J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
26-1 (1986) 101-155

Une théorie trois-dimensionnelle des ondes de surface de l'eau et le développement de Friedrichs

Par

Tadayoshi KANO

à Gen SODA et Hideo OKAMURA
qui nous ont quitté trop tôt

§ 1. Introduction.

1.1. On va démontrer, dans cet article, l'existence locale par rapport au temps de solution analytique du problème de Cauchy pour les ondes de surface de l'eau en écoulement trois-dimensionnel irrotationnel. En s'appuyant sur ce théorème d'existence, on donnera ensuite une justification mathématique du développement de Friedrichs [8], [28], ce qui est une généralisation du résultat de [14] pour l'écoulement trois-dimensionnel.

Il s'agit en fait de résoudre les équations suivantes pour le potentiel de vitesses $\Phi=\Phi(t, x, y, z)$ et la frontière libre définie par $F(t, x, y, z)=z-\Gamma(t, x, y)=0$:

$$\Phi_{xx}+\Phi_{yy}+\Phi_{zz}=0 \quad \text{dans} \quad \Omega(t), \tag{1.1}$$

$$\Phi_z=0, \quad (x, y)\in \boldsymbol{R}^2, \quad z=0, \tag{1.2}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_t+\frac{1}{2}(\Phi_x^2+\Phi_y^2+\Phi_z^2)+gz=0 && (1.3)\\ &\Gamma_t+\Gamma_x\Phi_x+\Gamma_y\Phi_y-\Phi_z=0 && (1.4)\end{aligned}\right\} z=\Gamma(t, x, y)$$

où $\Omega(t)=\{(x, y, z): (x, y)\in \boldsymbol{R}^2, 0<z<\Gamma(t, x, y)\}$, $t>0$, est le domaine occupé par l'eau, en connaissant le domaine $\Omega(0)$ pour $t=0$ défini par

$$\Phi(0, x, y, z)=\Phi_0(x, y, z): \text{harmonique}, \tag{1.5}$$

$$\Gamma(0, x, y)=\Gamma_0(x, y)>0: \text{analytique}, \tag{1.6}$$

g: la constante de gravité.

On résoudra dans ce qui suit le problème (1.1)–(1.6) sous la forme non-dimensionnelle suivante dépendant du paramètre non-dimensionnel $\delta=h/\lambda$, le

Communiqué par Prof. Mizohata, le 8 Octobre 1984.

rapport de la profondeur moyenne h de l'eau à la longueur[1] des ondes λ:

$$\delta^2(\Phi_{xx}+\Phi_{yy})+\Phi_{zz}=0, \quad \text{dans} \quad \Omega_\delta(t), \tag{1.7}$$

$$\Phi_z=0, \quad (x, y)\in \boldsymbol{R}^2, \quad z=0, \tag{1.8}$$

$$\left.\begin{aligned} &\delta^2\left(\Phi_t+\frac{1}{2}(\Phi_x^2+\Phi_y^2)+z\right)+\frac{1}{2}\Phi_z^2=0 && (1.9)\\ &\delta^2(\Gamma_t+\Gamma_x\Phi_x+\Gamma_y\Phi_y)-\Phi_z=0 && (1.10)\end{aligned}\right\} z=\Gamma,$$

avec

$$\Phi(0, x, y, z)=\Phi_0(x, y, z), \tag{1.11}$$

$$\Gamma(0, x, y)=\Gamma_0(x, y)>0. \tag{1.12}$$

Ayant une solution analytique $\{\Phi^\delta(t), \Gamma^\delta(t)\}$ de (1.7)–(1.12), on démontrera qu'elle est indéfiniment différentiable par rapport à $\delta\in[0, 1]$ dans une classe de fonctions analytiques. D'où une justification mathématique du développement de Friedrichs comme développement asymptotique par rapport à $\delta\in[0, 1]$. Ce développement de $\{\Phi^\delta(t), \Gamma^\delta(t)\}$ en série entière par rapport à δ^2 a été proposé par Friedrichs en 1948, sans démontrer sa légitimité mathématique, comme une méthode systématique pour dériver des équations originales d'Euler les équations des ondes de surface en eau peu profonde [8], [28].

On a ainsi la limite

$$\{\Phi^0(t, x, y, z), \Gamma^0(t, x, y)\}=\lim_{\delta\downarrow 0}\{\Phi^\delta(t, x, y, z), \Gamma^\delta(t, x, y)\}$$

qui satisfait aux équations des ondes en eau peu profonde sur $z=\Gamma^0(t, x, y)$:

$$\begin{cases} \Phi_t^0+\dfrac{1}{2}(\Phi_x^{0^2}+\Phi_y^{0^2})+\Gamma^0=0, \\ \Gamma_t^0+(\Gamma^0\Phi_x^0)_x+(\Gamma^0\Phi_y^0)_y=0 \end{cases} \tag*{(1.13)$_0$}$$

qui est hyperbolique par rapport à $\{\Phi_x^0, \Phi_y^0, \Gamma^0\}$ sous la condition: $\Gamma^0(t, x, y)>0$. On a également une série de systèmes d'équations aux dérivées partielles pour les coefficients de δ^{2n}, $n\geqq 1$:

$$\begin{cases} \Phi_t^n+\Phi_x^0\Phi_x^n+\Phi_y^0\Phi_y^n+\Gamma^n=F_{n-1}, \\ \Gamma_t^n+(\Gamma^0\Phi_x^n+\Gamma^n\Phi_x^0)_x+(\Gamma^0\Phi_y^n+\Gamma^n\Phi_y^0)_y=G_{n-1} \end{cases} \tag*{(1.13)$_n$}$$

qui est un système hyperbolique linéaire par rapport à $\{\Phi_x^n, \Phi_y^n, \Gamma^n\}$ sous la même condition sur Γ^0 qu'en haut, où F_{n-1} et G_{n-1} sont des fonctions de $\{\Phi^j(t), \Gamma^j(t)\}_{0\leqq j\leqq n-1}$, et leurs dérivées par rapport à (x, y).

Cette série de systèmes nous permet d'obtenir une solution approchée de (1.7)–(1.12) jusqu'à tout ordre qu'on voudra en δ^2.

---

1) Il n'est nullement essentiel de supposer identiques la longueur λ des ondes dans la direction de l'axe x et celle L dans la direction de l'axe y. Pour le cas où $L\neq\lambda$, voir [33].

1.2. Rappelons que l'on considère (1.7)–(1.12) comme le problème de Cauchy en ce sens que l'on cherche l'évolution temporaire de $\Omega_\delta(t)$ et $\Phi^\delta(t)$ en sachant la forme $\Omega_\delta(0)$ et le potentiel $\Phi^0(0)=\Phi_0(x, y, z)$.

C'est, en fait, un problème aux limites à la frontière libre $z=\Gamma(t, x, y)$ pour $\Delta\Phi=0$ dans $\Omega(t)$ avec (1.8) pour $z=0$ et les conditions de Dirichlet aux bords formulées par (1.3)–(1.4) qui sont elles-mêmes des équations aux dérivées partielles à résoudre en même temps.

Or le développement asymptotique de Friedrichs dit que son premier terme $\{\Phi^0(t), \Gamma^0\}$, qui satisfait à $(1.13)_0$, approche aux termes d'ordre $O(\delta^2)$ près la solution $\{\Phi^\delta(t), \Gamma^\delta(t)\}$ du problème aux limites (1.7)–(1.12).

Autrement dit, un phénomène, étant régi par une équation elliptique, qui n'a pas de vitesse finie de propagation est approché, lorsque δ tend vers zéro, par une solution d'un système hyperbolique non-linéaire ayant une vitesse finie de propagation.

De point de vue de la théorie des équations aux dérivées partielles, cela veut dire ceci: alors que l'équation (1.7) cesse d'être uniformément elliptique pour $\delta=0$, sa solution admet des estimations aux bords *uniformes* par rapport à $\delta\in[0, 1]$. Ainsi notre problème (1.7)–(1.12) est régi asymptotiquement par des systèmes hyperboliques au moment où l'équation (1.7) cesse d'être elliptique, δ tendant vers zéro.

A cet égard, nous citons une étude de T. Carleman en 1945 [7]. Il s'est demandé, dans cette Note, s'il existait dans un temps fini une frontière qui sépare la surface ébranlée de l'eau d'une partie non ébranlée, lorsque la surface libre de l'eau en équilibre sous la pression atomosphérique constante a reçu un coup de vent. Il y a démontré que l'existence de telle frontière contredirait l'unicité de la fonction harmonique.

Il est à noter également que Friedrichs évoquait ce problème comme un des plus typiques des phénomènes asymptotiques qui demandait une justification mathématique, dans une conférence donnée en 1954 [9].

1.3. Pour résoudre le problème de Cauchy (1.9)–(1.12) sur $z=\Gamma$ pour déterminer les conditions de Dirichlet sur $z=\Gamma$ pour (1.7), il faut qu'on ait, sinon une expression explicite, du moins une estimation sur $z=\Gamma(t, x, y)$ pour $\frac{1}{\delta}\Phi_z$ et $\frac{1}{\delta^2}\Phi_z$.

L'estimation a priori suivante de solution de (1.8)–(1.11) nous sert pour avoir toutes les estimations nécessaires sur $z=\Gamma$ et pour résoudre le problème de Cauchy pour (1.10)–(1.11) par le théorème de Cauchy-Kowalevski dans la version de Nirenberg-Nishida [21], [22], [13]:

$$|||\Phi_{xx}|||+|||\Phi_{xy}|||+|||\Phi_{yy}|||+\frac{1}{\delta}(|||\Phi_{zx}|||+|||\Phi_{zy}|||)+\frac{1}{\delta^2}|||\Phi_{zz}|||\leqq\frac{C}{\sqrt{\delta}}\|\Lambda^{\frac{3}{2}}\Phi\|,$$

où $|||\ \ |||$ et $\|\ \ \|$ est la L^2-norme sur $\Omega(t)$ et sur la frontière $z=\Gamma(t, x, y)$, respectivement, C une constante indépendante de $\delta\in[0, 1]$ et $\Lambda=(-\Delta)^{\frac{1}{2}}$, $\Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$.

Ce n'est qu'une estimation dans Agmon-Douglis-Nirenberg [1]. Ce qui nous importe ici, c'est de voir explicitement la manière de dépendance par rapport à δ de la constante de majoration dans le second membre de l'estimation a priori.

Pour cela, on passe de $\Omega_\delta(t)$ à un domaine rigide, qui ne bouge pas avec le temps, $\Omega_1 = \{(x', y', z') : (x', y') \in \boldsymbol{R}^2, 0 < z' < 1\}$ par le changement de variables

$$(x', y', z') = \left(x, y, \frac{z}{\Gamma}\right)$$

et par la suite le passage de $\{\Phi(t, x, y, z), \Gamma(t, x, y)\}$ à $\{\phi(t', x', y', z'), \gamma(t', x', y')\}$ suivant Nalimov [20]. Et on exécute un calcul explicite moyennant la fonction de Green sur Ω_1. Ceci faisant, on n'a plus affaire avec $\Delta\phi = 0$ sur Ω_1, mais avec des estimations sur $z' = 1$ de solution d'une équation elliptique $L_\delta \phi = 0$ (pour $\delta > 0$) à coefficients variables se composant de $\gamma(t', x', y')$ et ses dérivées, alors que l'on a pu conserver l'opérateur Δ en passant de $\Omega_\delta(t)$ à Ω_1 par la représentation conforme dans le cas de l'écoulement deux-dimensionnel [13]. Ce qui nous conduit à résoudre notre problème seulement pour des données initiales "petites", c'est-à-dire que la différence de la donnée initiale Γ_0 et de la surface de l'eau en repos est "petite", voir §§3–4, bien qu'elle ne soit infinitésimale.

1.4. Comme une application du développement de Friedrichs, on donnera, dans un article ultérieur [33], l'équation deux-dimensionnelle de Boussinesq comme une équation approchée des ondes longues qui se distinguent des ondes de surface en eau peu profonde. Il s'agit en fait des ondes de surface dont la longueur λ (dans les directions de l'axe x et de l'axe y) et l'ampleur α satisfont au rapport exprimé comme suit: $\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2$ *et* $\frac{\alpha}{h}$ *sont de même ordre comme infinitésimaux lorsque*

$$\lambda \gg h \quad et \quad h \gg \alpha.$$

Pour les ondes de surface en eau peu profonde, α/h pourrait être d'ordre $O(1)$.

En ce qui concerne la distinction entre des ondes longues de surface de l'eau et des ondes de surface en eau peu profonde, nous l'avons discuté en détail suivant l'esprit d'Ursell [30] et de Stokes [29] dans l'introduction de notre article précédent [15]. Nous y renvoyons nos lecteurs (voir aussi §1 dans [33]).

On y donne aussi un système d'équations approchées des ondes longues duquel nous avions déduit l'équation de Korteweg-de Vries [16] et de Broer-Peregrine [5], [24], pour l'écoulement deux-dimensionnel [15].

On donnera également une justification mathématique pour l'équation de Kadomtsev-Petviashvili [11] comme une équation approchée des ondes longues de surface de l'eau dont la longueur dans la direction de l'axe y, par exemple, est beaucoup plus grande que celle dans la direction de l'axe x:

$$\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2, \ \frac{\alpha}{h} \quad et \quad \left(\frac{\lambda}{L}\right)^2$$

sont de même ordre comme infinitésimaux lorsque λ, $L \to \infty$, $\alpha \to 0$, λ *et* L *étant la longueur des ondes dans la direction de l'axe* x *et de l'axe* y*, respectivement.*

1.5. Le contenu de cet article est dans l'ordre suivant. Il se divise en deux parties.

La première partie (dans ce numéro) se consiste de paragraphes 2, 3, 4 et 5.

Dans §2, on déduit de (1.1)–(1.6), les équations non-dimensionnelles (1.7)-(1.12). On les récrit ensuite comme équations sur le domaine rigide Ω_1 par rapport à $\{\phi, \gamma\}$.

Dans §3, on obtiendra toutes les estimations a priori pour ϕ nécessaires pour montrer le théorème d'existence. En particulier, les estimations aux bords pour ϕ_z/δ^2 et ϕ_z/δ dans une échelle d'espaces de Banach de fonctions analytiques.

Dans §4, on a le théorème d'existence locale par rapport au temps du problème de Cauchy (1.9)–(1.12) sur $z=\Gamma$ via la résolution du problème correspondant sur $z=1$ pour $\{\phi, \gamma\}$ dans l'échelle d'espaces de Banach ci-dessus. On se sert du théorème de Cauchy-Kowalevski dans la version de Nirenberg-Nishida. Avec ces conditions de Dirichlet ainsi déterminées, on résout le problème (1.7)–(1.12).

Dans §5, nous montrons que notre solution est indéfiniment différentiable par rapport à $\delta \in [0, 1]$ sur la surface de l'eau.

On donnera ensuite, dans la seconde partie (le numéro prochain), le développement de Friedrichs sur la surface, en déduisant ainsi les équations des ondes de surface en eau peu profonde, §6.

Une justification mathématique du développement de Friedrichs en cas de l'écoulement trois-dimensionnel est donnée dans §7.

Dans le dérnier paragraphe §8, on résume les conclusions de ces études et donne une appréciation sur leur portée et leurs défauts.

L'auteur tient à remercier vivement Takaaki Nishida, Hideaki Yoshihara, Seiji Ukai et Akira Nakaoka. Ils se sont intéressés à ce travail dès le début et ont formulé de nombreuses corrections et suggestions en assistant aux exposés de l'auteur au cours de ces dérnières années. Il voudrait également exprimer ses remerciements à la Faculté des Sciences de l' Université d'Osaka qui lui a accordé le loisir de se consacrer tranquillement aux études aboutissant à cet article.

PREMIERE PARTIE

ESTIMATIONS A PRIORI ET LE THÉORÈME D' EXISTENCE

§2. Equations non-dimensionnelles.

Considérons le changement de variables suivant définissant ainsi les variables non-dimensionnelles (x', y', z') et t':

$$\begin{cases} (x, y, z)=(\lambda x', \lambda y', hz'), \\ t=\dfrac{\lambda}{c}t' \end{cases} \tag{2.1}$$

où λ est la longueur des ondes dans la direction de l'axe x et de l'axe y, h la profondeur moyenne de l'eau et $c=\sqrt{gh}$.

On définit ensuite le potentiel non-dimensionnel Φ' de vitesses et la surface non-dimensionnelle de l'eau $z'-\Gamma'(t, x', y')=0$ par

(2.2) $$\Phi=c\lambda\Phi', \quad \Gamma=h\Gamma'.$$

Alors, on déduit de (1.1)–(1.4) les équations non-dimensionnelles suivantes:

(2.3) $$\delta^2(\Phi'_{x'x'}+\Phi'_{y'y'})+\Phi'_{z'z'}=0 \quad \text{dans} \quad \Omega'(t'),$$

(2.4) $$\Phi'_{z'}=0, \quad z'=0,$$

(2.5), (2.6) $$\left.\begin{aligned}&\delta^2\left(\Phi'_{t'}+\frac{1}{2}(\Phi'^2_{x'}+\Phi'^2_{y'})+\Gamma'\right)+\frac{1}{2}\Phi'^2_{z'}=0\\ &\delta^2(\Gamma'_{t'}+\Phi'_{x'}\Gamma'_{x'}+\Phi'_{y'}\Gamma'_{y'})-\Phi'_{z'}=0\end{aligned}\right\} z'=\Gamma',$$

où

$$\Omega'(t')=\{(x',y',z'):(x',y')\in \boldsymbol{R}^2,\ 0<z'<\Gamma'(t',x',y')\}, \quad t'>0,$$

et $\delta=h/\lambda$: paramètre non-dimensionnel avec les données initiales non-dimensionnelles:

(2.7) $$\Phi'(0,x',y',z')=\Phi'_0(x',y',z'),$$

(2.8) $$\Gamma'(0,x',y')=\Gamma'_0(x',y')>0$$

définies par

(2.9) $$\Phi_0(x,y,z)=c\lambda\Phi'_0(x',y',z'),$$

(2.10) $$\Gamma_0(x,y)=h\Gamma'_0(x',y').$$

Remarques. (i) On voit que les vitesses non-dimensionnelles

(2.11) $$(U',V',W')=(\Phi'_{x'},\Phi'_{y'},\Phi'_{z'})$$

sont définies par

(2.12) $$(U,V)=c(U',V'), \quad W=\frac{1}{\delta}cW'$$

d'après (2.1)–(2.2) où $(U,V,W)=(\Phi_x,\Phi_y,\Phi_z)$. Nous avons ainsi les vitesses U' et V' en divisant U et V par la vitesse sonique $c=\sqrt{gh}$, alors que la composante verticale W' de vitesse grad Φ est définie par

$$W'=\frac{\delta}{c}\boldsymbol{W}$$

qui est petite pour les ondes "longues"[2]: $\delta=h/\lambda\ll 1$. Rappelons ici que la vitesse des ondes "longues" de l'ampleur infinitésimale régies par les équations "approchées"

2) Airy [2].

linéaires de (1.1)–(1.4) est donnée par $c\left(1+O\left(\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2\right)\right)$, [18, §§227–229]. On donnera dans §8 une justification de l'équation linéaire des ondes: $\eta_{tt}-\Delta\eta=0$ approchant le problème non-linéaire original (1.1)–(1.4) non seulement pour les ondes de l'ampleur infinitésimale[3] mais aussi pour celles de l'ampleur finie.

(ii) Il n'y a aucune raison de nous borner à considérer les ondes qui ont la même longueur λ dans la direction de y que dans la direction de x. On discutera dans [33] des ondes dont la longueur dans la direction x est λ et L dans la direction y. En remplaçant (2.1) par

$$\left\{\begin{array}{l} x=\lambda x', \quad y=Ly', \quad z=hz' \\ t=\dfrac{\lambda}{c}t', \end{array}\right. \tag{2.13}$$

on déduira de (1.1)–(1.4) l'équation dite de Kadomtsev-Petviashvili pour les ondes satisfaisant à

$$\delta^2=\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2=\left(\frac{\lambda}{L}\right)^2\cong\varepsilon=\frac{\alpha}{h}, \tag{2.14}$$

α étant l'ampleur (fin de remarques).

On va maintenant transformer notre problème (1.1)–(1.6) sur $\Omega(t)$ sur un domaine qui ne bouge pas avec le temps. Pour cela, considérons le changement de variables:

$$\left\{\begin{array}{l} (x'', y'', z'')=\left(x', y', \dfrac{z'}{\Gamma'}\right) \\ t''=t' \end{array}\right. \tag{2.15}$$

et définissons ϕ et γ par

$$\phi(t'', x'', y'', z'')=\Phi'(t, x', y', z'=z''\Gamma'),$$

$$\gamma(t'', x'', y'')=\Gamma'(t', x', y').$$

Alors, en supprimant le signe ",,", notre problème est à résoudre les équations suivantes pour ϕ et γ déduites de (2.3)–(2.8) sur $\Omega_1=\{(x, y, z)\colon (x, y)\in \boldsymbol{R}^2,\ 0<z<1\}$, $t>0$:

$$\begin{aligned} L_\delta\phi\equiv\phi_{xx}+\phi_{yy}&+\frac{1+z^2(\delta^2\gamma_x^2+\delta^2\gamma_y^2)}{\gamma^2}\frac{\phi_{zz}}{\delta^2}- \\ &-2z\left(\frac{\gamma_x}{\gamma}\phi_{zx}+\frac{\gamma_y}{\gamma}\phi_{zy}\right)+\frac{z}{\gamma^2}(2\gamma_x^2+2\gamma_y^2-\gamma\gamma_{xx}-\gamma\gamma_{yy})\phi_z=0 \quad \text{dans } \Omega_1, \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\phi_z=0, \quad z=0, \tag{2.17}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \phi_t+\dfrac{1}{2}(\phi_x^2+\phi_y^2)-\dfrac{1}{2}\dfrac{1+\delta^2\gamma_x^2+\delta^2\gamma_y^2}{\gamma^2}\left(\dfrac{\phi_z}{\delta}\right)^2+\gamma=0 & (2.18) \\ \gamma_t+\gamma_x\phi_x+\gamma_y\phi_y-\dfrac{1+\delta^2\gamma_x^2+\delta^2\gamma_y^2}{\gamma}\dfrac{\phi_z}{\delta^2}=0 & (2.19) \end{array}\right\} z=1,$$

3) Lagrange [17].

avec les données initiales:

(2.20) $$\phi(0, x, y, z)=\phi_0(x, y, z),$$

(2.21) $$\gamma(0, x, y)=\gamma_0(x, y)>0.$$

Notons que nous chercherons γ satisfaisant à

(2.22) $$\gamma \geqq \gamma_- >0$$

si

$$\gamma_0(x, y) \geqq 2\gamma_- >0, \ (2.21).$$

§3. Estimations a priori.

3.1. Dans ce paragraphe, nous obtenons les estimations a priori (aux bords) qui nous permettent de résoudre le problème de Cauchy (2.16)–(2.21). Il s'agit, en fait, de résoudre en premier lieu le problème de Cauchy (2.18)–(2.21). Il faut donc, sinon exprimer explicitement, estimer du moins

$$\left.\frac{\phi_z}{\delta}\right|_{z=1} \quad \text{et} \quad \left.\frac{\phi_z}{\delta^2}\right|_{z=1},$$

par $\{\phi_x|_{z=1}, \phi_y|_{z=1}, \gamma\}$ pour que l'on puisse résoudre (2.18)–(2.19) en tant que équations sur la surface: $z=1$.

Or on voit un peu plus loin que (2.18)–(2.19) sont équivalentes au système quasi-linéaire pour

(3.1) $$U(t)={}^t(\phi_x(1), \phi_y(1), \delta\phi_{xx}(1), \delta\phi_{xy}(1), \delta\phi_{yy}(1), \gamma-1, \delta\gamma_x, \delta\gamma_y, \delta^2\gamma_{xx}, \delta^2\gamma_{xy}, \delta^2\gamma_{yy})$$

où $\phi_x(1)=\phi_x(t, x, y, 1)$ etc.

Il nous faut donc des estimations pour

$$\frac{\phi_{zx}}{\delta}(1), \frac{\phi_{zy}}{\delta}(1), \phi_{zx}(1), \phi_{zy}(1), \phi_{zxx}(1), \phi_{zxy}(1) \text{ et } \phi_{zyy}(1)$$

par $U(t)$ en outre que $\frac{\phi_z}{\delta}(1)$, et $\frac{\phi_z}{\delta^2}(1)$.

Toutes les estimations seront obtenues en s'appuyant sur le lemme suivant qui n'est qu'un résultat dans Agmon-Douglis-Nirenberg [1]. Le point crucial pour nous est de calculer explicitement la manière de dépendance par rapport à $\delta\in[0, 1]$ de constante de majoration:

Lemme 3.1. *La solution $\phi=\phi(x, y, z)\in H^2(\Omega_1)$ du problème de Dirichlet*

(3.2) $$\begin{cases} \delta^2(\phi_{xx}+\phi_{yy})+\phi_{zz}=f & \text{dans} \quad \Omega_1, \\ \phi|_{z=\pm 1}=b \end{cases}$$

satisfait à l'inégalité suivante, où

$\Omega_1 = \{(x, y, z) : (x, y) \in \boldsymbol{R}^2,\ |z| < 1\}, f \in H^0(\Omega_1)$ *et* $b \in H^{\frac{3}{2}}(\boldsymbol{R}^2)$:

$$\text{(3.3)} \qquad |||\phi_{xx}||| + |||\phi_{xy}||| + |||\phi_{yy}||| + \frac{1}{\delta}(|||\phi_{zx}||| + |||\phi_{zy}|||) + \frac{1}{\delta^2}|||\phi_{zz}||| \leqq$$

$$\leqq \frac{c}{\sqrt{\delta}} \|\Lambda^{\frac{3}{2}} b\| + c' \left|\left|\left| \frac{f}{\delta^2} \right|\right|\right|,$$

où

$$\|u(z)\|^2 = \iint |u(z)|^2 dx dy, \quad |||u|||^2 = \int_{-1}^{1} \|u(z)\|^2 dz$$

et

$$\Lambda = (-\Delta)^{\frac{1}{2}}, \ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

c, et c' étant indépendantes de δ.

Preuve. La transformée de Fourier de (3.2) par rapport à (x, y) nous donne:

$$\text{(3.4)} \qquad \begin{cases} \hat{\phi}_{zz}(z) - 4\pi^2\delta^2|\xi|^2\hat{\phi}(z) = \hat{f}(z), \\ \hat{\phi}|_{z=\pm 1} = \hat{b} \end{cases}$$

où $\hat{\phi}(z) = (\mathscr{F}_{(x,y)}[\phi])(z)$, $\hat{b} = \mathscr{F}_{(x,y)}[b]$ et $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ sont des variables duales de (x, y):

$$\hat{\phi}(z) = \int_{\boldsymbol{R}^2} e^{-2\pi i X\cdot\xi}\phi(X, z) dX, \quad X = (x, y).$$

D'où

$$\hat{\phi}(z) = \frac{\operatorname{ch}(2\pi\delta|\xi|z)}{\operatorname{ch}(2\pi\delta|\xi|)}\hat{b}(\xi) +$$

$$\text{(3.5)} \qquad + \int_{-1}^{z} \frac{\operatorname{sh}(2\pi\delta|\xi|(z-1)) \operatorname{sh}(2\pi\delta|\xi|(s+1))}{(2\pi\delta|\xi|) \operatorname{sh}(4\pi\delta|\xi|)} \hat{f}(s) ds +$$

$$+ \int_{z}^{1} \frac{\operatorname{sh}(2\pi\delta|\xi|(z+1)) \operatorname{sh}(2\pi\delta|\xi|(s-1))}{(2\pi\delta|\xi|) \operatorname{sh}(4\pi\delta|\xi|)} \hat{f}(s) ds.$$

et (3.3), vu le théorème de Plancherel. Q.E.D.

Remarque. Dans (3.3), on peut remplacer le premier terme de second membre: $\frac{C}{\sqrt{\delta}} \|\Lambda^{\frac{3}{2}} b\|$ par $C\|\Lambda^2 b\|$. On voit en effet que

$$\int_{-1}^{1}\int_{\boldsymbol{R}^2} |(2\pi|\xi|)^2 \frac{\operatorname{ch}(2\pi\delta|\xi|z)}{\operatorname{ch}(2\pi\delta|\xi|)} \hat{b}(\xi)|^2 d\xi dz,$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{\boldsymbol{R}^2} |(2\pi|\xi|)^2 \frac{\operatorname{sh}(2\pi\delta|\xi|z)}{\operatorname{ch}(2\pi\delta|\xi|)} \hat{b}(\xi)|^2 d\xi dz$$

sont majorés tous les deux par

$$\int_{-1}^{1}\int_{\boldsymbol{R}^2}|(2\pi|\xi|)^2\hat{b}(\xi)|^2 d\xi dz = 2\|\Lambda^2 b\|^2.$$

D'où

$$(3.3)' \quad |||\phi_{xx}||| + |||\phi_{xy}||| + |||\phi_{yy}||| + \frac{1}{\delta}(|||\phi_{zx}||| + |||\phi_{zy}|||) + \frac{1}{\delta^2}|||\phi_{zz}||| \leqq \leqq c\left(\|\Lambda^2 b\| + \left\|\left|\frac{f}{\delta^2}\right|\right\|\right).$$

3.2. L'échelle d'espaces de Banach. Définissons maintenant une échelle d' espaces de Banach de fonctions analytiques.

Définition 3.2. L'espace de Banach B_ρ: $u = u(x, y) \in B_\rho$, $\rho > 0$

$\Longleftrightarrow u$: analytique sur $\boldsymbol{R}^2_{x,y}$ et muni de norme:

$$(3.6) \quad \|u\|_\rho = \|(1+2\pi|\xi|)^2 e^{2\pi\rho|\xi|}\hat{u}(\xi)\|_{L^2(\boldsymbol{R}^2)} < +\infty,$$

où $\hat{u}(\xi)$ transformée de Fourier de u.

Notation 3.3. L'échelle d'espaces de Banach: $S = \bigcup_{\rho>0} B_\rho$.

On a tout d'abord:

Lemme 3.4. *$u, v \in B_\rho \Rightarrow uv \in B_\rho$ et*

$$(3.7) \quad \|uv\|_\rho \leqq \|u\|_\rho \cdot \|v\|_\rho.$$

Preuve. Notons tout d'abord que

$$u \in B_\rho \Longrightarrow e^{2\pi\rho|\xi|}\hat{u}(\xi) \in L^1(\boldsymbol{R}^2).$$

En effet:

$$\int e^{2\pi\rho|\xi|}|\hat{u}(\xi)|d\xi = \int \frac{1}{(1+2\pi|\xi|)^2}(1+2\pi|\xi|)^2 e^{2\pi\rho|\xi|}|\hat{u}(\xi)|d\xi \leqq C\|u\|_\rho.$$

On voit maintenant:

$$\|uv\|^2 = \int_{\boldsymbol{R}^2}(1+2\pi|\xi|)^4 e^{4\pi\rho|\xi|}|\hat{u}(\xi)*\hat{v}(\xi)|^2 d\xi =$$

$$= \int_{\boldsymbol{R}^2}(1+2\pi|\xi|)^4 e^{4\pi\rho|\xi|}\left|\left|\int_{\boldsymbol{R}^2}\hat{u}(\xi-\eta)\hat{v}(\xi)d\eta\right|^2 d\xi \leqq\right.$$

$$\leqq \int_{\boldsymbol{R}^2}\left[\int_{\boldsymbol{R}^2}(1+2\pi|\xi|)^2 e^{2\pi\rho|\xi|}|\hat{u}(\xi-\eta)||\hat{v}(\eta)|d\eta\right]^2 d\xi,$$

d'où

$$\|uv\|_\rho^2 \leqq 4\left\{\int_{R^2}\left(\int_{R^2}(1+2\pi|\xi-\eta|)^2 e^{2\pi\rho|\xi|}|\hat{u}(\xi-\eta)|\,|\hat{v}(\eta)|d\eta\right)^2 d\xi + \right.$$

$$\left. + \int_{R^2}\left(\int_{R^2}(1+2\pi|\eta|)^2 e^{2\pi\rho|\xi|}|\hat{u}(\xi-\eta)|\,|\hat{v}(\eta)|d\eta\right)^2 d\xi\right\} \equiv$$

$$\equiv I + II$$

vu

$$(1+|\xi|)^2 \leqq 2(1+|\xi-\eta|)^2 + 2(1+|\eta|)^2.$$

Puisque l'on a

$$e^{\rho|\xi|} \leqq e^{\rho(|\xi-\eta|+|\eta|)},$$

on voit:

$$I \leqq \int_{R^2}\left(\int_{R^2} e^{2\pi\rho|\eta|}|\hat{v}(\eta)|\,|d\eta \int_{R^2} e^{2\pi\rho|\eta|}|\hat{v}(\eta)|(1+2\pi|\xi-\eta|)^4 e^{4\pi\rho|\xi-\eta|} \times \right.$$

$$\left. \times |\hat{u}(\xi-\eta)|^2 d\eta\right) d\xi \leqq$$

$$\leqq C\|v\|_\rho \int_{R^2} d\eta \int_{R^2} e^{2\pi\rho|\eta|}|\hat{v}(\eta)|(1+2\pi|\xi-\eta|)^4 e^{4\pi\rho|\xi-\eta|}\,|\hat{u}(\xi-\eta)|^2 d\xi \leqq$$

$$\leqq C\|v\|_\rho \|u\|_\rho^2 \int_{R^2} e^{2\pi\rho|\eta|}|\hat{v}(\eta)|d\eta$$

d'après le théorème de Fubini. D'où

$$I \leqq C^2\|v\|_\rho^2\|u\|_\rho^2.$$

De même, on a

$$II \leqq C^2\|v\|_\rho^2\|u\|_\rho^2.$$

Q. E. D.

Lemme 3.5. *Quel que soit β un nombre réel positif, on a pour $u \in B_\rho$,*

(3.8) $$\|\Lambda^\beta u\|_{\rho'} \leqq \frac{C}{(\rho-\rho')^\beta}\|u\|_\rho$$

pour $\rho' < \rho$, C étant indépendante de (ρ, ρ', u).

Preuve. Compte tenu du fait qι e

$$|\xi|^\beta e^{\rho'|\xi|} = (\rho-\rho')^\beta|\xi|^\beta e^{-(\rho-\rho')|\xi|} \times \frac{e^{\rho|\xi|}}{(\rho-\rho')^\beta} =$$

$$= K^\beta e^{-K}\frac{e^{\rho|\xi|}}{(\rho-\rho')^\beta}, \ \forall \rho' < \rho,$$

on a (3.8) par la définition de B_ρ.

Corollaire 3.6. *Soient u, $v \in B_\rho$, on a, alors, quel que soit $\rho' < \rho$:*

$$\|u_x v\|_{\rho'} + \|u v_x\|_{\rho'} \leqq \frac{C}{\rho-\rho'} \|u\|_\rho \|v\|_\rho ,$$

$$\left\| \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}} \right\|_{\rho'} \leqq \frac{C}{(\rho-\rho')^{|\alpha|}} \|u\|_\rho, \ |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2,$$

où α_1 et α_2 sont entiers positifs et C une constante indépendante de (ρ, ρ', u, v).

Lemme 3.7. *Soient u, $v \in B_\rho$, on a*

$$\|\Lambda^{\frac{1}{2}}(uv)\|_\rho \leqq C(\|\Lambda^{\frac{1}{2}} u\|_\rho \|v\|_\rho + \|u\|_\rho \|\Lambda^{\frac{1}{2}} v\|_\rho).$$

Preuve. Vu que $|\xi| < |\xi - \eta| + |\eta|$, on a

$$\|\Lambda^{\frac{1}{2}}(uv)\|_\rho^2 = \int_{R^2} (1+2\pi|\xi|)^4 e^{4\pi\rho|\xi|} (2\pi|\xi|) \left(\int_{R^2} \hat{u}(\xi-\eta)\hat{v}(\eta) d\eta\right)^2 d\xi \leqq$$

$$\leqq \int_{R^2} (1+2\pi|\xi|)^4 e^{4\pi\rho|\xi|} \left(\int_{R^2} \sqrt{2\pi}\, |\xi-\eta|^{\frac{1}{2}} |\hat{u}(\xi-\eta)\hat{v}(\eta)| d\eta\right)^2 d\xi +$$

$$+ \int_{R^2} (1+2\pi|\xi|)^4 e^{4\pi\rho|\xi|} \left(\int_{R^2} \sqrt{2\pi} |\eta|^{\frac{1}{2}} |\hat{u}(\xi-\eta) v(\eta)| d\eta\right)^2 d\xi \leqq$$

$$\leqq C^2 (\|\Lambda^{\frac{1}{2}} u\|_\rho \|v\|_\rho + \|u\|_\rho \|\Lambda^{\frac{1}{2}} v\|_\rho)^2.$$

D'où le lemme, C étant une constante indépendante de (ρ, u, v). Q.E.D.

3.3. Estimations a priori. Par le prolongement harmonique, notre problème (1.1)–(1.6) est équivalent au problème sur $\tilde{\Omega}_t = \{(x, y, z): (x, y) \in R^2, -\Gamma < z < \Gamma\}$, $t > 0$. Il s'agit donc ici d'avoir des estimations a priori pour solutions de

$$(3.9) \qquad \begin{cases} L_\delta \phi = 0 \quad \text{dans} \quad \tilde{\Omega}_1 = \{(x, y, z): (x, y) \in R^2, |z| < 1\}, \ t > 0, \\ \phi|_{z=\pm 1} = \phi(1), \quad \text{soit.} \end{cases}$$

Notation 3.8. Pour $\gamma(t, x, y) \in B_\rho$, $\forall t$, et $\phi(t, x, y, z)$ telle que ϕ_x et $\phi_y \in B_\rho$ pour tout (t, z), $|z| \leqq 1$,

$$E_{1,\rho}(\gamma-1) = \|\gamma-1\|_\rho + \|\delta\gamma_x\|_\rho + \|\delta\gamma_y\|_\rho + \|\delta^2\gamma_{xx}\|_\rho + \|\delta^2\gamma_{xy}\|_\rho + \|\delta^2\gamma_{yy}\|_\rho ,$$

$$E_{2,\rho}(\phi) = \|\phi_x(1)\|_\rho + \|\phi_y(1)\|_\rho + \|\delta\phi_{xx}(1)\|_\rho + \|\delta\phi_{xy}(1)\|_\rho + \|\delta\phi_{yy}(1)\|_\rho$$

où $\phi_x(1) = \phi_x(t, x, y, 1)$ etc.

Notation 3.9. Pour $f(x, y, z) \in B_\rho$, $|z| \leqq 1$,

$$\|f(z)\|_\rho^2 = \|(1+2\pi|\xi|)^2 e^{2\pi\rho|\xi|} \hat{f}(\xi, z)\|_{L^2(R^2)}^2 ,$$

$$|||f|||_\rho^2 = \int_{-1}^{1} \|f(z)\|_\rho^2 dz.$$

Proposition 3.10. *Il existe une constante positive R_0 indépendante de $\delta \in [0, 1]$*

telle que l'on ait, si $E_{1,\rho}(\gamma-1)<R_0$, quel que soit $\rho<\rho_0$, l'inégalité suivante pour solutions de (3.9):

$$\begin{aligned}(3.10)\qquad & |||\phi_{xx}|||_\rho+|||\phi_{xy}|||_\rho+|||\phi_{yy}|||_\rho+\left|\left|\left|\frac{\phi_{zx}}{\delta}\right|\right|\right|_\rho+\left|\left|\left|\frac{\phi_{zy}}{\delta}\right|\right|\right|_\rho+\left|\left|\left|\frac{\phi_{zz}}{\delta^2}\right|\right|\right|_\rho\leqq \\ & \leqq \frac{C(R_0)}{\sqrt{\delta}}\,\|\Lambda^{\frac{3}{2}}\phi(1)\|_\rho,\end{aligned}$$

quel que soit $\rho<\rho_0$, $C(R_0)$ étant une constante positive indépendante de $\delta\in[0, 1]$.

Remarque 3.11. Le second membre de (3.10) peut être remplacé par $C(R_0)\|\Lambda^2\phi(1)\|_\rho$, i.e.

$$\begin{aligned}(3.10)'\qquad & |||\phi_{xx}|||_\rho+|||\phi_{xy}|||_\rho+|||\phi_{yy}|||_\rho+\left|\left|\left|\frac{\phi_{zx}}{\delta}\right|\right|\right|_\rho+\left|\left|\left|\frac{\phi_{zy}}{\delta}\right|\right|\right|_\rho+\left|\left|\left|\frac{\phi_{zz}}{\delta^2}\right|\right|\right|_\rho\leqq \\ & \leqq C(R_0)(\|\phi_{xx}(1)\|_\rho+\|\phi_{yy}(1)\|_\rho).\end{aligned}$$

Preuve de Proposition 3.10.

Vu (3.3), on a

$$\begin{aligned}& |||\phi_{xx}|||_\rho+|||\phi_{xy}|||_\rho+|||\phi_{yy}|||_\rho+\left|\left|\left|\frac{\phi_{zx}}{\delta}\right|\right|\right|_\rho+\left|\left|\left|\frac{\phi_{zy}}{\delta}\right|\right|\right|_\rho+\left|\left|\left|\frac{\phi_{zz}}{\delta^2}\right|\right|\right|_\rho\leqq \\ & \leqq \frac{C}{\sqrt{\delta}}\,\|\Lambda^{\frac{3}{2}}\phi(1)\|_\rho+\left|\left|\left|\frac{f}{\delta^2}\right|\right|\right|_\rho,\end{aligned}$$

$\forall\rho<\rho_0$, avec une constante C indépendante de δ, où

$$(3.12)\qquad \begin{cases} f=\delta^2\left\{p(z)\dfrac{\phi_{zz}}{\delta^2}(z)+q(z)\dfrac{\phi_z}{\delta^2}(z)+r_1(z)\dfrac{\phi_{zx}}{\delta}(z)+r_2(z)\dfrac{\phi_{zy}}{\delta}(z)\right\}, \\ p=1-\dfrac{1}{\gamma^2}\{1+z^2((\delta\gamma_x)^2+(\delta\gamma_y)^2)\}, \\ q=-\dfrac{z}{\gamma^2}\{2(\delta\gamma_x)^2+2(\delta\gamma_y)^2-\gamma(\delta^2\gamma_{xx})-\gamma(\delta^2\gamma_{yy})\}, \\ r_1=\dfrac{2z}{\gamma}(\delta\gamma_x),\ r_2=\dfrac{2z}{\gamma}(\delta\gamma_y). \end{cases}$$

Pour l'estimation de $\left|\left|\left|\frac{f}{\delta^2}\right|\right|\right|_\rho$, on se sert des lemmes suivants:

Lemme 3.12. *Quel que soit $\beta>0$, si on choisit $R_0>0$ suffisamment petite, il existe une constante positive $C(R_0)$ indépendante de $\delta\in[0, 1]$ telle que l'on ait, si $E_{1,\rho}(\gamma-1)<R_0$, quel que soit $\rho<\rho_0$,*

$$(3.13)\qquad 1-\beta\|p(1)\|_\rho,\quad 1-\beta\|q(1)\|_\rho,\quad 1-\beta\|r_j(1)\|_\rho,\quad j=1, 2,\ \geqq C(R_0),$$

quel que soit $\rho<\rho_0$, où $p(1)=p|_{z=1}$, $q(1)=q|_{z=1}$ et $r_j(1)=r_j|_{z=1}$.

Lemme 3.13. *Quel que soit $\rho<\rho_0$, on a*

$$\left\|\frac{\phi_z}{\delta^2}\right\|_\rho \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}\left\|\frac{\phi_{zz}}{\delta^2}\right\|_\rho. \tag{3.14}$$

Renvoyant les preuves de lemmes plus loin, l'estimation de $\left\|\frac{f}{\delta^2}\right\|_\rho$ d'abord comme suit:

$$\begin{aligned}\left\|\frac{f}{\delta^2}\right\|_\rho \leqq \|p(1)\|_\rho\left\|\frac{\phi_{zz}}{\delta^2}\right\|_\rho + \|q(1)\|_\rho\frac{1}{\sqrt{2}}\left\|\frac{\phi_{zz}}{\delta^2}\right\|_\rho + \\ + \|r_1(1)\|_\rho\left\|\frac{\phi_{zx}}{\delta}\right\|_\rho + \|r_2(1)\|_\rho\left\|\frac{\phi_{zy}}{\delta}\right\|_\rho.\end{aligned} \tag{3.15}$$

On a ainsi (3.10) de (3.11) et (3.15) par le lemme 3.12, si on choisit $R_0>0$ convenablement petite. Q.E.D.

Corollaire 3.14. *Pour $R_0>0$ choisie dans la proposition, on a*

$$\left\|\frac{f}{\delta^2}\right\|_\rho \leqq \frac{C(R_0)}{\sqrt{\delta}}\|\Lambda^{\frac{3}{2}}\phi(1)\|_\rho, \tag{3.16}$$

ou encore

$$\left\|\frac{f}{\delta^2}\right\|_\rho \leqq C(R_0)\|\Lambda^2\phi(1)\|_\rho, \tag{3.16$'$}$$

$C(R_0)>0$ étant une constante dépendante de R_0, et indépendante de $\delta\in[0, 1]$.

Preuve de lemme 3.12. Notons d'abord:

$$\left\|\frac{\gamma-1}{\gamma}\right\|_\rho \leqq \frac{R_0}{1-R_0}, \ R_0<1, \ \forall\rho<\rho_0 \tag{3.17}$$

Preuve. On voit

$$\frac{1-\gamma}{\gamma} = (1-\gamma)+(1-\gamma)\frac{1-\gamma}{\gamma},$$

d'où

$$(1-\|\gamma-1\|_\rho)\left\|\frac{\gamma-1}{\gamma}\right\|_\rho \leqq \|\gamma-1\|_\rho.$$

On en obtient (3.17), vu $E_{1,\rho}(\gamma-1)<R_0$, $\forall\rho<\rho_0$. On a ainsi de (3.17):

$$\left\|\frac{\gamma-1}{\gamma^2}\right\|_\rho \leqq \left\|\frac{\gamma-1}{\gamma}\right\|_\rho\left(1+\left\|\frac{\gamma-1}{\gamma}\right\|_\rho\right) \leqq \frac{\|\gamma-1\|_\rho}{(1-\|\gamma-1\|_\rho)^2},$$

d'où

$$\left\|1-\frac{1}{\gamma^2}\right\|_\rho \leqq \left\|\frac{1-\gamma}{\gamma^2}\right\|_\rho + \left\|\frac{1-\gamma}{\gamma}\right\|_\rho \leqq \frac{2R_0}{(1-R_0)^2}.$$

Enfin, on a

$$\left\|\frac{\delta\gamma_x}{\gamma}\right\|_\rho = \left\|\delta\gamma_x\left(1+\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)\right\|_\rho \leqq \|\delta\gamma_x\|_\rho\left(1+\left\|\frac{1-\gamma}{\gamma}\right\|_\rho\right) \leqq \frac{R_0}{1-R_0},$$

De même: $\left\|\frac{\delta\gamma}{\gamma}\right\|_\rho \leqq \frac{R_0}{1-R_0}$ et $\left\|\frac{\delta^2\gamma_{xx}}{\gamma}\right\|_\rho$, $\left\|\frac{\delta^2\gamma_{yy}}{\gamma}\right\|_\rho \leqq \frac{R_0}{1-R_0}$.

D'où (3.13).

Q.E.D.

Preuve de lemme 3.13. On a

$$\frac{\phi_z}{\delta^2}(z)=\int_0^z \frac{\phi_{zz}}{\delta^2}(z)dz,\ |z|<1,$$

puisque $\phi_z(0)=0$, d'où lemme. Q.E.D.

On va maintenant démontrer une inégalité qui est indispensable pour estimations aux bords:

Proposition 3.15. *Si* $E_{1,\rho}(\gamma-1)<R_0$, *quel que soit* $\rho<\rho_0$, *il existe une constante* $C(R_0)>0$ *indépendante de* $\delta\in[0, 1]$ *telle que l'on ait*:

$$\begin{aligned}&|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}\phi_{xx}|||_{\rho'}+|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}\phi_{xy}|||_{\rho'}+|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}\phi_{yy}|||_{\rho'}+\\ &+\left\|\sqrt{\delta}\,\Lambda^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\phi_{zx}}{\delta}\right)\right\|_{\rho'}+\left\|\sqrt{\delta}\,\Lambda^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\phi_{zy}}{\delta}\right)\right\|_{\rho'}+\left\|\sqrt{\delta}\,\Lambda^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\phi_{zz}}{\delta^2}\right)\right\|_{\rho'}\leqq\\ &\leqq\frac{C(R_0)}{\rho-\rho'}\|\Lambda\phi(1)\|_\rho,\quad \forall\rho'<\forall\rho<\rho_0.\end{aligned}\tag{3.18}$$

Preuve. En se servant de l'expression (3.5), il est facile de voir, comme dans la proposition 3.10, que:

$$\begin{aligned}&(\text{le premier membre de (3.18)})\leqq\\ &\leqq C\left(\|\Lambda^2\phi(1)\|_{\rho'}+\left\|\sqrt{\delta}\,\Lambda^{\frac{1}{2}}\left(\frac{f}{\delta^2}\right)\right\|_{\rho'}\right),\quad\forall\rho<\rho_0.\end{aligned}$$

Or, on voit que

$$\begin{aligned}&\left\|\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}\left(\frac{f}{\delta^2}\right)\right\|_{\rho'}\leqq\\ &\leqq\sqrt{\delta}\left\{\|\Lambda^{\frac{1}{2}}p(1)\|_{\rho'}\left\|\frac{\phi_{zz}}{\delta^2}\right\|_{\rho'}+\|\Lambda^{\frac{1}{2}}q(1)\|_{\rho'}\left\|\frac{\phi_z}{\delta^2}\right\|_{\rho'}+\right.\\ &\left.+\|\Lambda^{\frac{1}{2}}r_1(1)\|_{\rho'}\left\|\frac{\phi_{zx}}{\delta}\right\|_{\rho'}+\|\Lambda^{\frac{1}{2}}r_2(1)\|_{\rho'}\left\|\frac{\phi_{zy}}{\delta}\right\|_{\rho'}\right\}+\\ &+\left\{\|p(1)\|_{\rho'}\left\|\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\phi_{zz}}{\delta^2}\right)\right\|_{\rho'}+\|q(1)\|_{\rho'}\left\|\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\phi_z}{\delta^2}\right)\right\|_{\rho'}+\right.\\ &\left.+\|r_1(1)\|_{\rho'}\left\|\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\phi_{zx}}{\delta}\right)\right\|_{\rho'}+\|r_2(1)\|_{\rho'}\left\|\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\phi_{zy}}{\delta}\right)\right\|_{\rho'}\right\},\end{aligned}\tag{3.19}$$

vu l'expression de f dans (3.12).

D'après le lemme 3.12 et la proposition 3.10, on a de (3.19):

$$\left\|\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}\left(\frac{f}{\delta^2}\right)\right\|_{\rho'} \leqq \frac{\sqrt{\delta}C(R_0)}{\sqrt{\rho-\rho'}}\left(\left\|\frac{\phi_{zz}}{\delta^2}\right\|_{\rho'}+\left\|\frac{\phi_z}{\delta^2}\right\|_{\rho'}+\left\|\frac{\phi_{zx}}{\delta}\right\|_{\rho'}+\left\|\frac{\phi_{zy}}{\delta}\right\|_{\rho'}\right)+$$

$$+\left\{\|p(1)\|_{\rho'}\left\|\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\phi_{zz}}{\delta^2}\right)\right\|_{\rho'}+\|q(1)\|_{\rho'}\left\|\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\phi_z}{\delta^2}\right)\right\|_{\rho'}+\right.$$

$$\left.+\|r_1(1)\|_{\rho'}\left\|\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\phi_{zx}}{\delta}\right)\right\|_{\rho'}+\|r_2(1)\|_{\rho'}\left\|\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\phi_{zy}}{\delta}\right)\right\|_{\rho'}\right\}\leqq$$

$$\leqq \frac{\sqrt{\delta}C(R_0)}{\sqrt{\rho-\rho'}}\frac{C(R_0)}{\sqrt{\delta}}\|\Lambda^{\frac{3}{2}}\phi(1)\|_{\rho'}+\{\cdots\}.$$

En appliquant le lemme 3.5 à l'inégalité ci-dessus et compte tenu de (3.13), on obtient (3.18) pour $R_0>0$ convenablement choisie comme dans la proposition 3.10.

Q. E. D.

Corollaire 3.16. *Pour $R_0>0$ choisie en haut, il existe une constante positive $C(R_0)$ indépendante de $\delta\in[0, 1]$ telle que l'on ait, si $E_{1,\rho}(\gamma-1)<R_0$, quel que soit $\rho<\rho_0$,*

$$\left\|\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}\left(\frac{f}{\delta^2}\right)\right\|_{\rho'} \leqq \frac{C(R_0)}{\rho-\rho'}(\|\phi_x(1)\|_\rho+\|\phi_y(1)\|_\rho), \tag{3.20}$$

$\forall\rho'<\forall\rho<\rho_0$.

3.4. Estimations aux bords (I). En s'appuyant sur les estimations dans le numéro précédent **3.3.**, voici les estimations aux bords qui nous servent pour obtenir le théorème d'existence.

Proposition 3.17. *Pour $R_0>0$ précédemment choisie, il existe une constante $C(R_0)>0$ indépéndante de $\delta\in[0, 1]$ telle que l'on ait, si $E_{1,\rho}(\gamma-1)<R_0$, $\forall\rho<\rho_0$:*

$$\left\|\frac{\phi_z}{\delta}(1)\right\|_\rho \leqq 2(\|\phi_x(1)\|_\rho+\|\phi_y(1)\|_\rho)+C(R_0)(\|\delta\phi_{xx}(1)\|_\rho+\|\delta\phi_{yy}(1)\|_\rho), \tag{3.21}$$

$\forall\rho'<\forall\rho<\rho_0$, *où* $\phi_z(1)=\phi_z|_{z=1}$, *etc.*

Preuve. Vu l'expression (3.5) et la notation de (3.12), on a

$$\hat{\phi}_z(1)=\delta\,\mathrm{th}\,(\delta|\xi|)(|\xi|\hat{\phi}(1))+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{ch}\,(\delta|\xi|z)}{\mathrm{ch}\,(\delta|\xi|)}\delta^2\hat{g}(z)\,dz, \tag{3.22}$$

où $g=f/\delta^2$, (3.12). D'où, on a

$$\left\|\frac{\phi_z}{\delta}(1)\right\|_\rho \leqq \|\Lambda\phi(1)\|_\rho+|||\delta g|||_\rho\leqq$$

$$\leqq \|\Lambda\phi(1)\|_\rho+C(R_0)\,\|\delta\Lambda^2\phi(1)\|_\rho,$$

d'après (3.16).

Proposition 3.18. *Pour $R_0>0$ précédemment choisie (les propositions* 3.15–3.17), *il existe une constante $C(R_0)$ positive telle que l'on ait, si $E_{1,\rho}(\gamma-1)<R_0$, quel que soit $\rho<\rho_0$, les estimations aux bords suivantes:*

(3.23) $$\left\|\frac{\phi_z}{\delta^2}(1)\right\|_{\rho'} \leqq \frac{C(R_0)}{\rho-\rho'}(\|\phi_x(1)\|_\rho + \|\phi_y(1)\|_\rho),$$

(3.24) $$\left\|\frac{\phi_{zx}}{\delta}(1)\right\|_{\rho'}, \left\|\frac{\phi_{zy}}{\delta}(1)\right\|_{\rho'} \leqq \frac{C(R_0)}{\rho-\rho'}(\|\phi_x(1)\|_\rho + \|\phi_y(1)\|_\rho),$$

$\forall\rho' < \forall\rho < \rho_0$, *$C(R_0)$ étant indépedante de $\delta\in[0,1]$.*

Preuve. (1) Vu (3.22), on voit

(3.25) $$\frac{1}{\delta^2}\hat{\phi}_z(1) = \frac{1}{\delta|\xi|}\text{th }(\delta|\xi|)(|\xi|^2\hat{\phi}(1)) + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\text{ch }(\delta|\xi|z)}{\text{ch }(\delta|\xi|)}\hat{g}(z)dz.$$

On a ainsi:

(3.26) $$\left\|\frac{\phi_z}{\delta^2}(1)\right\|_{\rho'} \leqq C(\|\Lambda^2\phi(1)\|_{\rho'} + |||g|||_{\rho'})$$

avec une constante C indépendante de $\delta\in[0, 1]$. D'où (3.23) compte tenu du corollaire 3.14, (3.16)', et.du lemme 3.5, (3.8).

(2) Compte tenu de (3.22), on voit que

(3.27) $$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{\delta}\phi_{zx}(1)\\[2ex] \frac{1}{\delta}\phi_{zy}(1)\end{array}\right\} \sim \text{th }(\delta|\xi|)(|\xi|^2\hat{\phi}(1)) + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\text{ch }(\delta|\xi|z)}{\text{ch }(\delta|\xi|)}\delta|\xi|\ \hat{g}(z)dz.$$

D'où, on a:

(3.28) $$\left\|\frac{\phi_{zx}}{\delta}(1)\right\|_{\rho'}, \left\|\frac{\phi_{zy}}{\delta}(1)\right\|_{\rho'} \leqq \|\Lambda^2\phi(1)\|_{\rho'} + C|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}g|||_{\rho'},$$

avec une constante C indépendante de $\delta\in[0, 1]$. D'où (3.23) d'après le corollaire 3.16, (3.20). Q.E.D.

Pour l'estimation de $\frac{1}{\delta}(\Lambda\phi_z(1))^2$, $\Lambda = (-\Delta)^{\frac{1}{2}}$, on démontre d'abord la

Proposition 3.19. *Pour $R_0 > 0$ choisie dans la proposition* 3.18, *il existe une constante positive $C(R_0)$ telle que l'on ait, si $E_{1,\rho}(\gamma-1) < R_0$, quel que soit $\rho < \rho_0$, l'inégalité suivante*:

(3.29) $$\|\phi_{zx}(1)\|_\rho, \quad \|\phi_{zy}(1)\|_\rho \leqq C(R_0)E_{2,\rho}(\phi),$$

quel que soit $\rho < \rho_0$.

Preuve. **1.** En multipliant (3.27) par δ, on a

(3.30) $$\phi_{zx}(1), \phi_{zy}(1) \cong \text{th }(\delta|\xi|)(\delta|\xi|^2\hat{\phi}(1)) + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\text{ch}(\delta|\xi|z)}{\text{ch}(\delta|\xi|)}\delta^2|\xi|\ \hat{g}(z)dz.$$

On va estimer la seconde partie du second membre en la désignant par

(3.31) $$\widehat{R_1\delta^2\Lambda g}(z)=\int_{-1}^{1}\frac{\text{ch}\,(\delta|\xi|z)}{\text{ch}\,(\delta|\xi|)}\delta^2|\xi|\hat{g}(z)dz.$$

2. On voit d'abord:

$$R_1\delta^2\Lambda g(z)=R_1\delta^2\Lambda\left(p\frac{\phi_{zz}}{\delta^2}\right)(z)+R_1\delta^2\Lambda\left(q\frac{\phi_z}{\delta^2}\right)(z)+$$
$$+R_1\delta^2\Lambda\left(r_1\frac{\phi_{zx}}{\delta}\right)(z)+R_1\delta^2\Lambda\left(r_2\frac{\phi_{zy}}{\delta}\right)(z)=$$
$$=①+②+③+④,\ \text{soit}.$$

Or, on a l'estimation suivante pour ② qui est plus simple que pour le reste:

(3.32) $$\|②\|_\rho\leqq C(R_0)E_{2,\rho}(\phi).$$

En effet, on a par l'intégration par partie

$$\hat{②}=2\,\text{th}\,(\delta|\xi|)\left(\widehat{q(1)\frac{\phi_z}{\delta}(1)}\right)-\int_{-1}^{1}\frac{\text{sh}\,(\delta|\xi|z)}{\text{ch}\,(\delta|\xi|)}\delta\widehat{\left(q\frac{\phi_z}{\delta^2}\right)_z}(z)dz,$$

vu $q(-1)=-q(1)$ et $\phi_z(-1)=-\phi_z(1)$. D'où, on a

$$\|②\|_\rho\leqq\|q(1)\|_\rho\left\|\frac{\phi_z}{\delta}(1)\right\|_\rho+\delta\left(\left\|q_z\frac{\phi_z}{\delta^2}\right\|_\rho+\left\|q\frac{\phi_{zz}}{\delta^2}\right\|_\rho\right)\leqq$$
$$\leqq C(R_0)E_{2,\rho}(\phi)+C'(R_0)\,|||\delta g|||_\rho\leqq C''(R_0)E_{2,\rho}(\phi),$$

compte tenu de (3.10)' et (3.21).

On voit ensuite que:

(3.33) $$\frac{\phi_{zz}}{\delta^2}(z)=\Lambda^2\phi(z)+g(z),\quad g(z)=f(z)/\delta^2\quad((3.12)),$$

d'où on a

(3.34) $$p(z)\frac{\phi_{zz}}{\delta^2}(z)=\left(\frac{p}{1-p}\right)(z)\Lambda^2\phi(z)+\left(\frac{pq}{1-p}\right)(z)\frac{\phi_z}{\delta^2}(z)+$$
$$+\left(\frac{pr_1}{1-p}\right)(z)\frac{\phi_{zx}}{\delta}(z)+\left(\frac{pr_2}{1-p}\right)(z)\frac{\phi_{zy}}{\delta}(z).$$

Lorsque l'on apporte cette expression dans $R_1\delta^2\Lambda g(z)$, on obtiendra l'estimation pour $R_1\delta^2\Lambda\left[\left(\frac{pq}{1+p}\right)\frac{\phi_z}{\delta^2}(z)\right]$ d'exactement la même manière que pour ②. Nous avons donc à estimer

(3.35) $$R_1\delta^2\Lambda\left\{\left(\frac{p}{1-p}\right)(z)\Lambda^2\phi(z)+\left(r_1+\frac{pr_1}{1-p}\right)(z)\frac{\phi_{zx}}{\delta}(z)+\right.$$
$$\left.+\left(r_2+\frac{pr_2}{1-p}\right)(z)\frac{\phi_{zy}}{\delta}(z)\right\}.$$

3. Premièrement on obtient:

$$\left\| R_1\delta^2\Lambda\left(\left(\frac{p}{1-p}\right)(z)\Lambda^2\phi(z)\right)\right\|_\rho \leqq \tag{3.36}$$
$$\leqq C(R_0)E_{2,\rho}(\phi)+\left\|\left(\frac{p}{1-p}\right)(1)\right\|_\rho \cdot |||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}(\delta\Lambda^2\phi(z))|||_\rho .$$

Preuve. On a en effet:

$$\left\| R_1\delta^2\Lambda\left(\left(\frac{p}{1-p}\right)(z)\Lambda^2\phi(z)\right)\right\|_{\rho'} \leqq C\left\|\delta\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}\left(\frac{p}{1-p}\Lambda^2\phi\right)\right\|_{\rho'} \leqq$$
$$\leqq C\left\|\left[\Lambda^{\frac{1}{2}},\ \delta\left(\frac{p}{1-p}\right)\right]\sqrt{\delta}\Lambda^2\phi\right\|_{\rho'}+\left\|\left(\frac{p}{1-p}\right)(1)\right\|_{\rho'} |||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}(\delta\Lambda^2\phi)|||_{\rho'},$$

où $[A, B]$ dans la première partie du second membre est le commutateur entre deux opérateurs pseudo-différentiels A et B.

En tenant compte de l'expression (3.5) avec les notations de (3.12), (5.18) et (5.19), la première partie du second membre est majorée comme suit, puisqu'on a $\left\|\Lambda\left(\delta\frac{p}{1-p}\right)\right\|_\rho \leqq C\cdot E_{1,\rho}(\gamma-1)$, quel que soit z, $|z|\leqq 1$:

$$\left\|\left[\Lambda^{\frac{1}{2}},\delta\left(\frac{p}{1-p}\right)\right]\sqrt{\delta}\Lambda^2\phi\right\|_{\rho'} \leqq C|||\sqrt{\delta}\,\Lambda^{\frac{3}{2}}G(z)\phi(1)|||_{\rho'}+|||\sqrt{\delta}\,\delta\Lambda^{\frac{1}{2}}Pg|||_{\rho'}\leqq$$
$$\leqq C'\|\Lambda\phi(1)\|_{\rho'}+\sqrt{N_0\tilde{N}_0}|||\delta g|||_{\rho'},$$

où on emploie l'expression suivante:

$$\Lambda^2\phi(z)=G(z)\Lambda^2\phi(1)+P\delta\Lambda g \sim$$
$$\sim \frac{\operatorname{ch}(\delta|\xi|z)}{\operatorname{ch}(\delta|\xi|)}|\xi|^2\hat{\phi}(1)+ \tag{3.37}$$
$$+\int_{-1}^{z}\delta|\xi|\frac{\operatorname{sh}(\delta|\xi|(z-1))\operatorname{sh}(\delta|\xi|(s+1))}{\operatorname{sh}(2\delta|\xi|)}\hat{g}(s)ds+$$
$$+\int_{z}^{1}\delta|\xi|\frac{\operatorname{sh}(\delta|\xi|(z+1))\operatorname{sh}(\delta|\xi|(s-1))}{\operatorname{sh}(2\delta|\xi|)}\hat{g}(s)ds$$

en écrivant $|\xi|$ au lieu de $2\pi|\xi|$[4]. D'où l'estimation ci-dessus (3.36), vu (3.10)'.

De même, on a:

$$\left\| R_1\delta^2\Lambda\left(\left(r_1+\frac{pr_1}{1-p}\right)\frac{\phi_{zx}}{\delta}\right)\right\|_\rho \leqq \tag{3.38}$$
$$\leqq C(R_0)E_{2,\rho}(\phi)+\left\|\left(r_1+\frac{pr_1}{1-p}\right)(1)\right\|_\rho |||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}\phi_{zx}|||_\rho ,$$

$$\left\| R_1\delta^2\Lambda\left(\left(r_2+\frac{pr_2}{1-p}\right)\frac{\phi_{zy}}{\delta}\right)\right\|_\rho \leqq \tag{3.39}$$
$$\leqq C(R_0)E_{2,\rho}(\phi)+\left\|\left(r_2+\frac{pr_2}{1-p}\right)(1)\right\|_\rho |||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}\phi_{zy}|||_\rho ,$$

4) De même jusqu'à la fin de cet article pour simplifier l'écriture.

vu également que, quel que soit z, $|z|\leqq 1$, l'on a:

$$\left\|(1+\delta\Lambda)\left(r_j+\frac{pr_j}{1-p}\right)\right\|_\rho\leqq CE_{1,\rho}(\gamma-1),\quad j=1,2.$$

4. Ainsi, ce qui nous reste à montrer, c'est l'estimation de

$$|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}(\delta\Lambda^2\phi)|||_\rho+|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}\phi_{zx}|||_\rho+|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}\phi_{zy}|||_\rho$$

par $C(R_0)E_{2,\rho}(\phi)$.

Voyons d'abord:

$$\begin{aligned}\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}(\delta\Lambda^2\phi(z))&=\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}G(z)\delta\Lambda^2\phi(1)+\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}P\delta^2\Lambda g\cong\\ &\cong\frac{\mathrm{ch}\,(\delta|\xi|z)}{\mathrm{ch}\,(\delta|\xi|)}\sqrt{\delta}|\xi|^{\frac{1}{2}}(\delta|\xi|^2\hat{\phi}(1))+\\ &+\int_{-1}^{z}\delta^{\frac{5}{2}}|\xi|^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{sh}\,(\delta|\xi|(z-1))\,\mathrm{sh}\,(\delta|\xi|(s+1))}{\mathrm{sh}\,(2\delta|\xi|)}\hat{g}(s)ds+\\ &+\int_{z}^{1}\delta^{\frac{5}{2}}|\xi|^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{sh}\,(\delta|\xi|(z+1))\,\mathrm{sh}\,(\delta|\xi|(s-1))}{\mathrm{sh}\,(2\delta|\xi|)}\hat{g}(s)ds.\end{aligned}\tag{3.40}$$

Il est évident qu'on a

$$|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}G(z)\delta\Lambda^2\phi(1)|||_\rho\leqq C\|\delta\Lambda^2\phi(1)\|_\rho.\tag{3.41}$$

Ensuite, dans la seconde partie $\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}P\delta^2\Lambda g$, on a l'estimation suivante de la même manière que pour ② dans le numéro **2.**:

$$\left|\left|\left|\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}P\delta^2\Lambda\left(\left(q+\frac{pq}{1-p}\right)\frac{\phi_z}{\delta^2}\right)\right|\right|\right|_\rho\leqq C(R_0)E_{2,\rho}(\phi).\tag{3.42}$$

Enfin on a

$$\begin{aligned}&|||\text{le reste de }\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}P\delta^2\Lambda g|||_\rho\leqq\\ &\leqq CN_0\left|\left|\left|\sqrt{\delta}\delta\Lambda^{\frac{1}{2}}\left\{\left(\frac{p}{1-p}\right)\Lambda^2\phi+\left(r_1+\frac{pr_1}{1-p}\right)\frac{\phi_{zx}}{\delta}+\left(r_2+\frac{pr_2}{1-p}\right)\frac{\phi_{zy}}{\delta}\right\}\right|\right|\right|_\rho\leqq\\ &\leqq CN_0\left\{\left|\left|\left|\sqrt{\delta}\left[\Lambda^{\frac{1}{2}},\delta\left(\frac{p}{1-p}\right)\right]\Lambda^2\phi\right|\right|\right|_\rho+\right.\\ &\left.+\left|\left|\left|\sqrt{\delta}\left[\Lambda^{\frac{1}{2}},\delta\left(r_1+\frac{pr_1}{1-p}\right)\right]\frac{\phi_{zx}}{\delta}\right|\right|\right|_\rho+\left|\left|\left|\sqrt{\delta}\left[\Lambda^{\frac{1}{2}},\delta\left(r_2+\frac{pr_2}{1-p}\right)\right]\frac{\phi_{zy}}{\delta}\right|\right|\right|_\rho\right\}+\\ &+CN_0\left\{\left\|\left(\frac{p}{1-p}\right)(1)\right\|_\rho|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}(\delta\Lambda^2\phi)|||_\rho+\right.\\ &\left.+\left\|\left(r_1+\frac{pr_1}{1-p}\right)(1)\right\|_\rho|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}\phi_{zx}|||_\rho+\left\|\left(r_2+\frac{pr_2}{1-p}\right)(1)\right\|_\rho|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}\phi_{zy}|||_\rho\right\}\leqq\\ &\leqq C(R_0)\,E_{2,\rho}(\phi)+CN_0\left\{\left\|\left(\frac{p}{1-p}\right)(1)\right\|_\rho|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}(\delta\Lambda^2\phi)|||_\rho+\right.\end{aligned}$$

$$+\left\|\left(r_1+\frac{pr_1}{1-p}\right)(1)\right\|_\rho |||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}\phi_{zx}|||_\rho+\left\|\left(r_2+\frac{pr_2}{1-p}\right)(1)\right\|_\rho |||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}\phi_{zy}|||_\rho\Big\}.$$

De même pour $|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}\phi_{zx}|||_\rho$ et $|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}\phi_{zy}|||_\rho$, et en fin de compte, on arrive à l'estimation suivante:

$$\begin{aligned}
&\left\{1-3CN_0\left\|\left(\frac{p}{1-p}\right)(1)\right\|_\rho\right\}|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}(\delta\Lambda^2\phi)|||_\rho+\\
&+\left\{1-3CN_0\left\|\left(r_1+\frac{pr_1}{1-p}\right)(1)\right\|_\rho\right\}|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}\phi_{zx}|||_\rho+\\
&+\left\{1-3CN_0\left\|\left(r_2+\frac{pr_2}{1-p}\right)(1)\right\|_\rho\right\}|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}\phi_{zy}|||_\rho\leqq\\
&\leqq 3C\|\delta\Lambda^2\phi(1)\|_\rho+3C(R_0)E_{2,\rho}(\phi)+3N_0C'(R_0)E_{2,\rho}(\phi).
\end{aligned}\tag{3.43}$$

5. Ainsi, en rapportant l'estimation de **4.** dans **3.**, on a l'estimation

$$|||R_1\delta^2\Lambda g|||_\rho\leqq C(R_0)E_{2,\rho}(\phi),\tag{3.44}$$

et par la suite (3.29). Q.E.D.

D'après cette proposition, avec la proposition 3.18, (3.24), on a le

Corollaire 3.20. *Sous les mêmes hypothèses que dans la proposition* 3.19, *on a*

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{\phi_{zx}(1)\phi_{zy}(1)}{\delta}\right\|_{\rho'},\quad \left\|\frac{(\phi_{zx}(1))^2}{\delta}\right\|_{\rho'},\quad \left\|\frac{(\phi_{zy}(1))^2}{\delta}\right\|_{\rho'}\leqq\\
&\leqq\frac{C(R_0)}{\rho-\rho'}\|\Lambda\phi(1)\|_\rho\cdot E_{2,\rho}(\phi),
\end{aligned}\tag{3.35}$$

$\forall\rho'<\forall\rho<\rho_0$.

3.5. Estimations aux bords (II). La dernière estimation aux bords nécessaire pour le théorème d'existence est résumée dans la

Proposition 3.21. *Si* $E_{1,\rho}(\gamma-1)<R_0$, R_0 *étant la constante déjà choisie dans* n^{os} **3.–4.**, *quel que soit* $\rho<\rho_0$, *il existe une constante positive* $C(R_0)$ *indépendante de* $\delta\in[0,1]$ *telle que l'on ait*

$$\|\phi_{zxx}(1)\|_{\rho'}+\|\phi_{zxy}(1)\|_{\rho'}+\|\phi_{zyy}(1)\|_{\rho'}\leqq\frac{C(R_0)}{\rho-\rho'}E_{2,\rho}(\phi),\tag{3.46}$$

$\forall\rho'<\forall\rho<\rho_0$, *pour* $|t|<a(\rho_0-\rho)$.

Corollaire 3.22 *Sous les mêmes hypothèses que dans la proposition, on a*

$$\|\delta\Lambda g(1)\|_{\rho'}\leqq\frac{C(R_0)}{\rho-\rho'}E_{2,\rho}(\phi),\tag{3.47}$$

$\forall\rho'<\forall\rho<\rho_0$.

Preuve. $1^{\grave{e}re}$ *étape*: D'après l'intégration par partie de (3.22) par rapport à z, on a:

$$\|\phi_{zxx}(1)\|_{\rho'}+\|\phi_{zxy}(1)\|_{\rho'}+\|\phi_{zyy}(1)\|_{\rho'}\leqq \tag{3.48}$$
$$\leqq\|\Lambda(\delta\Lambda^2\phi(1))\|_{\rho'}+\|\delta\Lambda g(1)\|_{\rho'}+C\||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}g_z\||_{\rho'},$$

où

$$g_z(z)=\Big\{(p_z+q)(z)\frac{\phi_{zz}}{\delta^2}(z)+q_z(z)\frac{\phi_z}{\delta^2}(z)+$$
$$+r_{1,z}(z)\frac{\phi_{zx}}{\delta}(z)+r_{2,z}(z)\frac{\phi_{zy}}{\delta}(z)\Big\}+ \tag{3.49}$$
$$+\Big\{p(z)\frac{\phi_{zzz}}{\delta^2}(z)+r_1\frac{\phi_{zzx}}{\delta}(z)+r_2\frac{\phi_{zzy}}{\delta}(z)\Big\},$$

avec la notation de (3.12).

2^e *étape*: Notons d'abord le fait suivant:

Lemme 3.23. *Sous les hypothèses de la proposition, on a*

$$\left\|\frac{\phi_{zz}}{\delta^2}(1)\right\|_{\rho'}\leqq\frac{C(R_0)}{\rho-\rho'}\|\Lambda\phi(1)\|_\rho, \tag{3.50}$$

$\forall\rho'<\forall\rho<\rho_0$, $C(R_0)$ *étant une constante indépendante de* $\delta\in[0, 1]$.

Preuve. Vu (3.5) et (3.12), on a

$$\frac{\phi_{zz}}{\delta^2}(1)=\Lambda^2\phi(1)+g(1)= \tag{3.51}$$
$$=\Lambda^2\phi(1)+p(1)\frac{\phi_{zz}}{\delta^2}(1)+q(1)\frac{\phi_z}{\delta^2}(1)+r_1(1)\frac{\phi_{zx}}{\delta}(1)+r_2(1)\frac{\phi_{zy}}{\delta}(1).$$

D'où, on a

$$(1-\|p(1)\|_{\rho'})\left\|\frac{\phi_{zz}}{\delta^2}(1)\right\|_{\rho'}\leqq$$
$$\leqq\|\Lambda^2\phi(1)\|_{\rho'}+CE_{1,\rho'}(\gamma-1)\left\{\left\|\frac{\phi_z}{\delta^2}(1)\right\|_{\rho'}+\left\|\frac{\phi_{zx}}{\delta}(1)\right\|_{\rho'}+\left\|\frac{\phi_{zy}}{\delta}(1)\right\|_{\rho'}\right\},$$

et (3.50) par la suite, compte tenu de la proposition 3.18, (3.23)–(3.24).

Corollaire 3.24. *Avec une constante positive* $C(R_0)$ *indépendante de* $\delta\in[0,1]$:

$$\|g(1)\|_{\rho'}\leqq\frac{C(R_0)}{\rho-\rho'}\|\Lambda\phi(1)\|_\rho, \tag{3.52}$$

$\forall\rho'<\forall\rho<\rho_0$.

Preuve. Il est facile d'avoir (3.52), vu (3.50) avec (3.23)–(3.24), puisqu' on a

$$g(1)=p(1)\frac{\phi_{zz}}{\delta^2}(1)+q(1)\frac{\phi_z}{\delta^2}(1)+r_1(1)\frac{\phi_{zx}}{\delta}(1)+r_2(1)\frac{\phi_{zy}}{\delta}(1). \tag{3.53}$$

Q.E.D.

Ceci dit, on va maintenant démontrer le

Lemme 3.25. *Sous les hypothèses de la proposition* 3.21, *on a*

$$\begin{aligned}\|\delta\Lambda g(1)\|_{\rho'} \leqq{}& \frac{C(R_0)}{\rho-\rho'}E_{2,\rho}(\phi)+\Big\{\|p(1)\|_{\rho'}\Big\|\Lambda\frac{\phi_{zz}}{\delta}(1)\Big\|_{\rho'}+\\ &+\|r_1(1)\|_{\rho'}\|\phi_{zxx}(1)\|_{\rho'}+(\|r_1(1)\|_{\rho'}+\|r_2(1)\|_{\rho'})\|\phi_{zxy}(1)\|_{\rho'}+\\ &+\|r_2(1)\|_{\rho'}\|\phi_{zyy}(1)\|_{\rho'}\Big\}.\end{aligned} \tag{3.54}$$

Preuve. On voit d'abord que:

$$\begin{aligned}\Big\|\Lambda\Big(p(1)\frac{\phi_{zz}}{\delta}(1)\Big)\Big\|_{\rho'} &\leqq \|\Lambda(\delta p(1))\|\Big\|\frac{\phi_{zz}}{\delta^2}(1)\Big\|_{\rho'}+\|p(1)\|_{\rho'}\Big\|\Lambda\frac{\phi_{zz}}{\delta}(1)\Big\|_{\rho'}\leqq\\ &\leqq\frac{C(R_0)}{\rho-\rho'}E_{2,\rho}(\phi)+\|p(1)\|_{\rho'}\Big\|\Lambda\frac{\phi_{zz}}{\delta}(1)\Big\|_{\rho'},\end{aligned} \tag{3.55}$$

vu le lemme 3.23, (3.50).

Ensuite,

$$\Big\|\Lambda\Big(q(1)\frac{\phi_z}{\delta}(1)\Big)\Big\|_{\rho'}\leqq\frac{1}{\rho-\rho'}\Big\|q(1)\frac{\phi_z}{\delta}(1)\Big\|_{\rho}\leqq\frac{C(R_0)}{\rho-\rho'}E_{2,\rho}(\phi), \tag{3.56}$$

d'après la proposition 3.18, (3.21).

Et enfin, on a

$$\begin{aligned}&\|\Lambda(r_1(1)\phi_{zx}(1))\|_{\rho'},\ \|\Lambda(r_2(1)\phi_{zy}(1))\|_{\rho'}\leqq\\ &\leqq\Big\{\|\Lambda(\delta r_1(1))\|_{\rho'}\Big\|\frac{\phi_{zx}}{\delta}(1)\Big\|_{\rho'}+\|\Lambda(\delta r_2(1))\|_{\rho'}\Big\|\frac{\phi_{zy}}{\delta}(1)\Big\|_{\rho'}\Big\}+\\ &+\{\|r_1(1)\|_{\rho'}\|\Lambda\phi_{zx}(1)\|_{\rho'}+\|r_2(1)\|_{\rho'}\|\Lambda\phi_{zy}(1)\|_{\rho'}\}\leqq\\ &\leqq\frac{C(R_0)}{\rho-\rho'}E_{2,\rho}(\phi)+\{\|r_1(1)\|_{\rho'}\|\phi_{zxx}(1)\|_{\rho'}+\\ &+(\|r_1(1)\|_{\rho'}+\|r_2(1)\|_{\rho'})\|\phi_{zxy}(1)\|_{\rho'}+\|r_2(1)\|_{\rho'}\|\phi_{zyy}(1)\|_{\rho'}\}.\end{aligned} \tag{3.57}$$

De ces trois estimations, on conclut (3.54) vu (3.53).

3^e *étape*: Il nous donc reste à estimer $|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}g_z|||_{\rho'}$ avec (3.49). On voit tout d'abord que

$$\begin{aligned}|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}g_z|||_{\rho'}\leqq{}&\frac{C(R_0)}{\rho-\rho'}\|\Lambda\phi(1)\|_{\rho}+\\ &+\Big\|\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}\Big(p\frac{\phi_{zzz}}{\delta^2}+r_1\frac{\phi_{zzx}}{\delta}+r_2\frac{\phi_{zzy}}{\delta}\Big)\Big\|_{\rho'},\end{aligned} \tag{3.58}$$

d'après le corollaire 3.16, (3.20), vu également les notations de (3.12). On va donc, dans ce qui suit, estimer la seconde partie du second membre dans (3.58).

Or, par l'intégration par partie, on a de (3.5):

$$\begin{aligned}\frac{1}{\delta^2}\hat{\phi}_{zzz}(z) &= \delta|\xi|^3\frac{\mathrm{sh}\,(\delta|\xi|z)}{\mathrm{ch}\,(\delta|\xi|)}\hat{\phi}(1)+\delta|\xi|\frac{\mathrm{sh}\,(\delta|\xi|z)}{\mathrm{ch}\,(\delta|\xi|)}\hat{g}(1)+\hat{g}_z(z)-\\ &-\int_{-1}^{z}\delta|\xi|\frac{\mathrm{ch}\,(\delta|\xi|(z-1))\,\mathrm{ch}\,(\delta|\xi|(s+1))}{\mathrm{sh}\,(2\delta|\xi|)}\hat{g}_z(s)ds-\\ &-\int_{z}^{1}\delta|\xi|\frac{\mathrm{ch}\,(\delta|\xi|(z+1))\,\mathrm{ch}\,(\delta|\xi|(s-1))}{\mathrm{sh}\,(2\delta|\xi|)}\hat{g}_z(s)ds,\end{aligned}\tag{3.59}$$

$$\frac{\hat{\phi}_{zzx}}{\delta}(z),\ \frac{\hat{\phi}_{zzy}}{\delta}(z)\sim$$

$$\begin{aligned}&\sim\delta|\xi|^3\frac{\mathrm{ch}\,(\delta|\xi|z)}{\mathrm{ch}\,(\delta|\xi|)}\hat{\phi}(1)+\delta|\xi|\frac{\mathrm{ch}\,(\delta|\xi|z)}{\mathrm{ch}\,(\delta|\xi|)}\hat{g}(1)-\\ &-\int_{-1}^{z}\delta|\xi|\frac{\mathrm{sh}\,(\delta|\xi|(z-1))\,\mathrm{ch}\,(\delta|\xi|(s+1))}{\mathrm{sh}\,(2\delta|\xi|)}\hat{g}(s)ds-\\ &-\int_{z}^{1}\delta|\xi|\frac{\mathrm{sh}\,(\delta|\xi|(z+1))\,\mathrm{ch}\,(\delta|\xi|(s-1))}{\mathrm{sh}\,(2\delta|\xi|)}\hat{g}(s)ds,\end{aligned}\tag{3.60}$$

ou encore

$$\frac{\phi_{zzz}}{\delta^2}(z)=G(z)\delta\Lambda^3\phi(1)+G(z)\delta\Lambda g(1)+g_z-P\delta\Lambda g_z,\tag{3.59)'}$$

$$\Lambda\frac{\phi_{zz}}{\delta}(z)=G_1(z)\delta\Lambda^3\phi(1)+G_1(z)\delta\Lambda g(1)-P_1\delta\Lambda g_z.\tag{3.60)'}$$

De (3.59)', on a

$$\begin{aligned}p(z)\frac{\phi_{zzz}}{\delta^2}(z) &= \left(\frac{p}{1-p}\right)(z)(G(z)\delta\Lambda^3\phi(1)+G(z)\delta\Lambda g(1)-P\delta\Lambda g_z)+\\ &+\left(\frac{pr_1}{1-p}\right)(z)\frac{\phi_{zzx}}{\delta}(z)+\left(\frac{pr_2}{1-p}\right)(z)\frac{\phi_{zzy}}{\delta}(z)+\\ &+\left(\frac{p}{1-p}\right)(z)\Big((p_z+q)(z)\frac{\phi_{zz}}{\delta^2}(z)+q_z(z)\frac{\phi_z}{\delta^2}(z)+\\ &+r_{1,z}(z)\frac{\phi_{zx}}{\delta}(z)+r_{2,z}(z)\frac{\phi_{zy}}{\delta}(z)\Big).\end{aligned}\tag{3.61}$$

Ceci vu, on a maintenant le

Lemme 3.26. *Sous les hypothèses de la proposition 3.21, il existe une constante positive $C(R_0)$ telle que l'on ait:*

$$\left\|\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}\left(p\frac{\phi_{zzz}}{\delta^2}\right)\right\|_{\rho'}+\left\|\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}\left(r_1\frac{\phi_{zzx}}{\delta}\right)\right\|_{\rho'}+\left\|\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}\left(r_2\frac{\phi_{zzy}}{\delta}\right)\right\|_{\rho'}\leqq$$

$$
\begin{aligned}
&\leqq \frac{C(R_0)}{\rho-\rho'} E_{2,\rho}(\phi)+\\
(3.62)\qquad &+C\Big\{\|p(1)\|_{\rho'}\Big(\Big\|\frac{\phi_{zzx}}{\delta}(1)\Big\|_{\rho'}+\Big\|\frac{\phi_{zzy}}{\delta}(1)\Big\|_{\rho'}\Big)+\|r_1(1)\|_{\rho'}\|\phi_{zxx}(1)\|_{\rho'}+\\
&+(\|r_1(1)\|_{\rho'}+\|r_2(1)\|_{\rho'})\|\phi_{zxy}(1)\|_{\rho'}+\|r_2(1)\|_{\rho'}\|\phi_{zyy}(1)\|_{\rho'}\Big\}+\\
&+C\sum_{j=1}^{2}\Big(\Big\|\Lambda\Big(\delta\frac{pr_j}{1-p}\Big)(1)\Big\|_{\rho'}+\Big\|\Big(\frac{pr_j}{1-p}\Big)(1)\Big\|_{\rho'}\Big)|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}g_z|||_{\rho'},
\end{aligned}
$$

C étant une constante positive indépendante de $\delta\in[0, 1]$.

Preuve. Vu (3.59)′, (3.60)′ et (3.61), on a à estimer:

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}\Big[\sum_{j=1}^{2}\Big(r_j+\frac{pr_j}{1-p}\Big)(z)\{G_1(z)\delta\Lambda^3\phi(1)+G_1(z)\delta\Lambda g(1)-P_1\delta\Lambda g_z(z)\}+\\
(3.63)\qquad &+\Big(\frac{p}{1-p}\Big)(z)\{G(z)\delta\Lambda^3\phi(1)+G(z)\delta\Lambda g(1)-P\delta\Lambda g_z(z)\}+\\
&+\Big(\frac{p}{1-p}\Big)(z)\Big\{(p_z+q)(z)\frac{\phi_{zz}}{\delta^2}(z)+q_z(z)\frac{\phi_z}{\delta^2}(z)+\\
&\qquad\qquad+r_{1,z}(z)\frac{\phi_{zx}}{\delta}(z)+r_{2,z}(z)\frac{\phi_{zy}}{\delta}(z)\Big\}\Big],
\end{aligned}
$$

au sens $|||\cdot|||_{\rho'}$.

Notons tout d'abord, pour tout z, $|z|\leqq 1$:

$$
(3.64)\qquad \Big\|\Big(r_j+\frac{pr_j}{1-p}\Big)(z)\Big\|_{\rho}+\Big\|\Lambda\delta\Big(r_j+\frac{pr_j}{1-p}\Big)(z)\Big\|_{\rho}\leqq CE_{1,\rho}(\gamma-1),\ j=1, 2,
$$

qui tend vers zéro lorsque R_0 tend vers zéro. On voit en effet que

$$
\frac{p}{1-p}=p+\frac{p^2}{1-p},\quad p\quad\text{dans (3.12)},
$$

d'où on a

$$
\Big\|\Big(\frac{p}{1-p}\Big)(z)\Big\|_{\rho}\leqq\frac{\|p(z)\|_{\rho}}{1-\|p(z)\|_{\rho}},\quad |z|\leqq 1.
$$

Et puisque l'on avait

$$
\|p(z)\|_{\rho}+\|\Lambda(\delta p)(z)\|_{\rho},\quad \|r_j(z)\|_{\rho}+\|\Lambda(\delta r_j)(z)\|_{\rho}\leqq CE_{1,\rho}(\gamma-1),\ j=1, 2,
$$

pour tout z, $|z|\leqq 1$, compte tenu de la preuve du lemme 3.12, on obtient (3.64).

On a par exemple pour $j=1, 2$:

$$
\Big|\Big|\Big|\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}\Big\{\Big(r_j+\frac{pr_j}{1-p}\Big)(z)G_1(z)\delta\Lambda^3\phi(1)\Big\}\Big|\Big|\Big|_{\rho'}\leqq
$$

$$\leqq \left\| \left[\Lambda^{\frac{1}{2}}, \delta\left(r_j + \frac{pr_j}{1-p}\right)(z)\right] \sqrt{\delta}\Lambda^3 G_1(z)\phi(1) \right\|_{\rho'} +$$

$$+ \left\| \left(r_j + \frac{pr_j}{1-p}\right)(z) \sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}} G_1(z)\delta\Lambda^3\phi(1) \right\|_{\rho'} \leqq$$

$$\leqq C \left\| \Lambda\left(\delta\left(r_j + \frac{pr_j}{1-p}\right)(1)\right)\right\|_{\rho'} \||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}} G(z)\cdot\Lambda^2\phi(1)\||_{\rho'} +$$

$$+ M_0 \left\| \left(r_j + \frac{pr_j}{1-p}\right)(1)\right\|_{\rho'} \|\Lambda(\delta\Lambda^2\phi(1))\|_{\rho'} \leqq$$

$$\leqq \frac{C'(R_0)}{\rho-\rho'}(\|\Lambda\phi(1)\|_\rho + \|\delta\Lambda^2\phi(1)\|_\rho) \leqq \frac{C(R_0)}{\rho-\rho'} E_{2,\rho}(\phi).$$

Ensuite, on a:

$$\left\| \sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}} \left\{\left(r_j + \frac{pr_j}{1-p}\right)(z) G_1(z)\delta\Lambda g(1)\right\} \right\|_{\rho'} \leqq$$

$$\leqq \left\| \left[\Lambda^{\frac{1}{2}}, \delta\left(r_j + \frac{pr_j}{1-p}\right)(z)\right] \sqrt{\delta}\Lambda G_1(z) g(1) \right\|_{\rho'} +$$

$$+ \left\| \left(r_j + \frac{pr_j}{1-p}\right)(z) \sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}} G_1(z)\delta\Lambda g(1) \right\|_{\rho'} \leqq$$

$$\leqq C \left\| \Lambda\left(\delta\left(r_j + \frac{pr_j}{1-p}\right)(1)\right)\right\|_{\rho'} M_0 \|g(1)\|_{\rho'} + \left\| \left(r_j + \frac{pr_j}{1-p}\right)(1)\right\|_{\rho'} M_0 \|\delta\Lambda g(1)\|_{\rho'} \leqq$$

$$\leqq \frac{C(R_0)}{\rho-\rho'} E_{2,\rho}(\phi) + \|p(1)\|_{\rho'} \left\| \Lambda \frac{\phi_{zz}}{\delta}(1)\right\|_{\rho'} +$$

$$+ \|r_1(1)\|_{\rho'} \|\Lambda\phi_{zx}(1)\|_{\rho'} + \|r_2(1)\|_{\rho'} \|\Lambda\phi_{zy}(1)\|_{\rho'},$$

d'après le corollaire 3.24, (3.52) et le lemme 3.25, (3.54).

Enfin, on a:

$$\left\| \sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}} \left\{\left(r_j + \frac{pr_j}{1-p}\right)(z) P_1 \delta\Lambda g_z(z)\right\} \right\|_{\rho'} \leqq$$

$$\leqq \left\| \left[\Lambda^{\frac{1}{2}}, \delta\left(r_j + \frac{pr_j}{1-p}\right)(z)\right] \sqrt{\delta} P_1 \Lambda g_z(z) \right\|_{\rho'} +$$

$$+ \left\| \left(r_j + \frac{pr_j}{1-p}\right)(z) \delta\Lambda P_1 \cdot \sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}} g_z(z) \right\|_{\rho'} \leqq$$

$$\leqq C \left\| \Lambda\left(\delta\left(r_j + \frac{pr_j}{1-p}\right)(1)\right)\right\|_{\rho'} \||P_1\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}} g_z\||_{\rho'} +$$

$$+ \left\| \left(r_j + \frac{pr_j}{1-p}\right)(1)\right\|_{\rho'} \||\delta\Lambda P_1 \sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}} g_z\||_{\rho'} \leqq$$

$$\leqq C\tilde{N}_0 \left\| \Lambda\left(\delta\left(r_j + \frac{pr_j}{1-p}\right)(1)\right)\right\|_{\rho'} + N_0 \left\| \left(r_j + \frac{pr_j}{1-p}\right)(1)\right\|_{\rho'} \||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}} g_z\||_{\rho'}.$$

Il ne faut pas oublier ici que Λ est la racine carrée de $-\Delta$, Δ étant l'opérateur laplacien dans $\boldsymbol{R}^2$.

De même pour le reste et on obtient (3.62).

On a donc l'estimation suivante pour $|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}g_z|||_{\rho'}$ en conséquence de deux inégalités (3.58) et (3.62):

Lemme 3.27 *Sous les hypothèses de la proposition* 3.21, *pour une constante positive* R_0 *suffisamment petite, il existe une constante positive* $C(R_0)$ *indépendante de* $\delta\in[0, 1]$ *telle que l'on ait*

$$|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}g_z|||_{\rho'}\leqq$$

$$\begin{aligned}\leqq \frac{C(R_0)}{\rho-\rho'}E_{2,\rho}(\phi)+C\Big\{&\|p(1)\|_{\rho'}\left(\left\|\frac{\phi_{zzx}}{\delta}(1)\right\|_{\rho'}+\left\|\frac{\phi_{zzy}}{\delta}(1)\right\|_{\rho'}\right)+\\ &+\|r_1(1)\|_{\rho'}\|\phi_{zxx}(1)\|_{\rho'}+\\ &+(\|r_1(1)\|_{\rho'}+\|r_2(1)\|_{\rho'})\,\|\phi_{zxy}(1)\|_{\rho'}+\\ &+\|r_2(1)\|_{\rho'}\|\phi_{zyy}(1)\|_{\rho'}\Big\},\end{aligned} \tag{3.65}$$

quels que soient $\rho'<\rho$, $\rho<\rho_0$, C *étant une constante positive indépendante de* δ.

4ᵉ *étape*: Les inégalités (3.48), (3.54) et (3.65) montrent (3.46) avec le lemme suivant:

Lemme 3.28. *Avec une constante positive* $C(R_0)$ *indépendante de* $\delta\in[0, 1]$, *on a*

$$\left\|\frac{\phi_{zzx}}{\delta}(1)\right\|_{\rho'}+\left\|\frac{\phi_{zzy}}{\delta}(1)\right\|_{\rho'}\leqq$$

$$\begin{aligned}\leqq \frac{C(R_0)}{\rho-\rho'}E_{2,\rho}(\phi)+C'(R_0)\{&\|p(1)\|_{\rho'}\|\phi_{zxx}(1)\|_{\rho'}+\\ &+(\|r_1(1)\|_{\rho'}+\|r_2(1)\|_{\rho'})\,\|\phi_{zxy}(1)\|_{\rho'}+\|r_2(1)\|_{\rho'}\|\phi_{zyy}(1)\|_{\rho'}\}.\end{aligned} \tag{3.66}$$

Preuve. Puisque l'on a

$$\frac{\phi_{zzx}}{\delta}(1),\ \frac{\phi_{zzy}}{\delta}(1)\sim\delta\Lambda(\Lambda^2\phi(1)+g(1)),$$

nous obtenons (3.66) d'après le lemme 3.25, (3.54) (fin de la démonstration de la proposition 3.21).

Remarque 3.29. En démontrant la proposition 3.21, (3.46), on a démontré en même temps, d'après (3.65)–(3.66), que

$$|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}g_z|||_{\rho'}\leqq\frac{C(R_0)}{\rho-\rho'}E_{2,\rho}(\phi), \tag{3.67}$$

avec $C(R_0)$ une constante positive dépendante de R_0 et indépendante de $\delta\in[0, 1]$.

§ 4. Théorème d'existence.

4.1. Système quasi-linéaire. Pour résoudre le problème de Cauchy (2.18)–(2.21) sur $z=1$ sous la condition (2.22), on récrit (2.18)–(2.19) comme un système pour

$$W(t)={}^t(u(t),\ v(t),\ \gamma(t)-1)\equiv \equiv {}^t(\phi_x(t,\ x,\ y,\ 1),\ \phi_y(t,\ x,\ y,\ 1),\ \gamma(t,\ x,\ y)-1): \tag{4.1}$$

$$\frac{dw}{dt}=G(W(t)) \tag{4.2}$$

i.e.

$$u_t=-uu_x-vv_x-\gamma_x+\frac{1+(\delta\gamma_x)^2+(\delta\gamma_y)^2}{\gamma^2}\frac{\phi_z(1)}{\delta}\frac{\phi_{zx}(1)}{\delta}+ +\frac{1}{2}\left(\frac{\phi_z(1)}{\delta}\right)^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1+(\delta\gamma_x)^2+(\delta\gamma_y)^2}{\gamma^2}\right), \tag{4.3}$$

$$v_t=-uu_y-vv_y-\gamma_y+\frac{1+(\delta\gamma_x)^2+(\delta\gamma_y)^2}{\gamma^2}\frac{\phi_z(1)}{\delta}\frac{\phi_{zy}(1)}{\delta}+ +\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1+(\delta\gamma_x)^2+(\delta\gamma_y)^2}{\gamma^2}\right)\left(\frac{\phi_z(1)}{\delta}\right)^2, \tag{4.4}$$

$$(\gamma-1)_t=-u(\gamma-1)_x-v(\gamma-1)_y+\frac{1+(\delta\gamma_x)^2+(\delta\gamma_y)^2}{\gamma}\frac{\phi_z(1)}{\delta^2}. \tag{4.5}$$

Remarque 4.1. Compte tenu du lemme 3.12 (estimation (3.17) etc.), il nous est utile de voir par exemple:

$$\frac{1+(\delta\gamma_x)^2+(\delta\gamma_y)^2}{\gamma}\frac{\phi_z(1)}{\delta^2}= =\frac{\phi_z(1)}{\delta^2}-\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\frac{\phi_z(1)}{\delta^2}+\{(\delta(\gamma-1)_x))^2+(\delta(\gamma-1)_y)^2\}\frac{\phi_z(1)}{\delta^2}- -\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\{(\delta(\gamma-1)_x)^2+(\delta(\gamma-1)_y)^2\}\frac{\phi_z(1)}{\delta^2}, \tag{4.6}$$

etc.

Montrons que le système (4.2), c'est-à-dire (4.3)–(4.5), est quasi-linéaire par rapport à

$$|W(t)|_\rho=E_{1,\rho}(\gamma-1)+E_{2,\rho}(\phi). \tag{4.7}$$

En appliquant $\delta\frac{\partial}{\partial x}$ ou $\delta\frac{\partial}{\partial y}$, on déduit de (4.3)–(4.4) les équations suivantes pour

$$(4.8)\qquad \begin{cases} \theta \equiv \delta u_x = \delta\phi_{xx}(1), \\ \tau \equiv \delta v_x = \delta\phi_{xy}(1), \\ \pi \equiv \delta v_y = \delta\phi_{yy}(1): \end{cases}$$

$$(4.9)\qquad \begin{aligned} &\theta_t + \theta u_x + u\theta_x + \tau v_x + v\tau_x + w_x - \\ &\quad -4\left\{\frac{wl+\chi m}{\gamma^2} - \frac{(1+w^2+\chi^2)w}{\gamma^3}\right\}\frac{\phi_z(1)}{\delta}\frac{\phi_{zx}(1)}{\delta} - \\ &\quad -\frac{1+w^2+\chi^2}{\gamma^2}\frac{\phi_{zx}(1)^2}{\delta} - \frac{1+w^2+\chi^2}{\gamma^2}\cdot\frac{\phi_z(1)}{\delta}\cdot\phi_{zxx}(1) - \\ &\quad -\left(\frac{\phi_z(1)}{\delta}\right)^2\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{wl+\chi m}{\gamma^2} - \frac{(1+w^2+\chi^2)w}{\gamma^3}\right\} = 0, \end{aligned}$$

$$(4.10)\qquad \begin{aligned} &\tau_t + \tau u_x + u\tau_x + \tau v_y + v\tau_y + w_y - \\ &\quad -2\left\{\frac{wm+\chi n}{\gamma^2} - \frac{(1+w^2+\chi^2)\chi}{\gamma^3}\right\}\frac{\phi_z(1)}{\delta}\frac{\phi_{zx}(1)}{\delta} - \\ &\quad -\frac{1+w^2+\chi^2}{\gamma^2}\phi_{zx}(1)\frac{\phi_{zy}(1)}{\delta} - \frac{1+w^2+\chi^2}{\gamma^2}\frac{\phi_z(1)}{\delta}\phi_{zxy}(1) - \\ &\quad -2\left\{\frac{wl+\chi m}{\gamma^2} - \frac{(1+w^2+\chi^2)w}{\gamma^3}\right\}\frac{\phi_z(1)}{\delta}\frac{\phi_{zy}(1)}{\delta} - \\ &\quad -\left(\frac{\phi_z(1)}{\delta}\right)^2\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{wl+\chi m}{\gamma^2} - \frac{(1+w^2+\chi^2)w}{\gamma^3}\right\} = 0, \end{aligned}$$

$$(4.11)\qquad \begin{aligned} &\pi_t + \tau u_y + u\tau_y + \pi v_y + v\pi_y + \chi_y - \\ &\quad -4\left\{\frac{wm+\chi n}{\gamma^2} - \frac{(1+w^2+\chi^2)\chi}{\gamma^3}\right\}\frac{\phi_z(1)}{\delta}\frac{\phi_{zy}(1)}{\delta} - \\ &\quad -\frac{1+w^2+\chi^2}{\gamma^2}\phi_{zy}(1)\frac{\phi_{zy}(1)}{\delta} - \frac{1+w^2+\chi^2}{\gamma^2}\frac{\phi_z(1)}{\delta}\phi_{zyy}(1) - \\ &\quad -\left(\frac{\phi_z(1)}{\delta}\right)^2\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{wm+\chi n}{\gamma^2} - \frac{(1+w^2+\chi^2)\chi}{\gamma^3}\right\} = 0, \end{aligned}$$

où

$$(4.12)\qquad \begin{aligned} &w = \delta\gamma_x = \delta(\gamma-1)_x, \quad \chi = \delta\gamma_y = \delta(\gamma-1)_y, \\ &l = \delta w_x = \delta^2\gamma_{xx} = \delta^2(\gamma-1)_{xx}, \\ &m = \delta\chi_x = \delta^2\gamma_{xy} = \delta w_y = \delta^2(\gamma-1)_{xy}, \\ &n = \delta\chi_y = \delta^2\gamma_{yy} = \delta^2(\gamma-1)_{yy}. \end{aligned}$$

De même, on a de (4.5), les équations suivantes pour w, χ, l, m et n:

$$(4.13)\qquad \begin{aligned} &w_t + wu_x + uw_x + \chi v_x + v\chi_x - \\ &\quad -\frac{\phi_z(1)}{\delta}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1+w^2+\chi^2}{\gamma}\right) - \frac{1+w^2+\chi^2}{\gamma}\frac{\phi_{zx}(1)}{\delta} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\chi_t+wu_y+uw_y+v\chi_y+\chi v_y- \\
(4.14)\quad &-\frac{\phi_z(1)}{\delta}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1+w^2++\chi^2}{\gamma}\right)-\frac{1+w^2+\chi^2}{\gamma}\frac{\phi_{zy}(1)}{\delta}=0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&l_t+2lu_x+w\theta_x+ul_x+2mv_x+\chi\theta_y+vm_x- \\
(4.15)\quad &-2\left\{\frac{2(wl+\chi m)}{\gamma}-\frac{(1+w^2+\chi^2)w}{\gamma^2}\right\}\frac{\phi_{zx}(1)}{\delta}- \\
&-\frac{\phi_z(1)}{\delta}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{2(wl+\chi m)}{\gamma}-\frac{(1+w^2+\chi^2)w}{\gamma^2}\right\}-\frac{1+w^2+\chi^2}{\gamma}\phi_{zxx}(1)=0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&m_t+mu_x+w\theta_y+lu_y+um_x+nv_x+\chi\tau_y+mv_y+vm_y- \\
&-\left\{\frac{2(wl+\chi m)}{\gamma}-\frac{(1+w^2+\chi^2)w}{\gamma}\right\}\frac{\phi_{zy}(1)}{\delta}- \\
(4.16)\quad &-\left\{\frac{2(wm+\chi n)}{\gamma}-\frac{(1+w^2+\chi^2)\chi}{\gamma^2}\right\}\frac{\phi_{zx}(1)}{\delta}- \\
&-\frac{1+w^2+\chi^2}{\gamma}\phi_{zxy}(1)-\frac{\phi_z(1)}{\delta}\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{2(wl+\chi m)}{\gamma}-\frac{(1+w^2+\chi^2)w}{\gamma^2}\right\}=0,
\end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned}
(4.17)\quad &n_t+\tau w_y+w\tau_y+um_y+mu_y+vn_y+nv_y+\chi\pi_y+\pi\chi_y- \\
&-2\left\{\frac{2(wm+\chi n)}{\gamma}-\frac{(1+w^2+\chi^2)\chi}{\gamma^2}\right\}\frac{\phi_{zy}}{\delta}(1)- \\
&-\frac{\phi_z(1)}{\delta}\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{2(wm+\chi n)}{\gamma}-\frac{(1+w^2+\chi^2)\chi}{\gamma^2}\right\}-\frac{1+w^2+\chi^2}{\gamma}\phi_{zyy}(1)=0.
\end{aligned}$$

D'où, on voit que le système (4.2) est quasi-linéaire par rapport à (4.7), vu les propositions 3.17, (3.21), 3.18, (3.23)-(3.24) et 3.21, (3.46).

En résumé:

Proposition 4.1. *Dans* (4.2), *G est une application continûe de* $\{w;\ |w|_\rho<R\}$ *dans* $\{w;\ |w|_{\rho'}<R\}$, $\forall\rho'<\forall\rho<\rho_0$.

4.2. Théorème d'existence. La proposition suivante avec la proposition 4.1 nous permettent d'obtenir le théorème d'existence d'après le théorème abstrait non-linéaire de Cauchy-Kowalevski [13, Appendice]:

Proposition 4.2. *Quel que soit* $\rho'<\rho$ *et quelles que soient* $W(t)={}^t(u(t),\ v(t),\ \gamma(t)-1)$, $\tilde{W}(t)={}^t(\tilde{u}(t),\ \tilde{v}(t),\ \tilde{\gamma}(t)-1)$ *appartenant à* $B_\rho\times B_\rho\times B_\rho$ *telles que*

$$E_{1,\rho}(\gamma-1),\quad E_{1,\rho}(\tilde{\gamma}-1)<R_0$$

$$E_{2,\rho}(\phi),\quad E_{2,\rho}(\tilde{\phi})<Q_0,$$

où $u(t)=\phi_x(t,\ x,\ y,\ 1)$, $v(t)=\phi_y(t,\ x,\ y,\ 1)$, *etc., il existe une constante positive* $C=$ $=C(R_0,\ Q_0)$ *indépendante de* (W, $\tilde{W}$, t, ρ *et* ρ') *telle que l'on ait:*

(4.18) $$|G(W(t))-G(\tilde{W}(t))|_{\rho'} \leqq \frac{C(R_0, Q_0)}{\rho-\rho'}|W(t)-\tilde{W}(t)|_\rho.$$

La proposition est une conséquence immédiate de la proposition 4.1 d'après estimations aux bords dans le paragraphe 3.

Maintenant on peut énoncer le théorème d'existence[5] comme suit:

Théorème 4.3. *Supposons que* $\gamma_0-1\in B_{\rho_0}$ *et* ϕ_0 *analytique dans* Ω_1 *telle que* $\phi_{0,x}(1)=\phi_{0,x}|_{z=1}$, $\phi_{0,y}(1)=\phi_{0,y}|_{z=1}\in B_{\rho_0}$ *satisfassent à*

$$E_{1,\rho_0}(\gamma_0-1)<\frac{R_0}{2},\quad E_{2,\rho_0}(\phi_0)<\frac{Q_0}{2}$$

pour $R_0>0$ *et* $Q_0>0$ *convenablement choisies. Alors, il existe une constante positive* a *indépendante de* $\delta\in[0, 1]$ *telle que le problème de Cauchy sur* $z=1$

(4.19) $$\phi_t+\frac{1}{2}(\phi_x^2+\phi_y^2)+\gamma-\frac{1}{2}\frac{1+(\delta\gamma_x)^2+(\delta\gamma_y)^2}{\gamma^2}\left(\frac{\phi_z}{\delta}\right)^2=0,$$

(4.20) $$\gamma_t+\gamma_x\phi_x+\gamma_y\phi_y-\frac{1+(\delta\gamma_x)^2+(\delta\gamma_y)^2}{\gamma}\frac{\phi_z}{\delta^2}=0,$$

(4.21) $$\begin{cases}\phi(0, x, y, 1)=\phi_0(x, y, 1),\\ \gamma(0, x, y)=\gamma_0(x, y)\geqq 2\gamma_->0\end{cases}$$

admette une et une seule solution $\{\phi, \gamma\}$ *telle que* $\gamma-1$, $\phi_x(1)$ *et* $\phi_y(1)\in B_\rho$ *pour* $|t|<a(\rho_0-\rho)$, *quel que soit* $\rho<\rho_0$, *satisfaisant à*

(4.22) $$E_{1,\rho}(\gamma-1)<2R_0,\quad E_{2,\rho}(\phi)<2Q_0.$$

Preuve. Prenons un nombre $R_0>0$ le plus grand possible tel que l'on ait toutes les estimations a priori dans le paragraphe 3 si $E_{1,\rho}(\gamma-1)<2R_0$, $\forall\rho<\rho_0$, et un nombre positif Q_0 (qui peut être égal à R_0).

Soit

(4.23) $$M_\rho[W(t)]=\frac{Q_0}{R_0}E_{1,\rho}(\gamma-1)+E_{2,\rho}(\phi),$$

alors

$$M_\rho[W(0)]=\frac{Q_0}{R_0}E_{1,\rho}(\gamma_0-1)+E_{2,\rho}(\phi_0)<$$
$$<\frac{Q_0}{R_0}\frac{R_0}{2}+\frac{Q_0}{2}=Q_0.$$

On va chercher une solution qui satisfait à

$$M_\rho[W(t)]<2Q_0,\quad \forall\rho<\rho_0.$$

Notons d'abord que si

5) Voir aussi [20], [23], [25] et [27].

$$M_\rho[W(t)]<2Q_0, \quad \forall\rho<\rho_0,$$

alors

$$\frac{Q_0}{R_0}E_{1,\rho}(\gamma-1)<2Q_0, \quad \text{i.e.} \quad E_{1,\rho}(\gamma-1)<2R_0,$$

quel que soit $\rho<\rho_0$. D'où les estimations a priori aux bords $z=1$ résumées dans les propositions 3.17, 3.18 et 3.21 pour $W(t)\in B_\rho\times B_\rho\times B_\rho$ satisfaisant à $M_\rho[W(t)]<2Q_0$, $\forall\rho<\rho_0$. Donc le théorème abstrait non-linéaire de Cauchy-Kowalevski démontre l'existence de solution cherchée. Soit, en effet, $R=2E_0$ où

$$M_\rho[W(0)]\equiv E_0<Q_0,$$

nous avons une solution unique $\{\phi, \gamma\}$ telle que pour $W(t)={}^t(\phi_x(t), \phi_y(1), \gamma(t)-1)$

$$M_\rho[W(t)]<R=2E_0<2Q_0$$

pour $|t|<a(\rho_0-\rho)$, quel que soit $\rho<\rho_0$. D'où

$$\frac{Q_0}{R_0}E_{1,\rho}(\gamma-1)+E_{2,\rho}(\phi)<2Q_0,$$

i.e.

$$E_{1,\rho}(\gamma-1)<2R_0, \quad E_{2,\rho}(\phi)<2Q_0,$$

quel que soit $\rho<\rho_0$, $|t|<a(\rho_0-\rho)$.

4.3. Solution pour (2.3)–(2.8) dans le paragraphe 2. En supprimant " , ", on voit

$$\begin{cases} \phi(t, x, y, z)=\Phi(t, x, y, z\Gamma(t, x, y)) \\ \gamma(t, x, y)=\Gamma(t, x, y), \end{cases}$$

d'où on a maintenant de valeurs aux bords sur la surface libre $z=\Gamma(t, x, y)$ de potentiel non-dimensionnel Φ:

$$\Phi(t, x, y, \Gamma(t, x, y))=\phi(t, x, y, 1)$$

par le théorème 4.3. On a ainsi la résolution du problème elliptique aux limites (2.3)–(2.8).

§5. Solution $\{\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\gamma}\}$ est indéfiniment différentiable par rapport à $\boldsymbol{\delta}\in[0, 1]$ sur $z=1$.

5.1. Dans ce paragraphe, on démontre que la solution $\{\phi, \gamma\}=\{\phi(t, x, y, 1), \gamma(t, x, y)\}$ obtenue dans le paragraphe 4 est indéfiniment différentiable par rapport au paramètre non-dimensionnel $\delta\in[0, 1]$. Le point crucial est: si

$$E_{1,\rho}(\gamma-1)<2R_0, \quad E_{2,\rho}(\phi)<2Q_0, \quad \forall\rho<\rho_0,$$

alors

$$(5.1)\quad \begin{aligned}
&D^k\left(\frac{\phi_z}{\delta}(1)\right),\quad D^k\left(\frac{\phi_{zx}}{\delta}(1)\right),\quad D^k\left(\frac{\phi_{zy}}{\delta}(1)\right),\\
&D^k\left(\frac{\phi_z}{\delta^2}(1)\right),\quad D^k\left(\phi_{zx}(1)\frac{\phi_{zy}}{\delta}(1)\right),\\
&D^k\left(\frac{\phi_{zx}(1)^2}{\delta}\right),\quad D^k\left(\frac{\phi_{zy}(1)^2}{\delta}\right),\\
&D^k\phi_{zxx}(1),\quad D^k\phi_{zxy}(1),\quad D^k\phi_{zyy}(1)
\end{aligned}$$

sont toutes majorées au sens $\| \quad \|_{\rho'}$, par

$$(5.2)\quad \begin{aligned}
&\frac{C(R_0)}{\rho-\rho'}\{\|D^k(\Lambda\phi(1))\|_\rho+\|D^k(\delta\Lambda^2\phi(1))\|_\rho\}+\\
&+\frac{C(Q_0)}{\rho-\rho'}E^k_{1,\rho}(\gamma-1)+\sum_{j=0}^{k-1}\frac{C(R_0,Q_0)}{(\rho-\rho')^{k-j+1}}\{E^j_{1,\rho}(\gamma-1)+E^j_{2,\rho}(\phi)\},
\end{aligned}$$

quels que soient ρ' et ρ tels que $\rho'<\rho$, $\rho<\rho_0$, $k=1, 2, 3,\ldots$, où $D^k=\dfrac{\partial^k}{\partial\delta^k}$,

$$(5.3)\quad \begin{cases}
E^j_{1,\rho}(\gamma-1)=\|D^j(\gamma-1)\|_\rho+\|D^j(\delta\gamma_x)\|_\rho+{}^j\|D(\delta\gamma_y)\|_\rho+\\
\qquad\qquad +\|D^j(\delta^2\gamma_{xx})\|_\rho+\|D^j(\delta^2\gamma_{xy})\|_\rho+\|D^j(\delta^2\gamma_{yy})\|_\rho,\\
E^0_{1,\rho}(\gamma-1)=E_{1,\rho}(\gamma-1)
\end{cases}$$

et

$$(5.4)\quad \begin{cases}
E^j_{2,\rho}(\phi)=\|D^j\phi_x(1)\|_\rho+\|D^j\phi_y(1)\|_\rho+\|D^j(\delta\phi_{xx}(1)\|_\rho+\\
\qquad\qquad +\|D^j(\delta\phi_{xy}(1))\|_\rho+\|D^j(\delta\phi_{yy}(1))\|,\\
E^0_{2,\rho}(\phi)=E_{2,\rho}(\phi),
\end{cases}$$

et $C(R_0)$, $C(Q_0)$ et $C(R_0, Q_0)$ sont des constantes indépendantes de $\delta\in[0, 1]$, ce qui est crucial pour notre théorie.

Appliquons D^k aux équations (4.3), (4.4) et (4.5) pour $\{u=\bar\Phi_x,\ v=\bar\Phi_y,\ (\gamma-1)\}$, $\bar\Phi=\bar\Phi(t, x, y)=\phi(t, x, y, 1)$. On obtient alors, d'après les estimations a priori en haut sur $z=1$, un système d'équations linéaires pour $W^{(k)}(t)={}^t(u^{(k)}=D^ku,\ v^{(k)}=D^kv,\ \gamma^{(k)}=D^k(\gamma-1))$, $k\geqq 1$, au sens $|W(t)|_\rho$ (voir (4.7)) avec le second membre ${}^t(\lambda_{k-1}, \mu_{k-1}, \nu_{k-1})$ qui sont des polynômes de $\{u^{(j)}, v^{(j)}, \gamma^{(j)}\}$, $0\leqq j\leqq k-1$, et leurs dérivées par rapport à (x, y):

$$(5.5)\quad \begin{cases}
u^{(k)}_t+F_1(t, u^{(k)}, v^{(k)}, \gamma^{(k)}, \nabla u^{(k)}, \nabla v^{(k)}, \nabla\gamma^{(k)})=\lambda_{k-1}\\
v^{(k)}_t+F_2(t, u^{(k)}, v^{(k)}, \gamma^{(k)}, \nabla u^{(k)}, \nabla v^{(k)}, \nabla\gamma^{(k)})=\mu_{k-1}\\
\gamma^{(k)}_t+F_3(t, u^{(k)}, v^{(k)}, \gamma^{(k)}, \nabla u^{(k)}, \nabla v^{(k)}, \nabla\gamma^{(k)})=\nu_{k-1}\,.
\end{cases}$$

Le système (5.5) est linéaire par rapport à $W^{(k)}(t)$, $k\geqq 1$, au sens $|W^{(k)}(t)|_\rho$, voir (4.7), c'est-à-dire qu'il y a une constante $C(R_0, Q_0)$ ne dépendant que de R_0 et Q_0 telle que l'on ait

$$\left\{\|F_3(t)\|_{\rho'}+\left\|\delta\frac{\partial}{\partial x}F_3\right\|_{\rho'}+\left\|\delta\frac{\partial}{\partial y}F_3\right\|_{\rho'}+\right.$$

$$(5.6)^{6)}\qquad +\left.\left\|\delta^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}F_3\right\|_{\rho'}+\left\|\delta^2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F_3\right\|_{\rho'}+\left\|\delta^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}F_3\right\|_{\rho'}\right\}+$$

$$+\|F_1\|_{\rho'}+\|F_2\|_{\rho'}+\left\|\delta\frac{\partial}{\partial x}F_1\right\|_{\rho'}+\left\|\delta\frac{\partial}{\partial y}F_1\right\|_{\rho'}+\left\|\delta\frac{\partial}{\partial y}F_2\right\|_{\rho'}\leqq$$

$$\leqq\frac{C(R_0,Q_0)}{\rho-\rho'}(E^k_{1,\rho}(\gamma-1)+E^k_{2,\rho}(\phi)),$$

$\forall\rho'<\rho$, compte tenu des équations (4.3)–(4.5), (4.9)–(4.11) et (4.13)–(4.17).

Ainsi les estimations aux bords en haut et le théorème abstrait non-linéaire de Cauchy-Kowalevski nous permettent de résoudre le problème de Cauchy pour (5.5), $k\geqq 1$, avec les données de Cauchy zéros. Puisque les constantes $C(R_0)$ etc sont indépendantes de $\delta\in[0, 1]$ dans les estimations en haut, on en conclut que $W(t)={}^t(u(t), v(t), \gamma(t)-1)$ est indéfiniment différentiable par rapport à δ au sens $|W(t)|_\rho$, $\forall\rho<\rho_0$.

On va donc passer maintenant à la démonstration des estimations pour (5.1) par (5.2).

5.2. Estimations a priori $(\mathrm{I})_k$.

5.2.1. Commençons par le lemme suivant:

Lemme 5.1. *Pour* $k=1, 2, 3,\dots$, *on a*

$$\left\|D^k\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\right\|_\rho\leqq\frac{\|D^k(\gamma-1)\|_\rho}{(1-\|\gamma-1\|_\rho)^2}+\sum_{j=1}^k C^j_k\frac{\|D^j(\gamma-1)\|_\rho}{1-\|\gamma-1\|_\rho}\left\|D^{k-j}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\right\|_\rho,$$

C^j_k *étant le coefficient du binôme.*

Preuve. Vu

$$(5.8)\qquad \frac{1-\gamma}{\gamma}=(1-\gamma)+(1-\gamma)\frac{1-\gamma}{\gamma},$$

on a

$$(1-\|\gamma-1\|_\rho)\left\|D^k\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\right\|_\rho\leqq$$

$$\leqq\left(1+\left\|\frac{\gamma-1}{\gamma}\right\|_\rho\right)\|D^k(\gamma-1)\|_\rho+\sum_{j=1}^{k-1}C^j_k\|D^j(\gamma-1)\|_\rho\left\|D^{k-j}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\right\|_\rho.$$

D'où (5.6), vu

$$(5.9)\qquad 1+\left\|\frac{\gamma-1}{\gamma}\right\|_\rho\leqq\frac{1}{1-\|\gamma-1\|_\rho},$$

d'après

---

6) $\frac{\partial}{\partial x}F_2=\frac{\partial}{\partial y}F_1$

$$(5.10)\qquad (1-\|\gamma-1\|_\rho)\left\|\frac{\gamma-1}{\gamma}\right\|_\rho \leqq \|\gamma-1\|_\rho .$$

D'après ce lemme, on peut montrer le

Lemme 5.2. *Pour $\gamma\in B_\rho$ telle que $E_{1,\rho}(\gamma-1)<R_0$, quel que soit $\rho<\rho_0$, on a les inégalités suivantes avec les coefficients indépendantes de $\delta\in[0, 1]$:*

$$(5.11)\qquad \begin{aligned}\left\|D^k\left(1-\left(\frac{1}{\gamma^2}\right)\right)\right\|_\rho &\leqq C(R_0)\|D^k(\gamma-1)\|_\rho+\\ &+\left[\begin{array}{l}\text{un polynôme de } \{\|D^j(\gamma-1)\|_\rho\},\\ 0\leqq j\leqq k-1, \text{ à coefficients } C(R_0)\end{array}\right],\end{aligned}$$

$$(5.12)\qquad \begin{aligned}\left\|D^k\left(\frac{\delta\gamma_x}{\gamma}\right)\right\|_\rho &\leqq C(R_0)(\|D^k(\delta\gamma_x)\|_\rho+\|D^k(\gamma-1)\|_\rho)+\\ &+\left[\begin{array}{l}\text{un polynôme de } \{\|D^j(\delta\gamma_x)\|_\rho,\ \|D^l(\gamma-1)\|_\rho\},\\ 0\leqq j,\ l\leqq k-1, \text{ à coefficients } C(R_0)\end{array}\right],\end{aligned}$$

$$(5.13)\qquad \begin{aligned}\left\|D^k\left(\frac{\delta\gamma_y}{\gamma}\right)\right\|_\rho &\leqq C(R_0)(\|D^k(\delta\gamma_y)\|_\rho+\|D^k(\gamma-1)\|_\rho)+\\ &+\left[\begin{array}{l}\text{un polynôme de } \{\|D^j(\delta\gamma_y)\|_\rho,\ \|D^l(\gamma-1)\|_\rho\},\\ 0\leqq j,\ l\leqq k-1, \text{ à coefficients } C(R_0)\end{array}\right].\end{aligned}$$

Preuve. i) Vu

$$1-\frac{1}{\gamma^2}=2\frac{\gamma-1}{\gamma}-\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)^2,$$

on obtient (5.11) d'après le lemme 5.2.

ii) On voit

$$\frac{\delta\gamma_x}{\gamma}=(\delta\gamma_x)-(\delta\gamma_x)\frac{\gamma-1}{\gamma},$$

$$\frac{\delta\gamma_y}{\gamma}=(\delta\gamma_y)-(\delta\gamma_y)\frac{\gamma-1}{\gamma}.$$

d'où (5.10)-(5.11) en appliquant le lemme 5.2.

5.2.2. Avant de démontrer l'inégalité fondamentale dans ce paragraphe qui correspond à la proposition 3.10, (3.10), on a, d'après les lemmes 5.1–5.2, le lemme suivant pour p, q et r_j, $j=1, 2$, dans (3.12):

Lemme 5.3. *Soit R_0 la constante positive choisie dans le paragraphe 3, il existe une constante positive $C(R_0)$ qui ne dépende que de R_0 telle que l'on ait, si $E_{1,\rho}(\gamma-1)<R_0$, quel que soit $\rho<\rho_0$:*

$$(5.14)_k \quad \begin{aligned} &\|D^k p(1)\|_\rho + \|D^k q(1)\|_\rho + \|D^k r_1(1)\|_\rho + \|D^k r_2(1)\|_\rho \leqq \\ &\leqq C(R_0) E^k_{1,\rho}(\gamma-1) + \left[\begin{array}{l} \textit{un polynôme de } \{E^j_{1,\rho}(\gamma-1)\}, \\ 0 \leqq j \leqq k-1, \textit{ à coefficients } C(R_0) \end{array} \right]. \end{aligned}$$

On a, en particulier, pour $k=1$:

$$(5.14)_1 \quad \begin{aligned} &\|D^1 p(1)\|_\rho + \|D^1 q(1)\|_\rho + \|D^1 r_1(1)\|_\rho + \|D^1 r_2(1)\|_\rho \leqq C(R_0) E^1_{1,\rho}(\gamma-1) = \\ &= C(R_0)(\|D^1(\gamma-1)\|_\rho + \|D^1(\delta\gamma_x)\|_\rho + \cdots + \|D^1(\delta^2\gamma_{yy})\|_\rho). \end{aligned}$$

Ceci dit, on a la

Proposition 5.4. *Soit* $E_{1,\rho}(\gamma-1) < R_0$, R_0 *étant la constante positive choisie dans le paragraphe* 3 *pour estimations a priori et soit aussi* $E_{2,\rho}(\phi) < Q_0$, Q_0 *une constante positive, quel que soit* $\rho < \rho_0$. *Alors, il existent des constantes positives* $C(R_0)$ *et* $C_k(R_0, Q_0)$ *indépendantes de* $\delta \in [0, 1]$, ρ *et* ρ' *telles que l'on ait l'inégalité suivante*:

$$(5.15)_k \quad \begin{aligned} &|||D^k\phi_{xx}|||_{\rho'} + |||D^k\phi_{xy}|||_{\rho'} + |||D^k\phi_{yy}|||_{\rho'} + \\ &+ \left\|D^k\left(\frac{\phi_z}{\delta^2}\right)\right\|_{\rho'} + \left\|D^k\left(\frac{\phi_{zx}}{\delta}\right)\right\|_{\rho'} + \left\|D^k\left(\frac{\phi_{zy}}{\delta}\right)\right\|_{\rho'} + \left\|D^k\left(\frac{\phi_{zz}}{\delta^2}\right)\right\|_{\rho'} \leqq \\ &\leqq \frac{C(R_0)}{\sqrt{\delta}} \{\|\Lambda^{\frac{1}{2}} D^k(\Lambda\phi(1))\|_{\rho'} + \|\Lambda^{\frac{1}{2}}(\Lambda\phi(1))\|_{\rho'} E^k_{1,\rho'}(\gamma-1)\} + \\ &\qquad + \frac{C_k(R_0, Q_0)}{\sqrt{\delta}(\rho-\rho')^{k+\frac{1}{2}}}, \end{aligned}$$

$\forall \rho' < \forall \rho < \rho_0$.

Remarque 5.5. Dans l'inégalité ci-dessus, la première partie du second membre peut être remplacée par

$$(5.16) \qquad C(R_0)(\|\Lambda D^k(\Lambda\phi(1))\|_{\rho'} + \|\Lambda(\Lambda\phi(1))\|_{\rho'} E^k_{1,\rho'}(\gamma-1))$$

et la seconde partie par $C_k(R_0, Q_0)(\rho-\rho')^{-k-1}$, voir aussi la remarque 3.11.

Comme le corollaire 3.14, on a le

Corollaire 5.6. *Sous les hypothèses de la proposition* 5.4, *on a*

$$|||D^k g|||_{\rho'} \leqq \left(\begin{array}{l} \textit{le second membre de } (5.15)_k, \\ \textit{ou encore } (5.16). \end{array} \right).$$

Preuve de la proposition 5.4. En se servant de l'expression (3.5) et la notation de (3.12), on va calculer $D^k(\phi_{zz}/\delta^2)$ etc. Tout d'abord, on a

$$\frac{\phi_{zz}}{\delta^2}(z) = G(z)\Lambda^2\phi(1) + g(z) + P\delta\Lambda g(z),$$

où

$$\hat{G}=\frac{\operatorname{ch}(\delta|\xi|z)}{\operatorname{ch}(\delta|\xi|)}, \tag{5.18}$$

$$\begin{aligned}\widehat{P\delta\Lambda g}=&\int_{-1}^{z}\frac{\operatorname{sh}(\delta|\xi|(z-1))\operatorname{sh}(\delta|\xi|(s+1))}{\operatorname{sh}(2\delta|\xi|)}\delta|\xi|\hat{g}(s)ds+\\&+\int_{z}^{1}\frac{\operatorname{sh}(\delta|\xi|(\dot{z}+1))\operatorname{sh}(\delta|\xi|(s-1))}{\operatorname{sh}(2\delta|\xi|)}\delta|\xi|\hat{g}(s)ds\end{aligned} \tag{5.19}$$

et

$$g(s)=\frac{f(s)}{\delta^2}=p(s)\frac{\phi_{zz}}{\delta^2}(s)+q(s)\frac{\phi_z}{\delta^2}(s)+r_1(s)\frac{\phi_{zx}}{\delta}(s)+r_2(s)\frac{\phi_{zy}}{\delta}(s).$$

On a donc:

$$\begin{aligned}D^k\Big(\frac{\phi_{zz}}{\delta^2}(z)\Big)=&\{G(z)\Lambda\cdot D^k(\Lambda\phi(1))+g_{0,k}+P\delta\Lambda g_{0,k}+g_{k,0}+P\delta\Lambda g_{k,0}\}+\\&+\sum_{j=1}^{k-1}C_k^j(g_{j,k-j}+P\delta\Lambda g_{j,k-j})+\sum_{j=1}^{k}C_k^jD^jG(z)\cdot\Lambda\cdot D^{k-j}(\Lambda\phi(1))+\\&+kP\Lambda g_{k-1}+\sum_{j=1}^{k}C_k^jD^jP\cdot\Lambda(\delta g_{k-j}+(k-j)g_{k-j-1}),\end{aligned} \tag{5.20}$$

où

$$\left\{\begin{aligned}&g_l=D^lg=\sum_{j=0}^{l}C_l^jg_{j,l-j},\quad g_0=g,\\&g_{j,l-j}=D^jp\cdot D^{l-j}\Big(\frac{\phi_{zz}}{\delta^2}\Big)+D^jqD^{l-j}\Big(\frac{\phi_z}{\delta^2}\Big)+\\&\qquad+D^jr_1\cdot D^{l-j}\Big(\frac{\phi_{zx}}{\delta}\Big)+D^jr_2D^{l-j}\Big(\frac{\phi_{zy}}{\delta}\Big).\end{aligned}\right. \tag{5.21}$$

Pour la partie principale dans la parenthèse { } du second membre, on a l'estimation suivante d'exactement la même façon que pour les estimations dans le paragraphe 3, **3.3.**:

$$\begin{aligned}&|||G(z)\Lambda D^k(\Lambda\phi(1))+g_{0,k}(z)+P\delta\Lambda g_{0,k}+g_{k,0}+P\delta\Lambda g_{k,0}|||_{\rho'}\leqq\\&\leqq\frac{C(R_0)}{\sqrt{\delta}}\{\|\Lambda^{\frac12}D^k(\Lambda\phi(1))\|_{\rho'}+\|\Lambda^{\frac12}(\Lambda\phi(1))\|_{\rho'}E^k_{1,\rho'}(\gamma-1)\}+\frac{C_k(R_0,Q_0)}{\sqrt{\delta}(\rho-\rho')^{k+\frac12}}\end{aligned} \tag{5.22}$$

compte tenu de $(5.14)_k$, $\forall\rho'<\rho$.

Pour les estimations des termes qui restent, on utilise les lemmes suivants:

Lemme 5.7. *Quelle que soit $u\in B_\rho$, il existent des constantes positives M_j et $\tilde{M}_j$ indépendantes de $\delta\in[0,1]$ telles que l'on ait*

$$\left\{\begin{aligned}&1)\quad |||(D^jG(z))u|||_\rho\leqq\frac{M_j}{\sqrt{\delta}}\|\Lambda^{j-\frac12}u\|_\rho,\\&2)\quad |||(D^jG(z))u|||_\rho\leqq\tilde{M}_j\|\Lambda^ju\|_\rho.\end{aligned}\right. \tag{5.23}$$

Preuve. On voit par la définition:

$$|||(D^jG(z))u|||_\rho^2=\int_{-1}^1 dz\int_{\mathbf{R}^2}|(1+|\xi|)^2e^{\rho|\xi|}\cdot D^j\hat{G}(z)\cdot\hat{u}(\xi)|^2d\xi.$$

Or $\mathrm{ch}(z\sigma)/\mathrm{ch}(\sigma)$, $|z|<1$, est une fonction analytique réelle de σ, et prolongeable holomorphiquement pour $\Xi=\sigma+i\tau$, $|\tau|<\frac{\pi}{2}$, $\Xi=\infty$ n'étant pas point singulier pour elle. On a donc

$$\sup_{\delta|\xi|,|z|<1}|D^j\hat{G}(\delta|\xi|,z)|\leqq\tilde{M}_j|\xi|^j \tag{5.24}$$

d'après le théorème de Cauchy, d'où (5.23), 2).

On a également

$$\sup_{\delta|\xi|}\int_{-1}^1|D^j\hat{G}(\delta|\xi|,z)|^2dz\leqq\frac{1}{\delta}M_j^2|\xi|^{2j-1}, \tag{5.25}$$

d'où (5.23), 1).

Remarque 5.8. Pour $j=1$, par exemple, on a

$$\int_{-1}^1|D\hat{G}(z)|^2dz\leqq\frac{1}{2}\left|\frac{\mathrm{sh}\,(2\delta|\xi|)}{\delta|\xi|}-2\right|\frac{|\xi|^2}{\mathrm{ch}^2\,(\delta|\xi|)}=$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{\mathrm{sh}\,(2\delta|\xi|)-2\delta|\xi|}{\mathrm{ch}^2\,(\delta|\xi|)}\right|\frac{|\xi|}{\delta},$$

$$\sup_{\delta|\xi|}\frac{1}{2}\left|\frac{\mathrm{sh}\,(2\delta|\xi|)-2\delta|\xi|}{\mathrm{ch}^2\,(\delta|\xi|)}\right|\equiv M_1^2.$$

Par le même raisonnement, on peut démontrer le lemme suivant:

Lemme 5.9. *Quelle que soit $v\in B_\rho$, on a,*

$$|||(D^jP(z))v|||_\rho\leqq\tilde{N}_j\|\Lambda^jv\|_\rho, \tag{5.26}$$

$$|||(D^jP(z))\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}v|||_\rho\leqq\sqrt{\tilde{N}_jN_j}\|\Lambda^jv\|_\rho, \tag{5.27}$$

$$|||(D^jP(z))\delta\Lambda v|||_\rho\leqq N_j\|\Lambda^jv\|_\rho, \tag{5.28}$$

les constantes $\tilde{N}_j$ et N_j sont indépendantes de $\delta\in[0,1]$ et de ρ.

Preuve. Les inégalités en haut correspondent aux inégalités suivantes:

$$\sup_{\substack{\delta|\xi|\\|z|<1,-1\leqq s\leqq z}}|\widehat{D^jP(z)v}|,\qquad\sup_{\substack{\delta|\xi|\\|z|<1,z\leqq s\leqq 1}}|\widehat{D^jP(z)v}|\leqq\tilde{N}_j|\xi|^j|\hat{v}(\xi)|, \tag{5.29}$$

$$\left.\begin{aligned}&\sup_{|z|<1}\int_{-1}^z|\widehat{D^jP(z,s)v}(s)|ds\\&\sup_{|z|<1}\int_z^1|\widehat{D^jP(z,s)v}(s)|ds\end{aligned}\right\}\leqq\frac{N_j}{\delta}|\xi|^{j-1}|\hat{v}(\xi)| \tag{5.30}$$

et

$$\int_{-1}^{1} \|D^j P(z)v\|_\rho^2 dz \leqq \frac{C_j}{\delta^2} \|\Lambda^{j-1}v\|_\rho^2, \tag{5.31}$$

où $C_j = N_j^2$. Q.E.D.

D'après ces deux lemmes, on a:

$$\left|\left|\left| \sum_{j=1}^{k-1} C_k^j (g_{j,k-j} + P\delta\Lambda g_{j,k-j}) \right|\right|\right|_{\rho'} \leqq$$

$$\leqq \sum_{j=1}^{k-1} C_k^j (1+N_0) |||g_{j,k-j}|||_{\rho'} \leqq$$

$$\leqq \sum_{j=1}^{k-1} C_k^j (1+N_0) \frac{C(R_0)}{(\rho-\rho')^j} \left\{ \left|\left|\left| D^{k-j}\left(\frac{\phi_{zz}}{\delta^2}\right) \right|\right|\right|_{\rho'} + \left|\left|\left| D^{k-j}\left(\frac{\phi_z}{\delta^2}\right) \right|\right|\right|_{\rho'} + \right.$$

$$\left. + \left|\left|\left| D^{k-j}\left(\frac{\phi_{zx}}{\delta}\right) \right|\right|\right|_{\rho'} + \left|\left|\left| D^{k-j}\left(\frac{\phi_{zy}}{\delta}\right) \right|\right|\right|_{\rho'} \right\},$$

$$\left|\left|\left| \sum_{j=1}^{k} C_k^j D^j G(z) \cdot \Lambda \cdot D^{k-j}(\Lambda\phi(1)) \right|\right|\right|_{\rho'} \leqq$$

$$\leqq \sum_{j=1}^{k} C_k^j \frac{M_j}{\sqrt{\delta}(\rho-\rho')^{j+\frac{1}{2}}} \|D^{k-j}(\Lambda\phi(1))\|_\rho,$$

$$\left|\left|\left| kP\Lambda g_{k-1} + \sum_{j=1}^{k} C_k^j D^j P \cdot \Lambda(\delta g_{k-j} + (k-j)g_{k-j-1}) \right|\right|\right|_{\rho'} \leqq$$

$$\leqq k(1+N_1)|||\Lambda g_{k-1}|||_{\rho'} + \sum_{j=1}^{k-1} C_k^j \{N_j |||\Lambda^j g_{k-j}|||_{\rho'} + (k-j)\tilde{N}_j |||\Lambda^{j+1} g_{k-j-1}|||_{\rho'}\}.$$

Pour ce dérnier, on a par exemple

$$|||\Lambda g_{k-1}|||_{\rho'} \leqq \sum_{j=0}^{k-1} C_{k-1}^j |||\Lambda g_{j,k-1-j}|||_{\rho'} \leqq$$

$$\leqq \sum_{j=0}^{k-1} C_{k-1}^j \left\{ \left(\|\Lambda D^j p(1)\|_{\rho'} \left|\left|\left| D^{k-j-1} \frac{\phi_{zz}}{\delta^2} \right|\right|\right|_{\rho'} + \|\Lambda D^j q(1)\|_{\rho'} \left|\left|\left| D^{k-j-1} \frac{\phi_z}{\delta^2} \right|\right|\right|_{\rho'} + \right.\right.$$

$$\left. + \|\Lambda D^j r_1(1)\|_{\rho'} \left|\left|\left| D^{k-j-1} \frac{\phi_{zx}}{\delta} \right|\right|\right|_{\rho'} + \|\Lambda D^j r_2(1)\|_{\rho'} \left|\left|\left| D^{k-j-1} \frac{\phi_{zy}}{\delta} \right|\right|\right|_{\rho'} \right) +$$

$$+ \left(\|D^j p(1)\|_{\rho'} \left|\left|\left| \Lambda D^{k-j-1}\left(\frac{\phi_{zz}}{\delta^2}\right) \right|\right|\right|_{\rho'} + \|D^j q(1)\|_{\rho'} \left|\left|\left| \Lambda D^{k-j-1}\left(\frac{\phi_z}{\delta^2}\right) \right|\right|\right|_{\rho'} + \right.$$

$$\left.\left. + \|D^j r_1(1)\|_{\rho'} \left|\left|\left| \Lambda D^{k-j-1}\left(\frac{\phi_{zx}}{\delta}\right) \right|\right|\right|_{\rho'} + \|D^j r_2(1)\|_{\rho'} \left|\left|\left| \Lambda D^{k-j-1}\left(\frac{\phi_{zy}}{\delta}\right) \right|\right|\right|_{\rho'} \right) \right\}.$$

De même pour

$$\left|\left|\left| D^k\left(\frac{\phi_z}{\delta^2}\right) \right|\right|\right|_{\rho'}, \quad \left|\left|\left| D^k\left(\frac{\phi_{zx}}{\delta}\right) \right|\right|\right|_{\rho'} \quad \left|\left|\left| D^k\left(\frac{\phi_{zy}}{\delta}\right) \right|\right|\right|_{\rho'},$$

$|||D^k\phi_{xx}|||_{\rho'}$, $|||D^k\phi_{xy}|||_{\rho'}$ et $|||D^k\phi_{yy}|||_{\rho'}$, et ainsi on a la proposition par récurrence. Q. E. D.

Compte tenu de cette proposition, on a la

Proposition 5.10. *Sous les mêmes hypothèses que dans la proposition* 5.4, *on a l'inégalité suivante avec les constantes* $C(R_0)$ *et* $C_k(R_0, Q_0)$ *qui ne dépendent pas de* $\delta\in[0, 1]$:

$$(5.32)\quad \begin{aligned} &\left\|\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}D^k\left(\frac{\phi_{zz}}{\delta^2}\right)\right\|_{\rho'}+\left\|\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}D^k\left(\frac{\phi_z}{\delta^2}\right)\right\|_{\rho'}+\\ &+\left\|\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}D^k\left(\frac{\phi_{zx}}{\delta}\right)\right\|_{\rho'}+\left\|\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}D^k\left(\frac{\phi_{zy}}{\delta}\right)\right\|_{\rho'}+\\ &+|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}D^k\phi_{xx}|||_{\rho'}+|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}D^k\phi_{xy}|||_{\rho'}+|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}D^k\phi_{yy}|||_{\rho'}\leqq\\ &\leqq\frac{C(R_0)}{\rho-\rho'}\{\|D^k(\Lambda\phi(1))\|_\rho+\|\Lambda\phi(1)\|_\rho E^k_{1,\rho}(\gamma-1)\}+\frac{C_k(R_0, Q_0)}{(\rho-\rho')^{k+1}},\end{aligned}$$

$\forall\rho'<\rho$.

En effet, dans la démonstration, le point le plus délicat est l'estimation suivante:

$$(5.33)\quad \begin{aligned} &|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}g_{0,k}|||_{\rho'}\leqq\\ &\leqq\left\{\|\Lambda^{\frac{1}{2}}p(1)\|_{\rho'}\left\|\sqrt{\delta}D^k\left(\frac{\phi_{zz}}{\delta^2}\right)\right\|_{\rho'}+\|\Lambda^{\frac{1}{2}}q(1)\|_{\rho'}\left\|\sqrt{\delta}D^k\left(\frac{\phi_z}{\delta^2}\right)\right\|_{\rho'}+\right.\\ &\left.+\|\Lambda^{\frac{1}{2}}r_1(1)\|_{\rho'}\left\|\sqrt{\delta}D^k\left(\frac{\phi_{zx}}{\delta}\right)\right\|_{\rho'}+\|\Lambda^{\frac{1}{2}}r_2(1)\|_{\rho'}\left\|\sqrt{\delta}D^k\left(\frac{\phi_{zy}}{\delta}\right)\right\|_{\rho'}\right\}+\\ &+\left\{\|p(1)\|_{\rho'}\left\|\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}D^k\left(\frac{\phi_{zz}}{\delta^2}\right)\right\|_{\rho'}+\|q(1)\|_{\rho'}\left\|\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}D^k\left(\frac{\phi_z}{\delta^2}\right)\right\|_{\rho'}+\right.\\ &\left.+\|r_1(1)\|_{\rho'}\left\|\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}D^k\left(\frac{\phi_{zx}}{\delta}\right)\right\|_{\rho'}+\|r_2(1)\|_{\rho'}\left\|\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}D^k\left(\frac{\phi_{zy}}{\delta}\right)\right\|_{\rho'}\right\},\end{aligned}$$

on s'est servi du lemme 3.7. Pour majorer la première partie du second membre, on applique la proposition 5.4, $(5.15)_k$.

5.2.3. Sous les mêmes hypothèses que dans la proposition 5.4, on a le

Lemme 5.11

$$(5.34)\quad \begin{aligned} &\left\|D^k\left(\frac{\phi_{zz}}{\delta}\right)\right\|_{\rho'}+\left\|D^k\left(\frac{\phi_z}{\delta}\right)\right\|_{\rho'}+|||D^k\phi_{zx}|||_{\rho'}+|||D^k\phi_{zy}|||_{\rho'}\leqq\\ &\leqq C(R_0)\{E^k_{2,\rho'}(\phi)+E_{2,\rho'}(\phi)E^k_{1,\rho'}(\gamma-1)\}+\frac{C_k(R_0, Q_0)}{(\rho-\rho')^k},\end{aligned}$$

$\forall\rho'<\rho$.

Preuve. Comme dans la preuve de la proposition 5.4, prenons les représentations symboliques suivantes:[7)]

$$(5.35)\quad \begin{cases} \dfrac{\phi_{zz}}{\delta}=G(z)\delta\Lambda^2\phi(1)+\delta g(z)+P\delta^2\Lambda g(z), \\ \dfrac{\phi_z}{\delta}=G(z)\Lambda\phi(1)+P\cdot\delta g(z), \\ \left.\begin{matrix}\phi_{zx}\\ \phi_{zy}\end{matrix}\right\}=G(z)\delta\Lambda^2\phi(1)+P\delta\Lambda\cdot\delta g(z). \end{cases}$$

Alors, compte tenu du lemme suivant, on a le lemme de la même manière que dans la démonstration de la proposition 5.4:

Lemme 5.12. *Si $E_{1,\rho}(\gamma-1)<R_0$, quel que soit $\rho<\rho_0$, R_0 étant choisie comme dans le paragraphe* 3, *on a*

$$(5.36)\quad \left|\!\left|\!\left|\frac{\phi_{zz}}{\delta}\right|\!\right|\!\right|_\rho+\left|\!\left|\!\left|\frac{\phi_z}{\delta}\right|\!\right|\!\right|_\rho+|||\phi_{zx}|||_\rho+|||\phi_{zy}|||_\rho\leqq C(R_0)\{\|\Lambda\phi(1)\|_\rho+\|\delta\Lambda^2\phi(1)\|_\rho\}.$$

5.3. Estimations aux bords $z=\pm 1$ $(\mathrm{I})_k$. On va obtenir dans ce numéro, des estimations aux bords $z=\pm 1$ pour les fonctions énumérées dans (5.1), sauf les trois dérnières.

Proposition 5.13. *Soit $E_{1,\rho}(\gamma-1)<R_0$, R_0 étant la constante choisie dans le paragraphe* 3, *et soit $E_{2,\rho}(\phi)<Q_0$, $Q_0>0$, quel que soit $\rho<\rho_0$. Alors, notre solution $\{\phi,\gamma\}$ de* (2.16)–(2.21) *satisfait aux inégalités suivantes, où $C(R_0)$, $C(R_0,Q_0)$ et $C_k(R_0,Q_0)$ sont des constantes positives indépendantes de $\delta\in[0,1]$, quel que soit $\rho'<\rho$, $k\geqq 1$:*

$$(5.37)\quad \left\|D^k\left(\frac{\phi_z}{\delta}(1)\right)\right\|_{\rho'}\leqq C(R_0)\{E^k_{2,\rho'}(\phi)+E_{2,\rho'}(\phi)E^k_{1,\rho'}(\gamma-1)\}+\frac{C_k(R_0,Q_0)}{(\rho-\rho')^k},$$

$$(5.38)\quad \begin{aligned} &\left\|D^k\left(\frac{\phi_z}{\delta^2}(1)\right)\right\|_{\rho'},\ \left\|D^k\left(\frac{\phi_{zx}}{\delta}(1)\right)\right\|_{\rho'},\ \left\|D^k\left(\frac{\phi_{zy}}{\delta}(1)\right)\right\|_{\rho'}\leqq \\ &\leqq\frac{C(R_0)}{\rho-\rho'}\{\|D^k(\Lambda\phi(1))\|_\rho+\|\Lambda\phi(1)\|_\rho\cdot E^k_{1,\rho}(\gamma-1)\}+\frac{C_k(R_0,Q_0)}{(\rho-\rho')^{k+1}}, \end{aligned}$$

$$(5.39)\quad \begin{aligned} &\left\|D^k\left(\frac{\phi_{zx}(1)^2}{\delta}\right)\right\|_{\rho'},\ \left\|D^k\left(\frac{\phi_{zx}(1)\phi_{zy}(1)}{\delta}\right)\right\|_{\rho'},\ \left\|D^k\left(\frac{\phi_{zy}(1)^2}{\delta}\right)\right\|_{\rho'}\leqq \\ &\leqq\frac{C(R_0,Q_0)}{\rho-\rho'}\{E^k_{2,\rho}(\phi)+E_{2,\rho}(\phi)\cdot E^k_{1,\rho}(\gamma-1)\}+\frac{C_k(R_0,Q_0)}{(\rho-\rho')^{k+1}}. \end{aligned}$$

Preuve. **1.** On voit d'abord:

$$(5.40)\quad \frac{1}{\delta}\hat{\phi}_z(1)=\mathrm{th}\,(\delta|\xi|)(|\xi|\hat{\phi}(1))+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{ch}\,(\delta|\xi|z)}{\mathrm{ch}\,(\delta|\xi|)}\delta\hat{g}(z)\,dz,$$

---

7) On comprendra par le mot "symbolique" que $G(z)$ et P ne sont pas toujours les mêmes dans ces représentations, bien qu'ils aient les "mêmes" propriétés.

d'après (3.5) avec la notation de (3.12), ou encore écrivons-le comme suit:

$$\text{(5.40)}' \quad \frac{1}{\delta}\phi_z(1)=G_0\Lambda\phi(1)+\frac{1}{2}P_0\delta g.$$

Alors on a

$$D^k\left(\frac{\phi_z}{\delta}(1)\right)=G_0D^k(\Lambda\phi(1))+P_0D^k(\delta g)+\cdots,$$

où "$+\cdots$" est une convention pour dire qu'il n'y a que des termes d'ordre inférieur à $k-1$ de dérivées par rapport à δ (par "l'abus" de notation, on ne distinguera pas "$+\cdots$" et $\|+\cdots\|_\rho$).

Il est évident qu'on a

$$\text{(5.41)} \quad \|G_0\cdot D^k(\Lambda\phi(1))\|_{\rho'}\leqq\|D^k\Lambda\phi(1)\|_{\rho'}.$$

Ensuite:

$$\begin{aligned}
&\|P_0D^k(\delta g)\|_{\rho'}\leqq C|||D^k(\delta g)|||_{\rho'}\leqq\\
&\leqq C\left\{\|D^kp(1)\|_{\rho'}\left\|\frac{\phi_{zz}}{\delta}\right\|_{\rho'}+\|D^kq(1)\|_{\rho'}\left\|\frac{\phi_z}{\delta}\right\|_{\rho'}+\right.\\
\text{(5.42)}\qquad&\qquad\left.+\sum_{j=1}^{2}\|D^kr_j(1)\|_{\rho'}|||\Lambda\phi_z|||_{\rho'}\right\}+\\
&+C\left\{\|p(1)\|_{\rho'}\left\|D^k\left(\frac{\phi_{zz}}{\delta}\right)\right\|_{\rho'}+\|q(1)\|_{\rho'}\left\|D^k\left(\frac{\phi_z}{\delta}\right)\right\|_{\rho'}+\right.\\
&\qquad\left.+\sum_{j=1}^{2}\|r_j(1)\|_{\rho'}|||D^k\Lambda\phi_z|||_{\rho'}\right\}+\cdots\leqq\\
&\leqq C(R_0)E_{2,\rho'}(\phi)E^k_{1,\rho'}(\gamma-1)+\\
&+C'(R_0)\{E^k_{2,\rho'}(\phi)+E_{2,\rho'}(\phi)E^k_{1,\rho'}(\gamma-1)\}+\frac{C_k(R_0,Q_0)}{(\rho-\rho')^k},
\end{aligned}$$

vu les lemmes 5.11–5.12 et le lemme 5.3. *D*'où (5.37).

2. De même

$$D^k\left(\frac{\phi_z}{\delta^2}(1)\right)=G_1\cdot D^k(\Lambda^2\phi(1))+P_0\cdot D^kg+\cdots,$$

où

$$\text{(5.43)} \quad \frac{\hat{\phi}_z}{\delta^2}(1)=\widehat{G_1\Lambda^2\phi}(1)+\widehat{P_0g}=\frac{\text{th}\,(\delta|\xi|)}{\delta|\xi|}|\xi|^2\hat{\phi}(1)+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\text{ch}\,(\delta|\xi|z)}{\text{ch}\,(\delta|\xi|)}\hat{g}(z)dz.$$

On a donc

$$\left\|D^k\left(\frac{\phi_z}{\delta^2}(1)\right)\right\|_{\rho'}\leqq\|D^k\Lambda^2\phi(1)\|_{\rho'}+\|P_0g_{0,k}\|_{\rho'}+\|P_0g_{k,0}\|_{\rho'}+\cdots,$$

avec les estimations suivantes:

$$\|D^k\Lambda^2\phi(1)\|_{\rho'}\leqq\frac{\|D^k\Lambda\phi(1)\|_\rho}{\rho-\rho'},\quad\forall\rho'<\rho,$$

$$\|P_0g_{0,k}\|_{\rho'}\leqq CE_{1,\rho'}(\gamma-1)\left\{\left\|D^k\left(\frac{\phi_{zz}}{\delta^2}\right)\right\|_{\rho'}+\left\|D^k\left(\frac{\phi_z}{\delta^2}\right)\right\|_{\rho'}+\right.$$

$$\left.+\left\|D^k\left(\frac{\phi_{zx}}{\delta}\right)\right\|_{\rho'}+\left\|D^k\left(\frac{\phi_{zy}}{\delta}\right)\right\|_{\rho'}\right\}\leqq$$

$$\leqq C(R_0)\{\|D^k\Lambda\phi(1)\|_{\rho'}+\|\Lambda^2\phi(1)\|_{\rho'}E^k_{1,\rho'}(\gamma-1)\}+\frac{C_k}{(\rho-\rho')^{k+1}}$$

d'après la remarque 5.5, (5.16), i.e.

$$\|P_0g_{0,k}\|_{\rho'}\leqq\frac{C(R_0)}{\rho-\rho'}\{\|D^k\Lambda\phi(1)\|_\rho+\|\Lambda\phi(1)\|_\rho E^k_{1,\rho'}(\gamma-1)\}+ \qquad (5.44)$$

$$+\frac{C_k(R_0,Q_0)}{(\rho-\rho')^{k+1}},$$

et

$$\begin{aligned}\|P_0g_{k,0}\|_{\rho'}&\leqq CE^k_{1,\rho'}(\gamma-1)\left\{\left\|\frac{\phi_{zz}}{\delta^2}\right\|_{\rho'}+\left\|\frac{\phi_z}{\delta^2}\right\|_{\rho'}+\left\|\frac{\phi_{zx}}{\delta}\right\|_{\rho'}+\left\|\frac{\phi_{zy}}{\delta}\right\|_{\rho'}\right\}\leqq\\&\leqq\frac{C(R_0)}{\rho-\rho'}\|\Lambda\phi(1)\|_\rho E^k_{1,\rho'}(\gamma-1),\end{aligned} \qquad (5.45)$$

vu (3.10)'. D'où l'estimation pour $\left\|D^k\left(\frac{\phi_z}{\delta^2}(1)\right)\right\|_{\rho'}$ par le second membre de (5.38).

On voit ensuite:

$$D^k\left(\Lambda\frac{\phi_z}{\delta}(1)\right)\cong G_0D^k\Lambda^2\phi(1)+\frac{1}{2}P_0\delta\Lambda\cdot D^kg+\cdots, \qquad (5.46)$$

et par la suite, on a

$$\left\|D^k\left(\Lambda\frac{\phi_z}{\delta}(1)\right)\right\|_{\rho'}\leqq\|D^k\Lambda^2\phi(1)\|_{\rho'}+C(|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac12}g_{0,k}|||_{\rho'}+|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac12}g_{k,0}|||_{\rho'})+\cdots.$$

Or, nous avons, comme la proposition 3.15, l'estimation suivante, compte tenu de $(5.15)_k$, (5.32) et également du lemme 3.7:

$$|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac12}g_{0,k}|||_{\rho'}\leqq\frac{C(R_0)}{\rho-\rho'}\{\|D^k\Lambda\phi(1)\|_\rho+\|\Lambda\phi(1)\|_\rho E^k_{1,\rho}(\gamma-1)\}+ \qquad (5.47)$$

$$+\frac{C_k(R_0,Q_0)}{(\rho-\rho')^{k+1}}.$$

Vu (3.18), on a de la même manière:

$$|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac12}g_{k,0}|||_{\rho'}\leqq\frac{C(R_0)}{\rho-\rho'}\|\Lambda\phi(1)\|_\rho E^k_{1,\rho}(\gamma-1),\quad\forall\rho'<\rho. \qquad (5.48)$$

Ainsi nous obtenons l'estimation pour deux dérnières de (5.38).

3. On obtiendra l'estimation (5.39) comme un corollaire des propositions suivantes:

Proposition 5.14. *Sous les mêmes hypothèses que dans la proposition* 5.13, *on a des inégalités suivantes avec des constantes positives* $C(R_0)$ *et* $C_k(R_0, Q_0)$ *indépendantes de* $\delta \in [0, 1]$:

$$
\begin{aligned}
&\|D^k\phi_{zx}(1)\|_{\rho'},\ \|D^k\phi_{zy}(1)\|_{\rho'} \leqq \\
(5.49)\qquad &\leqq C(R_0)\{E^k_{2,\rho'}(\phi)+E_{2,\rho'}(\phi)E^k_{1,\rho'}(\gamma-1)\}+\frac{C_k(R_0, Q_0)}{(\rho-\rho')^k},
\end{aligned}
$$

$\forall\rho' < \forall\rho < \rho_0$, $k \geqq 1$.

Proposition 5.15. *Si* $E_{1,\rho}(\gamma-1) < R_0$ *et* $E_{2,\rho}(\phi) < Q_0$, *quel que soit* $\rho < \rho_0$, *on a*

$$
\begin{aligned}
&\left\|D^k\left(\frac{\phi_{zx}}{\delta}(1)\right)\right\|_{\rho'},\ \left\|D^k\left(\frac{\phi_{zy}}{\delta}(1)\right)\right\|_{\rho'} \leqq \\
(5.50)\qquad &\leqq \frac{C(R_0)}{\rho-\rho'}\{\|D^k\Lambda\phi(1)\|_\rho+\|\Lambda\phi(1)\|_\rho E^k_{1,\rho}(\gamma-1)\}+\frac{C_k(R_0, Q_0)}{(\rho-\rho')^{k+1}},
\end{aligned}
$$

$\forall\rho' < \forall\rho < \rho_0$, $k \geqq 1$.

Puisque l'on obtient (5.50) d'une manière presque pareille que pour (5.49), on explicitera seulement la démonstration de (5.49).

Preuve de la proposition 5.14. D'après l'expression (5.46), on a

$$D^k(\Lambda\phi_z(1)) = G_0D^k(\delta\Lambda^2\phi(1)) + P_0\delta^2\Lambda\cdot D^kg + \cdots,$$

et on voit qu'il s'agit en fait d'estimation de

$$
\begin{aligned}
&R_k \equiv P_0\delta^2\Lambda(g_{0,k}+g_{k,0}) \sim \\
(5.51)\qquad &\sim \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{ch}\,(\delta|\xi|z)}{\mathrm{ch}\,(\delta|\xi|)}\delta^2|\xi|(\hat{g}_{0,k}(z)+\hat{g}_{k,0}(z))dz,
\end{aligned}
$$

où

$$
\begin{aligned}
&g_{0,k} = \frac{p}{1-p}\cdot D^k\Lambda^2\phi + \left(q+\frac{pq}{1-p}\right)\cdot D^k\left(\frac{\phi_z}{\delta^2}\right) + \\
(5.52)\qquad &+\left(r_1+\frac{pr_1}{1-p}\right)\cdot D^k\left(\frac{\phi_{zx}}{\delta}\right) + \left(r_2+\frac{pr_2}{1-p}\right)\cdot D^k\left(\frac{\phi_{zy}}{\delta}\right),
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
&g_{k,0} = D^k\left(\frac{p}{1-p}\right)\cdot\Lambda^2\phi + D^k\left(q+\frac{pq}{1-p}\right)\cdot\frac{\phi_z}{\delta^2} + \\
(5.53)\qquad &+D^k\left(r_1+\frac{pr_1}{1-p}\right)\cdot\frac{\phi_{zx}}{\delta} + D^k\left(r_2+\frac{pr_2}{1-p}\right)\cdot\frac{\phi_{zy}}{\delta},
\end{aligned}
$$

puisque l'on a

$$(5.54)\quad g=\frac{p}{1-p}\Lambda^2\phi+\left(q+\frac{pq}{1-p}\right)\frac{\phi_z}{\delta^2}+\left(r_1+\frac{pr_1}{1-p}\right)\frac{\phi_{zx}}{\delta}+\left(r_2+\frac{pr_2}{1-p}\right)\frac{\phi_{zy}}{\delta},$$

vu (3.33)–(3.34).

On va démontrer tout d'abord le lemme suivant:

Lemme 5.16. *Pour R_0 une constante positive suffisamment petite, si $E_{1,\rho}(\gamma-1)<R_0$ et $E_{2,\rho}(\phi)<Q_0$, Q_0 étant une constante positive, quel que soit $\rho<\rho_0$, il existent des constantes positives $C(R_0)$ et $C_k(R_0, Q_0)$ indépendantes de $\delta\in[0,1]$ telles que l'on ait:*

$$(5.55)\quad \begin{aligned}&\left\|P_0\delta^2\Lambda\left\{\left(q+\frac{pq}{1-p}\right)\cdot D^k\frac{\phi_z}{\delta^2}+D^k\left(q+\frac{pq}{1-p}\right)\cdot\frac{\phi_z}{\delta^2}\right\}\right\|_{\rho'}\leqq\\ &\leqq C(R_0)\{E^k_{2,\rho'}(\phi)+E_{2,\rho'}(\phi)E^k_{1,\rho'}(\gamma-1)\}+\frac{C_k(R_0,Q_0)}{(\rho-\rho')^k}.\end{aligned}$$

Preuve. Par l'intégration par partie par rapport à z, on a

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}\frac{\operatorname{ch}(\delta|\xi|z)}{\operatorname{ch}(\delta|\xi|)}\delta^2|\xi|\left\{\widehat{\left(q+\frac{pq}{1-p}\right)\cdot D^k\left(\frac{\phi_z}{\delta^2}\right)}(z)+\widehat{D^k\left(q+\frac{pq}{1-p}\right)\cdot\frac{\phi_z}{\delta^2}}(z)\right\}dz=\\ &=2\operatorname{th}(\delta|\xi|)\delta\left\{\widehat{\left(q+\frac{pq}{1-p}\right)(1)\cdot D^k\left(\frac{\phi_z}{\delta^2}(1)\right)}+\widehat{D^k\left(q+\frac{pq}{1-p}\right)(1)\cdot\frac{\phi_z}{\delta^2}(1)}\right\}-\\ &-\int_{-1}^{1}\frac{\operatorname{ch}(\delta|\xi|z)}{\operatorname{ch}(\delta|\xi|)}\delta\left\{\widehat{\left(q+\frac{pq}{1-p}\right)_z\cdot D^k\left(\frac{\phi_z}{\delta^2}\right)}(z)+\widehat{\left(q+\frac{pq}{1-p}\right)\cdot D^k\left(\frac{\phi_{zz}}{\delta^2}\right)}(z)+\right.\\ &\qquad\left.+\widehat{D^k\left(q+\frac{pq}{1-p}\right)_z\cdot\frac{\phi_z}{\delta^2}}(z)+\widehat{D^k\left(q+\frac{pq}{1-p}\right)\cdot\frac{\phi_{zz}}{\delta^2}}(z)\right\}dz.\end{aligned}$$

D'où (5.55), en appliquant la proposition 3.17, (3.21) et (5.37) à la première partie du second membre, et ensuite la proposition 3.10 et la proposition 5.4–la remarque 5.5 à la seconde. Q.E.D.

Compte tenu de cette estimation (5.55), on va maintenant montrer l'estimation suivante:

$$(5.56)\quad\begin{aligned}&\|P_0\delta^2\Lambda g_{0,k}\|_{\rho'}\leqq\\ &\leqq C(R_0)\{E^k_{2,\rho'}(\phi)+\|\delta\Lambda^2\phi(1)\|_{\rho'}E^k_{1,\rho'}(\gamma-1)\}+\frac{C_k(R_0,Q_0)}{(\rho-\rho')^k}+\\ &+\tilde N_0\left\|\left(\frac{p}{1-p}\right)(1)\right\|_{\rho'}|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac12}\cdot\delta D^k\Lambda^2\phi|||_{\rho'}+\\ &+\tilde N_0\left\|\left(r_1+\frac{pr_1}{1-p}\right)(1)\right\|_{\rho'}\left|\left|\left|\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac12}\delta D^k\frac{\phi_{zx}}{\delta}\right|\right|\right|_{\rho'}+\\ &+\tilde N_0\left\|\left(r_2+\frac{pr_2}{1-p}\right)(1)\right\|_{\rho'}\left|\left|\left|\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac12}\delta D^k\frac{\phi_{zy}}{\delta}\right|\right|\right|_{\rho'}.\end{aligned}$$

Preuve. On a d'abord

$$\left\|P_0\delta^2\Lambda\left(\frac{p}{1-p}\cdot D^k\Lambda^2\phi\right)\right\|_{\rho'}\leqq$$

$$\leqq \tilde{N}_0\left\|\delta\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}\left(\frac{p}{1-p}\cdot D^k\Lambda^2\phi\right)\right\|_{\rho'}\leqq$$

$$\leqq \tilde{N}_0\left\|\left[\Lambda^{\frac{1}{2}},\delta\frac{p}{1-p}\right]\sqrt{\delta}D^k\Lambda^2\phi\right\|_{\rho'}+\left\|\left(\frac{p}{1-p}\right)\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}\cdot\delta D^k\Lambda^2\phi\right\|_{\rho'}\leqq$$

$$\leqq C\left\|\Lambda\left(\delta\frac{p}{1-p}\right)(1)\right\|_{\rho'}|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}D^k\Lambda\phi|||_{\rho'}+$$

$$+\tilde{N}_0\left\|\left(\frac{p}{1-p}\right)(1)\right\|_{\rho'}|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}\delta D^k\Lambda^2\phi|||_{\rho'},$$

C étant une constante positive indépendante de $\delta\in[0, 1]$.

Or, on voit d'autre part que:

$$\begin{aligned}\Lambda\phi(z)&=G_1(z)\Lambda\phi(1)+P_1\delta g(z)\sim\frac{\mathrm{ch}\,(\delta|\xi|z)}{\mathrm{ch}\,(\delta|\xi|)}|\xi|\hat{\phi}(1)+\\&+\int_{-1}^{z}\delta\frac{\mathrm{sh}\,(\delta|\xi|(z-1))\,\mathrm{sh}\,(\delta|\xi|(s+1))}{\mathrm{sh}\,(2\delta|\xi|)}\hat{g}(s)ds+\\&+\int_{z}^{1}\delta\frac{\mathrm{sh}\,(\delta|\xi|(z+1))\,\mathrm{sh}\,(\delta|\xi|(s-1))}{\mathrm{sh}\,(2\delta|\xi|)}\hat{g}(s)\,ds,\end{aligned}\tag{5.57}$$

et on en conclut que

$$\begin{aligned}&|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}D^k\Lambda\phi|||_{\rho'}\leqq\\&\leqq|||\Lambda^{\frac{1}{2}}G_1D^k\Lambda\phi(1)|||_{\rho'}+|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}P_1\delta D^kg|||_{\rho'}+\cdots\leqq\\&\leqq M_0\|D^k\Lambda\phi(1)\|_{\rho'}+\sqrt{N_0\tilde{N}_0}|||\delta D^kg|||_{\rho'}+\cdots\leqq\\&\leqq M_0\|D^k\Lambda\phi(1)\|_{\rho'}+\sqrt{N_0\tilde{N}_0}\Big\{E^k_{1,\rho'}(\gamma-1)|||\delta g|||_{\rho'}+\\&\quad+C(R_0)(\|\delta D^k\Lambda^2\phi(1)\|_{\rho'}+\|\delta\Lambda^2\phi(1)\|_{\rho'}E^k_{1,\rho'}(\gamma-1)+\frac{C_k(R_0,Q_0)}{(\rho-\rho')^k}\Big\},\end{aligned}$$

d'après le corollaire 5.6, (5.17), avec (5.16) dans le second membre. D'où

$$\begin{aligned}&|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}D^k\Lambda\phi|||_{\rho'}\leqq\\&\leqq C(R_0)\{E^k_{2,\rho'}(\phi)+\|\delta\Lambda^2\phi(1)\|_{\rho'}E^k_{1,\rho'}(\gamma-1)\}+\frac{C_k(R_0,Q_0)}{(\rho-\rho')^k},\end{aligned}\tag{5.58}$$

vu (3.10)′ et vu également que

$$\delta D^k\Lambda^2\phi(1)=D^k(\delta\Lambda^2\phi(1))-k\cdot D^{k-1}\Lambda^2\phi(1).$$

De même calcul pour le reste, et on en conclut l'estimation (5.56).

Enfin, on a aussi l'inégalité suivante:

$$\text{(5.59)}\quad \begin{aligned}&|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}\delta D^k\Lambda^2\phi|||_{\rho'}+\left|\left|\left|\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}\cdot\delta D^k\frac{\phi_{zx}}{\delta}\right|\right|\right|_{\rho'}+\left|\left|\left|\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}\cdot\delta D^k\frac{\phi_{zy}}{\delta}\right|\right|\right|_{\rho'}\leqq\\&\leqq C(R_0)\{E^k_{2,\rho'}(\phi)+E_{2,\rho'}(\phi)E^k_{1,\rho'}(\gamma-1)\}+\frac{C_k(R_0,Q_0)}{(\rho-\rho')^k},\end{aligned}$$

$\forall\rho'<\forall\rho<\rho_0$, si $E_{1,\rho}(\gamma-1)<R_0$ et $E_{2,\rho}(\phi)<Q_0$, quel que soit $\rho<\rho_0$, pour R_0 suffisamment petite, $C(R_0)$ et $C_k(R_0,\ Q_0)$ étant constantes positives indépendantes de $\delta\in[0,\ 1]$.

En rapportant (5.59) dans (5.56), on obtient l'estimation

$$\text{(5.60)}\quad \|P_0\delta^2\Lambda g_{0,k}\|_{\rho'}\leqq C(R_0)\{E^k_{2,\rho'}(\phi)+E_{2,\rho'}E^k_{1,\rho'}(\gamma-1)\}+\frac{C_k(R_0,Q_0)}{(\rho-\rho')^k},$$

$\forall\rho'<\forall\rho<\rho_0,\ k\geqq1$.

Preuve de (5.59): 1°) On montre d'abord l'inégalité suivante:

$$\text{(5.61)}\quad \begin{aligned}&|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}\delta D^k\Lambda^2\phi|||_{\rho'}\leqq\\&\leqq C(R_0)\{E^k_{2,\rho'}(\phi)+E_{2,\rho'}(\phi)E^k_{1,\rho'}(\gamma-1)\}+\frac{C_k(R_0,Q_0)}{(\rho-\rho')^k}+\\&+\left\|\left(\frac{p}{1-p}\right)(1)\right\|_{\rho'}|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}\cdot\delta D^k\Lambda^2\phi|||_{\rho'}+\\&+\left\|\left(r_1+\frac{pr_1}{1-p}\right)(1)\right\|_{\rho'}\left|\left|\left|\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}\cdot\delta D^k\frac{\phi_{zx}}{\delta}\right|\right|\right|_{\rho'}+\\&+\left\|\left(r_2+\frac{pr_2}{1-p}\right)(1)\right\|_{\rho'}\left|\left|\left|\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}\cdot\delta D^k\frac{\phi_{zy}}{\delta}\right|\right|\right|_{\rho'}.\end{aligned}$$

Preuve. En se référant à (5.57), on a par l'intégration par partie:

$$\begin{aligned}&\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}\delta D^k\Lambda^2\phi(z)=\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}G_1(z)\cdot\delta D^k\Lambda^2\phi(1)+\\&+\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}G_1(z)\cdot\delta\left\{D^k\left(q+\frac{pq}{1-p}\right)(1)\cdot\frac{\phi_z}{\delta^2}(1)+\left(q+\frac{pq}{1-p}\right)(1)\cdot D^k\frac{\phi_z}{\delta^2}(1)\right\}-\\&-P\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}\cdot\delta\left\{\left(D^k\left(q+\frac{pq}{1-p}\right)\cdot\frac{\phi_z}{\delta^2}\right)_z+\left(\left(q+\frac{pq}{1-p}\right)\cdot D^k\frac{\phi_z}{\delta^2}\right)_z\right\}+\\&+P_1\delta\Lambda\cdot\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}\cdot\delta\left\{D^k\left(\frac{p}{1-p}\right)\cdot\Lambda^2\phi+\left(\frac{p}{1-p}\right)\cdot D^k\Lambda^2\phi+\right.\\&\qquad+D^k\left(r_1+\frac{pr_1}{1-p}\right)\cdot\frac{\phi_{zx}}{\delta}+\left(r_1+\frac{pr_1}{1-p}\right)\cdot D^k\frac{\phi_{zx}}{\delta}+\\&\qquad\left.+D^k\left(r_2+\frac{pr_2}{1-p}\right)\cdot\frac{\phi_{zy}}{\delta}+\left(r_2+\frac{pr_2}{1-p}\right)\cdot D^k\frac{\phi_{zy}}{\delta}\right\}+\cdots,\end{aligned}$$

où

$$\widehat{Pg}(z)=\int_{-1}^{z}\frac{\text{sh}\,(\delta|\xi|(z-1))\,\text{ch}\,(\delta|\xi|(s+1))}{\text{sh}\,(2\delta|\xi|)}\hat{g}(s)ds+$$

$$+\int_z^1 \frac{\operatorname{sh}(\delta|\xi|(z+1))\operatorname{ch}(\delta|\xi|(s-1))}{\operatorname{sh}(2\delta|\xi|)}\hat{g}(s)ds.$$

D'où (5.61), vu (5.16), de la même manière que pour obtenir (5.56).

2°) De même calcul pour $\left\|\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}\cdot\delta D^k\Lambda\frac{\phi_z}{\delta}\right\|_{\rho'}$ et on voit que le premier membre de (5.59) est majoré par trois fois second membre de (5.61).

3°) En choisissant R_0 positive suffisamment petite, on arrive à (5.59), par récurrence, si $E_{1,\rho}(\gamma-1)<R_0$ et $E_{2,\rho}(\phi)<Q_0$, quel que soit $\rho<\rho_0$. Q. E. D.

De même que pour (5.56) et (5.59), on a

$$\|P_0\delta^2\Lambda g_{k,0}\|_{\rho'}\leqq C(R_0)\cdot E_{2,\rho'}(\phi)\cdot E^k_{1,\rho'}(\gamma-1)+\frac{C_k(R_0,Q_0)}{(\rho-\rho')^k}. \tag{5.62}$$

Ces deux inégalités (5.61)–(5.62) achèvent l'estimation de R_k, (5.51), et par la suite on termine la démonstration de la proposition 5.14.

5.4. Estimations aux bords $z=\pm 1$ (II)$_k$. Dans ce numéro, on donnera une estimation de $\|D^k\phi_{zxx}(1)\|_{\rho'}+\|D^k\phi_{zxy}(1)\|_{\rho'}+\|D^k\phi_{zyy}(1)\|_{\rho'}$ par

$$\frac{C(R_0)}{\rho-\rho'}\{E^k_{2,\rho}(\phi)+E_{2,\rho}(\phi)E^k_{1,\rho}(\gamma-1)\}+\frac{C_k(R_0,Q_0)}{(\rho-\rho')^{k+1}},$$

quel que soit $\rho'<\rho$, et quel que soit $\rho<\rho_0$, $k\geqq 1$.

Avant de s'engager à la démonstration, on prépare deux lemmes suivants:

Lemme 5.17. *Pour R_0, une constante positive suffisamment petite et pour Q_0 positive, si $E_{1,\rho}(\gamma-1)<R_0$ et $E_{2,\rho}(\phi)<Q_0$, quel que soit $\rho<\rho_0$, il existent des constantes positives $C(R_0)$ et $C_k(R_0, Q_0)$ telles que l'on ait*

$$\begin{aligned}\|D^k(\delta\Lambda g(1))\|_{\rho'}\leqq{}& \frac{C(R_0)}{\rho-\rho'}\{E^k_{2,\rho}(\phi)+E_{2,\rho}(\phi)E^k_{1,\rho}(\gamma-1)\}+\\ &+\frac{C_k(R_0,Q_0)}{(\rho-\rho')^{k+1}}+\Big\{\|p(1)\|_{\rho'}\Big(\Big\|D^k\frac{\phi_{zzx}}{\delta}(1)\Big\|_{\rho'}+\Big\|D^k\frac{\phi_{zzy}}{\delta}(1)\Big\|_{\rho'}\Big)+\\ &+\|r_1(1)\|_{\rho'}\|D^k\phi_{zxx}(1)\|_{\rho'}+(\|r_1(1)\|_{\rho'}+\|r_2(1)\|_{\rho'})\|D^k\phi_{zxy}(1)\|_{\rho'}+\\ &+\|r_2(1)\|_{\rho'}\|D^k\phi_{zyy}(1)\|_{\rho'}\Big\},\end{aligned} \tag{5.63}$$

quel que soit $\rho'<\rho$, et quel que soit $\rho<\rho_0$, $k\geqq 1$, avec les notations de (3.12): $g(1)=g|_{z=1}$.

Preuve. La démonstration se déroule comme celle pour le lemme 3.25, en tenant compte de (3.66), (5.16)$_k$ et de la proposition 5.13. Il serait utile, en particulier, de voir

$$\begin{aligned}(1-\|p(1)\|_{\rho'})\Big\|D^k\frac{\phi_{zz}}{\delta^2}(1)\Big\|_{\rho'}\leqq{}&\|\Lambda D^k\Lambda\phi(1)\|_{\rho'}+\\ &+\Big\{\|D^kp(1)\|_{\rho'}\Big\|\frac{\phi_{zz}}{\delta^2}(1)\Big\|_{\rho'}+\|D^kq(1)\|_{\rho'}\Big\|\frac{\phi_z}{\delta^2}(1)\Big\|_{\rho'}+\end{aligned}$$

$$(5.64)\qquad + \sum_{j=1}^{2} \|D^k r_j(1)\|_{\rho'} \left\| \Lambda \frac{\phi_z}{\delta}(1) \right\|_{\rho'} \Big\} +$$

$$+ \Big\{ \|q(1)\|_{\rho'} \left\| D^k \frac{\phi_z}{\delta^2}(1) \right\|_{\rho'} + \sum_{j=1}^{2} \|r_j(1)\|_{\rho'} \left\| D^k \Lambda \frac{\phi_z}{\delta}(1) \right\|_{\rho'} \Big\} +$$

$$+ \cdots.$$

Lemme 5.18. *Sous les mêmes hypothèses que dans le lemme précédent, on a*

$$\left\| D^k \frac{\phi_{zzx}}{\delta}(1) \right\|_{\rho'}, \quad \left\| D^k \frac{\phi_{zzy}}{\delta}(1) \right\|_{\rho'} \leqq$$

$$\leqq \frac{C(R_0)}{\rho - \rho'} \{E^k_{2,\rho}(\phi) + E_{2,\rho}(\phi) E^k_{1,\rho}(\gamma - 1)\} + \frac{C_k(R_0, Q_0)}{(\rho - \rho')^{k+1}} +$$

$$(5.65)\qquad + \{ \|r_1(1)\|_{\rho'} \|D^k \phi_{zxx}(1)\|_{\rho'} +$$

$$+ (\|r_1(1)\|_{\rho'} + \|r_2(1)\|_{\rho'}) \|D^k \phi_{zxy}(1)\|_{\rho'} +$$

$$+ \|r_2(1)\|_{\rho'} \|D^k \phi_{zyy}(1)\|_{\rho'} \}.$$

Preuve. Puisque l'on a

$$\left\| D^k \Lambda \frac{\phi_{zz}}{\delta}(1) \right\|_{\rho'} \leqq \|D^k(\delta \Lambda^3 \phi(1))\|_{\rho'} + \|D^k(\delta \Lambda g(1))\|_{\rho'},$$

vu $\phi_{zz}(1) = \delta^2(\Lambda^2 \phi(1) + g(1))$, on obtient (5.65) d'après le lemme 5.17.

Q.E.D.

On est maintenant prêt à énoncer l'objectif principal de ce numéro:

Proposition 5.19. *Supposons que $E_{1,\rho}(\gamma - 1) < R_0$ pour R_0 choisie dans le paragraphe 3 et que $E_{2,\rho}(\phi) < Q_0$ pour Q_0 choisie également dans n^{os}* **5.2.–5.3.**, *$\forall \rho < \rho_0$. Alors, il existent $C(R_0)$ et $C_k(R_0, Q_0)$, constantes positives indépendantes de $\delta \in$* [0, 1] *et de (ρ, ρ'), telles que l'on ait, quel que soit $\rho' < \rho$, l'inégalité suivante:*

$$\|D^k \phi_{zxx}(1)\|_{\rho'} + \|D^k \phi_{zxy}(1)\|_{\rho'} + \|D^k \phi_{zyy}(1)\|_{\rho'} +$$

$$(5.66)\qquad + \left\| D^k \Big(\frac{\phi_{zzx}}{\delta}(1) \Big) \right\|_{\rho'} + \left\| D^k \Big(\frac{\phi_{zzy}}{\delta}(1) \Big) \right\|_{\rho'} \leqq$$

$$\leqq \frac{C(R_0)}{\rho - \rho'} \{E^k_{2,\rho}(\phi) + E_{2,\rho}(\phi) \cdot E^k_{1,\rho}(\gamma - 1)\} + \frac{C_k(R_0, Q_0)}{(\rho - \rho')^{k+1}}.$$

Preuve. **1.** Voyons d'abord que:

$$(5.67)\qquad D^k \phi_{zxx}(1),\ D^k \phi_{zxy}(1),\ D^k \phi_{zyy}(1) \sim$$

$$\sim D^k(G_0 \delta \Lambda^3 \phi(1) + G_0 \delta \Lambda g(1) + P \delta \Lambda g_z(z)),$$

où

$$(5.68)\qquad \widehat{G_0 u} = \mathrm{th}\,(\delta|\xi|)\,\hat{u}, \quad \widehat{Pv} = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{sh}\,(\delta|\xi|z)}{\mathrm{ch}\,(\delta|\xi|)}\, \hat{v}(z)\, dz.$$

2. On a donc

$$\|D^k\phi_{zxx}(1)\|_{\rho'}+\|D^k\phi_{zxy}(1)\|_{\rho'}+\|D^k\phi_{zyy}(1)\|_{\rho'}\leqq \tag{5.69}$$
$$\leqq \|\Lambda D^k(\delta\Lambda^2\phi(1))\|_{\rho'}+\|D^k(\delta\Lambda g(1))\|_{\rho'}+\|P\delta\Lambda\cdot D^k g_z\|_{\rho'}+\cdots.$$

Compte tenu de deux lemmes précédents, il ne nous reste qu'à estimer $|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}D^k g_z|||_{\rho'}$, vu

$$\|P\delta\Lambda\cdot D^k g_z\|_{\rho'}\leqq \tilde{N}_0|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}D^k g_z|||_{\rho'}. \tag{5.70}$$

3. Soit

$$g_z=g_z^I+g_z^{II},$$

où

$$\begin{cases} g_z^I=(p_z+q)\dfrac{\phi_{zz}}{\delta^2}+q_z\dfrac{\phi_z}{\delta^2}+r_{1,z}\dfrac{\phi_{zx}}{\delta}+r_{2,z}\dfrac{\phi_{zy}}{\delta}, \\ g_z^{II}=p\dfrac{\phi_{zzz}}{\delta^2}+r_1\dfrac{\phi_{zzx}}{\delta}+r_2\dfrac{\phi_{zzy}}{\delta}. \end{cases} \tag{5.71}$$

On a alors l'inégalité suivante, vu (5.33):

$$|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}D^k g_z|||_{\rho'}\leqq |||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}D^k g_z^{II}|||_{\rho'}+ \tag{5.72}$$
$$+\frac{C(R_0)}{\rho-\rho'}\{\|D^k\Lambda\phi(1)\|_\rho+\|\Lambda\phi(1)\|_\rho E_{1,\rho}^k(\gamma-1)\}+\frac{C_k(R_0,Q_0)}{(\rho-\rho')^{k+1}},$$

$C(R_0)$ et $C_k(R_0, Q_0)$ étant constantes indépendantes de $\delta\in[0, 1]$.

Ce qui nous reste à estimer est donc seulement $|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}D^k g_z^{II}|||_{\rho'}$.

4. *L'estimation de* $|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}D^k g_z^{II}|||_{\rho'}$.

Suivant les notations du paragraphe 3, (3.59)–(3.63), on voit que

$$g_z^{II}(z)\cong A(z)g_z^I(z)+ \tag{5.73}$$
$$+A(z)\{G(z)\delta\Lambda^3\phi(1)+G(z)\delta\Lambda g(1)-P\delta\Lambda g_z(z)\}+$$
$$+(B_1(z)+B_2(z))\{G_1(z)\delta\Lambda^3\phi(1)+G_1(z)\delta\Lambda g(1)-P_1\delta\Lambda g_z(z)\},$$

où

$$A(z)=\left(\frac{p}{1-p}\right)(z)\quad\text{et}\quad B_j(z)=\left(r_j+\frac{pr_j}{1-p}\right)(z),\ j=1, 2.$$

Notons ici, vu $(5.14)_k$, qu'on a

$$\|A(z)\|_\rho,\ \|\Lambda(\delta A(z))\|_\rho,\ \|B_j(z)\|_\rho,\ \|\Lambda(\delta B_j(z))\|_\rho\leqq CE_{1,\rho}(\gamma-1), \tag{5.74}$$

quel que soit $\rho<\rho_0$, $j=1, 2$, pour tout z, $|z|\leqq 1$.

On va démontrer les inégalités suivantes, quel que soit $\rho'<\rho$, et quel que soit $\rho<\rho_0$:

(i) $|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}D^k(A(z)G(z)\delta\Lambda^3\phi(1))|||_{\rho'}\leqq$

$$\leqq \frac{C(R_0)}{\rho-\rho'}\{E^k_{1,\rho}(\gamma-1)\|\delta\Lambda^2\phi(1)\|_\rho+E_{1,\rho}(\gamma-1)\|D^k(\delta\Lambda^2\phi(1))\|_\rho\}+ \tag{5.75}$$
$$+\frac{C_k(R_0,Q_0)}{(\rho-\rho')^{k+1}}.$$

(ii) $|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}D^k(A(z)G(z)\delta\Lambda g(1))|||_{\rho'}\leqq$

$$\leqq \frac{C(R_0)}{\rho-\rho'}\{E^k_{2,\rho}(\phi)+E_{2,\rho}(\phi)E^k_{1,\rho}(\gamma-1)\}+\frac{C_k(R_0,Q_0)}{(\rho-\rho')^{k+1}}+ \tag{5.76}$$
$$+C'(R_0)\{\|r_1(1)\|_{\rho'}\|D^k\phi_{zxx}(1)\|_{\rho'}+(\|r_1(1)\|_{\rho'}+\|r_2(1)\|_{\rho'})\|D^k\phi_{zxy}(1)\|_{\rho'}+$$
$$+\|r_2(1)\|_{\rho'}\|D^k\phi_{zyy}(1)\|_{\rho'}\}.$$

(iii) $|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}D^k(A(z)P\delta\Lambda g_z)|||_{\rho'}\leqq$

$$\leqq \frac{C(R_0)}{\rho-\rho'}E_{2,\rho}(\phi)E^k_{1,\rho}(\gamma-1)+C(\|A(1)\|_{\rho'}+\|A(\delta A(1))\|_{\rho'})|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}D^kg_z|||_{\rho'}. \tag{5.77}$$

On a, de même, les inégalités corréspondantes au reste de (5.73) avec $B_j(z)$, $j=1, 2$.

Preuve. (i) Compte tenu du lemme 3.7, on voit que:

$$\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}D^k(A(z)G(z)\delta\Lambda^3\phi(1))=$$
$$=\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}(D^kA(z)\cdot G(z)\Lambda\cdot\delta\Lambda^2\phi(1)+A(z)\cdot G(z)\cdot\Lambda\cdot D^k(\delta\Lambda^2\phi(1))+\cdots)\sim$$
$$\sim\{\Lambda^{\frac{1}{2}}D^kA(z)\cdot\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}G(z)\cdot\Lambda^{\frac{1}{2}}(\delta\Lambda^2\phi(1))+D^kA(z)\cdot\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}G(z)\cdot\Lambda(\delta\Lambda^2\phi(1))\}+$$
$$+\{\Lambda^{\frac{1}{2}}A(z)\cdot\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}G(z)\cdot\Lambda^{\frac{1}{2}}D^k(\delta\Lambda^2\phi(1))+A(z)\cdot\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}G(z)\cdot\Lambda D^k(\delta\Lambda^2\phi(1))\}+\cdots,$$

on a donc

$$|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}D^k(A(z)\cdot G(z)\delta\Lambda^3\phi(1))|||_{\rho'}\leqq$$
$$\leqq\frac{\|D^kA(1)\|_\rho}{\sqrt{\rho-\rho'}}M_0\frac{\|\delta\Lambda^2\phi(1)\|_\rho}{\sqrt{\rho-\rho'}}+\|D^kA(1)\|_{\rho'}M_0\frac{\|\delta\Lambda^2\phi(1)\|_\rho}{\rho-\rho'}+$$
$$+\frac{\|A(1)\|_\rho}{\sqrt{\rho-\rho'}}M_0\frac{\|D^k(\delta\Lambda^2\phi(1))\|_\rho}{\sqrt{\rho-\rho'}}+\|A(1)\|_{\rho'}M_0\frac{\|D^k(\delta\Lambda^2\phi(1))\|_\rho}{\rho-\rho'}+$$
$$+\frac{C_k(R_0,Q_0)}{(\rho-\rho')^{k+1}}.$$

D'où (i).

(ii) On voit d'abord:

$$\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}D^k(A(z)\cdot G(z)\delta\Lambda g(1))\sim$$

$$\sim[\Lambda^{\frac{1}{2}}, D^k(\delta A(z))]\sqrt{\delta}\Lambda G(z)g(1)+D^kA(z)\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}G(z)\delta\Lambda g(1)+$$

$$+[\Lambda^{\frac{1}{2}}, \delta A(z)]\sqrt{\delta}\Lambda G(z)\cdot D^kg(1)+A(z)\cdot\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}G(z)\cdot D^k(\delta\Lambda g(1))+\cdots,$$

en notant en particulier $\delta D^kA=D^k(\delta A)-k\cdot D^{k-1}A$.

Or, on a des majorations suivantes:

$$|||[\Lambda^{\frac{1}{2}}, D^k(\delta A)]\sqrt{\delta}\Lambda G(z)g(1)|||_{\rho'}\leqq C\|D^k\Lambda(\delta A)(1)\|_{\rho'}M_0\|g(1)\|_{\rho'},$$

$$|||D^kA(z)\cdot\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}G(z)\cdot\delta\Lambda g(1)|||_{\rho'}\leqq C\cdot E^k_{1,\rho'}(\gamma-1)\cdot M_0\|\delta\Lambda g(1)\|_{\rho'},$$

$$|||[\Lambda^{\frac{1}{2}}, \delta A]\sqrt{\delta}\Lambda G(z)\cdot D^kg(1)|||_{\rho'}\leqq C\|\Lambda(\delta A)(1)\|_{\rho'}M_0\|D^kg(1)\|_{\rho'}$$

et

$$|||A(z)\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}G(z)D^k(\delta\Lambda g(1))|||_{\rho'}\leqq C\cdot E_{1,\rho'}(\gamma-1)M_0\|D^k(\delta\Lambda g(1))\|_{\rho'}.$$

On en conclut (ii), vu le corollaire 3.24, (3.52), le lemme 3.25, (3.54), le lemme 5.17, (5.63) et (5.64) en particulier pour l'estimation de $\|D^kg(1)\|_{\rho'}$:

$$\|D^kg(1)\|_{\rho'}\leqq\frac{C(R_0)}{\rho-\rho'}(\|D^k\Lambda\phi(1)\|_\rho+\|\Lambda\phi(1)\|_\rho E^k_{1,\rho}(\gamma-1))+\frac{C_k(R_0, Q_0)}{(\rho-\rho')^{k+1}}. \tag{5.78}$$

(iii) On voit comme dans (ii):

$$\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}D^k(A(z)P\delta\Lambda g_z)\sim$$

$$\sim[\Lambda^{\frac{1}{2}}, D^k(\delta A)]P\sqrt{\delta}\Lambda g_z+D^k(\delta A)P\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}\cdot\Lambda g_z+[\Lambda^{\frac{1}{2}}, \delta A]P\sqrt{\delta}\Lambda D^kg_z+$$

$$+A(z)P\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}\cdot\delta\Lambda D^kg_z+\cdots\equiv①+②+③+④+\cdots, \text{ soit.}$$

Ceci dit, des estimations suivantes montrent (iii):

$$|||①|||_{\rho'}\leqq C\|D^k(\Lambda(\delta A))(1)\|_{\rho'}\tilde{N}_0|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}g_z|||_{\rho'},$$

$$|||②|||_{\rho'}\leqq|||D^kA(z)P\delta\Lambda\cdot\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}g_z+\cdots|||_{\rho'}\leqq$$

$$\leqq CN_0E^k_{1,\rho'}(\gamma-1)|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}g_z|||_{\rho'}+\cdots,$$

$$|||③|||_{\rho'}\leqq C\|\Lambda(\delta A)(1)\|_{\rho'}\tilde{N}_0|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}D^kg_z|||_{\rho'},$$

$$|||④|||_{\rho'}\leqq\|A(1)\|_{\rho'}N_0|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}D^kg_z|||_{\rho'}.$$

On a, d'autre part, l'estimation suivante pour $\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}D^k(Ag^!_z)$ de la même manière que pour (i), vu $(5.15)_k$, (5.22) et (5.32):

$$\begin{aligned}&|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}D^k(Ag^!_z)|||_{\rho'}\leqq\\ &\leqq\frac{C(R_0)}{\rho-\rho'}\{\|D^k\Lambda\phi(1)\|_\rho+\|\Lambda\phi(1)\|_\rho\cdot E^k_{1,\rho}(\gamma-1)\}+\frac{C_k(R_0, Q_0)}{(\rho-\rho')^{k+1}},\end{aligned} \tag{5.79}$$

$\forall \rho' < \forall \rho < \rho_0$.

En conséquence de (5.75), (5.76), (5.77) et des inégalités correspondantes au reste dans (5.73) avec B_j, $j=1, 2$, on a l'estimation suivante pour $|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}D^k g_z^{II}|||_{\rho'}$, vu également (5.79):

$$
\begin{aligned}
&|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}D^k g_z^{II}|||_{\rho'} \leqq \\
&\leqq \frac{C(R_0)}{\rho-\rho'}\{E^k_{2,\rho}(\phi)+E_{2,\rho}(\phi)E^k_{1,\rho}(\gamma-1)\}+\frac{C_k(R_0, Q_0)}{(\rho-\rho')^{k+1}}+ \\
&+C'(R_0)\{\|r_1(1)\|_{\rho'}\|D^k\phi_{zxx}(1)\|_{\rho'}+ \\
&+(\|r_1(1)\|_{\rho'}+\|r_2(1)\|_{\rho'})\|D^k\phi_{zxy}(1)\|_{\rho'}+\|r_2(1)\|_{\rho'}\|D^k\phi_{zyy}(1)\|_{\rho'}\}+ \\
&+C(\|(1+\delta\Lambda)A(1)\|_{\rho'}+\|(1+\delta\Lambda)(B_1+B_2)(1)\|_{\rho'})|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}D^k g_z|||_{\rho'}.
\end{aligned}
\tag{5.80}
$$

Rapportant cette inégalité dans (5.72), on obtient l'estimation pour $|||\sqrt{\delta}\Lambda^{\frac{1}{2}}D^k g_z|||_{\rho'}$, d'où (5.66), en tenant compte des lemmes 5.17–5.18, vu (5.69), si on prend R_0 positive suffisamment petite pour que l'on puisse avoir les inégalités (3.13) du lemme 3.12 (fin de la démonstration de la proposition 5.19).

5.5. Solution $\{\phi, \gamma\}$ du problème (2.16)–(2.21) est indéfiniment différentiable par rapport à $\delta \in [0, 1]$ sur $z=\pm 1$. D'après les estimations aux bords $z=\pm 1$: (5.37), (5.38), (5.39) et (5.66) qui sont, solulignons-le bien, *uniformes* par rapport à $\delta \in [0, 1]$, nous avons le théorème suivant en appliquant le théorème abstrait non-linéaire de Cauchy-Kowalevski [13, Appendice]:

Théorème 5.20. *Soit $\{\phi(t, x, y, z; \delta), \gamma(t, x, y; \delta)\}$ la solution du problème (2.16)–(2.21) sous la condition (2.22) dans le paragraphe 2. Alors $\{u=\phi_x(t, x, y, 1; \delta), v=\phi_y(t, x, y, 1; \delta), \gamma\}$ est indéfiniment différentiable par rapport à $\delta \in [0, 1]$ au sens $\|\ \|_{\rho'}$, quel que soit $\rho<\rho_0$, pour $|t|<a(\rho_0-\rho_0)$.*

Coorllaire 5.21. *Le potentiel $\phi(t, x, y, 1; \delta)$ est lui-même indéfiniment différentiable par rapport à $\delta \in [0, 1]$ dans $S=\bigcup_{\rho>0} B_\rho$.*

Preuve. D'après l'équation (2.18), on voit

$$
\begin{aligned}
&\phi(t, x, y, 1; \delta)= \\
&=\phi(0, x, y, 1; \delta)+\int_0^t \phi_t(t, x, y, 1; \delta)dt= \\
&=\phi_0(x, y)+\int_0^t \Big\{-\frac{1}{2}(\phi_x^2(t, x, y, 1; \delta)+\phi_y^2(t, x, y, 1; \delta))-\gamma(t, x, y; \delta)+ \\
&\qquad +\frac{1}{2}\Big(\frac{1+(\delta\gamma_x)^2+(\delta\gamma_y)^2}{\gamma^2}\Big)\Big(\frac{\phi_z}{\delta}(t, x, y, 1; \delta)\Big)^2\Big\}dt
\end{aligned}
$$

pour $|t|<a(\rho_0-\rho)$, $\forall \rho<\rho_0$.

Puisque la donnée initiale $\phi_0(x, y)$ est indépendante de $\delta \in [0, 1]$, $\phi(t, x, y, 1; \delta)$ est indéfiniment différentiable par rapport à $\delta \in [0, 1]$ au sens $\|\ \|_\rho$, $\forall \rho<\rho_0$, vu que $\phi_x(1)$, $\phi_y(1)$, γ, $\delta\gamma_x$, $\delta\gamma_y$ et $\frac{\phi_z(1)}{\delta}$ sous le signe de l'intégration sur $[0, t]$, $|t|< a(\rho_0-\rho)$, le sont comme on l'a démontré dans les numéros **5.2.–5.4.**, le théorème 5.20.

DÉPARTMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ D'OSAKA

Biblioqraphies

[1] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, I, Comm. Pure Appl. Math., **12** (1959), 623–727.

[2] G. B. Airy, Tides and Waves, B. Fellowes, London, 1845, 241–396.

[3] J. Boussinesq, Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal réctangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenus dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond, J. Math. Pure. Appl., 2^e série, **17** (1872), 55–108.

[4] J. Boussinesq, Essai sur la théorie des eaux courantes, Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut National de France, tome XXIII, 1877.

[5] L. J. F. Broer, On the interaction of nonlinearity and dispersion in wave propagation, Appl. Sci. Res., Section B, **11** (1964), 273–285.

[6] P. J. Bryant, Two-dimensional periodic permanent waves in shallow water, J. Fluid Mech., **115** (1982), 525–532.

[7] T. Carleman, Sur la propagation d'un mouvement à la surface libre d'un liquide, Arkiv för mat., astr. och fysik, **32** (1945), 1–2.

[8] K. -O. Friedrichs, On the derivation of the shallow water theory, Appendix to: The formation of breakers and bores, by J. J. Stoker, Comm. Pure Appl. Math., **1** (1948), 1–87.

[9] K. -O. Friedrichs, Asymptotic phenomena in mathematical physics, Bull. of A. M. S., **61** (1955), 485–504.

[10] R. S. Johnson, Water waves and Korteweg-de Vries equations, J. Fluid Mech., **97** (1980), 701–719.

[11] Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили, Об устойчивости уединенных волн в слабо диспергирующих средах, ДАН СССР, **192** (1970), 753–756.

[12] T. Kano, T. Nishida, Sur les ondes de surface de l'eau. Une justification mathématique des équations des ondes en eau peu profonde, C. R. Acad. Sci. Paris, **287** (17 juillet 1978), Sér. A, 137–140.

[13] T. Kano, T. Nishida, Sur les ondes de surface de l'eau avec une justification mathématique des équations des ondes en eau peu profonde, J. Math. Kyoto Univ., **19** (1979), 335–370.

[14] T. Kano, T. Nishida, Water waves and Friedrichs expansion, in Lecture Note in Numerical and Applied Analysis, Vol. 6, "Recent topics in nonlinear PDE, Hiroshima 1983", ed. M. Mimura-T. Nishida, Kinokuniya — North Holland, 1984, 39–57.

[15] T. Kano, T. Nishida, A mathematical justification for Korteweg-de Vries equation and Boussinesq equation of water surface waves, à paraître dans Osaka J. Math., 1986.

[16] D. J. Korteweg, G. de Vries, On the change of form of long waves adancing in a rectangular canal and a new type of long stationary waves, Phil. Magaz., **39** (1895), 422–443.

[17] L. Lagrange, Mécanique analytique, tome II, M^{me}V^e Courcier, Paris, 1815.

[18] H. Lamb, Hydrodynamics, 6th edition, Cambridge, 1932.

[19] А. И. Леонов, О двумерных уравнениях Кортевега-де Вриза в нелинейной теории поверхностных и внутренних волн, ДАН СССР, **229** (1976), 820–823.

[20] V. I. Nalimov, A priori estimates of solutions of elliptic equations in the class of analytic

functions and their applications to the Cauchy-Poisson problem, Soviet Math. Dokl., **10** (1969), 1350–1354.

[21] L. Nirenberg, An abstract form of the nonlinear Cauchy-Kowalevski theorem, J. Diff. Geom., **6** (1972), 561–576.

[22] T. Nishida, A note on a theorem of Nirenberg, J. Diff. Geom., **12** (1977), 629–633.

[23] L. V. Ovsjannikov, A nonlinear Cauchy problem in a scale of Banach spaces, Soviet Math. Dokl., **12** (1971), 1497–1502.

[24] D. H. Peregrine, Equations for water waves and the approximation behind them, in "Waves on beaches and the resulting sediment transport" ed. R. E. Meyer, Acad. Press, 1972, 95–121.

[25] J. C. W. Rogers, Water waves: analytic solutions, uniqueness and continuous dependence on the data, Naval Ordnance Laboratory NSWC/WOL/TR. 75–43, (1975).

[26] J. S. Russell, Report on waves, in "Report of the fourteenth meeting of the British Association for the Advancement of Science held at York in September 1844", John Murray, London, 1845, 311–390.

[27] M. Shinbrot, J. Reeder, The initial value problem for surface waves under gravity, II. The simplest 3-dimensional case, Indiana Univ. Math. J., **25** (1976), 1049–1071.

[28] J. J. Stoker, Water waves, the mathematical theory with applications, Interscience, New York, 1957.

[29] G. G. Stokes, On the theory of oscillatory waves, Trans. Camb. Phil. Soc., **8** (1847), 441–473 ("Scientific Papers", vol. 1, 197–229).

[30] F. Ursell, The long-wave paradox in the theory of gravity waves, Proc. Phil. Soc. Cambridge, **49** (1953), 685–694.

[31] L. C. Woods, The theory of subsonic plane flow, Cambridge Univ. Press, 1961.

[32] H. Yoshihara, Gravity waves on the free surface of an incompressible perfect fluid of finite depth, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **18** (1982), 49–96.

Bibliographie ajoutée:

[33] T. Kano, L'équation de Kadomtsev-Petviashvili approchant les ondes longues de surface de l'eau en écoulement trois-dimensionnel, à paraître dans "Pattern and Wave–Qualitative analysis of nonlinear differential equations", ed. T. Nishida-M. Mimura-H. Fujii, North-Holland, 1986.