J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
27-1 (1987) 27-45

Problème de Cauchy faiblement hyperbolique II

Par

Daniel GOURDIN

Introduction.

On construit des inverses, dans la classe des opérateurs intégro-pseudo-différentiels de Volterra, du problème de Cauchy à données nulles, associé à des équations hyperboliques du second ordre et à des systèmes hyperboliques de deux équations du premier ordre, à caractéristiques de multiplicité variable, sous des hypothèses moins restrictives que celles énoncées dans un premier article [1]. D'autre part, certaines démonstrations esquissées dans [1] sont plus largement développées dans ce travail complétant et approfondissant [1].

I. Hypothèses et résultats.

On utilise:

i) les espaces fonctionnels de Sobolev $H_{s,m}(X)$ ($s \in R$, $m \in N$) sur une bande X de $\boldsymbol{R}^{l+1}$ définie par

$$X = \boldsymbol{R}^{l+1}_{[T_-, T_+]} = \{x \in \boldsymbol{R}^{l+1};\ x_0 \in [T_-,\ T_+],\ x' \in \boldsymbol{R}^l\}$$

avec $x = (x_0, x') = (x_0, x_1, \dots, x_l)$, $-\infty < T_- < T_+ < +\infty$,

ii) les classes de symboles d'opérateurs pseudo-différentiels:

$$S_{\mu,\nu,hom}(X \times C_- \times \equiv'),\quad S'_{\mu,\nu,hom}(X \times C \times \equiv'),\quad S'_{\mu,hom}(X \times \equiv'),$$

$$S_{\mu,\nu}(X \times C_- \times \equiv'),\quad S'_{\mu,\nu}(X \times C \times \equiv'),$$

iii) les classes de symboles dépendant d'un paramètre $t \in R_+$, de noyaux pseudo-différentiels d'opérateurs intégro-pseudo-différentiels:

$$S_{\mu,\nu,\varepsilon,hom}(R_+ \times \boldsymbol{R}^{l+1} \times C_- \times \equiv'),\quad S'_{\mu,\nu,\varepsilon,hom}(R_+ \times \boldsymbol{R}^{l+1} \times C \times \equiv'),$$

$$S_{\mu,\nu,\varepsilon}(R_+ \times \boldsymbol{R}^{l+1} \times C_- \times \equiv'),\quad S'_{\mu,\nu,\varepsilon}(R_+ \times \boldsymbol{R}^{l+1} \times C \times \equiv'),$$

($\mu \in \boldsymbol{R}$, $\nu \in \boldsymbol{Z}$, $\varepsilon \in R_+ =]0, +\infty[$, $C_\pm = \{z \in \boldsymbol{C};\ \pm \mathrm{Im}\, z \geqslant 0\}$, $\equiv' = \{\xi' \in \boldsymbol{R}^l;\ \xi' \neq 0\}$, $\equiv = \{\xi \in \boldsymbol{R}^{l+1};\ \xi \neq 0\}$ avec $\xi = (\xi_0, \xi') = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_l)$ variable duale de x),

iv) les espaces d'opérateurs pseudo-différentiels $L_{\mu,\nu}(X)$ et $L'_{\mu,\nu}(X)$ à symboles de classes signalées dans ii),

---

Communiqué par Prof. S. Mizohata, le 5 Octobre 1985

v) les espaces de noyaux pseudo-différentiels $L_{\mu,\nu,\varepsilon}(R_+, \boldsymbol{R}^{l+1})$ et $L'_{\mu,\nu,\varepsilon}(R_+, \boldsymbol{R}^{l+1})$ dépendant du paramétre $t \in R_+$, à symboles de classes signalées dans iii),

vi) les espaces d'opérateurs intégro-pseudo-différentiels $L_{\mu,\nu,\varepsilon}(U_1, X)$ et $L'_{\mu,\nu,\varepsilon}(U_1, X)$, restrictions à X d'opérateurs intégro-pseudo-différentiels s'écrivant sous la forme:

$$a = \int_{R_+} a(t) U_1(t) dt$$

à noyaux pseudo-différentiels $a(t)$ respectivement dans les espaces $L_{\mu,\nu,\varepsilon}(R_+, \boldsymbol{R}^{l+1})$ et $L'_{\mu,\nu,\varepsilon}(R_+, \boldsymbol{R}^{l+1})$ (signalés dans v) et formant les espaces $L_{\mu,\nu,\varepsilon}(U_1, \boldsymbol{R}^{l+1})$ et $L'_{\mu,\nu,\varepsilon}(U_1, \boldsymbol{R}^{l+1})$ respectifs, associés à un semi-groupe $U_1(t)$ (cf. §.II).

Tous ces éléments sont définis par V. Ia. Ivrii dans [2], et résumés dans la première partie de [6]. $L_{\mu,\nu}(X)$ et $L_{\mu,\nu,\varepsilon}(U_1, X)$ d'une part, $L'_{\mu,\nu}(X)$ et $L'_{\mu,\nu,\varepsilon}(U_1, X)$ d'autre part sont des sous-espaces respectivement de $\mathscr{L}_{\mu,\nu}(X)$ et $\mathscr{L}'_{\mu,\nu}(X)$ (cf. [2] p. 10), qui désignent des espaces d'opérateurs de Volterra opérant sur $H_{s,m}(X)$ à valeurs dans $H_{s-\mu,m-\nu}(X)$ ($\forall s \in \boldsymbol{R}$, $\forall m \in \boldsymbol{N}$, $m \geqslant \nu_+ = \sup(\nu, 0)$). $\mathscr{L}^0_{\mu,\nu}(X)$ est un sous-espace de $\mathscr{L}_{\mu,\nu}(X)$ défini dans [2] p. 10.

1. Problème de Cauchy pour les équations du second ordre.

$$P = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \sum_{\substack{0 \leq i \leq j \leq l \\ (i,j) \neq (0,0)}} P_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=0}^{l} q_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k} + P_{00}(x)$$

est un opérateur vérifiant les hypothèses suivantes (cf. [1]):

1) Les coefficients $c = p_{ij}$, q_k ($\forall i, j, k = 0, \dots, l$) de classe $C^\infty(\boldsymbol{R}^{l+1})$ sont tels que:

$$\lim_{|x'| \to \infty} c(x) = c_\infty(x_0) \in C^\infty(\boldsymbol{R})$$

$$\sup_{x \in X} (1 + |x'|)^p \left| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\beta (c(x) - c_\infty(x_0)) \right| < +\infty$$

$$\forall X = R^{l+1}_{[T_-, T_+]}, \quad \forall p \in \boldsymbol{N}, \quad \forall \beta = (\beta_0, \dots, \beta_l) \in \boldsymbol{N}^{l+1}.$$

2) Les racines $\lambda_1(x, \xi')$ et $\lambda_2(x, \xi')$ en ξ_0 du polynôme caractéristique $i^2 P_2(x, \xi)$ de P définissent des fonctions λ_1 et λ_2, à valeurs réelles, de classe $S'_{1,hom}(\boldsymbol{R}^{l+1} \times \equiv')$; on note:

$$\Delta_j(x, \xi) = \xi_0 - \lambda_j(x, \xi') \quad (x \in \boldsymbol{R}^{l+1}, \xi' \in \equiv', j = 1, 2);$$

$\{\Delta_1, \Delta_2\}$ et $K = P_1 - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{l} \frac{\partial^2 P_2}{\partial \xi_j \partial x_j}$ sont respectivement la parenthèse de Poisson de Δ_1 et Δ_2 et le polynôme sous caractéristique de P (P_1 et P_2 sont les parties homogènes de degrés respectifs 1 et 2 en ξ du symbole de P).

On obtient le théorème I suivant complétant le théorème 1 de [1] du fait que $\beta^2 + 4\gamma$ est ici de signe quelconque.

Théorème I. *Sous les hypothèses précédentes, pour toute bande* $X = \boldsymbol{R}^{l+1}_{[T_-, T_+]}$

de voisinage $X^0 = \boldsymbol{R}^{l+1}_{[T^0_-, T^0_+]}$ *tel que: il existe des constantes* α, β, γ *avec* $\alpha \geqslant 0$ (*resp.* $\alpha \leqslant 1$), $0 < -(\beta^2 + 4\gamma) < \dfrac{4\Pi^2}{(T^0_+ - T^0_-)^2}$ *ou* $\beta^2 + 4\gamma \geqslant 0$ *et un symbole* $b \in S'_{0,hom}(X^0 \times \equiv')$ *vérifiant dans* $X^0 \times \equiv'$ *la condition*:

$$(\mathrm{C}_1) \quad \{\{\Delta_2, \Delta_1\}, \Delta_1\} = \beta\{\Delta_2, \Delta_1\} + \gamma(\Delta_2 - \Delta_1)$$

(*resp.* $\{\{\Delta_1, \Delta_2\}, \Delta_2\} = \beta\{\Delta_1, \Delta_2\} + \gamma(\Delta_1 - \Delta_2)$) *et la condition*

$$(\mathrm{C}_2) \quad \left(K + \frac{1-2\alpha}{2}\{\Delta_1, \Delta_2\}\right)\Big|_{\xi_0 = \lambda_1} = b(\Delta_2 - \Delta_1),$$

le problème de Cauchy "à donneés nulles" (*cf. définition de* $H_{t,p}(X)$ *dans* [2] *et* [6]):

$$(1) \qquad Py = f \quad (f \in H_{t,p}(X))$$

possède une et une seule solution $y \in H_{t-[\rho],p+1-[\rho]}(X)$ *avec* $\rho = \alpha$ (*resp.* $\rho = 1 - \alpha$) *où* $[\rho]$ *est la partie entière de* ρ.

2. Problème de Cauchy pour les systèmes de deux équations du premier ordre.

$$h = I_2 \frac{\partial}{\partial x_0} + \sum_{j=1}^{l} h_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + h_0(x)$$

est un opérateur dont les coefficients h_j ($j = 0, \ldots, l$) sont des matrices à deux lignes et deux colonnes de fonctions de classe $C^\infty(\boldsymbol{R}^{l+1})$ vérifiant l'hypothèse 1) relative à P et I_2 est la matrice unité. On suppose que le déterminant de la matrice caractéristique iH de h vérifie l'hypothèse 2) relative à i^2P_2. De plus, en appelant A la matrice des cofacteurs des éléments de H dans le développement de det H, on suppose que pour $j = 1, 2$:

$$\inf\{|A^j_1(x; \xi_0 = \lambda_j(x, \xi'), \xi')|;\ x \in \boldsymbol{R}^{l+1}, |\xi'| = 1\} > 0.$$

On obtient alors le théorème II suivant complétant le théorème 2 de [1] du fait que $\beta^2 + 4\gamma$ est ici de signe quelconque.

Théorème II. *Sous les hypothèses précédentes, pour toute bande* $X = \boldsymbol{R}^{l+1}_{[T_-, T_+]}$ *de voisinage* $X^0 = \boldsymbol{R}^{l+1}_{[T^0_-, T^0_+]}$ *tel que: il existe des constantes réelles* α, β, γ *avec* $\alpha \geqslant 0$ (*resp.* $\alpha \leqslant 1$), $0 < -(\beta^2 + 4\gamma) < \dfrac{4\Pi^2}{(T^0_+ - T^0_-)^2}$ *ou* $\beta^2 + 4\gamma \geqslant 0$ *et un symbole* $b \in S'_{0,hom}(X^0 \times \equiv')$ *vérifiant dans* $X^0 \times \equiv'$ *la condition* (C_1) *énoncée au théorème I et la condition*:

$$(\mathrm{C}'_2) \quad \left[K' + \frac{1-2\alpha}{2}\{\Delta_1, \Delta_2\}A^1_1\right]\Big|_{\xi_0 = \lambda_1} = b(\Delta_2 - \Delta_1)$$

où K' *est le polynôme sous caractéristique du système* (*cf.* [3] *p.* 15 *et* [4] *p.* 460), *le problème de Cauchy "à données nulles"*

$$(2) \qquad hy = f \quad (f \in H^2_{t,p}(X))$$

possède une solution et une seule $y \in H^2_{t-1-[\rho], p-[\rho]}(X)$ *avec* $\rho = \alpha$ *(resp.* $\rho = 1-\alpha$*);* $H^2_{t,p}(X)$ *désigne les colonnes dont les deux composantes sont des fonctions de classe* $H_{t,p}(X)$.

II. Démonstrations.

1. Cas des équations du second ordre.

On utilise la proposition 1 suivante:

Proposition 1. ([1]). *La condition* (C_2) *est vérifiée si et seulement si pour chaque bande* X *de voisinage* X^0, *il existe des opérateurs:* $\partial_j = \dfrac{\partial}{\partial x_0} - i\Lambda_j\left(x; \dfrac{1}{i}\, grad_{x'}\right)$ *où* $\Lambda_j\left(x; \dfrac{1}{i}\, grad_{x'}\right) \in L'_{1,0}(\boldsymbol{R}^{l+1})$ *a pour symbole principal* $\lambda_j(x, \xi')$ ($j=1, 2$) *et un opérateur* $r \in L'_{0,0}(\boldsymbol{R}^{l+1})$ *vérifiant*

$$P = \partial_2\partial_1 + \alpha[\partial_1, \partial_2] + r \quad \text{dans} \quad X \tag{3}$$

où $[\partial_1, \partial_2] = \partial_1\partial_2 - \partial_2\partial_1$ *est le commutateur de* ∂_1 *et* ∂_2.

On opère alors trois réductions de P, afin de construire des inverses de Volterra de P.

Première réduction de P.

Soit $U_1(t)$ le semi-groupe d'opérateurs de générateur $-\partial_1$ (cf. [2] p. 26, et [6]) et $L_{\mu,\nu,\delta}(U_1, X)$ les classes d'opérateurs intégro-pseudo-différentiels de Volterra associées.

Pour tout ρ constante complexe, on définit alors:

$$\partial_1^\rho = \Gamma^{-1}(m-\rho)\int_{R_+} t^{m-\rho-1}U_1(t)\partial_1^m dt$$

où $\Gamma(z)$ est la fonction d'Euler, $-\rho_- \leqslant \operatorname{Re}\rho \leqslant \rho_+$, $m_\pm = [\rho_\pm]+1$ et m un entier non négatif $\geqslant m_+$. Alors ∂_1^ρ ne dépend pas de $m \geqslant m_+$, $\partial_1^\rho \in \mathscr{L}^0_{p_+, m_+}(X)$ où $p_+ = \sup(m_+, 0)$ et

$$\partial_1^\rho \in L_{p_+, p_+, p_+ - \rho_+ - \delta}(U_1, \boldsymbol{R}^{l+1}) \quad (0 < \delta < p_+ - \rho_+).$$

Proposition 2. *Supposons* $\alpha > 0$ *et* $\{\{\Delta_2, \Delta_1\}, \Delta_1\} = \beta\{\Delta_2, \Delta_1\} + \gamma(\Delta_2 - \Delta_1)$*; on a alors:*

$$P' = \partial_1^{-\alpha} P \partial_1^\alpha = \partial_2\partial_1 + r + R_1 + R_2$$

dans X *avec* $R_1 \in L_{1,0,1}(U_1, \boldsymbol{R}^{l+1})$, $R_2 \in L_{0,0,1}(U_1, \boldsymbol{R}^{l+1})$.

Preuve. On peut écrire:

$$\partial_1^\alpha = \Gamma^{-1}(q-\alpha)\int_0^{+\infty} t^{q-\alpha-1}U_1(t)\partial_1^q dt$$

où q est le premier entier strictement supérieur à α: $q = [\alpha]+1$;

$$\partial_1^{-\alpha} = \Gamma^{-1}(\alpha)\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}U_1(t)dt.$$

D'où

$$\partial_1^{-\alpha}P\partial_1^{\alpha} = \Gamma^{-1}(\alpha)\Gamma^{-1}(q-\alpha)\int_{R_+^2} \tau^{\alpha-1}\tau_1^{q-\alpha-1}U_1(\tau)PU_1(\tau_1)\partial_1^q d\tau d\tau_1 =$$

$$= \Gamma^{-1}(\alpha)\Gamma^{-1}(q-\alpha)\int_{R_+^2} \tau^{\alpha-1}\tau_1^{q-\alpha-1}(P_{U_1})(\tau)U_1(\tau+\tau_1)\partial_1^q d\tau d\tau_1$$

avec $(P_{U_1})(\tau) = U_1(\tau)PU_1(-\tau)$.

On fait le changement de variables d'intégration

$$t = \tau+\tau_1 \in R_+ \quad \text{et} \quad \zeta = \tau t^{-1} = \frac{\tau}{\tau+\tau_1} \in]0, 1[.$$

D'où:

$$\partial_1^{-\alpha}P\partial_1^{\alpha} = \Gamma^{-1}(\alpha)\Gamma^{-1}(q-\alpha)\int_{R_+} t^{q-1}\left[\int_0^1 \zeta^{\alpha-1}(1-\zeta)^{q-\alpha-1}(P_{U_1})(t\zeta)d\zeta\right]U_1(t)\partial_1^q dt$$

Or

$$P_{U_1}(t\zeta) = U_1(t\zeta)PU_1(-t\zeta) = P + P_{\partial_1}^{(1)}\cdot t\zeta + t^2\zeta^2\int_0^1 (1-\rho)(P_{\partial_1}^{(2)})_{U_1}(t\zeta\rho)d\rho$$

avec $P = P_{\partial_1}^{(0)}$ et $P_{\partial_1}^{(k)} = [P_{\partial_1}^{(k-1)}, \partial_1]$ d'après [2] p. 27. D'où:

$$\partial_1^{-\alpha}P\partial_1^{\alpha} = \Gamma^{-1}(\alpha)\Gamma^{-1}(q-\alpha)\left(\int_0^1 \zeta^{\alpha-1}(1-\zeta)^{q-\alpha-1}d\zeta\right)P\left(\int_0^{+\infty} t^{q-1}U_1(t)\partial_1^q dt\right)+$$

$$+\Gamma^{-1}(\alpha)\Gamma^{-1}(q-\alpha)\left(\int_0^1 \zeta^{\alpha}(1-\zeta)^{q-\alpha-1}d\zeta\right)P_{\partial_1}^{(1)}\left(\int_0^{+\infty} t^q U_1(t)\partial_1^q dt\right)+$$

$$+\Gamma^{-1}(\alpha)\Gamma^{-1}(q-\alpha)\times$$

$$\times\int_0^{+\infty} t^{q+1}\left(\int_0^1 \zeta^{\alpha+1}(1-\zeta)^{q-\alpha-1}\left[\int_0^1 (1-\rho)(P_{\partial_1}^{(2)})_{U_1}(t\zeta\rho)d\rho\right]d\zeta\right)U_1(t)\partial_1^q dt$$

Comme

$$\int_0^1 \zeta^{\alpha-1}(1-\zeta)^{q-\alpha-1}d\zeta = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(q-\alpha)}{(q-1)!},$$

$$\int_0^1 \zeta^{\alpha}(1-\zeta)^{q-\alpha-1}d\zeta = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(q-\alpha)}{q!} = \frac{\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(q-\alpha)}{q!},$$

$$\int_0^{+\infty} t^{q-1}U_1(t)\partial_1^q dt = \int_0^{+\infty}\left(\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{q-1} t^{q-1}\right)\partial_1 U_1(t)dt = (q-1)!,$$

$$\int_0^{+\infty} t^q U_1(t)\partial_1^q dt = q!\int_0^{+\infty} U_1(t)dt,$$

on obtient:

$$\partial_1^{-\alpha} P \partial_1^{\alpha} = P + \alpha P_{\partial_1}^{(1)} \int_0^{+\infty} U_1(t)dt + \Gamma^{-1}(\alpha)\Gamma^{-1}(q-\alpha) \times$$

$$\times \int_0^{+\infty} t^{q+1}\left(\int_0^1 \zeta^{\alpha+1}(1-\zeta)^{q-\alpha-1}\left[\int_0^1 (1-\rho)(P_{\partial_1}^{(2)})_{U_1}(t\zeta\rho)d\rho\right]d\zeta\right)U_1(t)\partial_1^q dt.$$

D'autre part:

(3) $$P = \partial_2\partial_1 + \alpha[\partial_1, \partial_2] + r;$$

calculons, en posant $P_{\partial_1}^{(1)} = [P, \partial_1]$,

$P_{\partial_1}^{(2)} = [P_{\partial_1}^{(1)}, \partial_1], \ldots, P_{\partial_1}^{(n)} = [P_{\partial_1}^{(n-1)}, \partial_1]$ les expressions suivantes:

$P_{\partial_1}^{(1)} = [\partial_2, \partial_1]\partial_1 + \alpha[[\partial_1, \partial_2], \partial_1] + [r, \partial_1]$,

$P_{\partial_1}^{(2)} = [[\partial_2, \partial_1], \partial_1]\partial_1 + \alpha[[[\partial_1, \partial_2], \partial_1], \partial_1] + [[r, \partial_1], \partial_1]$.

D'après l'hypothèse (C_1) on a dans X:

$$[[\partial_1, \partial_2], \partial_1] = \beta[\partial_1, \partial_2] + \gamma(\partial_1 - \partial_2) + \delta$$

avec $\delta \in L'_{0,0}(\boldsymbol{R}^{l+1})$; donc, dans X, on a:

$$P_{\partial_1}^{(1)} = [\partial_2, \partial_1]\partial_1 + \alpha\beta[\partial_1, \partial_2] + \alpha\gamma(\partial_1 - \partial_2) + \varepsilon$$

avec $\varepsilon = \alpha\delta + [r, \partial_1] \in L'_{0,0}(\boldsymbol{R}^{l+1})$ et aussi

$$P_{\partial_1}^{(2)} = (\beta[\partial_2,\partial_1] + \gamma(\partial_2 - \partial_1) + \delta)\partial_1 + \alpha\beta(\beta[\partial_1,\partial_2] + \gamma(\partial_1 - \partial_2) + \delta) - \alpha\gamma[\partial_2,\partial_1] + [\varepsilon,\partial_1] =$$

$$= (\beta[\partial_2, \partial_1] + \gamma(\partial_2 - \partial_1) + \delta)\partial_1 + \alpha(\beta^2 + \gamma)[\partial_1, \partial_2] + + \alpha\beta\gamma(\partial_1 - \partial_2) + \psi$$

avec $\psi = \alpha\beta\delta + [\varepsilon, \partial_1] \in L'_{0,0}(\boldsymbol{R}^{l+1})$. D'où:

(3′) $\partial_1^{-\alpha} P \partial_1^{\alpha} = P' = \partial_2\partial_1 + r + R_1 + R_2$ avec

$$R_1 = (\alpha^2\beta[\partial_1, \partial_2] + \alpha^2\gamma(\partial_1 - \partial_2))\int_0^{+\infty} U_1(t)dt + \Gamma^{-1}(\alpha)\Gamma^{-1}(q-\alpha) \times$$

$$\times \int_0^{+\infty}\int_0^1 \zeta^{\alpha+1}(1-\zeta)^{q-\alpha-1}\int_0^1 (1-\rho)\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{q+1} t^{q+1}(\beta[\partial_2, \partial_1] + \gamma(\partial_2 - \partial_1))_{U_1}(t\zeta\rho) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{d}{dt}\right)^{q} t^{q+1}(\alpha(\beta^2 + \gamma)[\partial_1, \partial_2] + \alpha\beta\gamma(\partial_1 - \partial_2))_{U_1}(t\zeta\rho)\right] d\rho d\zeta U_1(t)dt$$

de classe $L'_{1,0,1}(U_1, \boldsymbol{R}^{l+1})$ et

$$R_2 = \alpha\varepsilon\int_0^{+\infty} U_1(t)dt + \Gamma^{-1}(\alpha)\Gamma^{-1}(q-\alpha)\int_0^{+\infty}\int_0^1 \zeta^{\alpha+1}(1-\zeta)^{q-\alpha-1}\int_0^1 (1-\rho) \times$$

$$\times \left[-\left(\frac{d}{dt}\right)^{q+1} t^{q+1}(\delta)_{U_1}(t\zeta\rho) + \left(\frac{d}{dt}\right)^{q} t^{q+1}(\psi)_{U_1}(t\zeta\rho)\right] d\rho d\zeta U_1(t)dt$$

de classe $L'_{0,0,1}(U_1, \boldsymbol{R}^{l+1})$.

Remarque. On a une proposition analogue lorsque $\alpha < 1$ et $\{\{\Delta_1, \Delta_2\}, \Delta_1\} =$

$=\beta\{\Delta_1, \Delta_2\}+\gamma(\Delta_1-\Delta_2)$ à savoir

$$\partial_2^{-(1-\alpha)} P \partial_2^{1-\alpha} = \partial_1 \partial_2 + r' + R'_1 + R'_2$$

dans X avec $r' \in L'_{0,0}(\boldsymbol{R}^{l+1})$, $R'_1 \in L'_{1,0,1}(U_2, \boldsymbol{R}^{l+1})$, $R'_2 \in L'_{0,0,1}(U_2, \boldsymbol{R}^{l+1})$. Avant d'effectuer une deuxième réduction, on a besoin des deux lemmes suivants:

Lemme 1. *Le symbole principal* $\sigma_1(\partial_2)_{U_1}(t)$ *est donné par l'expression* (4) *suivante*:

$$\sigma_1(\partial_2)_{U_1}(t) = i\Delta_2 + i\left[\frac{2}{\sqrt{-4\gamma-\beta^2}} \exp\left(\frac{\beta t}{2}\right) \sin \frac{t\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}{2}\right]\{\Delta_2, \Delta_1\} +$$

$$+ i \exp\left(\frac{\beta t}{2}\right)\left[\cos \frac{t\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}{2} - \exp\left(-\frac{\beta t}{2}\right) - \frac{\beta}{\sqrt{-4\gamma-\beta^2}} \sin \frac{t\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}{2}\right](\Delta_2 - \Delta_1)$$

lorsque $\beta^2 + 4\gamma < 0$.

Preuve. Notons $\Delta_2^{(n)}$ le symbole défini par la récurrence:

$$\Delta_2^{(n)} = \{\Delta_2^{(n-1)}, \Delta_1\} \quad (n \geqslant 1) \quad \textit{et} \quad \Delta_2^{(0)} = \Delta_2 .$$

Comme

$$\Delta_2^{(2)} = \beta\{\Delta_2, \Delta_1\} + \gamma(\Delta_2 - \Delta_1)$$

on en déduit

$$\Delta_2^{(n)} = \beta \Delta_2^{(n-1)} + \gamma \Delta_2^{(n-2)} \quad (n \geqslant 3) .$$

Donc $\Delta_2^{(n)}$ est de la forme:

$$\Delta_2^{(n)} = a(x, \xi') r_1^n + b(x, \xi') r_2^n$$

où r_1 et r_2 sont les racines complexes conjuguées de $r^2 - \beta r - \gamma = 0$ et a et b sont déterminés dans $S'_{1,0,hom}(\boldsymbol{R}^{l+1} \times \equiv')$ par les équations:

$$\begin{cases} \Delta_2^{(2)}(x, \xi') = a r_1^2 + b r_2^2 = \beta\{\Delta_2, \Delta_1\} + \gamma(\Delta_2 - \Delta_1) \\ \Delta_2^{(1)}(x, \xi') = a r_1 + b r_2 = \{\Delta_2, \Delta_1\} . \end{cases}$$

On a:

$$r_1 = \frac{\beta - i\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{\beta + i\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}{2} .$$

Par conséquent:

$$a = \frac{1}{r_1(r_1 - r_2)}[(\beta - r_2)\{\Delta_2, \Delta_1\} + \gamma(\Delta_2 - \Delta_1)] = a_1\{\Delta_2, \Delta_1\} + a_2(\Delta_2 - \Delta_1)$$

et

$$b = \frac{1}{r_2(r_2 - r_1)}[(\beta - r_1)\{\Delta_2, \Delta_1\} + \gamma(\Delta_2 - \Delta_1)] = b_1\{\Delta_2, \Delta_1\} + b_2(\Delta_2 - \Delta_1)$$

avec

$$a_1=\frac{i}{\sqrt{-4\gamma-\beta^2}},\quad a_2=\frac{4\gamma+\beta^2+i\beta\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}{2(4\gamma+\beta^2)},\quad b_1=\overline{a_1},\quad b_2=\overline{a_2}.$$

Comme d'après [2], on a:

$$(\partial_2)_{U_1}(t)=\partial_2+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{t^k}{k!}\partial_{2\partial_1}^{(k)}+\frac{t^n}{n!}n\int_0^1(1-\rho)^{n-1}(\partial_{2\partial_1}^{(n)})_{U_1}(t\rho)d\rho$$

on en déduit que:

$$\sigma_1((\partial_2)_{U_1})(t)=i\Big(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}\Delta_2^{(k)}\Big).$$

D'où

$$\begin{aligned}(4')\qquad \sigma_1((\partial_2)_{U_1})(t)=i\Delta_2+i[a_1(e^{tr_1}-1)+b_1(e^{tr_2}-1)]\{\Delta_2,\Delta_1\}+\\ +i[a_2(e^{tr_1}-1)+b_2(e^{tr_2}-1)](\Delta_2-\Delta_1).\end{aligned}$$

D'où le lemme 1, en utilisant les expressions de a_1, a_2, b_1, b_2 précédentes.

D'après les propriétés des opérateurs intégro-pseudo-différentiels associés à $U_1(t)$ (cf. [2]) on déduit du lemme 1 l'égalité suivante:

$$(5)\qquad \int_0^{+\infty}b(t)(\partial_2-(\partial_2)_{U_1}(t))\partial_1U_1(t)dt=\int_0^{+\infty}\frac{d}{dt}[b(t)(\partial_2-(\partial_2)_{U_1}(t))]U_1(t)dt=$$

$$=-\int_0^{+\infty}\frac{d}{dt}\left[b(t)\frac{2\exp\left(\frac{\beta t}{2}\right)}{\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}\sin\frac{t\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}{2}\right][\partial_2,\partial_1]U_1(t)dt+\partial_2s'+\sigma'\partial_1+\tau'$$

lorsque $\beta^2+4\gamma<0$ avec $b(t)\in L_{0,0,1}(R_+, \boldsymbol{R}^{l+1})$, s' et σ' dans $L_{0,0,1}(U_1, \boldsymbol{R}^{l+1})$ et $\tau'\in L_{0,1,1}(U_1, \boldsymbol{R}^{l+1})$.

A l'aide de (5) nous allons démontrer le lemme suivant:

Lemme 2. *Soient b et $\bar{b}$ de classe $L_{0,0,1}(U_1, \boldsymbol{R}^{l+1})$ ayant des noyaux pseudo-différentiels de même symbole principal $b_0(t, x, \xi)$. Alors lorsque $\beta^2+4\gamma<0$, $\partial_2\partial_1\bar{b}-b\partial_2\partial_1$ peut se mettre sous la forme suivante*:

$$(6)\qquad \partial_2\partial_1\bar{b}-b\partial_2\partial_1=$$

$$=s\partial_1+\partial_2\sigma+\tau+\int_0^{+\infty}\frac{d}{dt}\left[b(t)\frac{2\exp\left(\frac{\beta t}{2}\right)}{\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}\sin\frac{t\sqrt{-4\gamma+\beta^2}}{2}\right][\partial_2,\partial_1]U_1(t)dt$$

où s et $\sigma\in L_{0,0,1}(U_1, \boldsymbol{R}^{l+1})$ et $\tau\in L_{0,1,1}(U_1, \boldsymbol{R}^{l+1})$.

Preuve. Appelons $b(t)$ et $\bar{b}(t)$ les noyaux pseudo-différentiels de b et $\bar{b}$; on obtient:

$$(7)\qquad \partial_2\partial_1\bar{b}-b\partial_2\partial_1=$$

$$=\int_0^{+\infty}(\partial_2\partial_1\bar{b}(t)-b(t)\partial_2\partial_1)U_1(t)dt+\int_0^{+\infty}b(t)(\partial_2\partial_1-(\partial_2\partial_1)_{U_1}(t))U_1(t)dt=$$

$$=\int_0^{+\infty}(\partial_2\partial_1\bar{b}(t)-b(t)\partial_2\partial_1)U_1(t)dt+\int_0^{+\infty}b(t)(\partial_2-(\partial_2)_{U_1}(t))\partial_1U_1(t)dt.$$

De plus $\partial_2\partial_1\bar{b}(t)-b(t)\partial_2\partial_1\in L_{1,2,1}(R_+,\ \boldsymbol{R}^{l+1})$ et peut s'écrire:

$$\partial_2\partial_1(\bar{b}(t)-b(t))+\partial_2\partial_1b(t)-b(t)\partial_2\partial_1=\partial_2\partial_1b'(t)+[\partial_2\partial_1,\ b(t)]$$

avec $b'(t)\in L_{-1,0,1}(R_+,\ \boldsymbol{R}^{l+1})$.

D'où:

$$\partial_2\partial_1\bar{b}(t)-b(t)\partial_2\partial_1=\partial_2([\partial_1,\ b'(t)]+[\partial_1,\ b(t)])+(\partial_2b'(t)+[\partial_2,\ b(t)])\partial_1=$$
$$=\partial_2\sigma_2(t)+s_2(t)\partial_1.$$

Donc le premier terme de (7) peut s'écrire:

$$\int_0^{+\infty}(\partial_2\partial_1\bar{b}(t)-b(t)\partial_2\partial_1)U_1(t)dt=\partial_2\sigma_2+s_2\partial_1$$

avec

$$s_2=\int_0^{+\infty}s_2(t)U_1(t)dt\in L_{0,1,1}(U_1,\ \boldsymbol{R}^{l+1})$$

et

$$\sigma_2=\int_0^{+\infty}\sigma_2(t)U_1(t)dt\in L_{0,1,1}(U_1,\ \boldsymbol{R}^{l+1}).$$

En utilisant (5), le lemme 2 est démontré en prenant:

$$s=s'+s_2,\quad \sigma=\sigma'+\sigma_2\quad \text{et}\quad \tau=\tau'.$$

Remarque 1. τ peut s'écrire $\tau=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial t}\ [b(t)t\phi(t)]\,U_1(t)dt$ avec $\phi(t)\in L_{0,0,1}(R_+,\ \boldsymbol{R}^{l+1})$ car $\partial_2-(\partial_2)_{U_1}(t)$ est divisible par t.

Remarque 2. Par un calcul du même type que précédemment on montre les lemmes suivants:

Lemme 1′. *Le symbole principal $\sigma_1(\partial_2)_{U_1}(t)$ est donné par les expressions suivantes*:

$$\sigma_1(\partial_2)_{U_1}(t)=i\Delta_2+i\,\frac{2\exp\left(\frac{\beta t}{2}\right)}{\sqrt{4\gamma+\beta^2}}\ \mathrm{sh}\,\frac{t\sqrt{\beta^2+4\gamma}}{2}\ \{\Delta_2,\ \Delta_1\}+$$
$$+i\left[e^{\frac{\beta t}{2}}\ \mathrm{ch}\,\frac{t\sqrt{\beta^2+4\gamma}}{2}-\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2+4\gamma}}\,e^{\frac{\beta t}{2}}\ \mathrm{sh}\,\frac{t\sqrt{\beta^2+4\gamma}}{2}-1\right](\Delta_2-\Delta_1)$$

si $\beta^2+4\gamma>0$, et

$$\sigma_1(\partial_2)_{U_1}(t) = i\Delta_2 + it\exp\left(\frac{\beta t}{2}\right)\{\Delta_2, \Delta_1\} + i\left(\exp\frac{\beta t}{2} - 1 - \frac{\beta t}{2}\exp\frac{\beta t}{2}\right)(\Delta_2 - \Delta_1)$$

si $\beta^2 + 4\gamma = 0$.

Lemme 2' ([1]). *Soient* b *et* $\bar{b}$ *de classe* $L_{0,0,1}(U_1, \boldsymbol{R}^{l+1})$ *ayant des noyaux pseudo-différentiels de même symbole principal* $b_0(t, x, \xi)$. *Alors* $\partial_2\partial_1\bar{b} - b\partial_2\partial_1$ *peut se mettre sous la forme*:

$$\partial_2\partial_1\bar{b} - b\partial_2\partial_1 =$$

$$= s\partial_1 + \partial_2\sigma + \tau - \frac{2}{\sqrt{\beta^2+4\gamma}}\int_0^{+\infty}\frac{d}{dt}\left[b(t)\exp\left(\frac{\beta t}{2}\right)\mathrm{sh}\frac{t\sqrt{\beta^2+4\gamma}}{2}\right][\partial_2, \partial_1]\; U_1(t)dt$$

si $\beta^2 + 4\gamma > 0$, *et sous la forme*:

$$\partial_2\partial_1\bar{b} - b\partial_2\partial_1 = s\partial_1 + \partial_2\sigma + \tau - \int_0^{\infty}\frac{d}{dt}\left[b(t)\, t\exp\frac{\beta t}{2}\right][\partial_2, \partial_1]U_1(t)dt$$

si $\beta^2 + 4\gamma = 0$, *où* s *et* $\sigma \in L_{0,0,1}(U_1, \boldsymbol{R}^{l+1})$ *et* $\tau \in L_{0,1,1}(U_1, \boldsymbol{R}^{l+1})$.

Deuxième réduction de P.

Avec le lemme 2 et sous les mêmes hypothéses, on va obtenir la proposition suivante:

Proposition 3. *il existe* b *et* $\bar{b} \in L_{0,0,1}(U_1, \boldsymbol{R}^{l+1})$ *de noyaux pseudo-différentiels ayant même symbole principal*, $s'' \in L_{0,1}(R^{l+1})$, σ'' *et* $S'' \in L_{0,1,1}(U_1, \boldsymbol{R}^{l+1})$ *tels que*:

(8) $$(I + b)P' = (\partial_2\partial_1 + \partial_2\sigma'' + s'' + S'')(I + \bar{b})$$

dans X *vérifiant* $|X| < \dfrac{2\Pi}{\sqrt{-4\gamma - \beta^2}}$ ($|X|$ *désignant la largeur de la bande* X).

Preuve. Rappelons que:

$$\partial_1^{-\alpha}P\partial_1^{\alpha} = P' = \partial_2\partial_1 + r + R_1 + R_2$$

avec $R_1 \in L'_{1,0,1}(U_1, \boldsymbol{R}^{l+1})$ et $R_2 \in L'_{0,0,1}(U_1, \boldsymbol{R}^{l+1})$. Calculons le symbole principal de l'opérateur pseudo-différentiel $[\partial_2, \partial_1]_{U_1}(t)$ (cf. (3')). On a:

(9) $$\sigma_1([\partial_1, \partial_2]_{U_1}(t)) = i\sum_{n=1}^{\infty}\Delta_{2_{\Delta_1}}^{(n)}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} =$$

$$= i(a_1r_1e^{tr_1} + b_1r_2e^{tr_2})\{\Delta_2, \Delta_1\} + i(a_2r_1e^{tr_1} + b_2r_2e^{tr_2})(\Delta_2 - \Delta_1).$$

Par conséquent R_1 peut s'écrire sous la forme suivante: $R_1 = R_1' + R_1'' + R_1'''$ avec

$$R_1' = \partial_2\int_0^{+\infty}\Big\{-\alpha^2\gamma + \Gamma^{-1}(\alpha)\Gamma^{-1}(q-\alpha)\int_0^1\zeta^{\alpha+1}(1-\zeta)^{q-\alpha-1}\Big[\int_0^1(1-\rho)\times$$

$$\times\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{q+1}t^{q+1}\Big(\beta(a_2r_1e^{t\zeta\rho r_1} + b_2r_2e^{t\zeta\rho r_2}) + \gamma(1 + a_2(e^{t\zeta\rho r_1} - 1) + b_2(e^{t\zeta\rho r_2} - 1))\Big) +\right.$$

$$+\left(\frac{d}{dt}\right)^q t^{q+1}\Big(\alpha(\beta^2+\gamma)(-a_2 r_1 e^{t\zeta\rho r_1}-b_2 r_2 e^{t\zeta\rho r_2})-$$

$$-\alpha\beta\gamma(1+a_2(e^{t\zeta\rho r_1}-1)+b_2(e^{t\zeta\rho r_2}-1))\Big)\Big]d\rho\Big]d\zeta\Big\}U_1(t)dt.$$

$$R_1''=[\partial_1,\ \partial_2]\Big\{\alpha^2\beta\int_0^{+\infty}U_1(t)dt+\Gamma^{-1}(\alpha)\Gamma^{-1}(q-\alpha)\int_0^{+\infty}\int_0^1\zeta^{\alpha+1}(1-\zeta)^{q-\alpha-1}\int_0^1(1-\rho)\times$$

$$\times\Big[\left(\frac{d}{dt}\right)^{q+1}t^{q+1}\Big(\beta(-a_1 r_1 e^{t\zeta\rho r_1}-b_1 r_2 e^{t\zeta\rho r_2})+\gamma(a_1(1-e^{t\zeta\rho r_1})+b_1(1-e^{t\zeta\rho r_2}))\Big)+$$

$$+\left(\frac{d}{dt}\right)^q t^{q+1}\Big(\alpha(\beta^2+\gamma)(a_1 r_1 e^{t\zeta\rho r_1}+b_1 r_2 e^{t\zeta\rho r_2})+$$

$$+\alpha\beta\gamma(a_1(e^{t\zeta\rho r_1}-1)+b_1(e^{t\zeta\rho r_2}-1))\Big)\Big]d\rho d\zeta U_1(t)dt\Big\}.$$

$$R_1'''=\alpha^2\gamma-\Gamma^{-1}(\alpha)\Gamma^{-1}(q-\alpha)(q+1)!\int_0^1\zeta^{\alpha+1}(1-\zeta)^{q-\alpha-1}d\zeta\int_0^1(1-\rho)d\rho\gamma+$$

$$+\Gamma^{-1}(\alpha)\Gamma^{-1}(q-\alpha)\int_0^1\zeta^{\alpha+1}(1-\zeta)^{q-\alpha-1}d\zeta(q+1)!\int_0^1(1-\rho)d\rho\alpha\beta\gamma\int_0^{+\infty}U_1(t)dt+$$

$$+R_1^{IV}$$

avec $R_1^{IV}\in L_{0,1,1}(U_1,\ \boldsymbol{R}^{l+1})$.

D'autre part, en utilisant les relations:

$$\int_0^1\zeta^{\alpha-1}(1-\zeta)^{q-\alpha-1}d\zeta=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(q-\alpha)}{(q-1)!},\quad \Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha),$$

on a facilement:

$$R_1'''=\frac{(\alpha-1)\alpha\gamma}{2}+\frac{(\alpha+1)\alpha^2\beta\gamma}{2}\int_0^{+\infty}U_1(t)dt+R_1^{IV}$$

D'où:

$$R_1=\partial_2 s_1+[\partial_1,\ \partial_2]s_1'+R_1'''$$

avec s_1 et $s_1'\in L_{0,0,1}(U_1,\ \boldsymbol{R}^{l+1})$ et $R_1'''\in L_{0,1,1}(U_1,\ \boldsymbol{R}^{l+1})$. En utilisant le lemme 2, on obtient:

$$(I+b)(\partial_2\partial_1+r+R_1+R_2)=(I+b)\partial_2\partial_1+(I+b)R_1+(I+b)(r+R_2)=$$

$$=\partial_2\partial_1(I+\bar b)+\partial_2 s_1+[\partial_1,\ \partial_2]s_1'+b\partial_2 s_1+b[\partial_1,\ \partial_2]s_1'+R_1'''+bR_1'''+(I+b)(r+R_2)-$$

$$-s\partial_1-\partial_2\sigma-\tau+[\partial_1,\ \partial_2]\int_0^{+\infty}\frac{d}{dt}\Big[b(t)\frac{2\exp\left(\frac{\beta t}{2}\right)}{\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}\sin\frac{t\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}{2}\Big]U_1(t)dt.$$

On a:

$$-s\partial_1=-\int_0^{+\infty}\frac{ds(t)}{dt}U_1(t)dt-s(0)$$

si $b(t)$ et $\bar{b}(t) \in C^\infty(R_0^+, L_{0,0}(\boldsymbol{R}^{l+1}))$ (avec $R_0^+ = [0, +\infty[$).

On peut poser alors:

$$R_1''' + bR_1''' + (I+b)(r+R_2) - s\partial_1 = a + A$$

avec $a \in L_{0,1}(\boldsymbol{R}^{l+1})$ et $A \in L_{0,1,1}(U_1, \boldsymbol{R}^{l+1})$. D'autre part:

$$b\partial_2 = \int_0^{+\infty} b(t)(\partial_2)_{U_1}(t)U_1(t)dt,$$

$$b[\partial_1, \partial_2] = \int_0^{+\infty} b(t)([\partial_1, \partial_2])_{U_1}(t)U_1(t)dt.$$

D'après les expressions (4') et (9) de $\sigma_1(\partial_2)_{U_1}(t)$ et $\sigma_1([\partial_1, \partial_2]_{U_1})(t)$, on peut écrire:

$$b\partial_2 = \partial_2 b + [\partial_2, \partial_1]\int_0^{+\infty} \frac{2\exp\left(\frac{\beta t}{2}\right)}{\sqrt{-4\gamma-\beta^2}} \sin\frac{t\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}{2}\, b(t)\,U_1(t)\,dt +$$

$$+\partial_2\int_0^{+\infty}\left(\exp\frac{\beta t}{2}\right)\left[\cos\frac{t\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}{2} - \exp\left(-\frac{\beta t}{2}\right) -\right.$$

$$\left. - \frac{\beta}{\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}\sin\frac{t\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}{2}\right] b(t)U_1(t)dt +$$

$$+\int_0^{+\infty} b(t)d(t)U_1(t)dt - \int_0^{+\infty}\frac{d}{dt}[b(t)d'(t)]U_1(t)dt$$

avec $d(t)$ et $d'(t)$ de classe $L_{0,1,1}(R_+, \boldsymbol{R}^{l+1})$,

$$b[\partial_1, \partial_2] = [\partial_1, \partial_2]\int_0^{+\infty} b(t)(a_1 r_1 e^{tr_1} + b_1 r_2 e^{tr_2})U_1(t)dt +$$

$$+\partial_2\int_0^{+\infty}(a_2 r_1 e^{tr_1} + b_2 r_2 e^{tr_2})b(t)U_1(t)dt + \int_0^{+\infty} b(t)d''(t)U_1(t)dt -$$

$$-\int_0^{+\infty}\frac{d}{dt}[b(t)d'''(t)]U_1(t)dt - a_2 r_1 - b_2 r_2$$

avec $d''(t)$ et $d'''(t) \in L_{0,1,1}(R_+, \boldsymbol{R}^{l+1})$.

Donc dans $(I+b)(\partial_2\partial_1 + r + R_1 + R_2)$ les opérateurs intégro-pseudo-différentiels où intervient l'expression $[\partial_1, \partial_2]$ ont pour somme:

$$(10)\qquad \tilde{b} = [\partial_1, \partial_2]s_1' + [\partial_2, \partial_1]\int_0^{+\infty}\frac{2\exp\left(\frac{\beta t}{2}\right)}{\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}\left(\sin\frac{t\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}{2}\right) b(t)U_1(t)dt s_1 +$$

$$+[\partial_1, \partial_2]\int_0^{+\infty} b(t)(a_1 r_1 e^{tr_1} + b_1 r_2 e^{tr_2})U_1(t)dt s_1' +$$

$$+[\partial_1, \partial_2]\int_0^{+\infty}\frac{d}{dt}\left[b(t)\frac{2\exp\left(\frac{\beta t}{2}\right)}{\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}\left(\sin\frac{t\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}{2}\right)\right]U_1(t)dt.$$

Nous allons construire b et $\bar{b}$ tels que $b(t)$ et $\bar{b}(t)\in C^\infty(R_0^+, L_{0,0}(\boldsymbol{R}^{l+1}))$ vérifient:

$$\sigma_1(\tilde{b})(t,x,\xi)|_{[0,\frac{2\Pi}{\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}[\times X^0\times\Xi'}\equiv 0.$$

Alors, puisque $\gamma_{X X^0}U_1(t)=0$ si $t>T_+^0-T_-^0$ (cf. [2] et [6]), on peut écrire dans X:

$$(I+b)(\partial_2\partial_1+r+R_1+R_2)=\partial_2\partial_1(I+\bar{b})+\partial_2\sigma_3+s_3+S_3$$

avec $\sigma_3\in L_{0,1,1}(U_1, \boldsymbol{R}^{l+1})$, $s_3\in L_{0,1}(\boldsymbol{R}^{l+1})$, $S_3\in L_{0,1,1}(U_1, \boldsymbol{R}^{l+1})$; et par suite dans X:

$$(I+b)(\partial_2\partial_1+r+R_1+R_2)=(\partial_2\partial_1+\partial_2\sigma''+s''+S'')(I+\bar{b})$$

avec $\sigma''=\sigma_3(I+\bar{b})^{-1}$, $s''+S''=(s_3+S_3)(I+\bar{b})^{-1}$. La proposition 3 est démontrée.

Lemme 3. *Il existe $b(t)$ et $\bar{b}(t)$ dans $C^\infty(R_0^+, L_{0,0}(\boldsymbol{R}^{l+1}))$ vérifiant $\sigma_1(\tilde{b})(t,x,\xi)=0$ où $\tilde{b}$ est défini dans (10) et $t\in\left[0, \frac{2\Pi}{\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}\right[$*

Preuve. $\sigma_1(\tilde{b})(t,x,\xi)=0$ s'écrit:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[b_0(t)\frac{2\exp\left(\frac{\beta t}{2}\right)}{\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}\sin\frac{t\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}{2}\right]=$$

$$=-s_1'(t)+\int_0^t b_0(\theta)\frac{2\exp\left(\frac{\beta\theta}{2}\right)}{\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}\sin\frac{\theta\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}{2}((s_1(t-\theta))_{U_1}(\theta))_1 d\theta-$$

$$-\int_0^t b_0(\theta)(a_1r_1e^{\theta r_1}+b_2r_2e^{\theta r_2})((s_1'(t-\theta))_{U_1}(\theta))_1 d\theta$$

où $b_0(t)$ est le symbole principal de $b(t)$ et $((s_1(t-\theta))_{U_1}(\theta))_1$, $((s_1'(t-\theta))_{U_1}(\theta))_1$ désignent les symboles principaux respectivement de $(s_1(t-\theta))_{U_1}(\theta)$ et de $(s_1'(t-\theta))_{U_1}(\theta)$. Montrons que cette équation est résoluble en b_0. On a:

$$s_1'(t)=\alpha^2\beta+\Gamma^{-1}(\alpha)\Gamma^{-1}(q-\alpha)\int_0^1\zeta^{\alpha+1}(1-\zeta)^{q-\alpha-1}\int_0^1(1-\rho)\times$$

$$\times\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{q+1}t^{q+1}\Big(\beta(-a_1r_1e^{t\zeta\rho r_1}-b_1r_2e^{t\zeta\rho r_2})+\gamma(a_1(1-e^{t\zeta\rho r_1})+b_1(1-e^{t\zeta\rho_2}))\Big)+\right.$$

$$+\left(\frac{d}{dt}\right)^q t^{q+1}\Big(\alpha(\beta^2+\gamma)(a_1r_1e^{t\zeta\rho r_1}+b_1r_2e^{t\zeta\rho r_2})+\alpha\beta\gamma(a_1(e^{t\zeta\rho r_1}-1)+$$

$$\left.+b_1(e^{t\zeta\rho r_2}-1))\Big)\right]d\rho d\zeta$$

et

$$s_1(t)=-\alpha^2\gamma+\Gamma^{-1}(\alpha)\Gamma^{-1}(q-\alpha)\int_0^1\zeta^{\alpha+1}(1-\zeta)^{q-\alpha-1}\left[\int_0^1(1-\rho)\times\right.$$

$$\times\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{q+1}t^{q+1}(\beta(a_2r_1e^{t\zeta\rho r_1}+b_2r_2e^{t\zeta\rho r_2})+\gamma(1+a_2(e^{t\zeta\rho r_1}-1)+b_2(e^{t\zeta\rho r_2}-1)))+\right.$$

$$+\left(\frac{d}{dt}\right)^q t^{q+1}(\alpha(\beta^2+\gamma)(-\alpha_2 r_1 e^{t\zeta\rho r_1}-b_2 r_2 e^{t\zeta\rho r_2})-\alpha\beta\gamma(1+a_2(e^{t\zeta\rho r_1}-1)+$$

$$+b_2(e^{t\zeta\rho r_2}-1))\Big]d\rho\Big]d\zeta.$$

On a:

$$a_1 r_1 e^{\theta r_1}+b_1 r_2 e^{\theta r_2}=e^{\frac{\beta\theta}{2}}\left\{\cos\frac{\theta\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}{2}+\frac{\beta}{\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}\sin\frac{\theta\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}{2}\right\},$$

$$a_1(e^{tr_1}-1)+b_1(e^{tr_2}-1)=2\frac{\exp\left(\frac{\beta t}{2}\right)}{\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}\sin\frac{t\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}{2},$$

$$a_2(e^{tr_1}-1)+b_2(e^{tr_2}-1)=\exp\left(\frac{\beta t}{2}\right)\left[\cos\frac{t\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}{2}-\exp\left(-\frac{\beta t}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\beta}{\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}\sin\frac{t\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}{2}\right],$$

$$a_1 r_1 e^{\theta r_1}+b_2 r_2{}^{\theta r_2}=\frac{2\gamma\exp\left(\frac{\beta\theta}{2}\right)}{\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}\sin\frac{\theta\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}{2}.$$

D'où:

$$s_1'(t)=\alpha^2\beta+\Gamma^{-1}(\alpha)\Gamma^{-1}(q-\alpha)\int_0^1\zeta^{\alpha+1}(1-\zeta)^{q-\alpha-1}\times$$

$$\times\left[\int_0^1(1-\rho)\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{q+1}t^{q+1}\left(-\beta\exp\left(\frac{\beta t\zeta\rho}{2}\right)\left\{\cos\frac{t\zeta\rho\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}{2}+\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\beta}{\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}\sin\frac{t\zeta\rho\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}{2}\right\}-\frac{2\gamma\exp\left(\frac{\beta t\zeta\rho}{2}\right)}{\sqrt{-4\gamma\beta^2}}\sin\frac{t\zeta\rho\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}{2}\right)+$$

$$+\left(\frac{d}{dt}\right)^q t^{q+1}\left(\alpha(\beta^2+\gamma)\exp\left(\frac{\beta t\zeta\rho}{2}\right)\left\{\cos\frac{t\zeta\rho\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}{2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.+\frac{\beta}{\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}\sin\frac{t\zeta\rho\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}{2}\right\}+\frac{2\alpha\beta\gamma\exp\left(\frac{\beta t\zeta\rho}{2}\right)}{\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}\sin\frac{t\zeta\rho\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}{2}\right)\right]d\rho\right]d\zeta,$$

$$s_1(t)=-\alpha^2\gamma+\Gamma^{-1}(\alpha)\Gamma^{-1}(q-\alpha)\int_0^1\zeta^{\alpha+1}(1-\zeta)^{q-\alpha-1}\left[\int_0^1(1-\rho)\times\right.$$

$$\times\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{q+1}t^{q+1}\left(\frac{2\beta\gamma\exp\left(\frac{\beta t\zeta\rho}{2}\right)}{\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}\sin\frac{t\zeta\rho\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}{2}+\right.\right.$$

$$\left.+\gamma\exp\left(\frac{\beta t\zeta\rho}{2}\right)\left\{\cos\frac{t\zeta\rho\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}{2}-\frac{\beta}{\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}\sin\frac{t\zeta\rho\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}{2}\right\}\right)+$$

$$+\left(\frac{d}{dt}\right)^q t^{q+1}\left(-\frac{2\alpha\gamma(\beta^2+\gamma)\exp\left(\frac{\beta t\zeta\rho}{2}\right)}{\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}\sin\frac{t\zeta\rho\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}{2}-\right.$$

$$\left.-\alpha\beta\gamma\exp\left(\frac{\beta t\zeta\rho}{2}\right)\left\{\cos\frac{t\zeta\rho\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}{2}-\frac{\beta}{\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}\sin\frac{t\zeta\rho\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}{2}\right\}\right)\Bigg]d\rho\Bigg]d\zeta.$$

L'équation $\sigma_1(\tilde{b})(t, x, \xi)=0$ se ramène à une équation intégrale d'inconnue $b_0(t)$ du type:

$$b_0(t)\frac{2\exp\left(\frac{\beta t}{2}\right)}{\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}\sin\frac{t\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}{2}=\int_0^t f(\theta)\,d\theta+\int_0^t\int_0^\theta b_0(\tau)g(\theta,\tau)\,d\tau\,d\theta$$

où $f(\theta)=-s_1'(\theta)\Big($donc $f(0)=-\alpha^2\beta+\beta\Gamma^{-1}(\alpha)\Gamma^{-1}(q-\alpha)\int_0^1\zeta^{\alpha+1}(1-\zeta)^{q-\alpha-1}d\zeta\times$

$$\times\int_0^1(1-\rho)d\rho(q+1)!\ \text{i.e.}\ f(0)=\frac{\alpha\beta(1-\alpha)}{2}\Big),\ \text{et}$$

$$g(\theta,\tau)=\frac{2\exp\left(\frac{\beta t}{2}\right)}{\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}\sin\frac{\tau\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}{2}\,s_1(\theta-\tau)+$$

$$+\frac{\exp\left(\frac{\beta\tau}{2}\right)}{\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}\left(\sqrt{-4\gamma-\beta^2}\cos\frac{\tau\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}{2}+\beta\sin\frac{\tau\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}{2}\right)s_1'(\theta-\tau).$$

Comme $\left(\frac{1}{t}\right)\frac{2\exp\left(\frac{\beta t}{2}\right)}{\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}\sin\frac{t\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}{2}\neq 0$ pour tout $t\in\left]0,\frac{2\Pi}{\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}\right[$ et que $\lim_{t\to 0_+}\frac{1}{t}\sin\frac{t\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}{2}=\frac{\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}{2}\neq 0$, il est facile de montrer par la méthodedes approximations successives que cette équation a une solution unique $b_0(t)\in C^\infty\left(\left[0,\frac{2\Pi}{\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}\right[\right)$.

Remarque. Dans le cas où $\beta^2+4\gamma\geqslant 0$, on obtient la proposition suivante (analogue à la proposition 3):

Proposition 3′ ([1]). *Il existe b et $\tilde{b}\in L_{0,0,1}(U_1, \boldsymbol{R}^{l+1})$ de noyaux pseudo-différentiels ayant même symbole principal, $s''\in L_{0,1}(\boldsymbol{R}^{l+1})$, σ'' et $S''\in L_{0,1,1}(U_1, \boldsymbol{R}^{l+1})$ tels que*

(8′) $$(I+b)P'=(\partial_2\partial_1+\partial_2\sigma''+s''+S'')(I+\tilde{b})=P''(I+\tilde{b})$$

dans toute bande X de $\boldsymbol{R}^{l+1}$.

à l'aide du lemme 3′ suivant analogue au lemme 3

Lemme 3′ ([1] p. 266). *Il existe $b(t)$ et $\tilde{b}(t)$ dans $C^\infty(R_0^+, L_{0,0}(\boldsymbol{R}^{l+1}))$ vérifiant $\sigma_1(\tilde{b})(t, x, \xi)=0$ avec $\sigma_1(\tilde{b})(t, x, \xi)=0$ de la forme:*

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[b_\rho(t)\,\frac{2\exp\left(\frac{\beta t}{2}\right)}{\sqrt{\beta^2+4\gamma}}\,\mathrm{sh}\,\frac{t\sqrt{\beta^2+4\gamma}}{2}\right]=$$

$$=\delta_0(t)-\int_0^t b_0(\theta)\,\frac{2\exp\frac{\beta\theta}{2}}{\sqrt{\beta^2+4\gamma}}\,\mathrm{sh}\,\frac{\theta\sqrt{\beta^2+4\gamma}}{2}\,((\varepsilon(t-\theta))_{U_1}(\theta))_0 d\theta+$$

$$+\int_0^t b_0(\theta)\,e^{\frac{\beta\theta}{2}}\left(\mathrm{ch}\,\frac{\theta\sqrt{\beta^2+4\gamma}}{2}+\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2+4\gamma}}\mathrm{sh}\frac{\theta\sqrt{\beta^2+4\gamma}}{2}\right)((\delta(t-\theta))_{U_1}(\theta))_0 d\theta$$

où δ *et* $\varepsilon\in L_{0,0,1}(U_1,\, \boldsymbol{R}^{l+1})$ *ont un noyau de symbole indépendant de* x *et de* ξ, *de classe* $C^\infty(R_0^+)$ *lorsque* $\beta^2+4\gamma>0$, *et* $\sigma_1(\tilde{b}(t,\,x,\,\xi))=0$ *de la forme*:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[b_0(t)\;t\,\exp\left(\frac{\beta t}{2}\right)\right]=\gamma_1''(t)-\int_0^t b_0(\theta)\;\theta\,\exp\frac{\beta\theta}{2}\,((\beta'''(t-\theta))_{U_1}(\theta))_0 d\theta+$$

$$+\int_0^t b_0(\theta)\left(\exp\frac{\beta\theta}{2}\right)\left(1+\frac{\beta\theta}{2}\right)((\gamma''(t-\theta))_{U_1}(\theta))_0 d\theta$$

où β''' *et* $\gamma''\in L_{0,0,1}(U_1,\, \boldsymbol{R}^{l+1})$ *ont un noyau de symbole indépendant de* x *et de* ξ, *de classe* $C^\infty(R_0^+)$ *lorsque* $\beta^2+4\gamma=0$.

Troisième réduction de P.

Proposition 4. *Il existe* $\bar{b}'\in L_{0,0,1}(U_1,\, \boldsymbol{R}^{l+1})$, $\rho_1\in L_{0,0}(\boldsymbol{R}^{l+1})$, σ_1 *et* $S_1\in L_{0,0,1}(U_1,\, \boldsymbol{R}^{l+1})$ *tels que*

$$P''=\partial_2\partial_1+\partial_2\sigma''+s''+S''=(\partial_2\partial_1+\partial_2\sigma_1+\rho_1+S_1)(I+\bar{b}')$$

dans toute bande X *de largeur* $|X|<\dfrac{2\Pi}{\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}$ *lorsque* $\beta^2+4\gamma<0$.

Preuve. Rappelons que:

$$P''=(I+b)P'(I+\bar{b})^{-1}=\partial_2\partial_1+\partial_2\sigma''+s''+S'' \tag{8}$$

On pose:

$$b''=\partial_2\sigma''+s''+S'',\quad \bar{b}''=\partial_2\sigma_1+\rho_1+S_1\,.$$

On utilise alors les opérateurs ∇^μ ($\mu\in\boldsymbol{Z}$) définis dans le lemme suivant:

Lemme 5 ([2]). *Les opérateurs pseudo-différentiels* ∇^μ *définis par* $(\nabla^\mu u)(x)=$ $=(2\Pi)^{-\frac{l+1}{2}}\int_{R^{l+1}} e^{i<x,\xi>}(i\xi_0+|\xi'|+1)^\mu\hat{u}(\xi)d\xi$ *pour tout* $u\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^{l+1})$, *sont de classe* $L_{\mu,\mu}(\boldsymbol{R}^{l+1})$ ($\forall\mu\in\boldsymbol{Z}$) *et vérifient les relations*:

$$\nabla^0=\mathit{Identit\acute{e}},\quad \nabla^\mu\nabla^\nu=\nabla^{\mu+\nu}\quad(\forall\mu\in\boldsymbol{Z},\ \forall\nu\in\boldsymbol{Z}).$$

De plus

$$\nabla^\mu\in L'_{\mu,\mu}(R^{l+1}).\quad(\forall\mu\in\boldsymbol{N}).$$

On a donc:

$$b'' = \nabla^2 \nabla^{-2} b'' = \partial_2 \partial_1 \nabla^{-2} b'' + b'''$$

avec

$$b''' = \partial_2(\sigma'' - \partial_1 \nabla^{-2} \partial_2 \sigma'') + (\nabla^2 - \partial_2 \partial_1) \nabla^{-2}(s'' + S'')$$

Or:

$$\sigma'' - \partial_1 \nabla^{-2} \partial_2 \sigma'' = (\nabla^2 - \partial_1 \nabla^{-2} \partial_2 \nabla^2) \nabla^{-2} \sigma'' =$$
$$= (\nabla^2 - \partial_1 \partial_2 \nabla^{-2} \nabla^2 + \partial_1 [\partial_2, \nabla^{-2}] \nabla^2) \nabla^{-2} \sigma'' = (\nabla^2 - \partial_1 \partial_2) \nabla^{-2} \sigma'' + \partial_1 [\partial_2, \nabla^{-2}] \sigma''$$

et

$$\nabla^2 - \partial_1 \partial_2 \in L_{2,1}(\boldsymbol{R}^{l+1}),\ [\partial_2, \nabla^{-2}] = [\Lambda_2, \nabla^{-2}] \in L_{-2,-2}(\boldsymbol{R}^{l+1}).$$

D'où

$$(\nabla^2 - \partial_1 \partial_2) \nabla^{-2} \sigma'' \in L_{0,0,1}(U_1, \boldsymbol{R}^{l+1}),$$
$$\partial_1 [\partial_2, \nabla^{-2}] \sigma'' \in L_{-1,0,1}(U_1, \boldsymbol{R}^{l+1})$$

et par suite

$$\bar{\sigma}'' = \sigma'' - \partial_1 \nabla^{-2} \partial_2 \sigma'' \in L_{0,0,1}(U_1, \boldsymbol{R}^{l+1}),$$
$$\bar{s}'' = (\nabla^2 - \partial_2 \partial_1) \nabla^{-2} s'' \in L_{0,0}(\boldsymbol{R}^{l+1}),$$
$$\bar{S}'' = (\nabla^2 - \partial_2 \partial_1) \nabla^{-1} S'' \in L_{0,0,1}(U_1, \boldsymbol{R}^{l+1}).$$

On pose alors $\bar{b}' = \nabla^{-2} b'' \in L_{-1,0,1}(U_1, \boldsymbol{R}^{l+1})$ et on résout l'équation d' inconnue $\bar{b}''$:

$$\partial_2 \partial_2 + b'' = (\partial_2 \partial_1 + \bar{b}'')(I + \bar{b}')$$

équivalente à:

$$b'' = \bar{b}''(I + \bar{b}') + \partial_2 \partial_1 \bar{b}'$$

c'est-à-dire:

$$b'' = \bar{b}''(I + \bar{b}') + \partial_2 \partial_1 \nabla^{-2} b''.$$

D'où la solution:

$$\bar{b}'' = (b'' - \partial_2 \partial_1 \nabla^{-2} b'')(I + \bar{b}')^{-1} = b'''(I + \bar{b}')^{-1} = b'''(I + \bar{c}').$$

La proposition 4 est alors démontrée en prenant:

$$\sigma_1 = \bar{\sigma}''(I + \bar{b}')^{-1}, \quad \rho_1 = \bar{s}'',$$
$$S_1 = \bar{s}'' \bar{c}' + \bar{S}''(I + \bar{b}')^{-1}.$$

Remarque. On a de même:

Proposition 4′ ([1] p. 267). *Lorsque* $\beta^2+4\gamma\geqslant 0$, *il existe* $\bar{b}'\in L_{0,0,1}(U_1, \boldsymbol{R}^{l+1})$, $\rho_1\in L_{0,0}(\boldsymbol{R}^{l+1})$, σ_1 *et* $S_1\in L_{0,0,1}(U_1, \boldsymbol{R}^{l+1})$ *tels que*

$$P''=\partial_2\partial_1+\partial_2\sigma''+s''+S''=(\partial_2\partial_1+\partial_2\sigma_1+\rho_1+S_1)(I+\bar{b}')$$

dans toute bande X *de* $\boldsymbol{R}^{l+1}$.

Construction des inverses de Volterra.

Proposition 5. *Sous les conditions* (C_1) *et* (C_2) *pour chaque bande* X *de voisinage* X^0 *de largeur* $|X^0|=T_+^0-T_-^0<\dfrac{2\Pi}{\sqrt{-4\gamma-\beta^2}}$ *lorsque* $\beta^2+4\gamma<0$, *et pour chaque bande de* X *de largeur quelconque lorsque* $\beta^2+4\gamma\geqslant 0$, *l'opérateur* P *admet des inverses à droite et à gauche de classe* $\mathscr{L}^0_{[\rho],[\rho]-1}(X)$ *avec* $\rho=\alpha$ *pour* $\alpha\geqslant 0$ *(resp.* $\rho=1-\alpha$ *pour* $\alpha\leqslant 1$*) dans* X.

Preuve. En effet d'après les propositions 2, 3 et 4 et 3′, 4′, on a lorsque $\alpha>0$, $(I+b)\partial_1^{-\alpha}P\partial_1^{\alpha}(I+\bar{b}_1)^{-1}=\partial_2\partial_1+\partial_2\sigma_1+\rho_1+S_1$ dans X avec σ_1 et $S_1\in L_{0,0,1}(U_1, \boldsymbol{R}^{l+1})$, $\rho_1\in L_{0,0}(\boldsymbol{R}^{l+1})$ et $\bar{b}_1=\bar{b}+\bar{b}'+\bar{b}'\bar{b}$.

Donc, puisque $\mathscr{R}_i=\int_0^{+\infty}U_i(t)dt$ est un inverse bilatère dans $\boldsymbol{R}^{l+1}$ de ∂_i $(i=1, 2)$,

$$\mathscr{R}'_d=\mathscr{R}_1(I+\sigma_1\mathscr{R}_1)^{-1}\mathscr{R}_2(I+(\rho_1+S_1)\mathscr{R}_1(I+\sigma_1\mathscr{R}_1)^{-1}\mathscr{R}_2)^{-1}$$

est un inverse à droite de $(I+b)\partial_1^{-\alpha}P\partial_1^{\alpha}(I+\bar{b}_1)^{-1}$ et $\mathscr{R}_d=\partial_1^{\alpha}(I+\bar{b}_1)^{-1}\mathscr{R}'_d(I+b)\partial_1^{-\alpha}$ est un inverse à droite de P dans X.

De même $\mathscr{R}'_g=[I+((I+\mathscr{R}_1\sigma_1)^{-1}\mathscr{R}_1\mathscr{R}_2)(\rho_1+S_1)^{-1}]\times(I+\mathscr{R}_1\sigma_1)^{-1}\mathscr{R}_1\mathscr{R}_2$ est un inverse à gauche de $(I+b)\partial_1^{-\alpha}P\partial_1^{\alpha}(I+\bar{b}_1)^{-1}$. Donc $\mathscr{R}_g=\partial_1^{\alpha}(I+\bar{b}_1)^{-1}\mathscr{R}'_g(I+b)\partial_1^{-\alpha}$ est un inverse à gauche de P dans X. La classe de $\mathscr{R}_g$ et $\mathscr{R}_d$ se calcule en remarquant que:

$$\mathscr{R}_d=\partial_1^{\alpha-1}(I+\partial_1\bar{b}_1\partial_1^{-1})\partial_1\mathscr{R}'_d(I+b)\partial_1^{-\alpha}.$$

Dans le cas $\alpha\leqslant 1$, on a une démonstration analogue.

2. Cas des systèmes de deux équations du premier ordre.

On procède comme dans [1] p. 268 en utilisant le premier paragraphe ci-avant.

Université des Sciences et Techniques de Lille,
ERA au CNRS 070901,
59655-Ville Neuve-D'Ascq (France)

Bibliographie

[1] D. Gourdin, Problème de Cauchy faiblement hyperbolique, Bull. Sc. Math., 2ème série, **106** (1982), 259–272.

[2] V. Ia. Ivrii, Sufficient conditions for regular and completely regular hyperbolicity, Trans.

Moscow Math. Soc, Issue **1** (1978), 1–65.

[3] J. Vaillant, Données de Cauchy portées par une caractéristique double dans le cas d'un système linéaire d'équations aux dérivées partielles; rôle des bicaractéristiques, J. Maths. Pures et Appl., **47** (1968), 1–40.

[4] D. Gourdin, Problème de Cauchy non caractéristique pour les systèmes hyperboliques à caractéristiques de multiplicité variable. Domaine de dépendance, Commun. in partial diff. equations, **4** (1979), 447–507.

[5] R. Lascar, Paramétrices microlocales pour un problème de Cauchy à multiplicité variable, C. R. Acad. Sc. Paris, **287**, Série A, 523–525.

[6] D. Gourdin, Problème de Cauchy pour des systèmes hyperboliques à racines caractéristiques de multiplicité variable non nécessairement involutives, Exposé du 14 janvier 1981—Séminaire sur les équations aux dérivées partielles hyperboliques et holomorphes (1980–81)— J. Vaillant (Paris VI).

[7] D. Gourdin et M. Mechab, Systèmes faiblement hyperboliques à caractéristiques de multiplicité variable, Note aux C. R. Acad. Sc. Paris. t. 298, Série I, n°18, 1984, 457–460.

[8] L. Hörmander, Journal d'Analyse Mathématique, **32** (1977), 118–196.

[9] J. Leray et Y. Ohya, Systèmes linéaires hyperboliques non stricts, Colloque de Liège, 1964, C.N.R.B., p. 105–144.

[10] R. Lascar, Propagation des singularités des solutions d'équations pseudo-différetielles à caractéristiques de multiplicités variables, Lecture Notes in Mathematics 856 (1981).