^{j}\tilde{a}_{m-k}(D_x)\tilde{n}_{kj}^1(D_x))=|\xi|^{-(m-j-2)}\sum_{k=1}^{j}\sigma_{m-k-1}(a_{m-k})\prod_{i=k}^{j-1}(\lambda_j-\lambda_i)^{-1}$$
$$+|\xi|^{-(m-j-2)}\sum_{k=1}^{j}\sum_{|\alpha'|=1}\partial_\xi^{\alpha'}\sigma_{m-k}(a_{m-k})D_x^{\alpha'}\prod_{i=k}^{j-1}(\lambda_j-\lambda_i)^{-1}$$
$$+|\xi|^{-(m-j-2)}\sum_{k=1}^{j}\sigma_{m-k}(a_{m-k})\gamma_{kj},$$

avec $\gamma_{kj}=|\xi|^{-(j-k)}\sigma_{-1}(\tilde{n}_{kj}^1)-(m-k-2)|\xi|^{-1}(\prod_{i=k}^{j-1}(\lambda_j-\lambda_i)^{-1}$

$$+\sum_{|\alpha'|=1}\partial_\xi^{\alpha'}|\xi|D_x^{\alpha'}\prod_{i=k}^{j-1}(\lambda_j-\lambda_i)^{-1}).$$

Calculons ici γ_{kj}. Or, d'après (3.5) et (4.7), nous avons

$$(\lambda_j-\lambda_k)\sigma_{-1}(\tilde{n}_{kj}^1)=|\xi|\sigma_{-1}(\tilde{n}_{k+1j}^1)+\sigma_0(\tilde{n}_{kj}^1)(\sigma_0(\tilde{\lambda}_k)-\sigma_0(\tilde{\lambda}_j))+\sigma_0(\tilde{n}_{k+1j}^1)$$
$$-D_t\sigma_0(\tilde{n}_{kj}^1)+\sum_{|\alpha'|=1}(\partial_\xi^{\alpha'}\lambda_kD_x^{\alpha'}\sigma_0(\tilde{n}_{kj}^1)$$
$$-\partial_\xi^{\alpha'}\sigma_0(\tilde{n}_{kj}^1)D_x^{\alpha'}\lambda_j+\partial_\xi^{\alpha'}|\xi|D_x^{\alpha'}\sigma_0(\tilde{n}_{k+1j}^1)),$$

où $\sigma_0(\tilde{\lambda}_k)=(m-k-2)\sum_{|\alpha'|=1}|\xi|^{-1}\partial_\xi^{\alpha'}|\xi|D_x^{\alpha'}\lambda_k.$

Nous en tirons une relation sur γ_{kj}.

$$(\lambda_j-\lambda_k)\gamma_{kj}=\gamma_{k+1j}+d_{kj},\qquad 1\leqq k\leqq j$$

avec $d_{kj}=-\sum_{|\alpha|=1}(\partial_\xi^{\alpha}\prod_{i=k}^{j-1}(\lambda_j-\lambda_i)^{-1}D_x^{\alpha}\lambda_j+\partial_\xi^{\alpha}(\tau-\lambda_k)D_x^{\alpha}\prod_{i=k}^{j-1}(\lambda_j-\lambda_i)^{-1}).$

De là, compte tenu de $\gamma_{jj}=-(m-j-2)|\xi|^{-1}$ et $d_{jj}=0$, nous concluons par récurrence,

$$\gamma_{kj}=\sum_{h=k}^{j-1}\prod_{i=k}^{h}(\lambda_j-\lambda_i)^{-1}d_{hj}-(m-j-2)|\xi|^{-1}\prod_{i=k}^{j-1}(\lambda_j-\lambda_i)^{-1},\qquad 1\leqq k\leqq j.$$

Nous avons donc

$$\sigma_1(\sum_{k=1}^{j}\tilde{a}_{m-k}(D_x)\tilde{n}_{kj}^1(D_x))=|\xi|^{-(m-j-2)}\prod_{i=1}^{j-1}(\lambda_j-\lambda_i)^{-1}(\sum_{k=1}^{j}\sigma_{m-k-1}(a_{m-k})\prod_{i=1}^{k-1}(\lambda_j-\lambda_i)$$
$$+\sum_{k=1}^{j}\sum_{|\alpha'|=1}\partial_\xi^{\alpha'}\sigma_{m-k}(a_{m-k})\prod_{i=1}^{j-1}(\lambda_j-\lambda_i)D_x^{\alpha'}\prod_{i=k}^{j-1}(\lambda_j-\lambda_i)^{-1}+\sum_{k=1}^{j}\sigma_{m-k}(a_{m-k})$$
$$\times\prod_{i=1}^{j-1}(\lambda_j-\lambda_i)\sum_{h=k}^{j-1}\prod_{i=k}^{h}(\lambda_j-\lambda_i)^{-1}d_{hj})-(m-j-2)|\xi|^{-(m-j-1)}\prod_{i=1}^{j-1}(\lambda_j-\lambda_i)^{-1}$$
$$\times\sum_{k=1}^{j}\sigma_{m-k}(a_{m-k})\prod_{i=1}^{k-1}(\lambda_j-\lambda_i).$$

Or les termes dans la sommation sur k au deuxième membre sont nuls pour $k\geqq j+1$, et le dernier terme au deuxième membre est, grâce à la (*Cond.* 1), $t^{-1}\theta((\lambda_j-\lambda_{s+j})(\lambda_j-\lambda_{2s+j}))$. Donc nous pouvons écrire

$$\sigma_1(\sum_{k=1}^{j}\tilde{a}_{m-k}(D_x)\tilde{n}_{kj}^1(D_x))=|\xi|^{-(m-j-2)}\prod_{i=1}^{j-1}(\lambda_j-\lambda_i)^{-1}(\delta_j^{(0)}(\sum_{k=1}^{m}\sigma_{m-k-1}(a_{m-k})$$
$$\times\prod_{i=1}^{k-1}(\tau-\lambda_i))+\sum_{k=1}^{m}\sum_{|\alpha'|=1}\partial_\xi^{\alpha'}\sigma_{m-k}(a_{m-k})\prod_{i=1}^{j-1}(\lambda_j-\lambda_i)D_x^{\alpha'}\prod_{i=k}^{j-1}(\lambda_j-\lambda_i)^{-1}$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sigma_{m-k}(a_{m-k})\prod_{i=1}^{j-1}(\lambda_j-\lambda_i)\sum_{h=k}^{j-1}\prod_{i=k}^{h}(\lambda_j-\lambda_i)^{-1}d_{hj})+t^{-1}\theta((\lambda_j-\lambda_{s+j})$$
$$\times(\lambda_j-\lambda_{2s+j})).$$

Allons voir de plus près les termes au deuxième membre de celle-ci. Au deuxième terme, nous avons

$$\prod_{i=1}^{j-1}(\lambda_j-\lambda_i)D_x^{\alpha'}\prod_{i=k}^{j-1}(\lambda_j-\lambda_i)^{-1}=\delta_j^{(0)}(D_x^{\alpha'}\prod_{i=1}^{k-1}(\tau-\lambda_i)+\partial_\tau\prod_{i=1}^{k-1}(\tau-\lambda_i)D_x^{\alpha'}\lambda_j$$
$$+\prod_{i=1}^{j-1}(\lambda_j-\lambda_i)D_x^{\alpha'}\prod_{i=1}^{j-1}(\lambda_j-\lambda_i)^{-1}\prod_{i=1}^{k-1}(\tau-\lambda_i)).$$

Et au troisième terme, nous avons

$$\prod_{i=1}^{j-1}(\lambda_j-\lambda_i)\sum_{h=k}^{j-1}\prod_{i=k}^{h}(\lambda_j-\lambda_i)^{-1}d_{hj}=-m_j\delta_j^{(0)}(\prod_{i=1}^{k-1}(\tau-\lambda_i))+\prod_{i=1}^{j-1}(\lambda_j-\lambda_i)m_{kj}+n_{kj},$$

avec

$$m_j=\sum_{h=1}^{j-1}\sum_{|\alpha|=1}\sum_{i=h+1}^{j-1}(\lambda_j-\lambda_i)(\partial_\xi^\alpha\prod_{i=h}^{j-1}(\lambda_j-\lambda_i)^{-1}D_x^\alpha\lambda_j+\partial_\xi^\alpha(\tau-\lambda_h)D_x^\alpha\prod_{i=h}^{j-1}(\lambda_j-\lambda_i)^{-1}),$$
$$m_{kj}=\sum_{|\alpha|=1}(\partial_\xi^\alpha\prod_{i=1}^{j-1}(\lambda_j-\lambda_i)^{-1}\delta_j^{(0)}(\partial_\tau\prod_{i=1}^{k-1}(\tau-\lambda_i))D_x^\alpha\lambda_j+D_x^\alpha\prod_{i=1}^{j-1}(\lambda_j-\lambda_i)^{-1}$$
$$\times\delta_j^{(0)}\partial_\xi^\alpha\prod_{i=1}^{k-1}(\tau-\lambda_i))$$

et $$n_{kj}=\sum_{h=1}^{k-1}\sum_{|\alpha|=1}(\prod_{i=h+1}^{k-1}(\lambda_j-\lambda_i)\partial_\xi^\alpha\prod_{i=1}^{h-1}(\lambda_j-\lambda_i)D_x^\alpha\lambda_j+\prod_{i=h+1}^{k-1}(\lambda_j-\lambda_i)$$
$$\times D_x^\alpha\prod_{i=1}^{h-1}(\lambda_j-\lambda_i)\partial_\xi^\alpha(\tau-\lambda_h)).$$

Remarquons ici que l'on a

$$\sum_{h=1}^{k-1}\prod_{i=1}^{h-1}(\tau-\lambda_i)\partial^\alpha\prod_{i=h+1}^{k-1}(\tau-\lambda_i)\partial^\beta(\tau-\lambda_h)=\sum_{h=1}^{k-1}\partial^\beta\prod_{i=1}^{h-1}(\tau-\lambda_i)\prod_{i=h+1}^{k-1}(\tau-\lambda_i)\partial^\alpha(\tau-\lambda_h)$$

où ∂^α (ou ∂^β) représente la dérivation d'ordre 1, soit ∂_ξ^α, soit D_x^α. Alors n_{kj}, de son côté, s'écrit

$$n_{kj}=\sum_{|\alpha|=1}\delta_j^{(0)}(\partial_\xi^\alpha\partial_\tau\prod_{i=1}^{k-1}(\tau-\lambda_i))D_x^\alpha\lambda_j-\sum_{h=1}^{k-1}\sum_{|\alpha|=1}\delta_j^{(0)}(\prod_{i=1}^{h-1}(\tau-\lambda_i)D_x^\alpha\lambda_h\partial_\xi^\alpha\prod_{i=h+1}^{k-1}(\tau-\lambda_i))$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{|\alpha|=1}\delta_j^{(0)}(\partial_\tau^2\prod_{i=1}^{k-1}(\tau-\lambda_i))\partial_\xi^\alpha(\tau-\lambda_j)D_x^\alpha\lambda_j.$$

Nous avons ainsi eu

$$\sigma_1(\sum_{k=1}^{j}\tilde{a}_{m-k}(D_x)\tilde{n}_{kj}^1(D_x))=|\xi|^{-(m-j-2)}\prod_{i=1}^{j-1}(\lambda_j-\lambda_i)^{-1}(\delta_j^{(0)}(\sum_{k=1}^{m}\sigma_{m-k-1}(a_{m-k})$$
$$\times\prod_{i=1}^{k-1}(\tau-\lambda_i)-\sum_{k=1}^{m}\sigma_{m-k}(a_{m-k})\sum_{h=1}^{k-1}\prod_{i=1}^{h-1}(\tau-\lambda_i)\sum_{|\alpha|=1}D_x^\alpha\lambda_h\partial_\xi^\alpha\prod_{i=h+1}^{k-1}(\tau-\lambda_i)$$
$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{|\alpha|=1}\partial_\xi^\alpha\sigma_{m-k}(a_{m-k})D_x^\alpha\prod_{i=1}^{k-1}(\tau-\lambda_i))+\sum_{|\alpha|=1}(\delta_j^{(0)}(\partial_\xi^\alpha\partial_\tau\sum_{k=1}^{m}\sigma_{m-k}(a_{m-k})$$
$$\times\prod_{i=1}^{k-1}(\tau-\lambda_i))D_x^\alpha\lambda_j-\frac{1}{2}\delta_j^{(0)}(\partial_\tau^2\sum_{k=1}^{m}\sigma_{m-k}(a_{m-k})\prod_{i=1}^{k-1}(\tau-\lambda_i))\partial_\xi^\alpha(\tau-\lambda_j)D_x^\alpha\lambda_j)$$
$$+\prod_{i=1}^{j-1}(\lambda_j-\lambda_i)\sum_{|\alpha|=1}(\delta_j^{(0)}(\partial_\xi^\alpha\sum_{k=1}^{m}\sigma_{m-k}(a_{m-k})\prod_{i=1}^{k-1}(\tau-\lambda_i)D_x^\alpha\prod_{i=1}^{j-1}(\lambda_j-\lambda_i)^{-1})$$

$$+\delta_j^{(0)}(\partial_\tau \sum_{k=1}^{m} \sigma_{m-k}(a_{m-k}) \prod_{i=1}^{k-1} (\tau-\lambda_i))\partial_\xi^\alpha \prod_{i=1}^{j-1} (\lambda_j-\lambda_i)^{-1} D_x^\alpha \lambda_j)-$$

$$m_j \delta_j^{(0)}(\sum_{k=1}^{m} \sigma_{m-k}(a_{m-k}) \prod_{i=1}^{k-1} (\tau-\lambda_i)))+t^{-1}\theta((\lambda_j-\lambda_{s+j})(\lambda_j-\lambda_{2s+j})).$$

qui s'écrit, d'après le lemme 3.2,

$$\sigma_1(\sum_{k=1}^{j} \tilde{a}_{m-k}(D_x)\tilde{n}^1_{kj}(D_x))=|\xi|^{-(m-j-2)} \prod_{i=1}^{j-1} (\lambda_j-\lambda_i)^{-1}(\delta_j^{(0)}(F_2-P_{m-2})$$

$$+\sum_{|\alpha|=1} (\delta_j^{(0)}\partial_\xi^\alpha \partial_\tau (F_1-P_{m-1}) D_x^\alpha \lambda_j-\frac{1}{2}\delta_j^{(0)}\partial_\tau^2 (F_1-P_{m-1})\partial_\xi^\alpha (\tau-\lambda_j) D_x^\alpha \lambda_j)$$

$$+\prod_{i=1}^{j-1} (\lambda_j-\lambda_i) \sum_{|\alpha|=1} (\delta_j^{(0)}\partial_\xi^\alpha (F_1-P_{m-1}) D_x^\alpha \prod_{i=1}^{j-1} (\lambda_j-\lambda_i)^{-1}+\delta_j^{(0)}\partial_\tau (F_1-P_{m-1})$$

$$\times \partial_\xi^\alpha \prod_{i=1}^{j-1} (\lambda_j-\lambda_i)^{-1} D_x^\alpha \lambda_j)-m_j\delta_j^{(0)}(F_1-P_{m-1}))+t^{-1}\theta((\lambda_j-\lambda_{s+j})(\lambda_j-\lambda_{2s+j})).$$

Or si on remarque

$$\delta_j^{(0)}\partial_\xi^\alpha (F_1-P_{m-1})=\partial_\xi^\alpha \delta_j^{(0)}(F_1-P_{m-1})+\delta_j^{(0)}\partial_\tau (F_1-P_{m-1})\partial_\xi^\alpha (\tau-\lambda_j)$$

alors les deux derniers termes sont, d'après les conditions (*Cond.* 1) et (*Cond.* 2) (vior (7.2)), $t^{-1}\theta(\lambda_j-\lambda_{2s+j})$. Et nous avons donc

$$\sigma_1(\sum_{k=1}^{j} \tilde{a}_{m-k}(D_x)\tilde{n}^1_{kj}(D_x))=|\xi|^{-(m-j-2)} \prod_{i=1}^{j-1} (\lambda_j-\lambda_i)^{-1}(\delta_j^{(0)}(F_2-P_{m-2})$$

$$+\sum_{|\alpha|=1} (\delta_j^{(0)}\partial_\xi^\alpha \partial_\tau (F_1-P_{m-1}) D_x^\alpha \lambda_j-\frac{1}{2}\delta_j^{(0)}\partial_\tau^2 (F_1-P_{m-1})\partial_\xi^\alpha (\tau-\lambda_j) D_x^\alpha \lambda_j))$$

$$+t^{-1}\theta(\lambda_j-\lambda_{2s+j}).$$

Rappelons-nous que l'on a pour $|\alpha|=1$

$$\delta_j^{(\alpha)}=\partial_\xi^\alpha \partial_{j(\alpha)}^{(0)}+\partial_{j(\alpha)}^{(0)}\partial_\xi^\alpha=2\partial_{j(0)}^{(0)} D_x^\alpha \lambda_j \partial_\tau \partial_\xi^\alpha-\partial_{j(0)}^{(0)}\partial_\xi^\alpha (\tau-\lambda_j) D_x^\alpha \lambda_j \partial_\tau^2$$

$$+\partial_{j(0)}^{(0)}\partial_\xi^\alpha D_x^\alpha \lambda_j \partial_\tau.$$

Et encore compte tenu de la (*Cond.* 2), nous avons finalement

$$\sigma_1(\sum_{k=1}^{j} \tilde{a}_{m-k}(D_x)\tilde{n}^1_{kj}(D_x))=|\xi|^{-(m-j-2)} \prod_{i=1}^{j-1} (\lambda_j-\lambda_i)^{-1}(\delta_j^{(0)}(F_2-P_{m-2})$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{|\alpha|=1} \delta_j^{(\alpha)}(F_1-P_{m-1}))+t^{-1}\theta(\lambda_j-\lambda_{2s+j}).$$

Calculons maintenant

$$a_j(\sum_{|\alpha'|=1} (\partial_\xi^{\alpha'}(\lambda_j-\lambda_{s+j}) D_x^{\alpha'}\lambda_j-\partial_\xi^{\alpha'}\lambda_{2s+j} D_x^{\alpha'}(\lambda_j-\lambda_{s+j}))+D_t(\lambda_j-\lambda_{s+j})).$$

Or la (*Cond.* 1) s'écrit

$$t|\xi|^{-(m-j-2)} \prod_{i=1}^{j-1} (\lambda_j-\lambda_i)^{-1}\delta_j^{(0)}(F_1-P_{m-1})=a_j(\lambda_j-\lambda_{s+j})(\lambda_j-\lambda_{2s+j}).$$

Si on remarque que l'on a sous l'hypothèse H_0—4),

$$(\lambda_j-\lambda_{s+j})\partial(\lambda_j-\lambda_{2s+j})=(\lambda_j-\lambda_{2s+j})\partial(\lambda_j-\lambda_{s+j})+\theta((\lambda_j-\lambda_{2s+j})^2)$$

alors en différentiant les deux membres de la (*Cond.* 1), on a

$$2(\lambda_j-\lambda_{2s+j})a_j\partial(\lambda_j-\lambda_{s+j})=t|\xi|^{-(m-j-2)}\prod_{i=1}^{j-1}(\lambda_j-\lambda_i)^{-1}\partial\delta_j^{(0)}(F_1-P_{m-1})$$
$$+t^{-1}\theta((\lambda_j-\lambda_{2s+j})^2)$$

où ∂ représente la dérivation d'ordre 1, soit D_x^{α}, soit ∂_ξ^{α}.
Nous avons donc

$$a_j\Big(\sum_{|\alpha'|=1}(\partial_\xi^{\alpha'}(\lambda_j-\lambda_{s+j})D_x^{\alpha'}\lambda_j-\partial_\xi^{\alpha'}\lambda_{2s+j}D_x^{\alpha'}(\lambda_j-\lambda_{s+j}))+D_t(\lambda_j-\lambda_{s+j})\Big)$$
$$=t|\xi|^{-(m-j-2)}\prod_{i=1}^{j-1}(\lambda_j-\lambda_i)^{-1}\frac{1}{2(\lambda_j-\lambda_{2s+j})}\sum_{|\alpha|=1}(\partial_\xi^{\alpha}\delta_j^{(0)}(F_1-P_{m-1})D_x^{\alpha}\lambda_j$$
$$+D_x^{\alpha}\delta_j^{(0)}(F_1-P_{m-1})\partial_\xi^{\alpha}(\tau-\lambda_{2s+j}))+t^{-1}\theta(\lambda_j-\lambda_{2s+j}).$$

Alors l'équivalence entre la $(Cond.\ 3)_1$ et la $(Cond.\ 3)_2$ est claire. C.Q.F.D.

II] Démonstration du lemme 7.6.

Nous le montrons par trois étapes. Soient

$$F_1^0=\sum_{|\alpha|=1}(\partial_\xi^{\alpha}(a_0b_0)D_x^{\alpha}c_0+\partial_\xi^{\alpha}a_0D_x^{\alpha}b_0c_0),\ F_1^1=(a_1b_0+a_0b_1)c_0+a_0b_0c_1,$$

$$F_2^0=\sum_{|\alpha+\beta|=2}\frac{1}{\alpha!\,\beta!}\partial_\xi^{\alpha}(\partial_\xi^{\beta}a_0D_x^{\beta}b_0)D_x^{\alpha}c_0,\ F_2^1=(a_2b_0+a_1b_1+a_0b_2)c_0$$
$$+(a_1b_0+a_0b_1)c_1+a_0b_0c_2+\sum_{|\alpha|=1}(\partial_\xi^{\alpha}(a_1b_0+a_0b_1)D_x^{\alpha}c_0+\partial_\xi^{\alpha}(a_0b_0)D_x^{\alpha}c_1$$
$$+(\partial_\xi^{\alpha}a_1D_x^{\alpha}b_0+\partial_\xi^{\alpha}a_0D_x^{\alpha}b_1)c_0+\partial_\xi^{\alpha}a_0D_x^{\alpha}b_0c_1).$$

Lemme A.1.

$$\delta_j^{(0)}F_2^1+\frac{1}{2}\sum_{|\alpha|=1}\Big(\delta_j^{(\alpha)}F_1^1-\frac{1}{(\lambda_j-\lambda_{2s+j})}(D_x^{\alpha}\lambda_j\partial_\xi^{\alpha}\delta_j^{(0)}F_1^1+\partial_\xi^{\alpha}(\tau-\lambda_{2s+j})D_x^{\alpha}\delta_j^{(0)}F_1^1)\Big)$$
$$=\theta(\lambda_j-\lambda_{2s+j}).$$

Démonstration. Remarquons d'abord les égalités suivantes. En écrivant $d_0=c_0$, $d_1=b_0$, $d_2=a_0$ et représentant par ∂ la dérivation d'ordre 1, soit ∂_ξ^{α}, soit D_x^{α}, nous avons

$$\text{(A-1)}\quad\begin{aligned}&\delta_j^{(0)}d_i=(\lambda_j-\lambda_{is+j})\delta_j^{(0)}\partial_\tau d_i+\theta((\lambda_j-\lambda_{is+j})^2) && i=0,1,2.\ j=1,\cdots,s,\\ &\delta_j^{(0)}\partial d_i=\delta_j^{(0)}\partial_\tau d_i\partial(\tau-\lambda_{is+j})+\theta(\lambda_j-\lambda_{is+j}) && i=0,1,2.\ j=1,\cdots,s,\\ &\partial\delta_j^{(0)}d_i=\delta_j^{(0)}\partial_\tau d_i\partial(\lambda_j-\lambda_{is+j})+\theta(\lambda_j-\lambda_{is+j}) && i=0,1,2.\ j=1,\cdots,s,\\ &(\lambda_j-\lambda_{s+j})\partial(\lambda_j-\lambda_{2s+j})=(\lambda_j-\lambda_{2s+j})\partial(\lambda_j-\lambda_{s+j})+\theta((\lambda_j-\lambda_{2s+j})^2) && j=1,\cdots,s.\end{aligned}$$

Alors nous avons, d'après le lemme 3.3,

$$\delta_j^{(0)}F_2^1=-\sum_{|\alpha|=1}\delta_j^{(0)}(a_1\partial_\tau b_0\partial_\tau c_0\partial_\xi^{\alpha}(\tau-\lambda_{s+j})D_x^{\alpha}\lambda_j+b_1\partial_\tau a_0\partial_\tau c_0\partial_\xi^{\alpha}(\tau-\lambda_{2s+j})D_x^{\alpha}\lambda_j$$
$$+c_1\partial_\tau a_0\partial_\tau b_0\partial_\xi^{\alpha}(\tau-\lambda_{2s+j})D_x^{\alpha}\lambda_{s+j})+\theta(\lambda_j-\lambda_{2s+j})$$

$$\delta_j^{(0)}\partial_\tau F_1^1=\theta(\lambda_j-\lambda_{2s+j})$$

$$\delta_j^{(0)}\partial_\tau\partial_\xi^{\alpha}F_1^1=\delta_j^{(0)}(a_1\partial_\tau b_0\partial_\tau c_0\partial_\xi^{\alpha}(2\tau-(\lambda_j+\lambda_{s+j}))+b_1\partial_\tau a_0\partial_\tau c_0\partial_\xi^{\alpha}(2\tau-(\lambda_j+\lambda_{2s+j}))$$
$$+c_1\partial_\tau a_0\partial_\tau b_0\partial_\xi^{\alpha}(2\tau-(\lambda_{s+j}+\lambda_{2s+j})))+\theta(\lambda_j-\lambda_{2s+j})$$

$$\partial_\xi^a \delta_j^{(0)} F_1^1 = 2(\lambda_j - \lambda_{2s+j}) \delta_j^{(0)}(c_1 \partial_\tau a_0 \partial_\tau b_0 \partial_\xi^a(\lambda_j - \lambda_{s+j})) + \theta((\lambda_j - \lambda_{2s+j})^2)$$

$$D_x^a \delta_j^{(0)} F_1^1 = 2(\lambda_j - \lambda_{2s+j}) \delta_j^{(0)}(c_1 \partial_\tau a_0 \partial_\tau b_0 D_x^a(\lambda_j - \lambda_{s+j})) + \theta((\lambda_j - \lambda_{2s+j})^2).$$

Si nous nous rappelons que l'on a pour $|\alpha| = 1$,

$$\delta_j^{(\alpha)} = 2\delta_j^{(0)} D_x^a \lambda_j \partial_\tau \partial_\xi^a - \delta_j^{(0)} \partial_\xi^a(\tau - \lambda_j) D_x^a \lambda_j \partial_\tau^2 + \delta_j^{(0)} \partial_\xi^a D_x^a \lambda_j \partial_\tau$$

nous voyons aisément l'égalité au lemme A.1. C.Q.F.D.

Grâce à ce lemme-ci la condition (*Cond.* 3)$_2$ est équivalente à

$$(Cond.\ 3)_3 \quad \delta_j^{(0)}(P_{m-2} - F_2^0) + \frac{1}{2} \sum_{|\alpha|=1} \delta_j^{(\alpha)}(P_{m-1} - F_1^0) - \frac{1}{2(\lambda_j - \lambda_{2s+j})} \sum_{|\alpha|=1} (D_x^a \lambda_j \times \partial_\xi^a \delta_j^{(0)}(P_{m-1} - F_1^0) + \partial_\xi^a(\tau - \lambda_{2s+j}) D_x^a \delta_j^{(0)}(P_{m-1} - F_1^0)) = t^{-2}\theta(\lambda_j - \lambda_{2s+j}) \quad j = 1, \cdots, s.$$

Lemme A.2.

$$D_x^a \lambda_j \partial_\xi^a \delta_j^{(0)} F_1^0 + \partial_\xi^a(\tau - \lambda_{2s+j}) D_x^a \delta_j^{(0)} F_1^0 = -\frac{1}{2}(D_x^a \lambda_j \partial_\xi^a \sum_{|\beta|=1} \delta_j^{(\beta)} P_m + \partial_\xi^a(\tau - \lambda_{2s+j}) D_x^a \sum_{|\beta|=1} \delta_j^{(\beta)} P_m) + (\lambda_j - \lambda_{2s+j}) \delta_j^{(0)}(\partial_\tau a_0 \partial_\tau b_0)(\partial_\xi^a(\lambda_j - \lambda_{s+j}) D_x^a \lambda_j + \partial_\xi^a(\tau - \lambda_{2s+j}) D_x^a(\lambda_j - \lambda_{s+j})) \sum_{|\beta|=1} \delta_j^{(\beta)} c_0 + \theta((\lambda_j - \lambda_{2s+j})^2).$$

Démonstration. Remarquons que l'on a (voir (7.1))

$$\delta_j^{(0)} F_1^0 = -\frac{1}{2} \sum_{|\beta|=1} \delta_j^{(\beta)} P_m + \frac{1}{2} \delta_j^{(0)}(a_0 b_0) \sum_{|\beta|=1} \delta_j^{(\beta)} c_0.$$

Alors, compte tenu de (A.1); on voit facilement l'égalité au lemme.

C.Q.F.D.

Grâce à ce lemme-ci, la condition (*Cond.* 3)$_3$ est équivalente à

$$(Cond.\ 3)_4 \quad \delta_j^{(0)} P_{m-2} + \frac{1}{2} \sum_{|\alpha|=1} \delta_j^{(\alpha)} P_{m-1} + G - \frac{1}{2(\lambda_j - \lambda_{2s+j})} \sum_{|\alpha|=1} (D_x^a \lambda_j \partial_\xi^a(\delta_j^{(0)} P_{m-1} + \frac{1}{2} \sum_{|\beta|=1} \delta_j^{(\beta)} P_m) + \partial_\xi^a(\tau - \lambda_{2s+j}) D_x^a(\delta_j^{(0)} P_{m-1} + \frac{1}{2} \sum_{|\beta|=1} \delta_j^{(\beta)} P_m)) = t^{-2}\theta(\lambda_j - \lambda_{2s+j}) \quad j = 1, \cdots, s,$$

avec $G = -\frac{1}{2}(2\delta_j^{(0)} F_2^0 + \sum_{|\alpha|=1} \delta_j^{(\alpha)} F_1^0 - \delta_j^{(0)}(\partial_\tau a_0 \partial_\tau b_0) \sum_{|\alpha|=1} (\partial_\xi^a(\lambda_j - \lambda_{s+j}) D_x^a \lambda_j + \partial_\xi^a(\tau - \lambda_{2s+j}) D_x^a(\lambda_j - \lambda_{s+j})) \sum_{|\beta|=1} \delta_j^{(\beta)} c_0).$

Il nous reste à calculer G. Or nous avons

Lemme A.3.

$$G = \frac{1}{4} \sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} \delta_j^{(\alpha)} P_m + \frac{1}{24} \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} (\partial_{j(0)}^{(\alpha+\beta)} \partial_\tau^2 P_m D_x^a \lambda_j D_x^\beta \lambda_j + 2\partial_{j(\beta)}^{(\alpha)} \partial_\tau^2 P_m D_x^a \lambda_j \partial_\xi^\beta(\tau - \lambda_j) + \partial_{j(\alpha+\beta)}^{(0)} \partial_\tau^2 P_m \partial_\xi^a(\tau - \lambda_j) \partial_\xi^\beta(\tau - \lambda_j)) + \theta(\lambda_j - \lambda_{2s+j}).$$

Démonstration. Remarquons d'abord que l'on a

$$F_2{}^0=\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}(\partial_\xi{}^\alpha(\partial_\xi{}^\beta a_0 D_x{}^\beta b_0)D_x{}^\alpha c_0+\partial_\xi{}^\alpha a_0\partial_\xi{}^\beta b_0 D_x{}^{\alpha+\beta}c_0)$$
$$+\sum_{|\alpha|=2}\frac{1}{\alpha!}((\partial_\xi{}^\alpha a_0 b_0+a_0\partial_\xi{}^\alpha b_0)D_x{}^\alpha c_0+\partial_\xi{}^\alpha a_0 D_x{}^\alpha b_0 c_0)$$

et par suite

$$\delta_j{}^{(0)}F_2{}^0=\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}\delta_j{}^{(0)}(\partial_\xi{}^\alpha(\partial_\xi{}^\beta a_0 D_x{}^\beta b_0)D_x{}^\alpha c_0+\partial_\xi{}^\alpha a_0\partial_\xi{}^\beta b_0 D_x{}^{\alpha+\beta}c_0)+\theta(\lambda_j-\lambda_{2s+j}).$$

Fixons ici $j(j=1,\cdots,s)$ et écrivons pour ce j fixé

$$a_0=p(\tau-\lambda_{2s+j}),\quad b_0=q(\tau-\lambda_{s+j}),\quad \text{et}\quad c_0=r(\tau-\lambda_j)$$

avec $$p=\prod_{\substack{i=2s+1\\ i\neq 2s+j}}^{m}(\tau-\lambda_i),\quad q=\prod_{\substack{i=s+1\\ i\neq s+j}}^{2s}(\tau-\lambda_i),\quad \text{et}\quad r=\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{s}(\tau-\lambda_i).$$

Nous éxprimons toutes les quantités en considération en p, q, r, λ_j et leurs dérivées. C'est un calcul assez long mais tout à fait mécanique. Grâce à ce calcul, nous avons d'une part,

$$G=\frac{1}{2}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}(\delta_j{}^{(0)}(pqr)(\partial_\xi{}^\alpha(3\tau-2(\lambda_{2s+j}+\lambda_{s+j})+\lambda_j)D_x{}^\alpha\lambda_j\partial_\xi{}^\beta D_x{}^\beta\lambda_j$$
$$+2\partial_\xi{}^\alpha(2\tau-(\lambda_{2s+j}+\lambda_{s+j}))D_x{}^\beta\lambda_j\partial_\xi{}^\beta D_x{}^\alpha\lambda_j+2\partial_\xi{}^\alpha(\tau-\lambda_{2s+j})\partial_\xi{}^\beta(\tau-\lambda_{s+j})D_x{}^{\alpha+\beta}\lambda_j$$
$$-2\partial_\xi{}^{\alpha+\beta}(\lambda_{2s+j}+\lambda_{s+j})D_x{}^\alpha\lambda_j D_x{}^\beta\lambda_j)+2\delta_j{}^{(0)}\partial_\tau(pqr)(2\partial_\xi{}^\alpha(\tau-\lambda_{2s+j})\partial_\xi{}^\beta(\tau-\lambda_{s+j})$$
$$-\partial_\xi{}^\alpha(\tau-\lambda_j)\partial_\xi{}^\beta(2\tau-(\lambda_{2s+j}+\lambda_{s+j}))D_x{}^\alpha\lambda_j D_x{}^\beta\lambda_j$$
$$+2\delta_j{}^{(0)}\partial_\xi{}^\alpha(pqr)\partial_\xi{}^\beta(3\tau-2(\lambda_{2s+j}+\lambda_{s+j})+\lambda_j)D_x{}^\alpha\lambda_j D_x{}^\beta\lambda_j)+\theta(\lambda_j-\lambda_{2s+j}).$$

Et si nous nous rappelons que l'on a

$$\delta_j{}^{(\alpha)}=\sum_{\alpha^1+\alpha^2=\alpha}\frac{\alpha!}{\alpha^1!\alpha^2!}\partial_\xi{}^{\alpha^1}\partial_{j(\alpha)}^{(0)}\partial_\xi{}^{\alpha^2}$$

et par suite

$$\sum_{|\alpha|=2}\frac{1}{\alpha!}\delta_j{}^{(\alpha)}=\frac{1}{2}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}(\partial_\xi{}^{\alpha+\beta}\partial_{j(\alpha+\beta)}^{(0)}+2\partial_\xi{}^\alpha\partial_{j(\alpha+\beta)}^{(0)}\partial_\xi{}^\beta+\partial_{j(\alpha+\beta)}^{(0)}\partial_\xi{}^{\alpha+\beta}),$$

alors nous avons d'autre part

$$\sum_{|\alpha|=2}\frac{1}{\alpha!}\delta_j{}^{(\alpha)}P_m=4G-\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}\delta_j{}^{(0)}(pqr)(\partial_\xi{}^{\alpha+\beta}\lambda_j D_x{}^\alpha\lambda_j D_x{}^\beta\lambda_j$$
$$+2\partial_\xi{}^\alpha D_x{}^\beta\lambda_j\partial_\xi{}^\beta(\tau-\lambda_j)D_x{}^\alpha\lambda_j+D_x{}^{\alpha+\beta}\lambda_j\partial_\xi{}^\alpha(\tau-\lambda_j)\partial_\xi{}^\beta(\tau-\lambda_j))+\theta(\lambda_j-\lambda_{2s+j})$$

et $$\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}(\partial_{j(0)}^{(\alpha+\beta)}\partial_\tau{}^2P_m D_x{}^\alpha\lambda_j D_x{}^\beta\lambda_j+2\partial_{j(\beta)}^{(\alpha)}\partial_\tau{}^2P_m D_x{}^\alpha\lambda_j\partial_\xi{}^\beta(\tau-\lambda_j)+\partial_{j(\alpha+\beta)}^{(0)}\partial_\tau{}^2P_m$$
$$\times\partial_\xi{}^\alpha(\tau-\lambda_j)\partial_\xi{}^\beta(\tau-\lambda_j))=6\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}\delta_j{}^{(0)}(pqr)(\partial_\xi{}^{\alpha+\beta}\lambda_j D_x{}^\alpha\lambda_j D_x{}^\beta\lambda_j+2\partial_\xi{}^\alpha D_x{}^\beta\lambda_j$$
$$\times\partial_\xi{}^\beta(\tau-\lambda_j)D_x{}^\alpha\lambda_j+D_x{}^{\alpha+\beta}\lambda_j\partial_\xi{}^\alpha(\tau-\lambda_j)\partial_\xi{}^\beta(\tau-\lambda_j))+\theta(\lambda_j-\lambda_{2s+j}).$$

Alors l'égalité au lemme est claire. C.Q.F.D.

Grâce à ce lemme, la condition (*Cond.* 3) est bien équivalente à $[C_3]$.

Ainsi le lemme 6.7 est démontré. C.Q.F.D.

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES,
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES APPLIQUEES,
L'UNIVERSITE D'EHIME.

Références

[1] V. Ja. Ivrii, The Cauchy problem for non strictly hyperbolic equations., Soviet Math. Dokl. 12 (1971) 483–486.

[2] A. Menikoff, The Cauchy problem for weakly hyperbolic equations., American Journal of Mathematics Vol. 97 No. 2 (1975). 548–558.

[3] S. Mizohata-Y. Ohya, Sur la condition de E. E. Levi concernant des équations hyperboliques., Publ. RIMS. Kyoto Univ. Ser. A 4 (1968) 511–526.

[4] S. Mizohata-Y. Ohya, Sur la condition d'hyperbolicité pour les équations à caractéristiques multiples II., Jap. J. Math. 40 (1971) 63–104.

[5] Y. Ohya, On E. E. Levi's functions for hyperbolic equations with triple characteristics., Comm. Pure Appl. Math. 25 (1972) 257–263.

[6] O. A. Oleinik, On the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations., Comm. Pure Appl. Appl. Math. 23 (1970) 569–586.