J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
31-2 (1991) 377-417

Distributions sphériques invariantes sur les espaces symétriques semi-simples G_c/G

Par

Shigeru SANO

Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe et soit H le sous-groupe des points fixes d'un automorphisme involutif σ de G. On étudie la méthode oribtale sur l'espace symétrique G/H. Le travail [25] est consacré à l'étude locale. On discute la théorie grobale. Nous étudions des distributions sphériques invariantes (=DSI). On définit une application φ de G dans G par $\varphi(g)=g\sigma(g)^{-1}$ $(g\in G)$, et on appelle X son image. Alors G/H et X sont isomorphes comme G-espaces symétriques. On démontre la formule d'intégration de Weyl pour la décomposition orbitale de X sous l'action de H (Proposition 2.1). Les mesures sur G/H, H et X sont normalisées à l'aide de l'application linéaire bijective γ définie dans la définition 2.4 [25]. Soit $D_l(x)$ le coefficient du polynôme caractéristique sur qui détermine les éléments de Weyl. Le jacobien est donné par $|D_l(x)|^{1/2}$.

Soit X' l'ensemble des éléments réguliers de X. La restriction de DSI sur X à X' est une fonction analytique. Il nous semble que cette fonction soit expremée par $D_l(x)$. Mais pour l'espace symétrique général, c'est un problème difficile. Nous étudions, ainsi, les DSI sur l'espace $G\times G/G$ qui désigne un espace symétrique soit de type G, soit de type G_c/G. Le groupe G et l'espace symétrique G_c/G sont c-duaux. L'espace $G\times G/G$ peut être considéré comme une forme réelle de G_c (au sens de [25]). Pour un opérateur différentiel invariant D sur $X\cong G\times G/G$, on détermine la partie radiale de D en utilisant des caractères de représentations de dimension finie de G (Théorème 7.1). La fonction analytique exprimant DSI sur X' sera ensuite déterminée (Proposition 7.2).

Les DSI sur G/H sont-elles localement intégrables? On discutera le problème pour $G\times G/G$ en clarifiant les raisons pour lesquelles les propositions ne sont pas étandues sur l'espaces symétrique générale G/H.

Réciproquement, étant donnée une fonction analytique invariante Φ sur X' on donne une condition nécessaire et suffisante pour que Φ définisse une distribution sphérique invariante sur X (Théorème 11.1).

Les résultats ci-dessus sont déjà annoncés dans [24]. Dans la publication [20], nous avons aussi écrit les démonstrations. Etant donné que la circulation de cette dernière est limitée, nous pensons, il est utile de publier à nouveau le présent article contenant les démonstrations complètes et des exemples.

Reçu le Décembre 30, 1988; Révisé le Mai 9, 1990

§ 1. Décompositions orbitaux

Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe de centre fini et soit σ un automorphisme involutif de G. Soit G_σ l'ensemble des éléments de G qui sont fixés par σ. Si H est un sous-groupe de G tel que $(G_\sigma)_0 \subset H \subset G_\sigma$, il existe un groupe de Lie $\tilde{G}$ qui est un revêtement d'ordre fini de G tel que $\tilde{G}/\tilde{G}_\sigma \cong G/H$ d'après [29]. On peut donc supposer que $G_\sigma = H$. Définisons une application φ de G dans G par

$$\varphi(g) = g\sigma(g)^{-1} \qquad (g \in G),$$

et posons

$$X = \varphi(G).$$

Soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ l'algèbre de Lie symétrique correspondant à G/H. Pour chaque élément $a \in G$, on définit l'application différentiable l_a de G dans G par $l_a(b) = ab$ $(b \in G)$ et l'application différentiable A_a de X dans X par $A_a(x) = ax\sigma(a)^{-1}$. On a $\varphi(l_a(b)) = A_a(\varphi(b))$. Ainsi G/G_σ et X sont isomorphes comme G-espaces symétriques.

Dans ce paragraphe nous rappelons certains résultats de [19]. Soit $\mathfrak{a}$ un sous-espace de Cartan de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

Définiton 1.1. On appelle sous-espace de Cartan de X associé à $\mathfrak{a}$ le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans X. On le note $A = Z_X(\mathfrak{a})$.

Lemma 1.1. 1) *Si G est contenu dans un groupe complexe G_c d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_c$ et muni d'une involution prolongeant σ alors:*

$$A = \exp \mathfrak{a}_c \cap X.$$

2) *A admet un nombre fini de composantes connexes, chacune d'elle étant de la forme $k_j \exp \mathfrak{a}$ où $k_j \in \varphi(K) \cap A$ (K est le sous-groupe des points fixes d'une involution de Cartan θ de G commutant à σ). De plus* $\mathrm{Ad}(k_j)^2 = \mathrm{Id}$ *où* Id *est l'identité de* $\mathfrak{g}$.

3) *A centralise aussi le centralisateur $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{h}$.*

Démonstration. La structure des composantes connexes d'un sous-espace de Cartan de X est donnée dans [29]. Comme $\mathrm{Ad}(G)$ est contenu dans le groupe complexe $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}_c)$, on a, pour $a \in A$, $\mathrm{Ad}(a) = e^{\mathrm{ad}(H_0)}$ avec $H_0 \in \mathfrak{a}_c$. On en déduit 3). D'autre part on peut choisir k_j de sorte que $\mathrm{Ad}(k_j)$ appartienne à $\exp(i\,\mathrm{ad}\,\mathfrak{a})$. Comme $\mathrm{Ad}(k_j) = e^{i\,\mathrm{ad}\,H_0}$ $(H_0 \in \mathfrak{a})$ stabilise $\mathfrak{g}$, on a $e^{2i\,\mathrm{ad}\,H_0} = \mathrm{Id}$ et donc $\mathrm{Ad}(k_j)^2 = \mathrm{Id}$. C.Q.F.D.

Considérons pour $x \in X$ le polynôme

$$\det((1+t)\,\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}(x)) = \sum_{j=0}^{\dim \mathfrak{g}} t^j D_j(x).$$

Si l est la dimension du centralisateur dans $\mathfrak{g}$ d'un sous-espace de Cartan de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ alors: pour $j = 0, 1, \cdots, l-1$, D_j est identiquement nul et D_l n'est pas identiquement nul sur X.

Définition 1.2. On dit qu'un élément x de X est régulier (on écrit $x \in X'$) (resp.

singulier) si $D_l(x)\neq 0$ (resp. $D_l(x)=0$).

Soit A un sous-espace de Cartan de X associé au sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}$ de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Comme $\mathrm{Ad}(A)$ est contenu dans $e^{\mathrm{ad}\,\mathfrak{a}_c}$, l'operateur $\mathrm{Ad}(a)$ $(a\in A)$ est scalaire sur tout espace radiciel $\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}\,;\alpha)$ où α est une racine de la paire $(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{a}_c)$.

Définition 1.3. On appelle racine globale et on note $\xi_\alpha(a)$ le nombre complexe défini par:

$$\mathrm{Ad}(a)X=\xi_\alpha(a)X \qquad \text{pour } X\in\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}\,;\alpha).$$

On a en particulier pour $H\in\mathfrak{a}$:

$$\xi_\alpha(\exp H)=e^{\alpha(H)}.$$

Remarquons que l'on a pour $a\in A$:

$\xi_{\alpha^\tau}(a)=\overline{\xi_\alpha(a)}$ on τ est la conjugaison de $\mathfrak{g}_c$ relativement à $\mathfrak{g}$. En effet comme $\mathrm{Ad}(k_j)^2=\mathrm{Id}$, on a $\xi_\alpha(k_j)=\pm 1$ et il est facile de vérifier le résultat sur $\exp\mathfrak{a}$. On peut alors montrer que pour $a\in A$:

$$D_l(a)=\sum_{\alpha\in\Sigma(\mathfrak{a})}(1-\xi_{-\alpha}(a))^{m_\alpha}, \qquad m_\alpha=\dim_c\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}\,;\alpha).$$

Proposition 1.1. *Soit* $(\mathfrak{a}_1, \cdots, \mathfrak{a}_n)$ *une famille maximale de sous-espaces de Cartan de* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *non conjugués deux à deux. Posons* $A_j=Z_X(\mathfrak{a}_j)$. *On a alors*

$$X'=\bigcup_{j=1}\bigcup_{h\in H} hA'_jh^{-1} \qquad \text{où } A'_j=A_j\cap X'.$$

On appelle cette décomposition la décomposition orbitale de X. Si $\mathfrak{a}$ est un sous-espace de Cartan de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ et $A=Z_X(\mathfrak{a})$, on pose $W(A)=N_H(A)/Z_H(A)$. C'est un groupe fini et on a

Proposition 1.2. *L'application de* $H/Z_H(A)\times A'$ *dans* $X'=\bigcup_{h\in H} hA'h^{-1}$ *qui à* $(\dot h, a)$ *associe* hah^{-1} *est régulière. C'est un revêtement à* $|W(A)|$*-feuillets.*

§ 2. Formule d'intégration de Weyl

Soit $\mathfrak{a}$ un sous-espace de Cartan de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, $A=Z_X(\mathfrak{a})$ le sous-espace de Cartan de X correspondant et $X_A=\bigcup_{h\in H} hAh^{-1}$ l'orbite dans X de A sous l'action de H. Avec une normalisation convenable de la mesure dx sur X invariante par G, de la mesure da sur A invariante par $\exp\mathfrak{a}$ et de la mesure $d\dot h$ sur $H/Z_H(A)$ invariante par H on a

Proposition 2.1. *Pour toute fonction f continue à support compact sur* X_A

$$\int_{X_A} f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{|W(A)|}\int_A |D_l(a)|^{1/2}\int_{H/Z_H(A)} f(hah^{-1})\mathrm{d}\dot h\mathrm{d}a$$

Démonstration. On considère l'application η de $H/Z_H(A)\times A'$ dans X'_A qui à $(\dot h, a)$ associe hah^{-1}. Après avoir choisi une base dans les espaces tangents, on va montrer que la valeur absolue du déterminant de la différentielle de η au point $(\dot h, a)$ est égale à $|D_l(a)|^{1/2}$. On en déduira le résultat puisque η est un revêtement fini de $\boldsymbol{X}'_A$ qui est un ouvert dense de $\boldsymbol{X}_A$.

L'espace tangent en $\dot{h}$ à $H/Z_H(A)$ s'identifie à $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{n}_c$ où $\mathfrak{n}_c=\bigoplus_{\alpha\in\Sigma(\mathfrak{a})}\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}, \alpha)$. En effet $Z_H(A)$ a pour algèbre de Lie $\mathfrak{m}=Z_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{n}_c$ est un supplémentaire de $\mathfrak{m}$ dans $\mathfrak{h}$ et l'application de $\mathfrak{h}$ dans l'espace tangent en $\dot{h}$ à $H/Z_H(A)$ qui à X associe $\dot{X}$ défini par

$$\dot{X}f=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}f((\dot{\widehat{h\exp tX}})) \qquad \text{pour } f\in C^\infty(H/Z_H(A))$$

est une surjection qui admet pour noyau $\mathfrak{m}$.

L'espace tangent en $x=g\sigma(g)^{-1}$ à $\boldsymbol{X}$, que l'on note $T_x(\boldsymbol{X})$, s'identifie à $\mathfrak{q}$. En effet l'application de $\mathfrak{g}$ dans $T_x(\boldsymbol{X})$ qui à X associe X^* défini par

$$X^*f=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}f\Big(g\exp\frac{tX}{2}\exp\Big(\frac{t\sigma(X)}{2}\Big)\sigma(g)^{-1}\Big) \qquad \text{pour } f\in C^\infty(\boldsymbol{X})$$

est une surjection qui admet pour noyau $\mathfrak{h}$.

On choisit une base $\{T_1, \cdots, T_n\}$ de $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{n}_c$ du type de celle utilisée à §2 [25] pour définir l'isomorphisme γ de $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{n}_c$ dans $\mathfrak{q}\cap\mathfrak{n}_c$ c'est-à-dire: pour tout élément j de $\{1, \cdots, n\}$, il existe une racine $\alpha\in\Sigma^+(\mathfrak{a})$ telle que $T_j=X_j+\sigma(X_j)$ où $X_j\in\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}; \alpha)$ si α est réelle ou imaginaire et $X_j\in\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}; \alpha)\oplus\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}; \alpha^\tau)$ si α est complexe. On prend alors $\{\gamma(T_1), \cdots, \gamma(T_n)\}$ pour base de $\mathfrak{n}_c\cap\mathfrak{q}$ où

$$\gamma(T_j)=\begin{cases} X_j-\sigma(X_j) & \text{si } \alpha \text{ est réelle ou complexe,}\\ i(X_j-\sigma(X_j)) & \text{si } \alpha \text{ est imaginaire.}\end{cases}$$

La différentielle de η s'identifie à une application linéaire de $\mathfrak{a}\oplus(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{n}_c)$ dans $\mathfrak{a}\oplus(\mathfrak{q}\cap\mathfrak{n}_c)$. On va calculer son déterminant dans cette base.

Soit a un élément de A et b un élément de G tel que $b\sigma(b)^{-1}=a$. On peut montrer que la différentielle de η en $(\dot{h}, a)$ est l'application $d\eta_{(\dot{h},a)}$:

$$\begin{array}{ccc}(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{n}_c)\times\mathfrak{a} & \longrightarrow & T_a(\boldsymbol{X})\\ \Cup & & \Cup\\ (X, Y) & \longrightarrow & (\mathrm{Ad}(b^{-1})Y+2\,\mathrm{Ad}(b^{-1})X)^*\end{array}$$

Or $\mathrm{Ad}(b^{-1})Y$ appartient à $\mathfrak{q}$ car $\mathrm{Ad}(a)Y=Y$ implique que $\mathrm{Ad}(b^{-1})Y=\mathrm{Ad}(\sigma(b)^{-1})Y$. En utilisant l'identification de $T_a(\boldsymbol{X})$ avec $\mathfrak{q}$ on peut écrire que

$$d\eta_{(\dot{h},a)}(X, Y)=\mathrm{Ad}(b^{-1})Y+(\mathrm{Ad}(b^{-1})-\mathrm{Ad}(\sigma(b^{-1})))X.$$

Considérons l'application Φ_1 de $\mathfrak{g}$ dans lui-même définie par

$$\begin{array}{rcl}\Phi_1: (\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{a})\oplus(\mathfrak{g}\cap\mathfrak{n}_c) & \longrightarrow & \mathfrak{g}\\ \Cup & & \Cup\\ (Y, X) & \longmapsto & \mathrm{Ad}(b^{-1})Y+(\mathrm{Ad}(b^{-1})-\mathrm{Ad}(\sigma(b^{-1})))X\\ & & =\mathrm{Ad}(b^{-1})\{Y+(\mathrm{Id}-\mathrm{Ad}(a)X)\}.\end{array}$$

Comme le déterminant de $\mathrm{Ad}(b^{-1})$ a pour valeur absolue 1 ($\mathfrak{g}$ semi-simple) on obtient en utilisant la définition de D_l:

$$|\det \Phi_1| = |D_l(a)|.$$

Nous voulons calculer le déterminant de la restriction Ψ_1 de Φ_1 à $\mathfrak{a}\oplus(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{n}_c)$ dans la base choisie ci-dessus.

Comme, en général, on ne peut pas choisir b dans A, on complexifie la situation. Soit H_c^* le sous-groupe de $G_c^*=\mathrm{Int}(\mathfrak{g}_c)$ des points fixes de σ (prolongés à $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}_c)$). Soit A_c^* le centralisateur de $\mathfrak{a}_c$ dans $\varphi(G_c^*)=\{g\sigma(g)^{-1}; g\in G_c^*\}$. On a alors (p. 407 [19])

$$A_c^*=\exp(\mathrm{ad}\,\mathfrak{a}_c).$$

Comme $\mathrm{Ad}(a)$ appartient à A_c^*, il existe un élément c^{-1} de A_c^* tel que:

$$\mathrm{Ad}(a)=c^{-1}\sigma(c).$$

On en déduit qu'il existe un élément h de H_c^* tel que:

$$\mathrm{Ad}(b)=c^{-1}h.$$

On note aussi Φ_1 et Ψ_1 les prolongements $\boldsymbol{C}$-linéaires de Φ_1 et Ψ_1. Comme h appartient à $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}_c)$ et stabilise $\mathfrak{h}_c$ et $\mathfrak{g}_c$, on a, si on pose $\tilde{\Phi}_1=h\Phi_1$ et $\tilde{\Psi}_1=h\Psi_1$

$$|\det \tilde{\Phi}_1| = |\det \Phi_1| = |D_l(a)|,$$

$$|\det \tilde{\Psi}_1| = |\det \Psi_1|.$$

Comme c appartient à $\tilde{A}_c$, $\tilde{\Phi}_1$ (resp. $\tilde{\Psi}_1$) centralise les éléments de $\mathfrak{a}_c\oplus\mathfrak{m}_c$ (resp. $\mathfrak{a}_c$). Si on pose $\Phi=\tilde{\Phi}_1|_{\mathfrak{n}_c}$ et $\Psi=\tilde{\Psi}_1|_{\mathfrak{n}_c\cap\mathfrak{h}_c}$, on obtient alors:

$$\Phi(X)=(c-\sigma(c))X \qquad \text{pour } X\in\mathfrak{n}_c,$$

$$|\det \Phi| = |D_l(a)|,$$

$$|\det \Psi| = |\det \Psi_1|.$$

La matrice de Φ dans la base $\{T_1, \cdots, T_n, \gamma(T_1), \cdots, \gamma(T_n)\}$ est de la forme:

$$\begin{array}{c|c|c|}
 & T_1, \cdots, T_n & \gamma(T_1), \cdots, \gamma(T_n) \\
\hline
T_1, \ldots, T_n & 0 & D \\
\hline
\gamma(T_1), \ldots, \gamma(T_n) & C & 0 \\
\hline
\end{array}$$

où C est la matrice de Ψ dans les base $\{T_1, \cdots, T_n]$ et $\{\gamma(T_1), \cdots, \gamma(T_n)\}$.

Montrons que C et D ont le même déterminant au signe près. On prolonge γ en une application $\boldsymbol{C}$-linéaire sur $\mathfrak{n}_c$ en posant $\gamma^2=\mathrm{Id}$ ce qui permet de définir aussi γ sur $\mathfrak{q}_c\cap\mathfrak{n}_c$.. On obtient alors pour $X\in\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}; \alpha)$:

$$\gamma(X)=\begin{cases} X & \text{si} \quad \alpha\in\Sigma^+ \text{ et } \alpha \text{ réelle ou complexe} \\ -X & \text{si} \ -\alpha\in\Sigma^+ \text{ et } \alpha \text{ réelle ou complexe} \\ -i\sigma X & \text{si} \quad \alpha\in\Sigma^+ \text{ et } \alpha \text{ imaginaire} \\ i\sigma X & \text{si} \ -\alpha\in\Sigma^+ \text{ et } \alpha \text{ imaginaire}. \end{cases}$$

On en déduit que pour $X\in\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}\,;\alpha)$:

$$\gamma\cdot\Phi\cdot\gamma(X)=\varepsilon\Phi(X) \quad \text{avec} \quad \varepsilon=\begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \text{ réelle ou complexe} \\ -1 & \text{si } \alpha \text{ imaginaire}. \end{cases}$$

En effet si X appartient a $\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}\,;\alpha)$, cX et $\sigma(c^{-1})X$ appartiennent aussi à $\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}\,;\alpha)$ car c centralise $\mathfrak{a}_c$. Or T_j appartient à $\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}\,;\alpha)+\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}\,;\alpha^\tau)+\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}\,;-\alpha)+\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}\,;-\alpha^\tau)$. Si on pose $\varepsilon_j=1$ dans le cas où α est réelle ou complexe et $\varepsilon_j=-1$ dans le case où α est imaginaire, on a

$$\Phi(\gamma(T_j))=\varepsilon_j\gamma^{-1}(\Phi(T_j)).$$

Les matrices C et D ont donc des colonnes égales ou de signes opposés. On en déduit que $|\det C|=|\det D|=|\det\Psi|$ d'où $|\det\Psi_1|^2=|\det\Psi|^2=|D_l(a)|$. C.Q.F.D.

§ 3. Opérateurs différentiels invariants sur G/H

Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe muni d'une involution σ, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ l'algèbre de Lie symétrique associée. Soit H_0 le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$, G_σ le sous-groupe des points fixes de σ dans G et H un sous-groupe fermé de G compris entre H_0 et G_σ. On note $\boldsymbol{D}(G/H)$ l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients complexes sur G/H invariants par G.

Definition 3.1. Soit H_1 un sous-groupe fermé de G. Une distribution Θ sur G/H est appelée distribution sphérique H_1-invariante si elle satisfait aux conditions suivantes:

(i) $\Theta(h\dot{g})=\Theta(\dot{g})$ pour tout $\dot{g}\in G/H$ et tout $h\in H_1$

(ii) Il existe un homomorphisme χ de $\boldsymbol{D}(G/H)$ dans $\boldsymbol{C}$ tel que pour tout $D\in \boldsymbol{D}(G/H)$, on ait

$$D\Theta=\chi(D)\Theta.$$

Si $H_1=H$, Θ s'appelle une distribution sphérique invariante (DSI) ou plus simplement une distribution sphérique. On notera $\mathscr{D}'_\chi(G/H)$ l'espace des distributions sphériques qui verifient (ii) pour le caractère infinitésimal χ de $\boldsymbol{D}(G/H)$.

Let but de ce chapitre étant de déterminer ces distributions, nous allons commencer par étudier $\boldsymbol{D}(G/H)$.

Soit θ une involution de Cartan de $\mathfrak{g}$ commutant avec σ et $\mathfrak{a}$ un sous-espace de Cartan de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ θ-stable. Nous allons, dans ce paragraphe, définir un isomorphisme γ de $\boldsymbol{D}(G/H)$ sur une sous-algèbre de $S(\mathfrak{a}_c)$ (algèbre symétrique du complexifié de $\mathfrak{a}$), analogue à l'isomorphisme de Harish-Chandra défini dans le cas riemannien ([9]).

Soit $U(\mathfrak{g}_c)$ l'algèbre enveloppante universelle de l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{g}_c$. On note $U(\mathfrak{g}_c)^H$ la sous-algèbre des éléments de $U(\mathfrak{g}_c)$ invariants par $\mathrm{Ad}(h)$ pour $h\in H$ et $U(\mathfrak{g}_c)^{\mathfrak{h}_c}$ la sous-algèbre des éléments de $U(\mathfrak{g}_c)$ invariants par $\mathrm{ad}\, X$ pour $X\in\mathfrak{h}_c$. Comme H_0 est connexe on a

$$U(\mathfrak{g}_c)^{H_0}=U(\mathfrak{g}_c)^{\mathfrak{h}}=U(\mathfrak{g}_c)^{\mathfrak{h}_c}.$$

L'algèbre $\boldsymbol{D}(G/H)$ s'identifie à l'algèbre des restrictions à $C^\infty(G/H)$ (fonctions de classe C^∞ sur G invariantes à droite par H) des opérateurs différentiels sur G invariants à grauche par G et à droite par H_0. Il existe donc un homomorphisme canonique η de $U(\mathfrak{g}_c)^H$ sur $\boldsymbol{D}(G/H)$. Il a pour noyau l'intersection de $U(\mathfrak{g}_c)^H$ avec $U(\mathfrak{g}_c)\mathfrak{h}_c$ qui est un idéal bilatéral, et induit donc un isomorphisme ([12] p. 395).

$$\boldsymbol{D}(G/H)\cong U(\mathfrak{g}_c)^H/(U(\mathfrak{g}_c)^H\cap U(\mathfrak{g}_c)\mathfrak{h}_c). \tag{3.1}$$

On choisit un ordre sur le système de racines $\Sigma(\mathfrak{a})$ de la paire $(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{a}_c)$ tel que si α est une racine positive complexe, alors α^τ est aussi une racine positive (τ désigne la conjugaison complexe de $\mathfrak{g}_c$ relativement à $\mathfrak{g}$). On note $\Sigma^+(\mathfrak{a})$ l'ensemble des racines positives et on pose

$$\mathfrak{n}_c^+=\bigoplus_{\alpha\in\Sigma^+(\mathfrak{a})}\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}\,;\alpha).$$

En utilisant le prolongement $\boldsymbol{C}$-linéaire de l'isomorphisme γ (Proposition 2.4 [25]) de $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{n}_c$ sur $\mathfrak{q}\cap\mathfrak{n}_c$ on montre que

$$\mathfrak{g}_c=\mathfrak{h}_c\oplus\mathfrak{a}_c\oplus\mathfrak{n}_c^+.$$

On pose pour $H\in\mathfrak{a}_c$

$$\rho(H)=\frac{1}{2}\,\mathrm{trace}\,(\mathrm{ad}\, H|_{\mathfrak{n}_c^+}).$$

D'autre part on appelle W_c le groupe de Weyl du système de racines $\Sigma(\mathfrak{a})$ et on désigne par $I(\mathfrak{a}_c)$ la sous-algèbre des éléments de $S(\mathfrak{a}_c)$ invariants par W_c.

Proposition 3.1. *Pour tout élément $D\in U(\mathfrak{g}_c)$, il existe un unique élément $D'_{\mathfrak{a}}$ appartenant à $S(\mathfrak{a}_c)$ tel que*

$$D-D'_{\mathfrak{a}}\in\mathfrak{h}_cU(\mathfrak{g}_c)+U(\mathfrak{g}_c)\mathfrak{n}_c^+.$$

On définit l'application $\gamma^{\mathfrak{a}}$ de $U(\mathfrak{g}_c)^{\mathfrak{h}_c}$ dans $S(\mathfrak{a}_c)$ par

$$\gamma^{\mathfrak{a}}(D)=D_{\mathfrak{a}}=e^{\rho}D'_{\mathfrak{a}}e^{-\rho}\qquad \textit{pour } D\in U(\mathfrak{g}_c)^{\mathfrak{h}_c}.$$

Alors $\gamma^{\mathfrak{a}}$ induit un isomorphisme de $\boldsymbol{D}(G/H_0)$ sur l'algèbre $I(\mathfrak{a}_c)$.

Démonstration. On déduit ce résultat du cas riemannien (Théorème 6.15 [11]) en utilisant la dualité. Soit $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}$ relative à θ. Alors $\mathfrak{a}^d=i(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{k})\oplus(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{p})$ est un sous-espace de Cartan de la paire symétrique $(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{k}^d)$ duale de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Or les complexifiés de $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}^d$, de $\mathfrak{k}^d$ et $\mathfrak{h}$, de $\mathfrak{g}^d$ et $\mathfrak{g}$ sont les mêmes. *Vu* l'isomorphisme indiqué en (3.1) et l'égalité $U(\mathfrak{g}_c)^{H_0}=U(\mathfrak{g}_c)^{\mathfrak{h}_c}$, la proposition se démontre uniquement au niveau des complexifications des algèbres de Lie et on peut donc appliquer le résultat identique pour $(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{k}^d)$, qui est une algèbre de Lie symétrique riemannienne. C. Q. F. D.

Remarque 1. Le groupe de Weyl W_c est le groupe Weyl du système de racines de la paire $(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$. Il contient (strictement en général) le groupe de Weyl $W(\mathfrak{a})= N_{H_0\cap K}(\mathfrak{a})/Z_{H_0\cap K}(\mathfrak{a})$ (K est le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$).

Remarque 2. La décomposition d'Iwasawa complexe ($\mathfrak{g}_c=\mathfrak{h}_c\oplus\mathfrak{a}_c\oplus\mathfrak{n}_c^+$) donnée ci-dessus n'est rien d'autre que la complexifiée de la décomposition d'Iwasawa de $\mathfrak{g}^d$:

$$\mathfrak{g}^d=\mathfrak{k}^d\oplus\mathfrak{a}^d\oplus(\mathfrak{n}_c^+\cap\mathfrak{g}^d).$$

Remarque 3. Dans le cas où tous les opérateurs différentiels invariants sur G/H proviennent du centre $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_c)=U(\mathfrak{g}_c)^{\mathfrak{g}_c}$ de l'algèbre enveloppante, c'est-à-dire dans le cas où $\eta(U(\mathfrak{g}_c)^{\mathfrak{g}_c}) =\eta(U(\mathfrak{g}_c)^{\mathfrak{h}_c})$, le résultat de la proposition 3.1 reste valable si on remplace H_0 par H ($H_0\subset H\subset G_\sigma$). En effet, dans ce cas, on a

$$U(\mathfrak{g}_c)^{\mathfrak{g}_c}=U(\mathfrak{g}_c)^G\subset U(\mathfrak{g}_c)^H\subset U(\mathfrak{g}_c)^{H_0}=U(\mathfrak{g}_c)^{\mathfrak{h}_c}$$

donc $\eta(U(\mathfrak{g}_c)^{\mathfrak{g}_c})$ est équal à $\eta(U(\mathfrak{g}_c)^H)$ qui d'autre part est égal à $\boldsymbol{D}(G/H)$.

Proposition 3.2. *Si $\mathfrak{g}$ est muni d'une structure complexe et si $\mathfrak{h}$ est une forme réelle de $\mathfrak{g}$ alors tous les opérateurs différentiels invariants sur G/H proviennent du centre de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g}_c)$.*

Cette propriété n'est pas vérifiée pour tout espace symétrique, même dans le cas riemannien ([12]).

Démonstration. Soit J la structure complexe de $\mathfrak{g}$. On a alors $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus J\mathfrak{h}$. Si D appartient à $U(\mathfrak{g}_c)^{\mathfrak{h}_c}$ on peut trouver un élément D_0 de $U(\mathfrak{g}_c)$ tel que

$$D-D_0\in U(\mathfrak{g}_c)^{\mathfrak{h}_c}\cap U(\mathfrak{g}_c)\mathfrak{h}_c\,,$$

$$D_0=\sum_{\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)} C_\alpha(JX_1)^{\alpha_1}\cdots(JX_n)^{\alpha_n} \quad \text{où} \quad \begin{cases} X_1,\cdots,X_n \text{ est une base de } \mathfrak{h}_c \text{ sur } \boldsymbol{C}, \\ C_\alpha\in\boldsymbol{C}. \end{cases}$$

Or D_0 est centralisé par tout $X\in\mathfrak{h}_c$. Il est aussi centralisé par JX pour $X\in\mathfrak{h}_c$ car

$$[X, JX_i]=J[X, X_i] \quad \text{et} \quad [-JX, JX_i]=[X, X_i]\,.$$

On en déduit que D_0 appartient a $U(\mathfrak{g}_c)^{\mathfrak{g}_c}$, d'où le résultat car $\eta(D)=\eta(D_0)$. C.Q.F.D.

§ 4. Opérateurs différentiels invariants sur $\boldsymbol{X}$

On reprend les notations de § 3 mais on suppose dorénavant que $H=G_\sigma$. Soit φ l'application de G dans lui-même définie par $\varphi(g)=g\sigma(g)^{-1}$ qui permet d'identifier G/H avec $\boldsymbol{X}=\varphi(G)$. On désigne maintenant par $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X})$ l'algèbre des opérateurs différentiels invariants sur $\boldsymbol{X}$ et on note $S(\mathfrak{q}_c)^H$ le sous-algèbre des éléments de $S(\mathfrak{q}_c)$ (algèbre symétrique de $\mathfrak{q}_c$) invariants par $\mathrm{Ad}\,(H)$.

Proposition 4.1. Soit *δ l'application de $S(\mathfrak{q}_c)^H$ dans $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X})$ définie par $\delta(P)=\hat{P}$ où pour $f\in C^\infty(\boldsymbol{X})$ et $x=g\sigma(g)^{-1}\in\boldsymbol{X}$. On pose :*

$$(\hat{P}f)(x)=\sum_{\alpha} a_{\alpha}\left\{\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial t_1^{\alpha_1}\cdots\partial t_n^{\alpha_n}} f\cdot\varphi\left(g \exp\frac{t_1X_1+\cdots+t_nX_n}{2}\right)\right\}\Big|_{t=0}.$$

Si $X_1, \cdots, X_n$ est une base de $\mathfrak{q}$ sur $\boldsymbol{R}$ et $P=\sum_{\alpha} a_{\alpha} X_1^{\alpha_1}\cdots X_n^{\alpha_n}$ avec $\alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\in \boldsymbol{N}^n$, $a_{\alpha}\in\boldsymbol{C}$ et $|\alpha|=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j$. L'application δ est un isomorphisme $\boldsymbol{C}$-linéaire de $S(\mathfrak{q}_c)^H$ sur $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X})$.

C'est un résultat classique ([11] p. 395) qu'on a reécrit en utilisant l'identification par φ de G/H avec $\boldsymbol{X}$. Rappelons que la définition de $\delta(P)$ ne dépend pas du choix de la base $\{X_1, \cdots, X_n\}$ de $\mathfrak{q}$. On veut étudier l'action de $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X})$ sur les fonctions invariantes par H. Soit $\mathfrak{a}$ un sous-espace de Cartan de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ et $A=Z_{\boldsymbol{X}}(\mathfrak{a})$ le sous-espace de Cartan de $\boldsymbol{X}$ associé. La proposition 1.2 de § 1 permet, en utilisant la proposition 2.2 de [12], d'affirmer l'existence d'une partie radiale pour les opérateurs différentiels invariants sur $\boldsymbol{X}$, c'est-à-dire.

Proposition 4.2. *Si D appartient à $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X})$, il existe un opérateur différentiel (noté R_D) sur A', invariant par $W_A=N_H(A)/Z_H(A)$, tel que pour toute fonction $f\in C^{\infty}(\boldsymbol{X}')$, invariante par H on ait*

$$(Df)(a)=[R_D f|_{A'}](a) \qquad \text{pour } a\in A'.$$

L'opérateur différentiel R_D s'appelle la partie radiale de D. Nous allons dans les paragraphes suivants déterminer ces parties radiales pour certains espaces symétriques.

§ 5. Détermination des parties radiales dans le eas d'un groupe complexe

Dans ce paragraphe nous allons rappeler les résultats de Harish-Chandra [8] pour un groupe complexe semi-simple (voir aussi [3]). On suppose donc que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ du groupe G est munie d'une structure complexe. Si $\mathfrak{j}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, la décomposition de Cartan de G s'écrit

$$G'=\bigcup_{g\in G} gJ'g^{-1} \qquad \text{où } J=Z_G(\mathfrak{j})=\exp\mathfrak{j}.$$

Ici G' désigne l'ensemble des éléments réguliers de G définis de manière analogue à celle du § 1 en utilisant le polynôme

$$\det((1+t)\,\mathrm{Id}-\mathrm{Ad}_G(g))=\sum_{k=\dim_C\mathfrak{j}}^{\dim_C\mathfrak{g}} d_k(g)t^k \qquad \text{pour } g\in G.$$

Soit Σ le système de racines de la paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{j})$, Σ^+ un ensemble de racines positives, ρ la demi-somme des racines positives. Posons pour $H\in\mathfrak{j}$

$$\Delta(\exp H)=e^{\rho(H)}\prod_{\alpha\in\Sigma^+}(1-e^{-\alpha(H)}).$$

Si on appelle l la dimension sur $\boldsymbol{C}$ de $\mathfrak{j}$ on obtient pour $H\in\mathfrak{j}$

$$d_l(\exp H)=(-1)^n(\Delta(\exp H))^2$$

où n désigne le nombre d'éléments de Σ^+. On en déduit qu'au signe près Δ est défini sur J. Désignons par $I(\mathfrak{j})$ la sous-algèbre des éléments de l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{j})$

invariants par $W(\mathfrak{j})=N_G(\mathfrak{j})/Z_G(\mathfrak{j})$. On désigne par $\boldsymbol{D}_c(G)$ l'algèbre des opérateurs differentiels complexes bi-invariants sur G. Elle est isomorphe au centre $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ de l'algèbre enveloppante universelle $U(\mathfrak{g})$ de l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{g}$.

Théorème 5.1. *Si D appartient à $\boldsymbol{D}_c(G)$, il existe un polynôme P appartenant à $I(\mathfrak{j})$ tel que pour toute fonction holomorphe sur G et centrale on ait*

$$[Df](a)=\frac{1}{\Delta(a)}[P(\partial)\{\Delta f|_{J'}\}](a) \qquad \textit{pour } a\in J' .$$

De plus l'application γ_c de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ dans $I(\mathfrak{j})$ qui à D associe P est un isomorphisme d'algèbre.

On construit γ_c de la façon suivante. Soit $\Sigma(\mathfrak{j})$ le système de racines de la paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{j})$, ($\Sigma^+(\mathfrak{j})$ un ensemble de racines positives). Posons

$$\mathfrak{n}^{\pm}=\sum_{\pm\alpha\in\Sigma^+(\mathfrak{j})}\mathfrak{g}(\mathfrak{j}\,;\,\alpha) .$$

Si D appartient à $U(\mathfrak{g})^G=\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ on démontre qu'il existe un unique élément D'_j appartenant à $U(\mathfrak{j})$ tel que $D-D'_j$ appartient à $U(\mathfrak{g})\mathfrak{n}^+ +\mathfrak{n}^- U(\mathfrak{g})$. On identifie $U(\mathfrak{j})$ avec l'algèbre des fonctions polynômes sur $\mathfrak{j}$ et on pose pour $D\in U(\mathfrak{g})^G$

$$[\gamma_c(D)](\lambda)=D'_j(\lambda-\rho)=D_j(\lambda) \qquad \text{où } \rho=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Sigma^+(\mathfrak{j})}\alpha .$$

On peut alors montrer que γ_c est un isomorphisme (appelé isomorphisme de Harish-Chandra) de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ sur $I(\mathfrak{j})$. Pour démontrer le théorème on détermine à l'aide de γ_c l'action de D sur les caractères des représentations holomorphes de dimension finie de G et on obtient:

Lemme 5.2. *Soit (π, V) une représentation holomorphe irreductible de dimension finile de G sur V de poids dominant Λ et soit χ son caractère. Si D appartient à $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ on a pour $a\in J'$*

$$\Delta(a)[D\chi](a)=P(\partial)\{\Delta\chi|_{J'}\}(a) \qquad \textit{où } P=\gamma_c(D) .$$

Ce lemme se démontre en utilisant le fait que $\pi(D)$ est un opérateur scalaire sur V et en étudiant l'action de $\pi(D)$ sur un vecteur de poids Λ pour vérifier que ce scalaire est égal à $[\gamma_c(D)](\Lambda+\rho)$. Puis on utilise la formule des caractères de *H.* Weyl pour calculer l'action d'un élément de $I(\mathfrak{j})$ sur $\Delta\chi|_{J'}$. Pour finir la démonstration du théoème on utilise le lemme ci-dessous qui se démontre à l'aide de la formule des caractères de Weyl (p. 255, p. 261 [16]).

Lemma 5.3. *Soit $L(J')$ l'ensemble des restrictions a J' des caractères des représentations holomorphes de dimension finie de G. Alors, au voisinage de chaque point de J', il existe n ($=$rang $\mathfrak{g}$) fonctions de class C^∞ de $L(J')$ qui forment un système de coordonnées locales.*

Remarque. Soit $\mathfrak{h}$ une forme réelle de $\mathfrak{g}$ qui s'écrit alors $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus J\mathfrak{h}$ où J est la structure complexe de $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{a}$ est un sous-espace de Cartan de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, $\mathfrak{j}=\mathfrak{a}\oplus J\mathfrak{a}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. On a défini au §3 un isomorphisme $\gamma^{\mathfrak{q}}$ de $\boldsymbol{D}(G/H)$ par $I(\mathfrak{a}_c)$ et ici un isomorphisme γ_c de $\boldsymbol{D}_c(G)$ sur $I(\mathfrak{j})$. Or il est clair que les algèbras $I(\mathfrak{a}_c)$ et $I(\mathfrak{j})$ sont isomorphes car le système de racines de la paire (complexe) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{j})$ est identique au système de racines de la paire $(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{a}_c)$. On en déduit que pour tout opérateur différentiel $D \in \boldsymbol{D}(G/H)$, il existe un unique élément $D_c \in \boldsymbol{D}_c(G) = \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ tel qu'on puisse écrire

$$\gamma^{\mathfrak{q}}(D) = \gamma_c(D_c)$$

après avoir identifié $I(\mathfrak{a}_c)$ et $I(\mathfrak{j})$.

§6. Un exemple d'espaes en c-dualité

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple, $\mathfrak{g}_c$ sa complexifiée, G_c un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_c$ et G le sous-groupe analytique d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On suppose de plus que la conjugaison complexe σ_2 de $\mathfrak{g}_c$ relativement à $\mathfrak{g}$ se remonte en une involution σ_2 sur G_c et que G est l'ensemble des points fixes de σ_2.

Soit σ_1 l'involution définie sur $G \times G$ (resp. $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$) par $\sigma_1(x, y) = (y, x)$ (resp. $\sigma_1(X, Y) = (Y, X)$). On appelle diag le sous-groupe (resp. la sous-algèbre) des points fixes de σ_1. On dit que l'espace symétrique $(G \times G, \text{diag}, \sigma_1)$ est un espace symétrique de genre I. On peut réaliser cet espace symétrique comme sous-variété de G: l'application φ_1 de $G \times G/G$ qui à (x, y) associé xy^{-1} induit un G-difféomorphisme de $G \times G/\text{diag}$ sur $G \subset G_c$. On pose $\boldsymbol{X}_1 = G$ et G opère sur cet espace symétrique par conjugaison.

Soit σ_2 l'involution définie sur G_c (resp. $\mathfrak{g}_c$) ci-dessus. On dit que l'espace symetrique (G_c, G, σ_2) est un space symétrique de genre II. On peut réaliser cet espace symétrique comme sous-vairété fermée de G_c: l'application φ_2 de $G_c \to G_c$ qui à x associe $x\sigma_2(x)^{-1}$ induit un G-difféomorphisme de G_c/G sur son image qu'on note $\boldsymbol{X}_2$. Du plus G_c opère sur cet espace symétrique par $x \mapsto gx\sigma_2(g)^{-1}$ $(g \in G_c)$.

Les espaces symétriques $\boldsymbol{X}_1$ et $\boldsymbol{X}_2$ sont en c-dualite. Soit φ l'application de $\mathfrak{g}_c$ sur $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ qui à $X + \sqrt{-1}Y (X, Y \in \mathfrak{g})$ associe $(X, X) + J(Y, Y)$ où $J(X, Y) = (-Y, X)$. C'est un isomorphisme d'espace vectoriel, commutant à l'action adjointe de G et tel que $\sigma_1 \cdot \varphi = \varphi \cdot \sigma_2$. Remarquons que J induit une structure complexe sur l'espace vectoriel $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$.

Les espaces symétriques $G \cong G \times G/G$ (genre I) et G_c/G (genre II) sont en c-dualité (Définition 5.1 [25]). Nous traiterons les deux genres simultanément pour mettre en évidence les analogies qui existent entre eux. Les résultats que nous énoncerons sont connus pour le genre I. Dans ce ces l'espace symétrique $\boldsymbol{X}_1 = G$ est associé au triplet $(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}, \mathfrak{g}, \sigma_1)$. Pour le genre II, on réalisera l'espace symétrique G_c/G en posant $\boldsymbol{X}_2 = \{g\sigma_2(g)^{-1} : g \in G_c\}$. Il est associé au triplet $(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{g}, \sigma_2)$. Lorsqu'il ne sera pas nécessaire de préciser s'il s'agit du genre I ou du genre II nous omettrons l'indice 1 ou 2.

§7. Détermination des parties radiales

On utilise les notations de §6. Rappelons que si $\mathfrak{a}$ est un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{q}$, alors $\mathfrak{a}_c$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_c$ et on vérifie aisément que

$$X' = G'_c \cap X \qquad \text{et } A = \exp \mathfrak{a}_c \cap X \quad (\text{cf. § 1 pour les notations}).$$

On note toujours Δ la restriction à A de la fonction Δ définie à § 5 sur le sous-groupe de Cartan $\exp \mathfrak{a}_c$ (noté J à § 5).

Théorème 7.1. *Soit D un opérateur différentiel invariant sur X, R_D sa partie radiale sur A' et f une fonction de classe C^∞ sur X invariante par G. Alors pour $a \in A'$ on a*

$$R_D f|_{A'}(a) = \frac{1}{\Delta(a)} [\gamma^{\mathfrak{a}}(D)][\Delta f|_{A'}](a)$$

ou $\gamma^{\mathfrak{a}}(D)$ est l'élément de $I(\mathfrak{a}_c)$ défini à § 3 (on fait l'identification indiquée à la fin de § 5).

Démonstration. On vérifie tout d'abord le théorème pour le genre II, $X \cong G_c/G$, et dans le cas où f est la restriction à X d'une fonction holomorphe et centrale sur G_c. En effet dans ce cas pour $P \in S(\mathfrak{q}_c)^G$, on a

$$(\hat{P}f)(g\sigma(g)^{-1}) = P\Big(\frac{\partial}{\partial t_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial t_n}\Big) f \cdot \varphi\Big(g \exp \frac{t_1 X_1 + \cdots + t_n X_n}{2}\Big)\Big|_{t=0}$$

ou $\{X_1, \cdots, X_n\}$ est une base de $\mathfrak{q}$ sur $\boldsymbol{R}$. Or pour $X \in \mathfrak{q}$ on a, puisque f est centrale, et $\sigma(X) = -X$

$$\begin{aligned} f \cdot \varphi\Big(g \exp \frac{X}{2}\Big) &= f(g \exp X\sigma(g)^{-1}) \\ &= f(\sigma(g)^{-1} g \exp X) \\ &= f(g^{-1} x g \exp X) \qquad \text{où } x = g\sigma(g)^{-1} \in X. \end{aligned}$$

Comme ici $S(\mathfrak{q}_c)^G = S(\mathfrak{g}_c)^{G_c}$, on considère l'opérateur différentiel complexe $D_c \in U(\mathfrak{q}_c)^{\mathfrak{g}_c}$ qui correspond au polynôme P. Puisque c'est un opérateur différentiel bi-invariant et que f est centrale on obtient

$$(\hat{P}f)(x) = (D_c f)(g^{-1} x g) = (D_c f)(x).$$

On déduit donc du théorème 5.1 que pour $a \in A'$

$$[R_D f|_{A'}](a) = \frac{1}{\Delta(a)} \{\gamma_c(D_c)[\Delta f|_{A'}]\}(a).$$

D'après l'identification $\gamma^{\mathfrak{a}}(D) = \gamma_c(D_c)$ indiquée à § 5, il suffit d'appliquer le théorème 5.1 pour obtenir le résultat. On a donc déterminé l'opérateur différentiel R_D sur les restrictions à A' des fonctions holomorphes et centrales sur G. Le lemme 5.3 permet de conclure que ceci suffit à déterminer R_D.

Pour le genre I où $X = G$ le résultat du théorème 7.1 est connu ([12]). Si G est contenu dans G_c, on peut en faire une démonstration analogue à la démonstration ci-dessus (cf. [3]). C. Q. F. D.

Proposition 7.2. *Soit f une fonction analytique sur A' qui soit fonction propre des éléments de $I(\mathfrak{a}_c)$. Il existe alors une forme linéaire Λ sur $\mathfrak{a}$ à valeurs complexes telle que pour $P \in I(\mathfrak{a}_c)$ on ait*

$$P(\partial) f = P(\Lambda) f$$

Soit $A_0=a_0\exp\mathfrak{a}$ *une composante connexe de* A *et* O *une composante connexe de* A_0'. *Il existe une famille de fonctions polynômes* $\{P_w\}_{w\in W_c}$ *sur* $\mathfrak{a}$ *telle que:*

1) *les polynômes* P_w *sont* $W_c(w\Lambda)$*-harmoniques où*

$$W_c(\Lambda)=\{w\in W_c:\ w\Lambda=\Lambda\},$$

2) $f(a_0\exp X)=\sum_{w\in W_c} P_w(X)e^{\langle w\Lambda,X\rangle}$ *pour* $a_0\exp X\in O$.

Démonstration. C'est un résultat classique ([33] p. 60). Remarquons que si Λ est W_c-régulier, c'est-à-dire si $w\Lambda=\Lambda$ pour $w\in W_c\setminus\{I\}$, les polynômes P_w sont des constantes. On peut construire les P_w de la façon suivante: On fixe un élément H_1 de $\mathfrak{a}_c$. Soit p le nombre d'éléments de W_c. Pour chaque valeur du paramètre t, définissons le polynôme $D_1(t)$ de $I(\mathfrak{a}_c)$ par

$$D_1(t)=\prod_{w\in W_c}(t-wH_1)\,.$$

Il existe p polynomes Q_j appartenant à $I(\mathfrak{a}_c)$ tels que

$$D_1(t)=t^p+t^{p-1}Q_1+\cdots+tQ_{p-1}+Q_p\,.$$

Soit $H_1, H_2, \cdots, H_n$ des éléments de $\{wH_1:\ w\in W_c\}$ qui forment une base de $\mathfrak{a}_c$. On a

$$[D_1(H_k)]f=0 \qquad \text{pour } f\in C^\infty(A) \text{ et } k=1,\cdots,n\,.$$

Si f est fonction propre des éléments de $I(\mathfrak{a}_c)$, il existe $\Lambda\in\mathfrak{a}_c^*$ tel que

$$Q_j(\partial)f=Q_j(\Lambda)f\,.$$

La fonction f satisfait donc aux équations différentielles suivantes

$$[H_k^p+Q_1(\Lambda)H_k^{p-1}+\cdots+Q_p(\Lambda)]f=0 \qquad \text{pour } k=1,\cdots,n\,.$$

Si on choisit $\beta_j\in\mathfrak{a}_c^*$ tel que $\beta_j(H_i)=\delta_{ij}$ $(i, j=1, 2, \cdots, n)$, l'équation caractéristique de chacune de ces équations est

$$0=r^p+Q_1(\Lambda)r^{p-1}+\cdots+Q_P(\Lambda)=\prod_{w\in W_c}(r-w\lambda_1)$$

où on a posé $\Lambda=\lambda_1\beta_1+\cdots+\lambda_n\beta_n$ et où $w\lambda_1$ est la premiére coordonnée de $w\Lambda$ dans la base $\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$. Posons $m(\Lambda)=|\{w\in W_c:\ w\Lambda=\Lambda\}|$. Les polynômes cherchés sont de la forme

$$P_w(X)=\prod_{k=1}^{n}\{C_1^k+C_2^k\beta_k(X)+\cdots+C_{m(\Lambda)}^k\beta_k^{m(\Lambda)}(X)\}$$

où les C_j^k $(1\leq k\leq n,\ 1\leq j\leq m(\Lambda))$ sont des constantes. C.Q.F.D.

§8. Un espace fibré associé aux sous-groupes de Borel

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple réelle et $\mathfrak{g}_c$ sa complexifiée. Soit G_c un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_c$ et G le sous-groupe analytique d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit H_c le sous-groupe fermé de G_c défini par $H_c=(G_c)_\sigma$. Si on considère la restriction de σ à G, on a $H=G_\sigma=(G_c)_\sigma\cap G$. On note aussi σ l'automorphisme de $\mathfrak{g}_c$ qui est la différentielle de σ. Soit $\mathfrak{g}_c=\mathfrak{h}_c+\mathfrak{q}_c$ la décomposition en sous-espace propres de σ. On pose $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_c\cap\mathfrak{g}$, $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}_c\cap\mathfrak{g}$. L'application φ de G_c dans G_c qui à x associe $x\sigma(x)^{-1}$ induit un G_c-difféomorphisme de G_c/H_c sur son image qu'on note $\boldsymbol{X}_c$. Si on pose $\boldsymbol{X}=G\cap\boldsymbol{X}_c$, la restriction de φ à G induit un G-difféomorphisme de G/H sur $\boldsymbol{X}$. Soit $\mathfrak{j}_c$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_c$. On a alors $\mathfrak{g}_c=\mathfrak{j}_c+\mathfrak{n}_c^++\mathfrak{n}_c^-$ ou $\mathfrak{n}_c^+=\sum_{\alpha>0}\mathfrak{g}_c(\mathfrak{j}_c\,;\alpha)$ et $\mathfrak{n}_c^-=\sum_{\alpha>0}\mathfrak{g}_c(\mathfrak{j}_c\,;-\alpha)$. On pose $\mathfrak{b}=\mathfrak{j}_c+\mathfrak{n}_c^+$. Soit B le sous-groupe analytique de G_c correspondant à $\mathfrak{b}$. Tout sous-groupe de G_c conjugué de B est appelé sous-groupe de Borel de G_c. Tout élément de G_c appartient à un sous-groupe de Borel. L'espace homogène G_c/B est une variété complexe compacte. On note e l'identité de G.

Hypothèse A. Il existe un sous-groupe de Borel B de G_c σ-invariant vérifiant la condition suivante,

$$\boldsymbol{X}_c=\bigcup_{h\in H_c}h(B\cap\boldsymbol{X}_c)h^{-1} \tag{A}$$

Voici des examples pour lesquels l'hypothèse (A) est satisfaite.

Exemple. (i) Soit G_c' un groupe de Lie connexe semi-simple. Soit σ l'involution définie sur $G_c=G_c'\times G_c'$ par $\sigma(g, h)=(h, g)$ $(g, h\in G_c)$. On a alors $H_c=\{(g, g): g\in G_c'\}$ et $\boldsymbol{X}_c=\{(g, g^{-1}): g\in G_c'\}$. L'application φ de G_c/H_c sur $\boldsymbol{X}_c$ qui à $(g, h)H_c$ associe (gh^{-1}, hg^{-1}) induit un G_c-difféomorphisme. Soit B' un sous-groupe de Borel de G_c'. Alors $B=B'\times B'$ est un sous-groupe de Borel σ-invariant de G_c. On a bien $\boldsymbol{X}_c=\bigcup_{g\in G_c'}(g, g)(B\cap\boldsymbol{X}_c)(g, g)^{-1}$.

(ii) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe. Soit $\mathfrak{g}_c=\boldsymbol{C}\otimes\mathfrak{g}=\{X+\sqrt{-1}Y: X, Y\in\mathfrak{g}\}$. Soit σ la conjugaison de $\mathfrak{g}_c$ correspondante. Soit G_c un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_c$. On relève σ sur G_c en un automorphisme involutif. Alors $\boldsymbol{X}_c=\{g\sigma(g)^{-1}: g\in G_c\}$ est un G_c-espace connexe. L'application φ de G_c/H_c sur $\boldsymbol{X}_c$ qui à gH_c associe $g\sigma(g)^{-1}$ induit un G_c difféomorphisme. Soit B un sous-groupe de Borel de G_c. On pose $B_0=B\cap H_c$. Soit $\mathfrak{b}_0$ une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$ correspondant à B_0. On a bien $\boldsymbol{X}_c=\bigcup_{h\in H_c}h(B\cap\boldsymbol{X}_c)h^{-1}$ car $\sqrt{-1}\mathfrak{g}=\bigcup_{h\in H_c}h(\sqrt{-1}\mathfrak{b}_0)h^{-1}$.

(iii) Soit $\mathfrak{g}_c=\mathfrak{sl}(n+1, \boldsymbol{C})$ et σ l'automorphisme involutif de $\mathfrak{g}_c$ défini par

$$X=\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} \overbrace{\quad}^{1} & \overbrace{\quad}^{n} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ n \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} X_1 & X_2 \\ \hline X_3 & X_4 \end{array}\right) \end{array} \longmapsto \sigma(X)=\left(\begin{array}{c|c} X_1 & -X_2 \\ \hline -X_3 & X_4 \end{array}\right).$$

Si on prend l'automorphisme involutif de G_c correspondant, on a alors

$$H_c=\left\{h=\left(\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & b \end{array}\right): \det h=1,\ a\in GL(1,\boldsymbol{C}),\ b\in GL(n, \boldsymbol{C})\right\},$$

$$X_c=\left\{ g=\left(\begin{array}{c|cccc} c_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \hline b_1 & c_1 & 0 & & \\ b_2 & 0 & c_2 & & 0 \\ \vdots & & 0 & \ddots & \\ b_n & & & & c_n \end{array}\right) : \begin{array}{l} c_j^2-a_jb_j=1 \ (j=1, 2, \cdots, n) \\ \det g=1, \ \sigma(g)=g^{-1} \end{array} \right\}$$

Si $n=1$, $B=g_0\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}\right\}g_0^{-1}$ où $g_0=\begin{pmatrix} 1 & \frac{i}{2} \\ i & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ vérifie l'hypothèse (A). Mais si $n\neq 1$, il n'existe pas de sous-groupe de Borel de G_c vérifiant l'hypothèse (A).

Définition 8.1. Soit G_c/H_c un espace symétrique complexe vérifiant l'hypothèse (A), et B un sous-groupe de Borel tel que (A) est vérifiée. On définit le sous-espace E de $X_c\times H_c/B_H$ par

$$E=\{(x, gB_H)\in X_c\times H_c/B_H : g^{-1}xg\in B\cap X_c\} \quad (B_H=B\cap H_c).$$

Soit pr_1 (resp. pr_2) la projection de E sur le premier (resp. sur le deuxième) facteur. $(E, \mathrm{pr}_2, H_c/B_H, B_H)$ est ainsi un espace fibré analytique complexe. La fibre au dessus de gB_H est égale à $g(B\cap X_c)g^{-1}$. L'action $A_h(h\in H_c)$ de H_c sur E (resp. X_c) est définie par $A_h(x, gB_H)=(hxh^{-1}, hgB_H)$ resp. $A_h(x)=hxh^{-1}$ $(x\in X_c)$). On a alors $\mathrm{pr}_1(A_h(y))=A_h\cdot\mathrm{pr}_1(y)$ $(h\in H_c, y\in E)$ et pr_1 est une application propre car H_c/B_H est compact. Puisque E et X_c ont la même dimension, pr_1 est un reconvrement fini excepté sur l'ensemble des éléments singuliers de X_c (cf. Définition 1.1)

On plonge $B\cap X_c$ dans E par l'application $B\cap X_c\ni b\mapsto(b, eB_H)$ dont l'image est la fibre au dessus de eB_H. Ainsi la projection pr_1 est l'identité sur $B\cap X_c$, et $B\cap X_c$ rencontre chaque H_c-orbite aussi bien dans E que dans X_c. Il existe une m-forme ω_c, H_c-invariante holomorphe sur X_c $(m=\dim E=\dim X_c)$. En effect choisissons des m-vecteurs sur l'espace tangent $T_e(B\cap X_c)$ en e à $B\cap X_c$ et leurs transformés par l'action de H_c. Par cette méthode on obtient ω_c sur X_c. Pour définir une m-forme η_c, H_c-invariant et holomorphe sur E, on fixe sa valeur en (e, eB_H). Ensuite on l'étend à la fibre pour la définir sur $B\cap X_c$ et on l'étend finalement à E par l'action de H_c. On explicite la m-forme η_c sur E de la façon suivante.

Soit q la projection de $\mathfrak{h}_c$ sur $\mathfrak{h}_c/(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{b}_c)$ et pr l'application canonique de H_c sur H_c/B_H. Soit V un voisinage ouvert de 0 dans $\mathfrak{h}_c$ tel que l'application $\exp: V\to H_c$ soit un difféomorphisme. On pose $U=\exp V$ et $O=\mathrm{pr}(U)$. Il existe une section locale $s: O\to H_c$ telle que $\mathrm{pr}(s(gB_H))=gB_H(gB_H\in O)$. On en déduit une section s de $\mathfrak{h}_c/\mathfrak{b}\cap\mathfrak{h}_c$ dans $\mathfrak{h}_c$ vérifiant

$$s(\mathrm{pr}(\exp X))=\exp(s(q(X)) \qquad (X\in V).$$

A un élément X^* de $\mathfrak{h}_c/\mathfrak{b}\cap\mathfrak{h}_c$, on associe l'opérateur différentiel

$$X^*_{gB_H}f=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}f(g\exp tX)B_H)\,.$$

Par cette correspondance, on identifie $\mathfrak{h}_c/\mathfrak{b}\cap\mathfrak{h}_c$ et $T_{gB_H}(H_c/B_H)$. A un élément Y^* de $\mathfrak{g}_c/\mathfrak{h}_c$, on associe l'opérateur différentiel

$$Y^*_xf=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}f(a\exp tY\ \ \sigma(\exp tY)^{-1}\sigma(a)^{-1})\qquad (x=a\sigma(a)^{-1}\in \boldsymbol{X}_c)\,.$$

Ce qui permet d'identifier $\mathfrak{g}_c/\mathfrak{h}_c$ et $T_x(\boldsymbol{X})$. L'espace tangent $T_{(x,gB)}(\boldsymbol{X}_c\times H_c/B_H)$ est ainsi identifié à $\mathfrak{g}_c/\mathfrak{h}_c\oplus\mathfrak{h}_c/\mathfrak{b}\cap\mathfrak{h}_c$.

On définit une section locale au voisinage du point (b, eB_H) de $(\boldsymbol{X}_c\cap B)\times H_c/B_H$ dans E par

$$\begin{array}{ccc}(\boldsymbol{X}_c\cap B)\times O & \longrightarrow & E\\ \Cup & & \Cup\\ (b,\ gB_H) & \longmapsto & ({}_s(g)b_s(g)^{-1},\ gB_H)\,.\end{array}$$

A un élément X^* de $\mathfrak{h}_c/\mathfrak{b}\cap\mathfrak{h}_c$ on associe un vecteour de l'espace tangent $T_{(b,eB_H)}(E)$ par

$$\begin{aligned}(0,\ X)^{\sim}_{(b,eB_H)}f&=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}f({}_s(\exp tX)b_s(\exp tX)^{-1},\ (\exp tX)B_H)\\ &=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}f(a\exp t\mathrm{Ad}(a^{-1})_s(X)\exp(-t\ \mathrm{Ad}\,(\sigma(a)^{-1}))_s(X)\sigma(a)^{-1},\ (\exp tX)B_H)\\ &\hspace{22em}(b=a\sigma(a)^{-1})\\ &=((\mathrm{Ad}\,(a^{-1})-\mathrm{Ad}\,(\sigma(a)^{-1}))_s(X),\ X)_{(b,eB_H)}f\,.\end{aligned}$$

Soit $Y_1, \cdots, Y_l$ une base de $\mathfrak{b}\cap\mathfrak{q}_c$ ($l=\dim_c\mathfrak{b}\cap\mathfrak{q}_c$). Soit $X^*_1, \cdots, X^*_{m-l}$ des éléments de $\mathfrak{h}_c/\mathfrak{b}\cap\mathfrak{h}_c$ tels que $[(\mathrm{Ad}\,(a^{-1})-\mathrm{Ad}\,(\sigma(a)^{-1}))_s(X_j)]^*_{j=1,\dots,m-l}$ forment une base de $\mathfrak{q}_c/\mathfrak{b}\cap\mathfrak{q}_c$. On pose $W_j=(Y_j, 0)$ $(j=1, \cdots, l)$ et $W_{j+1}=(0, X_j)^{\sim}(j=1, \cdots, m-l)$. On considère la base duale $\eta_i: \eta_i(W_j)=\delta_{ij}$ $(i, j=1, \cdots, m)$. On définit la m-forme η sur $\{(b, eB_H): b\in B\cap\boldsymbol{X}_c\}$ par $\eta(b, eB_H)=(\eta_1\wedge\eta_2\wedge\cdots\wedge\eta_m)\ (b, eB_H)$. La forme η ne dépend pas de la section locale choisie, car si on choisit une autre section locale ${}_s'$, on a alors ${}_s(X^*)-{}_s'(X^*)\in\mathfrak{b}$ pour tout $X^*\in\mathfrak{h}_c/\mathfrak{b}\cap\mathfrak{h}_c$. Oh étend η à E en utilisant l'action de H_c, ce qui est possible sous l'hypothèse (A). La forme η est bien déterminée. En effet si $b'=b_1bb_1^{-1}$ $(b\in B\cap\boldsymbol{X}_c,\ b_1\in B_H)$, nous avons $\delta A_{b_1}(\eta_b)=\eta_{b'}$ puisque $\det(\mathrm{Ad}\,(b_1)|_{\mathfrak{a}_c})=1$, car G_c et H_c sont des groupes unimodulaires.

Nous allons fixer une base de $\mathfrak{q}_c$ et normaliser exactement η_c et ω_c. Soit $\mathfrak{j}_c$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_c$, $\Sigma(\mathfrak{j}_c)$ l'ensemble des racines de $(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{j}_c)$. On suppose que $\mathfrak{j}_c$ et l'ordre sur $\Sigma(\mathfrak{j}_c)$ sont tels que $\mathfrak{b}=\mathfrak{j}_c+\sum_{\alpha>0}\mathfrak{g}_c(\mathfrak{j}_c\,;\alpha)$ et que $\mathfrak{a}_c=\mathfrak{j}_c\cap\mathfrak{q}_c$ soit un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{q}_c$. Soit $Y_1, \cdots, Y_k$ une base de $\mathfrak{a}_c$ ($k=\dim_c\mathfrak{a}_c$). Soit $X_1, \cdots, X_n$ une base de $\mathfrak{h}_c\cap\mathfrak{n}_c$ vérifiant les conditions de la proposition 2.4 [25], telle que $X_1, X_2, \cdots, X_p$ soit une base de $\mathfrak{h}_c\cap\mathfrak{n}_c\cap\mathfrak{b}$. A partir des éléments $(Y_1, 0), \cdots, (Y_k, 0), (\gamma(X_1), 0), \cdots, (\gamma(X_p), 0)$ de $\mathfrak{b}\cap\mathfrak{q}_c$ et des éléments $(0, X_{p+1})^{\sim}, \cdots, (0, X_n)^{\sim}$, on construit une forme η_c comme ci-dessus. Et à partir des éléments $Y_1, \cdots, Y_k, \gamma(X_1), \cdots, \gamma(X_n)$ de $\mathfrak{q}_c$, on définit la forme ω_c. Les formes ω_c et η_c étant normalisées comme il a été dit plus haut on a le lemme suivant.

Lemma 8.1. *Pour un élément* (x, hB) *de* E $(x=hbh^{-1},\ b\in \boldsymbol{X}\cap B,\ h\in H_c)$, *on a*

$$\delta(\mathrm{pr}_1)\omega_c=\det\{\mathrm{Ad}\,(a^{-1})-\mathrm{Ad}\,(\sigma(a)^{-1})\}\,|_{(\mathfrak{h}_c\cap\mathfrak{n}_c)/\mathfrak{h}_c\cap\mathfrak{n}_c\cap\mathfrak{b})}\eta_c \quad (b=a\sigma(a)^{-1})$$

Démonstration. Pour $X\in\mathfrak{h}\cap\mathfrak{n}_c$, on a

$$\mathrm{d}(\mathrm{pr}_1)_{(b,eB)}(0,\ X)^{\sim}=\{\mathrm{Ad}\,(a^{-1})-\mathrm{Ad}\,(\sigma(a)^{-1})\}(\gamma(X))_b\,.$$

Pour $Y\in\mathfrak{b}\cap\mathfrak{q}_c$, on a alors

$$d(\mathrm{pr}_1)_{(b,eB)}(Y,\ 0)=Y_b\,.$$

D'après la normalisation des formes, l'assertion du lemme s'en déduit. C.Q.F.D.

§ 9. Intégrabilité locale de $1/\Delta$

Dans cette section on se restreint à un espace symétrique $G\times G/G$ qui satisfait à l'hypothèse (A); on adopte les notations des sections § 2 et § 3. On considére le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \subset & E \\ {\scriptstyle \mathrm{pr}_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_1} \\ X & \subset & X_c \end{array}$$

où $\tilde{X}=\mathrm{pr}_1^{-1}(X)$. $\tilde{X}$ n'est pas une variété en général. Mais c'est un sous-ensemble réel analytique de E. Ensuite pr_1 est un recouvrement fini de X'. $\tilde{X}'=\mathrm{pr}_1^{-1}(X')$ est alors une variété. Nous rappelons que $\Delta(x)=\Delta_X(x)=|D_l(x)|^{1/4}$. On a le théorème suivant:

Théorème 9.1. *Le fonction* $1/\Delta(x)$ *est localement intégrale sur* X.

Démonstration. Soit O un voisinage ouvert relativement compact du point e dans X. Nous allons démontrer $\int_O\frac{\omega}{\Delta(x)}<+\infty$ où ω est une m-forme différentielle G-invariante sur X telle que $\omega=\omega_c|_X$. X' a un nombre fini de composantes connexes. Il suffit de démontrer que

$$\int_U\frac{\omega}{\Delta(x)}<+\infty \qquad \text{où } U=O\cap X'.$$

Soit $\tilde{U}$ une composante connexe de $\mathrm{pr}_1^{-1}(U)$, d'après le lemme 8.1 la définition de Δ, (§ 5), on a

$$\begin{aligned}\int_U\frac{\omega}{\Delta(x)}&=\frac{1}{k}\int_{\tilde{U}}\frac{\delta(\mathrm{pr}_1)\omega}{\Delta(x)}\\&=\frac{1}{k}\int_{\tilde{U}}\frac{\Delta(x)\eta}{\Delta(x)}\\&=\frac{1}{k}\int_{\tilde{U}}\eta<+\infty\end{aligned}$$

où k est un nombre positif car $\tilde{U}$ est un ensemble analytique.

Puisque l'adhérence de tout G-orbite contient un élément semi-simple (Proposition 2 [19]), il est suffisant de démontrer l'intégrabilité locale au voisinage de chaque élément semi-simple. On fixe un élément semi-simple x de $\boldsymbol{X}$. On pose $L_c=Z_{G_c}(x)$, $L=L_c\cap G$ et $M=L_c\cap \boldsymbol{X}$. Alors il existe un voisinage ouvert connexe L-invariant V de e dans M tel que l'application $(g, y)\mapsto gxyg^{-1}$ de $G\times V$ sur un voisinage ouvert G-invariant de x dans $\boldsymbol{X}$ définisse un espace fibré analytique de fibre L. Soit $\mathfrak{l}_c=Z_{\mathfrak{g}_c}(x)$. On définit

$$\nu_x(y)=\det((\mathrm{Id}-\mathrm{Ad}(y^{-1}))|_{\mathfrak{g}_c/\mathfrak{l}_c}) \qquad (y\in M).$$

On pose $'M=\{z\in M: \nu_x(z)\neq 0\}$. On peut prendre V tel que $'M$ contienne l'adhérence de xV. On a

$$\frac{1}{\Delta_X(xy)}=|\nu_x(xy)|^{-1/2}\frac{1}{\Delta_M(y)} \qquad (y\in V).$$

On pose $C=\{y\in U: zy=yz\ (\forall z\in U)\}$ et $V_1=\{x\in V: x\in\exp[\mathfrak{l}_c, \mathfrak{l}_c]\}$. Par l'application $(c, y)\mapsto cy$, $C\times V_1$ et V sont difféomorphes. Ensuite $\Delta_M(cy)=\Delta_M(y)$ $(c\in C,\ y\subseteq V_1)$. D'après la résultat ci-dessus, $1/(\Delta_M(y))$ est intégrable sur V. Par conséquent, $1/(\Delta_X(x))$ est localement intégrable au voisinage de x. C.Q.F.D.

Remarque. La méthode précédente est une généralisation de celle que Atiyah a utilisée pour démontrer l'intégrabilité locale des distributions propres invariantes sur un groupe de Lie semi-simple [1]. Dans la section suivante, on étudie les DSI a support singulier.

§10. DSI à support singulier

On utilise toujours les notations du §1. Pour un élément $x\in\boldsymbol{X}$, on a d'après [19],

$$x=x_s x_u \qquad (x_s,\ x_u\in\boldsymbol{X})$$

où x_s (resp. x_u) est un élément semi-simple (resp. unipotent) dans G. On va étudier l'action de H au voisinage de x. On note $X_0=\log x_u(\in\mathfrak{q})$ l'élément nilpotent de $\mathfrak{g}$ correspondant à x_u. D'après le lemme de Jacobson-Morozov, il existe des éléments H_0 de h et Y_0 de $\mathfrak{q}$ tels que $[H_0, X_0]=2X_0$, $[H_0, Y_0]=-2Y_0$ et $[X_0, Y_0]=H_0$, c'est-à-dire que $\{X_0, Y_0, H_0\}$ engendre une sous-algèbre $\mathfrak{g}_0$ de $\mathfrak{g}$ isomorphe à $\mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{R})$. On peut prendre Y_0 dans $\mathfrak{z}_\mathfrak{q}$ car $\mathfrak{z}$ est réductif. On note $\mathfrak{z}=Z_\mathfrak{g}(x_s)$ le centralisateur dans $\mathfrak{g}$ de x_s. Soit C le centre de $\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{l}=[\mathfrak{z}, \mathfrak{z}]$. On pose $\mathfrak{z}_\mathfrak{h}=\mathfrak{z}\cap\mathfrak{h}$, $\mathfrak{z}_\mathfrak{q}=\mathfrak{z}\cap\mathfrak{q}$, $\mathfrak{l}_\mathfrak{h}=\mathfrak{l}\cap\mathfrak{h}$, $\mathfrak{l}_\mathfrak{q}=\mathfrak{l}\cap\mathfrak{q}$, $\mathfrak{c}_\mathfrak{h}=\mathfrak{c}\cap\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{c}_\mathfrak{q}=\mathfrak{c}\cap\mathfrak{q}$. $(\mathfrak{l}, \mathfrak{l}_\mathfrak{h})$ est alors une algèbre de Lie symétrique. Soit X_s un élément semi-simple de $\mathfrak{q}$ tel que $x_s=\exp X_s$.

Soit $\mathfrak{a}$ un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{q}$ contenant X_s et $\mathfrak{c}_\mathfrak{q}$. Pour $\alpha\in\Sigma^+(\mathfrak{a})$, on choisit une base $X_{\alpha,1}, \cdots, X_{\alpha,m_\alpha}$ de $\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a};\alpha)$ $(m_\alpha=\dim\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a};\alpha))$ telle que $B(X_{\alpha,p}, \sigma(X_{\alpha,q}))=-\delta_{p,q}$ $(p, q=1, \cdots, m_\alpha)$. Soit $\{H_1, \cdots, H_k\}$ une $\boldsymbol{C}$-base de $(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{l})_c$ telle que $B(H_p, H_q)=\delta_{p,q}$ et $\{C_1, \cdots, C_m\}$ une $\boldsymbol{C}$-base de $\mathfrak{c}_\mathfrak{q}$ telle que $B(C_p, C_q)=\delta_{p,q}$. On identifie $\mathfrak{g}$ avec son dual par la forme de Killing. On définit le polynôme de Casimir ω de $\mathfrak{g}$ par

$$\omega=\sum_{p=1}^{k} H_p^2+\sum_{q=1}^{m} C_q^2+\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Sigma^+(\mathfrak{a})}\sum_{r=1}^{m_\alpha}(X_{\alpha,r}-\sigma(X_{\alpha,r}))^2 .$$

Soit ω_l (resp. ω_c) la restriction de ω à $\mathfrak{l}_\mathfrak{q}$ (resp. $\mathfrak{c}_\mathfrak{q}$), on a alors

$$\omega_l=\sum_{p=1}^{k} H_p^2+\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Sigma_0^+(\mathfrak{a})}\sum_{r=1}^{m_\alpha}(X_{\alpha r}-\sigma(X_{\alpha,r}))^2 ,$$

$$\omega_c=\sum_{q=1}^{m} C_q^2$$

où $\Sigma_0^+(\mathfrak{a})=\{\alpha\in\Sigma^+(\mathfrak{a})\,;\,\alpha(X_s)=0\}$. On pose $\Sigma_1^+(\mathfrak{a})=\Sigma^+(\mathfrak{a})\setminus\Sigma_0^+(\mathfrak{a})$. On note

$$V_c^\pm=\sum_{\alpha\in\Sigma_1^+(\mathfrak{a})}\sum_{r=1}^{m_\alpha}\boldsymbol{C}(X_{\alpha,r}\pm\sigma(X_{\alpha,r})) ,$$

$$V_\mathfrak{h}=V_c^+\cap\mathfrak{h} , \qquad V_\mathfrak{q}=V_c^-\cap\mathfrak{q} .$$

Alors les décompositions $\mathfrak{h}=\mathfrak{z}_\mathfrak{h}+V_\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{q}=\mathfrak{z}_\mathfrak{q}+V_\mathfrak{q}$ sont des sommes directes.

D'après le lemme 1 [32], il existe un involution de Cartan θ de $\mathfrak{l}$ commutant avec σ telle que $\theta:(H_0, X_0, Y_0)\mapsto(-H_0, -Y_0, -X_0)$. On définit une structure euclidienne sur $\mathfrak{l}$ par la forme bilinéaire définie positive $-B(X, \theta X)$ $(X\in\mathfrak{l})$. On note $U=(\mathfrak{l}_\mathfrak{q})_{Y_0}$ le centralisateur de Y_0 dans $\mathfrak{l}_\mathfrak{q}$. On choisit une base orthogonale $u_1, \cdots, u_n$ de U telle que $u_1=Y_0/\|Y_0\|$ et $[H_0, u_j]=-\lambda_j u_j$ $(1\leqq j\leqq n=\dim U)$. Alors $\lambda_1=2$. Soit $(x_1, \cdots, x_n)$ $(=x\in\boldsymbol{R}^n)$ les coordonnés d'un élément de U dans cette base. Et soit $e_1, \cdots, e_p$ une base de $V_\mathfrak{h}$ et $(t_1, \cdots, t_p)$ $(=t\in\boldsymbol{R}^p)$ les coordonnés d'un élement de $V_\mathfrak{h}$ dans cette base. Ensuite soit $f_1, \cdots, f_q$ une base de $[\mathfrak{l}_\mathfrak{q}, Y_0]$ et $(s_1, \cdots, s_q)$ $(=s\in\boldsymbol{R}^q)$ les coordonnés d'un élément de $[\mathfrak{l}_\mathfrak{q}, Y_0]$. Finalement soit $v_1, \cdots, v_m$ une base de $\mathfrak{c}_\mathfrak{q}$ et $(y_1, \cdots, y_m)$ $(=y\in\boldsymbol{R}^m)$ les coordonnés d'un élément de $\mathfrak{c}_\mathfrak{q}$.

On définit l'application $\Phi(s, x)$ de $\boldsymbol{R}^q\times\boldsymbol{R}^n$ dans $\mathfrak{l}_\mathfrak{q}$ par

$$\Phi(s, x)=\mathrm{Ad}\,(e^{s_1f_1}\cdots e^{s_qf_q})\Big(X_0+\sum_{j=1}^{n}x_ju_j\Big).$$

$\Phi(s, x)$ satisfait $\Phi(0)=X_0$ et $d\Phi$ est non-singulière on 0. Ensuite on définit l'application Ψ de $\boldsymbol{R}^p\times\boldsymbol{R}^q\times\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^m$ dans $\boldsymbol{X}$ par

$$\Psi(t, s, x, y)=e^{t_1e_1}\cdots e^{t_pe_p}x_s\exp\Big(\sum_{j=1}^{m}y_jv_j+$$

$$\mathrm{Ad}\,(e^{s_1f_1}\cdots e^{s_qf_q})\Big(X_0+\sum_{j=1}^{n}x_ju_j\Big)\Big)e^{-t_pe_p}\cdots e^{-t_1e_1}$$

$$=e^{t_1e_1}\cdots e^{t_pe_p}x_s\exp\Big(\sum_{j=1}^{m}y_jv_j+\Phi(s, x)\Big)e^{-t_pe_p}\cdots e^{-t_1e_1} .$$

On a alors $\Psi(0)=x$ et Ψ induit un difféomorphisme entre un voisinage ouvert de l'origine dans $\boldsymbol{R}^{p+q+n+m}$ et celui de x dans $\boldsymbol{X}$. Soient E_0, F_0, U_0 et V_0 des voisinages ouverts de 0 dans $\boldsymbol{R}^p$, $\boldsymbol{R}^q$, $\boldsymbol{R}^n$ et $\boldsymbol{R}^m$ tels que $\Psi|_{E_0\times F_0\times U_0\times V_0}$ soit un difféomorphisme. On pose $\Gamma_0=E_0\times F_0\times U_0\times V_0$ et $\Omega_0=\Psi(\Gamma_0)$.

Soit da une mesure euclidienne sur Γ_0 et dx une mesure G-invariante sur $\boldsymbol{X}$. Puisque le rang de $d\Psi$ est égal à $\dim\mathfrak{q}$, on a d'après le théorème 1 [10]:

Lemma 10.1. *Pour une fonction* $\beta\in C_c^\infty(\Gamma_0)$, *il existe une unique fonction* $f\in C_c^\infty(\Omega_0)$ *tel que*

$$\int_{\Gamma_0} G(\Psi(a))\beta(a)\mathrm{d}a=\int_X G(x)f_\beta(x)\mathrm{d}x$$

pour tout $G\in C_c^\infty(\Omega_0)$. *L'application de* $C_c^\infty(\Gamma_0)$ *dans* $C_c^\infty(\Omega_0)$ *définie par* $\beta\mapsto f_\beta$ *est continue et surjective et* $\operatorname{supp} f_\beta\subset\Psi(\operatorname{supp}\beta)$.

Proposition 10.2. *Supposons* E_0 *et* F_0 *connexes. Si* T *une distribution localement H-invariant sur* Ω_0, *il existe une distribution* σ_T *sur* $U_0\times V_0$ *telle que*

$$T(f_\beta)=\sigma_T(\alpha_\beta)\qquad(\beta\in C_c^\infty(\Gamma_0))$$

où α_β *est la fonction de* $C_c^\infty(U_0\times V_0)$ *définie par*

$$\alpha_\beta(x,\ y)=\int_{F_0\times E_0}\beta(t,\ s,\ x,\ y)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}s$$

Démonstration. Soit τ_T la distribution sur Γ_0 définie par $\tau_T(\beta)=T(f_\beta)$ $(\beta\in C_c^\infty(\Gamma_0))$. On fixe une fonction $\alpha\in C_c^\infty$ $(U_0\times V_0)$. Pour $\gamma\in C_c^\infty(E_0\times F_0)$, il existe un nombre complexe $c(\alpha)$ tel que $\tau_T(\gamma\times\alpha)=c(\alpha)\int_{E_0\times F_0}\gamma(x)\ \mathrm{d}x$ car la distribution $\gamma\to\tau_T(\gamma\times\alpha)$ est constante. On prend une fonction $\gamma_0\in C_c^\infty$ $(E_0\times F_0)$ telle que $\int_{E_0\times F_0}\gamma_0(x)\mathrm{d}x=1$. La distribution $\sigma_T(\alpha)=\tau_T(\gamma_0\times\alpha)$ $(\alpha\in C_c^\infty(U_0\times V_0))$ qui ne dépend pas du choix de γ_0 possiède les propriétes de la proposition (cf. le théorème 2 [10]). C.Q.F.D.

Un élément nilpotent $X_0\times\mathfrak{l}_q$ est dit $\mathfrak{l}_q$-distingué s'il satisfait $(\mathfrak{l}_q)_{x_0}\cap(\mathfrak{l}_q)_{y_0}=0$ (cf. [28] p. 103, [32]). On note $\Delta(\omega_l)$ la partie radiale de ω_l en X_0 concernant $(F_0\times U_0,\ \{0\}\times U_0)$ (cf. Définition §2 [32]). La proposition suivante que van Dijk et Sekiguchi ont donnée est la généralisation d'un résultat de Atiyah pour une algèbre de Lie semi-simple (cf. [1], p. 104 [28], [32]).

Propositiou 10.3. *Soit* T *une distribution sphérique invariante sur* Ω_0 *de caractère infinitésimal* χ. *Alors la distribution* σ_T *induite par* T *sur* $U_0\times V_0$ *qui est donnée par la proposition* 10.2 *satisfait à l'équation différentielle*

$$(\Delta(\omega_l)+\omega_c-\zeta(x,\ y)-\chi(\omega))\sigma_T=0 \tag{1}$$

où $\zeta(x,\ y)$ *est une fonction analytique sur* $U_0\times V_0$ *induite par* (5, 2, 3) [28]. *Si* X_0 *est un élément nilpotent distingué,* $\Delta(\omega_l)$ *est de la forme suivante*

$$\|X_0\|\Delta(\omega_l)=2x\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\dim(\mathfrak{l}_q)\frac{\partial}{\partial x_j}+\sum_{j=2}^{n}(\lambda_j+2)x_j\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j} \tag{2}$$
$$+\sum_{1\leq i\leq j\leq n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{j=2}^{n}a_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$$

où $a_{ij}(x)$ *et* $a_i(x)$ *sont des fonctions analytiques sur* U_0 *satisfaisant* $a_{ij}(0)=0$ $(1\leqq i\leqq j\leqq n)$.

On se restreint maintenant à un espace symétrique du type $G\times G/G$. On uitlise les notations de § 6.

Proposition 10.4. *Soit T une distribution sphérique invariante sur $\boldsymbol{X}$ de support singulier, c'est-à-dire* $\operatorname{supp} T \subset \boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}'$. *Alors T est identiquement nulle sur tout l'espace $\boldsymbol{X}$.*

Démonstration. Par hypothèse, σ_T satisfait l'équation différentielle (1) de la proposition 10.3 et $\operatorname{supp} \sigma_T \subset \{0\} \times V_0$. Si X_0 n'est pas $\mathfrak{l}_{\mathfrak{q}}$-distingué, la partie homogène de degré 2 de $\Delta(\omega_{\mathfrak{l}})$ en $u=0$ n'est pas nulle (cf. Lemme 4.6 [28]). D'après la proposition 2.2 [28], on a $\sigma_T=0$. Si X_0 est un élément nilpotent distingué, σ_T satisfait l'équation différentielle (2) de la proposition 10.3. Soit S est une distribution sur V_0. On étend S à $U_0 \times V_0$ en posant $(\bar{S}, \phi)=(S, \bar{\phi})$ où $\bar{\phi}(y)=\phi(0, y)$ $(\phi \in C_c^{\infty}(U_0 \times V_0))$. D'aprãs le théorème 36 (cf. § 3 [27]), on a $\sigma_T=\sum_{\alpha} c_{\alpha}(\partial^{|\alpha|} \bar{S} / \partial x^{\alpha})$ $(\alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n))$. Dans l'équation différentielle $(\Delta(\omega_l)+\omega_c) \sigma_T=(\zeta+\chi(\omega)) \sigma_T$, où χ est le caractère infinitésimal de T, on compare les ordres des deux membres:

$$\Delta(\omega_{\mathfrak{l}}) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha}} \bar{S}=\{\dim(\mathfrak{l}_{\mathfrak{q}})-2(\lambda_1+2)-\sum_{j=2}^{n}(k_j+2)(\lambda_j+1)\} \frac{\partial^{|\alpha'|}}{\partial x^{\alpha'}} \bar{S}$$
$$+\text{termes de degré inférieur}$$

où $\alpha'=(\alpha_1+1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$. Considérons le coefficient de $(\partial^{|\alpha'|} / \partial x^{\alpha'}) \bar{S}$. $\mathfrak{l}_{\mathfrak{q}}$ est somme directe de n $\mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{R})$-modules irréductibles de poids dominants $k_1=2, k_2, \cdots, k_n$ alors $\dim \mathfrak{l}_{\mathfrak{q}}=\sum_{j=1}^{n}(k_j+1)$. Ce coefficient est donc égal à $-2 \lambda_1-\sum_{j=2}^{n}(k_j+2) \lambda_j-n<0$. Comme le degré du membre de gauche est strictement supérieur au degré du membre de droite, on a une contradiction. Par conséquent $T=0$. C.Q.F.D.

Théorème 10.5. *Soit Θ une distribution sphérique invariante sur $\boldsymbol{X}$. La restriction de Θ à $\boldsymbol{X}'$ est une fonction analytique. Θ est localement intégrable sur $\boldsymbol{X}$.*

Démonstration. Pour un élément $x \in \boldsymbol{X}'$, soit $\mathfrak{a}$ le centralisateur de x dans $\mathfrak{q}$ et A le sous espace de Cartan de $\boldsymbol{X}$ correspondant à $\mathfrak{a}$. On pose $G[A']=\bigcup_{g \in G} g A' g^{-1}$. Soit Θ la restriction à $\boldsymbol{X}'$ de Θ. D'après le théorème 7.1, on a

$$\chi(D)[\Delta \tilde{\Theta}]=\gamma^{\mathfrak{a}}(D)[\Delta \tilde{\Theta}] \qquad (D \in \boldsymbol{D}(\boldsymbol{X})).$$

Soit $H_1, \cdots, H_n$ une base de $\mathfrak{a}$. Posons $\Omega=\sum_{j=1}^{n} H_j^2 \in S(\mathfrak{a})$ et $\square=\sum_{w \in W_c} w(\Omega) \in I(\mathfrak{a})$. Evidemment, $\square$ est un opérateur différentiel elliptique analytique. $\Delta(\tilde{\Theta})$ coincide, du sens des distributions avec une fonction analytique sur $G[A']$ car $(\square-\chi(\gamma^{\mathfrak{a}}(\square)^{-1}))[\Delta \tilde{\Theta}]=0$. Il existe alors une fonction analytique tel que $F=\tilde{\Theta}$ sur X'. D'après la proposition 7.2, F est de la forme f / Δ où f est une fonction localement bornée. Alors F est une fonction localement intégrable car $1 / \Delta$ est localement intégrable d'après le théorème 9.1.

Soit $\mathfrak{a}_1, \cdots, \mathfrak{a}_n$ un ensemble maximal de sous-espaces de Cartan non G-conjugués de $\mathfrak{q}$. On pose $A_j=Z_X(\mathfrak{a}_j)$ $(1 \leqq j \leqq n)$ et $G[A_j]=\bigcup_{g \in G} g A_j g^{-1}$. Soit O un voisinage ouvert G-invariant de e dans $\boldsymbol{X}$. Pour toute fonction $f \in C_c^{\infty}(O)$, on a

$$\left|\int_O f(x)\Theta(x)\mathrm{d}x\right| \leqq \sum_j \left|\int_{O\cap G[A_j]'} f(x)\Theta(x)\mathrm{d}x\right| < \infty .$$

Ainsi Θ est localement intégrable au voisinage de e.

Il suffit de démontrer l'intégrabilite locale au voisinage de chaque élément semi-simple, car l'adhérence de toute G-orbite contient un élément semi-simple. Soit x un élément semi-simple de $\boldsymbol{X}$. On pose $L_c=Z_{G_c}(x)$, $L=L_c\cap G$ et $M=L_c\cap \boldsymbol{X}$. On note $\mathfrak{l}_c=Z_{\mathfrak{g}_c}(x)$. Soit U un voisinage L-invariant connexe de e dans M tel que l'application $(g, y)\mapsto gxyg^{-1}$ de $G\times U$ sur un voisinage ouvert $G[xU]$ de x dans $\boldsymbol{X}$ définisse un espace fibré analytique de fibre L. Pour $\beta\in C_c^\infty(G\times U)$, on pose

$$f_\beta(xy)=\int_{G^y}\beta(g, y)\mathrm{d}g \qquad (y\in U)$$

où $G^y=\{g\in G\,;\, gxyg^{-1}=xy\}$. On définit la distribution sphérique L-invariante Φ sur U par

$$\Theta(f_\beta)=1\otimes\Phi(\beta) \qquad \text{pour } \beta\in C_c^\infty(G\times U)$$

On pose $C=\{y\in U\colon zy=yz \text{ pour tout } z\in U\}$ et $U_1=\{x\in U\,;\, x\in\exp[\mathfrak{l}_c, \mathfrak{l}_c]\}$. $C\times U_1$ et U sont difféomorphes par l'application $(c, y)\mapsto cy$. Par cette décomposition, on peut réduire le problème à un espace symétrique semi-simple. Alors d'après le résultat ci-dessus, Φ est localement intégrable au voisinage de e dans M. On pose

$$\nu_x(y)=\det((\mathrm{Id}-\mathrm{Ad}(y^{-1}))|_{\mathfrak{g}_c/\mathfrak{l}_c}) \qquad (y\in M)$$

et $'M=\{y\in M\,;\, \nu_x(y)\neq 0\}$. On prend U tel que $'M$ contienne l'adhérence xU. On a $\Theta(xy)=|\nu_x(xy)|\Phi(y)$. D'où Θ est localement intégrable au voisinage de x dans $\boldsymbol{X}$.

Finalement Θ est de la forme $\Theta=F+S$ où S est distribution sphérique invariante sur $\boldsymbol{X}$ à support singulier, c'est-à-dire $\operatorname{supp} S\subset \boldsymbol{X}\setminus\boldsymbol{X}'$. D'après la proposition 10.4, $S=0$.

C. Q. F. D.

§ 11. Description DSI

On utilise les notations de § 6. Soit $\mathfrak{a}$ un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{q}$ et $A_{\mathfrak{a}}=Z_{\boldsymbol{X}}(\mathfrak{a})$. Si $\mathfrak{a}_c$ est la sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_c$ qui contient $\mathfrak{a}$ et $(A_{\mathfrak{a}})_c$ le sous-groupe de Cartan de G_c correspondant à $\mathfrak{a}_c$, alors $(A_{\mathfrak{a}})_c$ est connexe et contient $A_{\mathfrak{a}}$. Soit $\Sigma^+(\mathfrak{a})$ l'ensemble des racines positives de $(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{a}_c)$, $S_R^{\mathfrak{a}}$ l'ensemble des racines réelles singulières positives et $S_I^{\mathfrak{a}}$ l'ensemble des racines imaginaires singulières positives. Posons $S^{\mathfrak{a}}=S_R^{\mathfrak{a}}\cup S_I^{\mathfrak{a}}$. Supposons qu'on puisse définir un homomorphisme ξ_ρ de $(A_{\mathfrak{a}})_c$ dans $\boldsymbol{C}^*=\boldsymbol{C}\setminus\{0\}$ par $\xi_\rho(\exp X)=e^{\rho(X)}$ $(X\in\mathfrak{a}_c)$. Si G_c est simplement connexe, ξ_ρ est toujours défini sur $(A_{\mathfrak{a}})_c$ ([34] 8.1.1). On peut vérifier qu'alors la forme linéaire $\rho_I=1/2\sum_{\alpha\in S_I^{\mathfrak{a}}}\alpha$ se remonte aussi en un homomorphisme ξ_{ρ_I} de $(A_{\mathfrak{a}})_c$ dans $\boldsymbol{C}^*$ (on utilise la remarque qui suit la définition 4.1 [25]). On pose pour $a\in A_{\mathfrak{a}}$

$$'\Delta^{\mathfrak{a}}(a)=\sum_{\alpha\in\Sigma^+(\mathfrak{a})}(1-\xi_\alpha(a)^{-1}), \qquad \Delta^{\mathfrak{a}}(a)=\xi_\rho(a)'\Delta^{\mathfrak{a}}(a),$$

$$'\Delta_R^{\mathfrak{a}}(a)=\prod_{\alpha\in S_R^{\mathfrak{a}}}(1-\xi_\alpha(a)^{-1}), \qquad \varepsilon_R^{\mathfrak{a}}(a)=\operatorname{sgn}('\Delta_R^{\mathfrak{a}}(a)),$$

$$'\Delta_I^{\mathfrak{a}}(a)=\prod_{\alpha\in S_I^{\mathfrak{a}}}(1-\xi_\alpha(a)^{-1}),$$

$$\varepsilon_I^{\mathfrak{a}}(a)=\operatorname{sgn}((\sqrt{-1})^{-n(I)}\xi_{\rho_I}(a)'\Delta_I^{\mathfrak{a}}(a)) \qquad (n(I)={}^{\#}S_I^{\mathfrak{a}}).$$

On pose $F=R$ (resp. I) si X est du genre I (resp. du genre II), et on utilisera les notations $S_F^{\mathfrak{a}}$, $\Delta_F^{\mathfrak{a}}$ et $(\varepsilon_F^{\mathfrak{a}}$. Pour une racine $\alpha\in\Sigma(a)$, on choisit $H_\alpha\in\mathfrak{a}^d=\sqrt{-1}(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{k})\cap(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{p})$ tel que $B(H_\alpha, H)=\alpha(H)$ pour tout $H\in\mathfrak{a}$, on définit H'_α par $H'_\alpha=(2/|\alpha|^2)H_\alpha$. Soit $A'_{\mathfrak{a}}(F)=\{a\in A_{\mathfrak{a}};\ \Delta_F(a)\neq 0\}$ et $W_G(A_{\mathfrak{a}})=N_G(A_{\mathfrak{a}})/Z_G(A_{\mathfrak{a}})$. Définissons la fonction localement constante $\varepsilon^F(w\,;a)$ sur $A'_{\mathfrak{a}}$ par $(\varepsilon_F^{\mathfrak{a}}\Delta^{\mathfrak{a}})(wa)=\varepsilon^F(w\,;a)\ (\varepsilon_F^{\mathfrak{a}}\Delta^{\mathfrak{a}})(a)$ $(w\in W_G(A_{\mathfrak{a}}),\ a\in A'_{\mathfrak{a}})$.

Soit $\mathfrak{a}_1, \cdots, \mathfrak{a}_n$ un ensemble maximal de sous-espaces de Cartan θ-invariant non G-conjugués de $\mathfrak{q}$, fixons un ordre pour les racines de $(\mathfrak{g}_c, (\mathfrak{a}_j)_c)$ et posons $A_j=Z_X(\mathfrak{a}_j)$ où on écrit j au lieu de $\mathfrak{a}_j$.

Si Θ est une distributions sphérique invariante sur X, alors la restriction de Θ à X'(notée $\tilde{\Theta}$) est une fonction analytique. On lui associe la famille ces fonctions (κ_j) $j=1, \cdots, n$ définies par

$$(1) \qquad \kappa_j(a)=(\varepsilon_F^j\Delta^j)(a)\tilde{\Theta}(a) \qquad \text{pour } a\in A'_j.$$

Ces fonctions sont ε^F-symétriques, c'est-à-dire,

$$(2) \qquad \kappa_j(wa)=\varepsilon^F(w\,;a)\kappa_j(a) \qquad \text{pour } w\in W(A_j),\ a\in A'_j.$$

Réciproquement, si on se donne une famille de fonctions analytiques sur A'_j et ε^F-symétriques, on peut leur associer une fonction $\tilde{\Theta}$, G-invariante et analytique sur X' par

$$(3) \qquad \tilde{\Theta}(gag^{-1})=[(\varepsilon_F^j\Delta^j)(a)]^{-1}\kappa_j(a), \qquad a\in A'_j,\ g\in G.$$

Le théorème ci-dessous décrit les fonctions κ_j pour lesquelles l'expression

$$(4) \qquad (\Theta, f)=\int_{X'}\tilde{\Theta}(x)f(x)\mathrm{d}x \qquad \text{où } f\in C_c^\infty(X)$$

définit une distribution sphérique invariante sur X.

Théorème 11.1. *La fonction G-invariante $\tilde{\Theta}$ sur X' associée par* (3) *à la famille $(\kappa_j)_{j=1,\dots,n}$ définit une distribution sphérique Θ sur X' par* (4) *si et seulement si les fonctions vérifient les conditions suivantes:*

(a-1) *Il existe un homomorphisme χ de $\boldsymbol{D}(X)$ dans $\boldsymbol{C}$ tel que:*

$$D\kappa_j=\lambda_j(D)\kappa_j \qquad \textit{pour } D\in I(\mathfrak{a}_j),\ \textit{ou } \lambda_j=\chi(\gamma^j)^{-1}$$

(a-2) *Chaque κ_j peut être prolongée analytiquement de A'_j à $A'_j(F)$*

(a-3) *Pour tout $j\in\{1, \cdots, n\}$ et $\alpha\in S_R^j$, posons $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_j$. Soit $\mathfrak{b}$ le sous-espace de Cartan de $\mathfrak{q}$ et β une racine imaginaire singulière de $\Sigma(\mathfrak{b})$ obtenue à l'aide de $\mathfrak{a}$ à partir d'une racine réelle singulière α dans $\mathfrak{q}$ (cf. Définition* 1.4). *Considérons sur les racines de $\mathfrak{b}$ un ordre pour lequel $\Sigma^+(\mathfrak{b})=\nu\cdot\Sigma^+(\mathfrak{a})$ contenant β. Définissons $\kappa_{\mathfrak{b}}$ à partir de $\tilde{\Theta}$ tel que*

$$\kappa_{\mathfrak{b}}(a)=(\varepsilon_F^{\mathfrak{b}}\Delta^{\mathfrak{b}})(a)\tilde{\Theta}(a) \qquad (a\in A'_{\mathfrak{b}})$$

Alors pour $a_0 \in A_{\mathfrak{a}} \cap A_{\mathfrak{b}}$ *tel que* $\prod_{\gamma \in \Sigma^+(\mathfrak{a}) \setminus \{\alpha\}} (1-\xi_\gamma(a_0^{-1})) \neq 0$, *elle satisfait*

$$H'_\alpha(\varepsilon_F^{\mathfrak{a}} \kappa_{\mathfrak{a}})(a_0) = H'_\beta(\varepsilon_F^{\mathfrak{b}} \kappa_{\mathfrak{b}})(a_0)$$

où chaque membre désigne la valeur limite en a_0 *qui existe sous les conditions* (2), (a-1) *et* (a-2).

§ 12. Intégrable orbitale

Pour préparer la démonstration du théorème 1.11, on commence cette section par quelques lemmes. On continue à utiliser les notations de § 6.

Soit $\mathfrak{a}$ une sous-espace de Cartan de $\mathfrak{q}$ et $A_{\mathfrak{a}} = Z_X(\mathfrak{a})$. Pour une fonction f de $C_c^\infty(X)$, on définit l'intégrale orbitale $K_f^{\mathfrak{a}}$ sur $A'_{\mathfrak{a}}$ par

$$K_f^{\mathfrak{a}}(a) = \varepsilon_F^{\mathfrak{a}}(a)\,\mathrm{conj}\,(\Delta^{\mathfrak{a}}(a)) \int_{G/A_G^{\mathfrak{a}}} f(gag^{-1})\mathrm{d}_{\mathfrak{a}}\dot{g} \qquad (a \in A'_{\mathfrak{a}}) \tag{12.1}$$

où $A_G^{\mathfrak{a}} = Z_G(A_{\mathfrak{a}})$ et $\mathrm{d}_{\mathfrak{a}}\dot{g}$ est une mesure invariante sur $G/A_G^{\mathfrak{a}}$.

Lemma 12.1. *Pour toute fonction* f *de* $C_c^\infty(X)$, *on a*

$$K_{Df}^{\mathfrak{a}} = \gamma^{\mathfrak{a}}(D) K_f^{\mathfrak{a}} \qquad (D \in S(\mathfrak{q}_c)^G) \tag{12.2}$$

ou $\gamma^{\mathfrak{a}}$ *est l'isomorphisme de* $\boldsymbol{D}(G/H)$ *sur* $I(\mathfrak{a}_c)$ *défini dans la proposition* 3.1 *de* § 4 *et la proposition de* § 5.

Démonstration. $F(x) = \int_{G/A_G^{\mathfrak{a}}} f(gxg^{-1})\mathrm{d}_{\mathfrak{a}}\dot{g}$ est une fonction de classe C^∞ sur $X_{A_{\mathfrak{a}}}$ invariante par G. On applique le théorème 7.1 pour obtenir le résultat. C. Q. F. D.

D'après la formule d'intégration de Weyl de la proposition 2.1, on a :

Lemme 12.2. *Fixons une mesure de Haar* $\mathrm{d}_{\mathfrak{a}} a$ *sur* $A_{\mathfrak{a}}$. *Alors il existe une constant positive* $\alpha_{\mathfrak{a}}$ *telle que pour toute fonction* $f \in C_c(X_A)$, *on ait*

$$\int_{X_{A_{\mathfrak{a}}}} f(x)\mathrm{d}x = \alpha_{\mathfrak{a}} \int_{A_{\mathfrak{a}}} |\Delta^{\mathfrak{a}}(a)|^2 \mathrm{d}_{\mathfrak{a}} a \int_{G/A_G^{\mathfrak{a}}} f(gag^{-1})\mathrm{d}_{\mathfrak{a}}\dot{g}\,. \tag{12.3}$$

On note j au lieu de $\mathfrak{a}_j$. On a alors

$$\int_{X'} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \int_{A'_j} (\varepsilon_F^j \Delta^j)(a) K_f^j(a)\mathrm{d}_j a\,. \tag{12.4}$$

Soit $\tilde{\Theta}$ la restriction de Θ à X'. Alors d'aprás le théorème 10.5, $\tilde{\Theta}$ est une fonction analytique localement intégrable. On pose $\kappa_j(a) = (\varepsilon_F^j \Delta^j)\tilde{\Theta}(a)$ $(a \in A'_j)$. D'aprás la proposition 10.4, on obtient l'expression suivante de la distribution :

$$\begin{aligned}\Theta(f)&=(\Theta,\ f)\\ &=\int_{X'} f(x)\Theta(x)\mathrm{d}x\\ &=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\int_{A'_j} K_f^j(a)\kappa_j(a)\mathrm{d}_j a\,.\end{aligned}$$

D'après la proposition 4.1, on identifie $S(\mathfrak{q}_c)^G$ et $D(X)$. Soit $D\to D^*$ l'anti-automorphisme de $S(\mathfrak{q}_c)^G$ défini par $X\mapsto -X$. Par définition, Θ est une distribution sphérique de caractère infinitésimal χ si et seulement si

$$(D\Theta,\ f)=(\Theta,\ D^*f)=\chi(D)(\Theta,\ f)\qquad (D\in S(\mathfrak{q}_c)^G)\,.$$

Cette formule s'écrit aussi

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\int_{A'_j} K_{D^*f}^j\cdot\kappa_j\mathrm{d}_j a=\chi(D)\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\int_{A'_j} K_f^j\cdot\kappa_j\mathrm{d}_j a\,. \tag{12.5}$$

Soit $\mathfrak{a}$ un sous-espace de Cartan et α une racine réelle singulière associée. Soit $\mathfrak{b}$ le sous-espace de Cartan défini à l'aide de $\mathfrak{a}$ et la racine α (cf. Définition 4.3 [25]). On étudie maintenant la relation de saut des fonction $K_f^{\mathfrak{a}}$ et $K_f^{\mathfrak{b}}$ l'intersection de $A_{\mathfrak{a}}$ et $A_{\mathfrak{b}}$. Soit ν l'automorphisme de Cayley de $\mathfrak{g}_c$ tel que $\nu(\mathfrak{a}_c)=\mathfrak{b}_c$. D'après lemme 4.1 [25], on prend un élément X_α de $\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}\,;\alpha)$ dans $\mathfrak{h}_-\oplus\mathfrak{q}_+$ normalisé tel que $\alpha([X_\alpha,\ \sigma(X_\alpha)])=2$ et pose $H'_\alpha=[X_\alpha,\ \sigma X_\alpha]$ et $H'_\beta=\nu(H'_\alpha)$. De plus, on note $\beta=\alpha\cdot\nu^{-1}$, $A=A_{\mathfrak{a}}$ et $B=A_{\mathfrak{b}}$. On note aussi Σ'_α l'ensemble des éléments semi-reguliers de $A\cap B=\Sigma_\alpha$, c'est-à-dire $\Sigma'_\alpha=\{a\in\Sigma_\alpha : \xi_\gamma(a)\neq 1$ pour tout $\gamma(\neq\alpha)\in\Sigma^+(\mathfrak{a})\}$.

Lemme 12.3. *Pour tout $f\in C_0^\infty(X)$, la fonction $K_f^{\mathfrak{q}}$ peut-être prolongée en une C^∞-fonction qui est aussi de classe C^∞ sur l'adhérence de toute composante connexe de $A'_{\mathfrak{a}}(I)$ si $X=G$ (resp. $A'_{\mathfrak{a}}(R)$ si $X\cong G_c/G$). Ensuit soit a un élément dans $A^{\mathfrak{a}}$ et D élément dans $S(\mathfrak{a}_c)$ tels que $S_\alpha D=-D$ pour toute racine imaginaire (resp. réelle) singulière pour qui $\xi_\alpha(a)=1$. Alors $DK_f^{\mathfrak{q}}$ peut-être prolongée en une fonction continue autour de a.*

Il exist une fonction localement constante $c_\alpha(a_0)$ qui ne s'annule en aucun point de Σ'_α, telle que pour tout $D\in S(\mathfrak{a}_c)$ et $a_0\in\Sigma'_\alpha$

I) *dans le cas où $X\cong G$*

$$\begin{aligned}c_\alpha(a_0)DK_f^{\mathfrak{a}}(a_0)=&(D^\nu K_f^{\mathfrak{b}})(a_0\exp(\sqrt{-1}\theta H'_\alpha))|_{\theta=+0}\\ &-(D^\nu K_f^{\mathfrak{b}})(a_0\exp(\sqrt{-1}\theta H'_\beta))|_{\theta=-0}\end{aligned} \tag{12.6}$$

ou $D^\nu=\nu(D)$:

II) *dans le cas où $X\cong G_c/G$,*

$$\begin{aligned}c_\alpha(a_0)D^\nu K_f^{\mathfrak{b}}(a_0)=&(DK_f^{\mathfrak{a}})(a_0\exp(tH'_\alpha))|_{t=+0}\\ &-(DK_f^{\mathfrak{a}})(a_0\exp tH'_\alpha)|_{t=-0}\end{aligned} \tag{12.7}$$

Démonstration. On pose $\Xi_X=Z_X(a_0)$, $\Xi_G=Z_G(a_0)$ et $\Xi_{G_c}=Z_{G_c}(a_0)$. De plus $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}=Z_{\mathfrak{g}}(a_0)$ et $\mathfrak{z}_{\mathfrak{q}}=Z_{\mathfrak{q}}(a_0)$. Si un voisinage $\overline{W}_G$ de $\bar{e}=e\Xi_G$ dans G/Ξ_G est suffisamment petit, il existe alors une section locale ϕ de $\overline{W}_G$ dans G telle que $\overline{\phi(\bar{g})}=\bar{g}$ $(\bar{g}\in\overline{W}_G)$.

On définit un voisinage ouvert U_{Ξ_X} de a_0 dans Ξ_X satisfaisant les conditions (c-1), (c-2), (c-3) et (c-4).

(c-1) Pour tout $\xi\in Cl(U_{\Xi_X})$, $\det(\mathrm{Ad}(\xi^{-1}-\mathrm{Id})|_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}}\neq 0$

(c-2) L'application

$$\Phi ; \overline{W}_G\times U_{\Xi_X} \longrightarrow X \qquad (12.8)$$

$$(\bar{g}, \xi)\longmapsto \phi(\bar{g})\xi\phi(\bar{g})^{-1}$$

est un difféomorphisme analytique sur un voisinage ouvert U_X de a_0 dans X.

(c-3) Soit $L=[\Xi_G, \Xi_G]$ et $L_c=[\Xi_{G_c}, \Xi_{G_c}]$. On pose $L_X=L$ et $L_X=\{g\sigma(g)^{-1}; g\in L_c\}$ dans le cas où $X=G$ et $X\cong G_c/G$ respectivement. Ensnite $\Sigma_X=\{x\in\Sigma_X; xy=yx$ pour tout $y\in\Xi_X\}$. Soit V_L^X un voisinage ouvert de e dans L_X et U_Σ^X un voisinage ouvert a_0 dans Σ_X. L'application de $U_\Sigma^X\times V_L^X$ dans U_{Ξ_X} définie par $(h, l)\rightarrow hl=lh$ est un difféomorphisme analytique.

A, B sont des sous-espaces de Cartan contenues dans Ξ_X. Tout élément de Ξ'_X est conjugué à un élément de A' ou B' par un élément de L (cf. Lemme 4.2 [25]).

(c-4) Il existe un voisinage ouvert $\mathfrak{z}_\mathfrak{q}^0$ de 0 dans $\mathfrak{z}_\mathfrak{q}$ tel que l'application analytique $\mathfrak{z}_\mathfrak{q}^0\ni X\mapsto a_0\exp X$ soit un difféomorphisme analytique $\mathfrak{z}_\mathfrak{q}^0$ sur U_{Ξ_X}. Soit $W_G(A_\mathfrak{h}; a_0)=\{w\in W_G(A_\mathfrak{h}); wa_0=a_0\}$ ($\mathfrak{h}=\mathfrak{a}$ ou $\mathfrak{b}$). Si on pose $V_\mathfrak{h}=A'_\mathfrak{h}\cap U_{\Xi_X}$, $wV_\mathfrak{h}\cap V_\mathfrak{h}=\emptyset$ pour tout $w\notin W_G(A_\mathfrak{h}; a_0)$ ($\mathfrak{h}=\mathfrak{a}$ ou $\mathfrak{b}$).

Nous allons calculer $K_f^\mathfrak{h}$ explicitement. Si on pose $\mathfrak{l}_\mathfrak{q}=\{[X, Y]\in\mathfrak{z}_\mathfrak{q}: X\in\mathfrak{z}_\mathfrak{g}, Y\in\mathfrak{z}_\mathfrak{q}\}$ et $\sigma_\mathfrak{q}=\{X\in\mathfrak{z}_\mathfrak{q}: [X, Y]=0$ pour tout $Y\in\mathfrak{z}_\mathfrak{q}\}$, alors $\mathfrak{z}_\mathfrak{q}=\mathfrak{l}_\mathfrak{q}\oplus\sigma_\mathfrak{q}$. Ensuite, on note $\mathfrak{l}_\mathfrak{q}^0=\mathfrak{z}_\mathfrak{q}^0\cap\mathfrak{l}_\mathfrak{q}$ et $\sigma_\mathfrak{q}^0=\mathfrak{z}_\mathfrak{q}^0\cap\sigma_\mathfrak{q}$. Par l'application exponentielle, $\mathfrak{l}_\mathfrak{q}^0$ et V_L^X sont difféomorphes. De plus, par l'application analytique $X\mapsto a_0\exp X$ $(X\in\sigma_\mathfrak{q}^0)$, $\sigma_\mathfrak{q}^0$ et U_Σ^X sont difféomorphes. Pour $r\in C_c^\infty(\overline{W}_G)$, $s\in C_c^\infty(U_\Sigma^X)$ et $h\in C_c^\infty(\mathfrak{l}_\mathfrak{q}^0)$, on définit un élément $f_{r,s,h}$ de $C_c^\infty(U_X)$ par

$$f_{r,s,h}(\phi(\bar{g})(a_0\exp Y)\phi(\bar{g})^{-1})=r(\bar{g})f_{s,h}(a_0\exp Y) \qquad (12.9)$$

où

$$f_{s,h}(a_0\exp Y)=s(a_0\exp X')h(X) \quad \begin{pmatrix} Y=X'+X\in\mathfrak{z}_\mathfrak{q}^0,\ X'\in\sigma_\mathfrak{q}^0, \\ X\in\mathfrak{l}_\mathfrak{q}^0,\ \bar{g}\in\overline{W}_G \end{pmatrix}$$

De plus, lorsque r, s, h varient, les fonctions $f_{r,s,h}$ engendrent un sous-espace dense de $C_c^\infty(U_X)$. Pour la fonction $f_{r,s,h}(a)$ $(a=a_0\exp Y\in A)$ ci-dessus, on a

$$\begin{aligned}
K_{f_{r,s,h}}^\mathfrak{a}(a)&=\varepsilon_F^\mathfrak{a}(a)\operatorname{conj}(\Delta^\mathfrak{a}(a))\int_{G/A_G}f_{r,s,h}(gag^{-1})d\tilde{g} \qquad (A_G=Z_G(A))\\
&=\varepsilon_F^\mathfrak{a}(a)\operatorname{conj}(\Delta^\mathfrak{a}(a))\int_{G/\Xi_G}\int_{\Xi_G/A_G}f_{r,s,h}(g\xi a\xi^{-1}g^{-1})d\tilde{\xi}d\tilde{g}\\
&=c(r)\varepsilon_F^\mathfrak{a}(a)\operatorname{conj}(\Delta^\mathfrak{a}(a))\int_{\Xi_G/A_G}f_{s,h}(a_0\exp(\mathrm{Ad}(\xi)Y))d\tilde{\xi}\\
&=c(r)\varepsilon_F^\mathfrak{a}(a)\operatorname{conj}(\Delta^\mathfrak{a}(a))\sum_{w\in W_G(A;\alpha;a_0)}s(h^w)\int_{L/A_L}h(\mathrm{Ad}(l)X)d\tilde{l}
\end{aligned}$$

où $c(r)=\int_{G/\Xi_G} r(\bar{g})d\bar{g}$, $W_G(A\,;\,\alpha\,;\,a_0)=\{w\in W_G(A\,;\,a_0):\,w\alpha=\alpha\}$ et $h^w=(a_0\exp X')^w=w(a_0\exp X')$. D'autre part, de la même façon,

$$K^{\mathfrak{b}}_{f_{r,s,h}}(a)=c(r)\varepsilon^{\mathfrak{b}}_F(a)\operatorname{conj}(\Delta^{\mathfrak{b}}(a))\sum_{w\in W_G(B;\beta;a_0)} s(h^w)\int_{L/B_L} h(\mathrm{Ad}\,(l)X)d\hat{l}$$
$$(a=a_0\exp Y\in B)$$

On va utiliser le fait que le résultat est connu pour l'espace symétrique L_X qui est de rang 1. Pour cela, on introduit les notations suivantes: dans le cas où $L_X\cong SL(2,\boldsymbol{R})$, $\delta^{\mathfrak{a}}_F(X)=\delta^{\mathfrak{a}}_R(X)=\operatorname{sgn}\alpha(X)$ $(X\in\mathfrak{a})$ et $\delta^{\mathfrak{b}}_F(X)=1$ $(X\in\mathfrak{b})$ dans le cas où $L_X\cong SL(2,\boldsymbol{C})/SL(2,\boldsymbol{R})$ $\delta^{\mathfrak{a}}_F(X)=1$ $(X\in\mathfrak{a})$ et $\delta^{\mathfrak{b}}_F(X)=\delta^{\mathfrak{b}}_I(X)=\operatorname{sgn}\operatorname{Re}\beta(X)$ $(X\in\mathfrak{b})$.

On définit l'intégrale orbitale sur $\mathfrak{z}^0_{\mathfrak{q}}$ d'une fonction $h\in C^\infty_c(\mathfrak{l}^0_{\mathfrak{q}})$ par

$$\psi^{\mathfrak{a}}_h(X)=\delta^{\mathfrak{a}}_F(X)\alpha(X)\int_{L/A_L} h(\mathrm{Ad}\,(l)X)\,d\hat{l}\qquad(X\in\mathfrak{a}')$$

et

$$\psi^{\mathfrak{b}}_h(X)=\delta^{\mathfrak{b}}_F(X)\beta(X)\int_{L/B_L} h(\mathrm{Ad}\,(l)X)d\hat{l}\qquad(X\in\mathfrak{b}')\,.$$

D'après la discussion ci-dessus, l'espace symétrique $G\times G/G$ se réduit à l'espace symetrique $SL(2,\boldsymbol{R})\times SL(2,\boldsymbol{R})/SL(2,\boldsymbol{R})$. En utilisant la relation de sant des fonctions dans le cas $SL(2,\boldsymbol{C})/SL(2,\boldsymbol{R})$ (Théorème 3.1 [23]) et le cas $SL(2,\boldsymbol{R})$ (Théorème 1.3. 15[33]), le lemme s'en déduit. C.Q.F.D.

Le fonction $\kappa_{\mathfrak{a}}$ sur $A'_{\mathfrak{a}}$ se déduit des propriétés des intégrales orbitales $K^{\mathfrak{a}}_f$.

Lemma 12.4. *Soit Ω un composant connexe de $A'(F)$. Pour tout $a_0\in\mathrm{Cl}(\Omega)$, l'adhérence de Ω, il existe un polynôme $p_w(w\in W_c)$ de $\mathfrak{a}_c$, tel que si $X\in\mathfrak{a}$ est suffisamment petit et $a_0\exp X\in\Omega$,*

$$\kappa_{\mathfrak{a}}(a_0\exp X)=\sum_{w\in W_c} p_w(X)e^{\langle wA,\,X\rangle}\qquad(\Lambda\in\mathfrak{a}^*_c)\tag{12.10}$$

Sous le condition que $p_{ww'}=p_w(w'\in W_c(\Lambda))$, le polynôme p_w est déterminé uniquement et son degré ne dépasse pas l'ordre de $W_c(\Lambda)$.

Démonstration. D'après la proposition 7.2, la forme de $\kappa_{\mathfrak{a}}$ est déterminée. D'après la valeur au bord de $K^{\mathfrak{a}}_f$ sur $A'_{\mathfrak{a}}$, $\kappa_{\mathfrak{a}}$ peut-être prolongée en une fonction analytique sur $A'_{\mathfrak{a}}(F)$ car θ est une distribution sphérique invariante (Théorème I.4.30 et I.6.3 [33]).
C.Q.F.D.

Lemme 12.5. (i) *Soit α une racine réelle singulière de $\mathfrak{a}$*
1) *Dans ce cas où $\boldsymbol{X}=G$, pour tout $D\in S(\mathfrak{a}_c)$*

$$[D\kappa_{\mathfrak{a}}]^{\alpha+}_{-}=-[D^{S_\alpha}\kappa_{\mathfrak{a}}]^{\alpha+}_{-}=\frac{1}{2}[(D-D^{S_\alpha})\kappa_{\mathfrak{a}}]^{\alpha+}_{-}\qquad sur\ \Sigma'_\alpha,$$

$$DK^{\mathfrak{a}}_f=D^{S_\alpha}K^{\mathfrak{a}}_f=\frac{1}{2}(D+D^{S_\alpha})K^{\mathfrak{a}}_f\qquad sur\ \Sigma'_\alpha$$

où $[\kappa]_{-}^{\alpha+}=\kappa^{\alpha+}(a_0)-\kappa^{\alpha-}(a_0)$ *et* $\kappa^{\alpha\pm}(a_0)=\lim_{t\to\pm 0}\kappa(a_0\exp tH'_\alpha)$.

2) *Dans le cas où* $X\cong G_c/G$, *pour tout* $D\in S(\mathfrak{a}_c)$

$$[DK_f^{\mathfrak{a}}]_{-}^{\alpha+}=[D^{S_\alpha}K_f^{\mathfrak{a}}]_{-}^{\alpha+}=\frac{1}{2}[(D+D^{S_\alpha})K_f^{\mathfrak{a}}]_{-}^{\alpha+}\qquad \text{sur } \Sigma'_\alpha .$$

(ii) *Soit* α *une racine imaginaire singulière de* $\mathfrak{a}$

1) *Dans le cas où* $X=G$, *pour tout* $D\in S(\mathfrak{a}_c)$

$$[DK_f^{\mathfrak{a}}]_{-}^{\alpha+}=[D^{S_\alpha}K_f^{\mathfrak{a}}]_{-}^{\alpha+}=\frac{1}{2}[(D+D^{S_\alpha})K_f^{\mathfrak{a}}]_{-}^{\alpha+}\qquad \text{sur } \Sigma'_\alpha .$$

2) *Dans le cas où* $X\cong G_c/G$, *pour tout* $D\in S(\mathfrak{a}_c)$

$$[D\kappa_{\mathfrak{a}}]_{-}^{\alpha+}=-[D^{S_\alpha}\kappa_{\mathfrak{a}}]_{-}^{\alpha+}=\frac{1}{2}[(D-D^{S_\alpha})\kappa_{\mathfrak{a}}]_{-}^{\alpha+}\qquad \text{sur } \Sigma'_\alpha .$$

$$DK_f^{\mathfrak{a}}=D^{S_\alpha}K_f^{\mathfrak{a}}=\frac{1}{2}(D+D^{S_\alpha})K_f^{\mathfrak{a}}\qquad \text{sur } \Sigma'_\alpha .$$

Démonstration. Soit α une racine réelle (resp. imaginaire) singulière dans le cas où $X\cong G$ (resp. G_c/G). Il existe un élément $w_\alpha\in W_G(A_{\mathfrak{a}})$ tel que $\overline{w}_\alpha=S_\alpha$ (cf. la remarque du appendice [26]). On pose $a_t=\exp(tH'_\alpha)$, alors $w_\alpha a_t=a_{-t}$. Ensuite $w_\alpha a=a$ et $\varepsilon^F(w_\alpha\,;\,a)=1$ pour $a\in\Sigma_\alpha$. D'après $\kappa_{\mathfrak{a}}(w_\alpha a)=\varepsilon^F(w_\alpha\,;\,a)\kappa_{\mathfrak{a}}(a)$ $(a\in A'_{\mathfrak{a}}(F))$, la fonction $\kappa_{\mathfrak{a}}(aa_t)$, défini pour t sufisamment petit, $t\neq 0$, est paire en t pour $a\in\Sigma'_\alpha$ fixé. Alors pour $D\in S(\mathfrak{a}_c)$, $(D+D^{S_\alpha})\kappa_{\mathfrak{a}}(aa_t)$ est paire en t. Par conséquent, $\kappa_{\mathfrak{a}}$ satisfait aux propriétés de l'énoncé.

D'après le lemme 12.3, la fonction $K_f^{\mathfrak{a}}$ peut-être prolongé en une fonction de classe C^∞ sur l'adhérence de toute composante connexe de $A'(I)$ (resp. $A'(R)$) dans le cas où $X=G$ (resp. $X\cong G_c/G$). Alors, $K_f^{\mathfrak{a}}$ satisfait aux propriétés ci-dessus. C. Q. F. D.

§ 13. Démonstration du théorème 11.1

Pour une distribution sphérique invariante Θ, soit $\tilde{\Theta}$ la fonction analytique sur X' définie par Θ. Si on pose $\tilde{\kappa}_j(a)=\Delta^j(a)\tilde{\Theta}(a)$ $(a\in A'_j)$, $\tilde{\kappa}_j$ satisfait aux conditions (a-1), (a-2) du théorème 11.1. On va alors démontrer que sous les conditions (a-1), (a-2), la formule

$$(D\Theta,\,f)=(\Theta,\,D^*f)=\chi(D)(\Theta,\,f)\qquad (D\in S(\mathfrak{q}_c)^G) \tag{13.1}$$

est équivalente à la condition (a-3). On reécrit la formule (13.1) comme suit

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\int_{A'_j}K^j_{D^*f}\cdot\kappa_j\mathrm{d}_ja=\chi(D)\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\int_{A'_j}K^j_f\cdot\kappa_j\mathrm{d}_ja\,. \tag{13.2}$$

D'après le théorème 7.1, κ_j satisfait

$$\gamma^j(D)\kappa_j=\chi(D)\kappa_j\qquad (D\in S(\mathfrak{q}_c)^G,\ 1\leqq j\leqq n)\,.$$

D'après le lemme 12.2, on a

$$\sum_j\alpha_j\int_{A'_j}\gamma^j(D)^*K^j_f\cdot\kappa_j\mathrm{d}_ja=\sum_j\alpha_j\int_{A'_j}K^j_f\cdot\gamma^j(D)\kappa_j\mathrm{d}_ja \tag{13.3}$$

car $\gamma^j(D^*)=\gamma^j(D)^*$.

Si on pose $I_j=\int_{A'_j}\{\gamma^j(D)^*K_f^j\cdot\kappa_j \mathrm{d}_j a-K_f^j\cdot\gamma^j(D)\kappa_j\}\mathrm{d}_j a$, on obtient

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j I_j=0\,. \tag{13.4}$$

Soit $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_j$ et α une racine réelle singulière associée. Soit $\mathfrak{b}$ le sous-espace de Cartan défini à partir de $\mathfrak{a}$ et de la racine α. On note $A=A_{\mathfrak{a}}$ et $B=A_{\mathfrak{b}}$. Pour tout $a_0\in\Sigma'_\alpha$, soit U_X un voisinage de a_0 dans $\boldsymbol{X}$ satisfaisant aux conditions (c-1), (c-2), (c-3) et (c-4) du lemme 12.3. Soit f un élément de $C_c^\infty(\boldsymbol{X})$ de la forme (12.9). Alors $K_f^j=0$ si la classe $[\mathfrak{a}_j]$ de conjugaison par $K\cap G$ n'est ni $[\mathfrak{a}]$ ni $[\mathfrak{b}]$. De plus $\operatorname{supp}K_f^{\mathfrak{h}}\subset\bigcup_{w\in W_G(A_{\mathfrak{h}})}wV_{\mathfrak{h}}$ ($\mathfrak{h}=\mathfrak{a},\mathfrak{b}$). La formule (13.4) devient

$$\alpha_{\mathfrak{a}}I_{\mathfrak{a}}+\alpha_{\mathfrak{b}}I_{\mathfrak{b}}=0\,. \tag{13.5}$$

Si on prend $\gamma^{\mathfrak{a}}(D)=\sum_{\gamma\in\Sigma^+(\mathfrak{a})}(H_\gamma)^2$, on a

$$I_{\mathfrak{a}}=\frac{1}{|\alpha|\,|W_G(A\,;\,\{\pm\alpha\})|}\sum_{w\in W_G(A)}\sum_{\gamma\in\Sigma^+(\mathfrak{a})}\alpha(H_\gamma^{\bar{w}}) \tag{13.6}$$
$$\times\int_{\Sigma'_\alpha}\{-H_\gamma^{\bar{w}}K_f^{\mathfrak{a}}]_-^{\alpha+}\cdot\kappa_{\mathfrak{a}}+[K_f^{\mathfrak{a}}]_-^{\alpha+}\cdot H_\gamma^{\bar{w}}\kappa_{\mathfrak{a}}\}\mathrm{d}_\alpha a$$

où $W_G(A\,;\,\{\pm\alpha\})=\{w\in W_G(A)\colon \bar{w}\{\pm\alpha\}=\{\pm\alpha\}\}$. D'abord, on considère le cas où $X\cong G_c/G$. D'après $\sum_{\gamma\in\Sigma^+(\mathfrak{a})}\alpha(H_\gamma^{\bar{w}})H_\gamma^{\bar{w}}=(1/2)H'_\alpha$ et $[H'_\alpha K_f^{\mathfrak{a}}]_-^{\alpha+}=0$ sur Σ'_α (cf. Lemme 12.5), on a alors

$$I_{\mathfrak{a}}=\frac{N_\alpha}{2|\alpha|}\int_{\Sigma'_\alpha}[K_f^{\mathfrak{a}}]_-^{\alpha+}\cdot(H_\alpha\kappa_{\mathfrak{a}})\mathrm{d}_\alpha a\,. \tag{13.7}$$

On obtient de même

$$I_{\mathfrak{b}}=\frac{1}{\sqrt{-1}\,|\beta|\,|W_G(B\,;\,\{\pm\beta\})|}\sum_{w\in W_G(B)}\sum_{\gamma\in\Sigma^+(\mathfrak{b})}\beta(H_\gamma^{\bar{w}}) \tag{13.8}$$
$$\times\int_{\Sigma'_\beta}\{-H_\gamma^{\bar{w}}K_f^{\mathfrak{b}}\cdot[\kappa_{\mathfrak{b}}]_-^{\beta+}+K_f^{\mathfrak{b}}[H_\gamma^{\bar{w}}\kappa_{\mathfrak{b}}]_-^{\beta+}\}\mathrm{d}_\beta a\,.$$

D'après $[\kappa_{\mathfrak{b}}]_-^{\beta+}=0$ et $\mathrm{d}_\alpha a=\mathrm{d}_\beta a$ sur $\Sigma'_\alpha=\Sigma'_\beta$, on obtient alors l'expression ci-desous pour $I_{\mathfrak{b}}$

$$I_{\mathfrak{b}}=\frac{N_\beta}{2\sqrt{-1}\,|\beta|}\int_{\Sigma'_\alpha}K_f^{\mathfrak{b}}\cdot[H_\beta\kappa_{\mathfrak{b}}]_-^{\beta+}\mathrm{d}_\alpha a\,. \tag{13.9}$$

L'equation (13.5) devient

$$\int_{\Sigma'_\alpha}\{[K_f^{\mathfrak{a}}]_-^{\alpha+}\cdot H_\alpha\kappa_{\mathfrak{a}}+d_\alpha K_f^{\mathfrak{b}}\cdot[H_\beta\kappa_{\mathfrak{b}}]_-^{\beta+}\}\mathrm{d}_\alpha a=0 \tag{13.10}$$

où $d_\alpha=(\alpha_{\mathfrak{a}}N_\alpha)/\sqrt{-1}(\alpha_{\mathfrak{b}}N_\beta)$. D'autre part d'après le lemme 12.3, on a

$$[K_f^{\mathfrak{a}}]_-^{\alpha-}=C^\alpha(a)K_f^{\mathfrak{b}}\,. \tag{13.11}$$

On pose

$$\phi = K_f^{\mathfrak{h}}|_{\Sigma'_\alpha},$$

$$F(a) = C^\alpha(a) H_\alpha \kappa_{\mathfrak{a}} + d_\alpha [H_\beta \kappa_{\mathfrak{b}}]_-^{\beta+} \qquad (a \in \Sigma'_\alpha).$$

Alors (13.10) s'écrit

$$\int_{\Sigma'_\alpha} \phi(a) F(a) \mathrm{d}_\alpha a = 0, \ F(wa) = \varepsilon_\alpha(w, a) \qquad (w \in W_A(G : \alpha), \ a \in \Sigma'_\alpha)$$

Par conséquent, on a

$$C^\alpha(a_0) H'_\alpha \kappa_{\mathfrak{a}} + d_\alpha [H'_\beta \kappa_{\mathfrak{b}}]_-^{\beta+} = 0 \qquad (a_0 \in \Sigma'_\alpha). \tag{13.12}$$

La démonstration est semblable dans le cas où $X = G$.

$$d_\alpha [H'_\alpha \kappa_{\mathfrak{a}}]_-^{\alpha+} + C^\alpha(a_0)(H'_\beta \kappa_{\mathfrak{b}})(a_0) = 0 \qquad (a_0 \in \Sigma'_\alpha) \tag{13.13}$$

où $d_\alpha = \sqrt{-1}(\alpha_{\mathfrak{a}} N_\alpha)/(\alpha_{\mathfrak{b}} N_\beta)$.

Lemme 13.1. *Dans le cas où $X = G$, on a $C^\alpha(a_0) = -2\sqrt{-1}(\alpha_{\mathfrak{a}} N_\alpha)/(\alpha_{\mathfrak{a}} N_\beta)$. Dans le cas où $X \cong G_c/G$, on a $C^\alpha(a_0) = \sqrt{-1}\ (\alpha_{\mathfrak{a}} N_\alpha)/(\alpha_{\mathfrak{b}} N_\beta)$.*

Démonstration. Soit (π, V) une représentation holomorphe irréductible de dimension finie de G_c dans V de poids dominant Λ et soit χ_Λ son caractère. La restriction Θ_Λ de χ_Λ à X est une distribution sphérique invariante. Posons $\tilde{\kappa}_{\mathfrak{h}} = \Delta^{\mathfrak{h}} \Theta_\Lambda$ et $\kappa_{\mathfrak{h}} = \varepsilon_F^{\mathfrak{h}} \Delta^{\mathfrak{h}} \Theta_\Lambda$ sur $A'_{\mathfrak{h}}$ pour $\mathfrak{h} = \mathfrak{a}$ ou $\mathfrak{b}$. Alors ces fonctions satisfont à l'équation (13.5), c'est-à-dire que, pour $X \cong G_c/G$, elles satisfont (13.12) et pour $X = G$, elles satisfont (13.13).

Soit $\rho = (1/2) \sum_{\gamma \in \Sigma^+(\mathfrak{a})} \gamma$ et posez $\Lambda_{\mathfrak{a}} = \Lambda + \rho$, $\Lambda_{\mathfrak{b}} = \nu(\Lambda_{\mathfrak{a}})$. D'après l'égalité $\nu \Sigma^+(\mathfrak{a}) = \Sigma^+(\mathfrak{b})$, on a alors

$$\tilde{\kappa}_{\mathfrak{h}}(a) = \sum_{w \in W(\mathfrak{h}_c)} \mathrm{sgn}\,(w) \xi_{w\Lambda}(a) \qquad (a \in A'_{\mathfrak{h}})$$

pour $\mathfrak{h} = \mathfrak{a}$ ou $\mathfrak{b}$. Posons pour $a \in \Sigma'_\alpha$,

$$\eta_{\Lambda_{\mathfrak{a}}}(a) = \sum_{w \in W(\mathfrak{a}_c)} \mathrm{sgn}\,(w) w\Lambda_{\mathfrak{a}}(H_\alpha) \xi_{w\Lambda_{\mathfrak{a}}}(a),$$

alors on obtient facilement pour $a \in \Sigma'_\alpha$

1) Dans le cas où $X \cong G$;

$$[H_\alpha \kappa_{\mathfrak{a}}]_-^{\alpha+}(a) = 2\varepsilon_{R,\alpha}^{\mathfrak{a}}(a)[H_\alpha \tilde{\kappa}_{\mathfrak{a}}]^{\alpha+}(a) = 2\varepsilon_{R,\alpha}^{\mathfrak{a}}(a) \eta_{\Lambda_{\mathfrak{a}}}(a),$$

$$[H_\beta \kappa_{\mathfrak{b}}](a) = \varepsilon_R^{\mathfrak{b}}(a)[H_\beta \tilde{\kappa}_{\mathfrak{b}}](a) = \varepsilon_R^{\mathfrak{b}}(a) \eta_{\Lambda_{\mathfrak{a}}}(a),$$

2) Dans le cas où $X \cong G_c/G$;

$$[H_\alpha \kappa_{\mathfrak{a}}](a) = \varepsilon_I^{\mathfrak{a}}(a)[H_\alpha \tilde{\kappa}_{\mathfrak{a}}](a) = \varepsilon_I^{\mathfrak{a}}(a) \eta_{\Lambda_{\mathfrak{a}}}(a),$$

$$[H_\beta \kappa_{\mathfrak{b}}]_-^{\beta+}(a) = 2\varepsilon_{I,\beta}^{\mathfrak{h}}(a)[H_\beta \tilde{\kappa}_{\mathfrak{b}}]^{\beta+}(a) = 2\varepsilon_{I,\beta}^{\mathfrak{h}}(a) \eta_{\Lambda_{\mathfrak{a}}}(a)$$

où $\varepsilon_{R,\alpha}^{\mathfrak{a}}(a) = \mathrm{sgn} \sum_{\gamma \in S_R^{\mathfrak{a}}, \neq \alpha} \{1 - \xi_\gamma(a)^{-1}\}$, et

$$\varepsilon_{I,\beta}^{\mathfrak{h}}(a) = \mathrm{sgn}\,(\sqrt{-1})^{-n(I)-1} \prod_{\gamma \in S_I^{\mathfrak{h}}, \neq \beta} \xi_{\rho_I - \beta/2}(a) \{1 - \xi_\gamma(a)^{-1}\}.$$

En substituant ces fonctions dans (13.12) et (13.13) on obtient l'expression de $C^{\alpha}(a_0)$.
C. Q. F. D.

D'après le lemme 13.1, on a

$$H'_{\alpha}\tilde{\kappa}_{\mathfrak{a}}(a)=H'_{\beta}\tilde{\kappa}_{\mathfrak{b}}(a) \qquad (a\in\Sigma'_{\alpha}).$$

C'est la condition (a-3).

Réciproquement si $\tilde{\kappa}_{\mathfrak{a}}$ et $\tilde{\kappa}_{\mathfrak{b}}$ satisfont aux conditions (a-1), (a-2) et (a-3), $K_f^{\mathfrak{a}}$ et $K_f^{\mathfrak{b}}$ satisfont à l'équation (13-5) pour une fonction $f\in C_c^{\infty}(U_X)$ de la forme (12.9). Soit $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_j$ le sous-espace de Cartan dans la famille $\{\mathfrak{a}_j\}$ telle que $\dim \mathfrak{a}\cap\mathfrak{p}$ soit la plus grande. Pour chaque sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}_j$, il existe des transformations de Cayley $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n$ définies par $S_R(\mathfrak{a})$ telles que $\mathrm{Ad}(k)\mathfrak{a}_j=\nu_1\circ\cdots\circ\nu_n(\mathfrak{a}_c)\cap\mathfrak{q}$ $(k\in K\cap H)$. Un élément de $\boldsymbol{X}$ s'appelle semi-régulier si x est semi-simple et si $\dim \mathfrak{l}_{\mathfrak{q}}=3$. Soit $\boldsymbol{X}'_s$ l'ensemble de tous les éléments semi-réguliers de $\boldsymbol{X}$. Autour de chaque élément $a\in\boldsymbol{X}'_s$, soit $f_{r,s,h}$ la fonction définie dans 12.9. Pour toute fonction $f\in C_c^{\infty}(\boldsymbol{X})$, on peut choisir des fonctions r, s, h telles que $f^*=\sum f_{r,s,h}$ approche f au voisinage de $\operatorname{supp} f\cap\boldsymbol{X}'_s$. Pour cette fonction f^*, on voit que $\sum_{j=1}^{n}\alpha_jI_j=0$. La fonction analytique $\tilde{\Theta}$ sur X' donnée par κ_j ((13) de § 11) satisfait à l'equation (13.1).

Appendice. Une système complet de distributions sphériques pour $GL(3, \boldsymbol{C})/U(2, 1)$

Bien que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}(3, \boldsymbol{C})$ soit réductive on peut aussi appliquer le théorème 11.1 pour obtenir les distributions sphériques sur l'espace symétrique $\boldsymbol{X}\cong GL(3, \boldsymbol{C})/U(2, 1)$ (cf. [4]). Nous allons dans ce paragraphe donner une base de $\mathcal{D}'_{\chi}(\boldsymbol{X})$ pour tout caractère χ de $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X})$. C'est parce que les formules sont plus agréables à écrire pour $GL(3, \boldsymbol{C})/U(2, 1)$ que pour $SL(3, \boldsymbol{C})/SU(2, 1)$ que nous avons choisi de traiter cet example. Le résultat du appendice est obtenu avec le concours de N. Bopp.

Soit σ l'involution définie sur $G=GL(3, \boldsymbol{C})$ par:

$$\sigma(g)=J(g^*)^{-1}J \quad \text{où} \quad g^*={}^t\bar{g} \quad \text{et} \quad J=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

Le sous-groupe des points de G fixés par σ est $H=U(2, 1)$ qui est connexe. On réalise l'espace symétrique G/H dans $\boldsymbol{X}=\{g\sigma(g)^{-1}: g\in G\}$ et on montre que: $\boldsymbol{X}=\{x\in GL(3, \boldsymbol{C}): Jx$ est hermitienne de signature $(2.1)\}$. Il y a deux classes de conjugaison de sous-espaces de Cartan de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})=(\mathfrak{gl}(3, \boldsymbol{C}), \mathfrak{u}(2, 1))$. On choisit pour représentante de ces classes:

$$\mathfrak{a}^0=\left\{\begin{pmatrix}t_1&&\\&t_2&\\&&t_3\end{pmatrix}: t_j\in\boldsymbol{R}\right\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{a}^1=\left\{\begin{pmatrix}t&0&\theta\\0&u&0\\-\theta&0&t\end{pmatrix}: t, u, \theta\in\boldsymbol{R}\right\}.$$

Les sous-espaces de Cartan de $\boldsymbol{X}$ correspondants sont donnés par: $A^0=A_0^0\cup A_1^0\cup A_2^0$ où chaque $\mathfrak{a}_j^0$ qui est une composante connexe de A^0 est de la forme

$$A_j^0=\left\{\begin{pmatrix}\varepsilon_1 e^{t_1} & & \\ & \varepsilon_2 e^{t_2} & \\ & & \varepsilon_3 e^{t_3}\end{pmatrix}: t_j\in\boldsymbol{R}\right\} \text{ avec } \begin{cases}\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=1 \text{ pour } j=0\\ \varepsilon_1=\varepsilon_3=-1 \text{ et } \varepsilon_2=1 \text{ pour } j=1\\ \varepsilon_2=\varepsilon_3=-1 \text{ et } \varepsilon_1=1 \text{ pour } j=2\end{cases}$$

$$A^1=\left\{\begin{pmatrix}x & 0 & y\\ 0 & v & 0\\ -y & 0 & x\end{pmatrix}: x, y, v\in\boldsymbol{R},\ v(x^2+y^2)>0\right\}.$$

Les groupes de Weyl associés sont donnés par:

$$W^0=N_H(A^0)/Z_H(A^0)=\{I, w_0\} \text{ où } w_0 \text{ échange } \varepsilon_1 e^{t_1} \text{ et } \varepsilon_2 e^{t_2},$$

$$W^1=N_H(A^1)/Z_H(A^1)=\{I, w_1\} \text{ où } w_1 \text{ échange } y \text{ et } (-y).$$

On choisit un ordre sur $\Sigma(\mathfrak{a}^0)$ et sur $\Sigma(\mathfrak{a}^1)$ en posant:

$$\Sigma^+(\mathfrak{a}^0)=\{\alpha, \alpha_1, \alpha_3\} \text{ où } \begin{cases}\alpha(H)=t_1-t_3\\ \alpha_1(H)=t_2-t_3\\ \alpha_3(H)=t_1-t_2\end{cases} \text{ pour } H=\begin{pmatrix}t_1 & & \\ & t_2 & \\ & & t_3\end{pmatrix},$$

$$\Sigma^+(\mathfrak{a}^1)=\{\beta, \gamma_1, \gamma_2\} \text{ où } \begin{cases}\beta(H)=-2i\theta\\ \gamma_1(H)=u-t+i\theta\\ \gamma_2(H)=u-t-i\theta\end{cases} \text{ pour } H=\begin{pmatrix}t & 0 & \theta\\ 0 & u & 0\\ -\theta & 0 & t\end{pmatrix}.$$

Les racines α et α_1 sont réelles singulières, la racine α_3 est réelle vectorielle. La racine β est imaginaire singulière et les racines γ_1 et γ_2 sont complexes.

$$A^{0\prime}=\left\{a=\begin{pmatrix}a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3\end{pmatrix}\in A^0:\ a_i\neq a_j \quad \text{pour } i\neq j\right\},$$

$$A^{0\prime}(I)=A^0,$$

$$A^{1\prime}=A^{1\prime}(I)=\left\{a=\begin{pmatrix}x & 0 & y\\ 0 & v & 0\\ -y & 0 & x\end{pmatrix}\in A^1:\ y\neq 0\right\}.$$

Soit ν la transformation de Cayley définie a partir de la racine α. On a:

$$\nu\begin{pmatrix}z_1 & & \\ & z_2 & \\ & & z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{z_1+z_3}{2} & 0 & i\frac{z_1-z_3}{2}\\ 0 & z_2 & 0\\ -i\frac{z_1-z_3}{2} & 0 & \frac{z_1+z_3}{2}\end{pmatrix}$$

d'où $\beta=\nu\cdot\alpha$.

Comme il n'y a pas de racine imaginaire sur $\mathfrak{a}^0$ on trouve pour

$$a=\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{pmatrix}\in A^0:$$

$$D^0(a)=\varepsilon_I(a)\Delta^0(a)=\Delta^0(a)=\frac{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_2-a_3)}{a_1a_2a_3}$$

et $D^0(w_0a)=-D^0(a)$.

On définit donc ε sur W^0 par $\varepsilon(W_0)=-1$ et $\varepsilon(I)=1$. Comme β est la seule racine imaginaire sur $\mathfrak{a}^1$ on obtient pour

$$a=\begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & v & 0 \\ -y & 0 & x \end{pmatrix}\in A^1:$$

$$D^1(a)=\varepsilon_I(a)\Delta^1(a)=\frac{2i|y|((v-x)^2+y)}{v(x^2+y^2)}$$

et $D^1(wa)=D^1(a)$ pour $w\in W^1$.

A une fonction Φ définie sur X' invariante par $U(2, 1)$ on associe deux foction κ^0 et κ^1 définies respectivement sur A^0 et $A^{1'}$ par:

$$\text{(i)}\qquad \begin{cases} \kappa^0(a)=D^0(a)\Phi(a) & \text{pour } a\in A^{0'} \\ \kappa^1(a)=D^1(a)\Phi(a) & \text{pour } a\in A^{1'}\,, \end{cases}$$

et réciproquement. Comme w_0 permute les éléments de A_1^0 et de A_2^0, il suffit de déterminer κ^0 sur $A_0^{0'}$ et sur $A_1^{0'}$ avec seule condition d'invariance:

$$\kappa^0(wa)=\varepsilon(w)\kappa^0(a) \qquad \text{pour } w\in W^0 \text{ et } a\in A_0^0.$$

Introduisons les notations suivantes:

$$\text{(ii)}\qquad \begin{cases} \varphi_0^0(T)=\kappa^0\left(\begin{pmatrix} e^{t_1} & & \\ & e^{t_1} & \\ & & e^{t_3} \end{pmatrix}\right) & \\ \varphi_1^0(T)=\kappa^0\left(\begin{pmatrix} -e^{t_1} & & \\ & e^{t_2} & \\ & & e^{t_3} \end{pmatrix}\right) & \text{pour } T=(t_1, t_2, t_3), \\ \varphi^1(\Theta)=\kappa^1\left(\exp\begin{pmatrix} t & 0 & \theta \\ 0 & u & 0 \\ -\theta & 0 & t \end{pmatrix}\right) & \text{pour } \Theta=(t+i\theta, u, t-i\theta). \end{cases}$$

Il suffit de déterminer $\varphi^1(\theta)$ pour $0<\theta<\pi$ car κ^1 est invariante par W^1.

Rappelons que la partie radiale sur $A^{j'}$ d'un opérateur différentiel D invariant sur X est déterminée par un polynôme $\gamma^j(D)$ appartenant à $S(\mathfrak{a}_C^j)$ invariant par $W(\mathfrak{a}_C^j)$. Puisque ν est un automorphisme intérieur du groupe, on vérifie que

$$\gamma^1(D)=\nu\cdot\gamma^0(D)\,,$$

où on note toujours ν l'application de $S(\mathfrak{a}_C^0)$ dans $S(\mathfrak{a}_C^1)$ induite par $\nu:\mathfrak{a}_C^0\to\mathfrak{a}_C^1$. D'autre part à tout caractère χ de $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X})$ correspond un élément Λ^* de $(\mathfrak{a}_C^0)^*$ tel que

$$\chi(D)=\gamma^0(D)(\Lambda^*)=\gamma^1(D)(\nu\Lambda^*) \qquad \text{où}$$

$$(\nu\cdot\Lambda^*)(H)=\Lambda^*(\nu^{-1}(H)) \qquad \text{pour } H\in\mathfrak{a}_C^1\,.$$

Ici $W(\mathfrak{a}_C^0)$ est le groupe des permutations de trois éléments que l'on note S_3. Si on identifie $(\mathfrak{a}_C^0)$ avec $\boldsymbol{C}^3$, le théorème 11.1 s'écrit comme suit:

Théorème. *La fonction G-invariante Φ sur $\boldsymbol{X}'$ associée par* (i) *et* (ii) *au triplet* $(\varphi_0^0, \varphi_0^0, \varphi^1)$ *définit une distribution sphérique sur $\boldsymbol{X}$ si et seulement si ces fonctions vérifient:*

(1) *φ_0^0 et φ_1^0 sont analytique sur $\boldsymbol{R}^3$,*
φ^1 est analytique pour $(t, u, \theta)\in\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\times(0, \pi)$,

(2) *$\varphi_0^0(w_0T)=-\varphi_0^0(T)$ où on pose $w_0T=w_0(t_1, t_2, t_3)=(t_2, t_1, t_3)$,*

(3) *Il existe un élément Λ de $\boldsymbol{C}^3$ tel que pour tout polynôme symétrique $P\in\boldsymbol{C}[t_1,t_2,t_3]$ on ait:*

$$P\Big(\frac{\partial}{\partial t_1}, \frac{\partial}{\partial t_2}, \frac{\partial}{\partial t_3}\Big)\varphi_k^0=P(\Lambda)\varphi_k^0 \qquad \textit{pour } k=0,\,1,$$

$$\nu\cdot P\Big(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial \theta}\Big)\varphi^1=P(\Lambda)\varphi^1\,,$$

(4) $$\Big(\frac{\partial}{\partial t_1}-\frac{\partial}{\partial t_3}\Big)\varphi_0^0(t,\,u,\,t)=i\frac{\partial}{\partial\theta}\varphi^1(t+i\theta,\,u,\,t-i\theta)|_{\theta\downarrow 0} \quad \text{(I)},$$

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t_1}-\frac{\partial}{\partial t_3}\Big)\varphi_1^0(t,\,u,\,t)=i\frac{\partial}{\partial\theta}\varphi^1(t+i\theta,\,u,\,t-i\theta)|_{\theta\uparrow \pi} \quad \text{(II)}.$$

Remarque 1. Pour écrire la condition (3) on a identifié le polynôme symétrique P avec un élément de $I(\mathfrak{a}_c^0)$. Puis on écrit $\nu\cdot P$ dans la base

$$T=\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&1\end{pmatrix},\quad U=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix},\quad \Theta=\begin{pmatrix}&&1\\&0&\\-1&&\end{pmatrix}$$

et on l'identifie à un élément de $\boldsymbol{C}[t,\,u,\,\theta]$.

Remarque 2. Il suffit de vérifier les conditions de sant (cf. (a-3) Théoreme 11.1) pour la racine singulière α, car l'autre racine singulière α_1 de $\Sigma^+(\mathfrak{a}^0)$ est conjuguée par W^0 à α. D'autre part l'ensemble des points semi-réguliers a de $A^0\cap A^1$ tels que $\xi_\alpha(a)=1$ est composé de trois composantes connexes:

$$\left\{\begin{pmatrix} e^t & & \\ & e^u & \\ & & e^t \end{pmatrix} : t>u\right\}, \left\{\begin{pmatrix} e^t & & \\ & e^u & \\ & & e^t \end{pmatrix} : t<u\right\}, \left\{\begin{pmatrix} -e^t & & \\ & e^u & \\ & & -e^t \end{pmatrix}\right\}.$$

Soit $\Lambda \in \boldsymbol{C}^3$. On appelle $\mathcal{D}'_\Lambda(\boldsymbol{X})$ l'espace des distributions sphériques qui vérifient la condition (3) pour Λ, c'est-à-dire telles que

$$D\Phi = P(\Lambda)\Phi \qquad \text{pour } D \in \boldsymbol{D}(\boldsymbol{X}),$$

où P est le polynôme symétrique associé à $\gamma^1(D)$. Pour déterminer $\mathcal{D}'_\Lambda(\boldsymbol{X})$, on déterminera d'abord l'espace E_Λ des triplets $(\varphi_0^0, \varphi_1^0, \varphi^1)$ vérifiant (1) et (3), puis l'espace F_Λ des triplets vérifiant (1), (3) et (4). On obtiendra $\mathcal{D}'_\Lambda$ en se restreignant au sous-espace G_Λ des triplets F_Λ vérifiant la condition (2).

A. Cas où $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ est régulier, c'est-à-dire $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_1$.

a) $\dim E_\Lambda = 18$.

On utilise en effet un résultat classique (cf. [33] p. 61) pour montrer que $(\varphi_0^0, \varphi_1^0, \varphi^1)$ appartient à E_Λ si et seulement si il existe des nombres A_σ, A'_σ, t_σ, t'_σ, α_σ et α'_σ ($\sigma \in A_3$ qui est le sous-groupe des permutations paires de S_3) tels que:

$$\varphi_0^0(T) = \sum_{\sigma \in A_3} (A_\sigma e^{(\sigma\Lambda, T)} + A'_\sigma e^{(\sigma\Lambda, w_1 T)}),$$

$$\varphi_1^0(T) = \sum_{\sigma \in A_3} (t_\sigma e^{(\sigma\Lambda, T)} + t'_\sigma e^{(\sigma\Lambda, w_1 T)}),$$

$$\varphi^1(\Theta) = \sum_{\sigma \in A_3} (\alpha_\alpha e^{(\sigma\Lambda, \Theta)} + \alpha'_\sigma e^{(\sigma\Lambda, w_1\Theta)}).$$

On note, par abus de langage, $w_1 T = w_1(t_1, t_2, t_3) = (t_3, t_2, t_1)$ et $w_1\Theta = w_1(t+i\theta, u, t-i\theta) = (t-i\theta, u, t+i\theta)$. De plus $(\,,)$ désigne le prolongement $\boldsymbol{C}$-linéaire à $\boldsymbol{C}^3$ du produit scalaire usuel sur $\boldsymbol{R}^3$.

b) $\dim F_\Lambda = 12$.

En effet les conditions de saut (4) s'écrivent alors:

(I) $\Longleftrightarrow A_\sigma - A'_\sigma = -(\alpha_\sigma - \alpha'_\sigma)$ pour tout $\sigma \in A_3$,

(II) $\Longleftrightarrow t_\sigma - t'_\sigma = -(\alpha_\sigma e^{(\sigma\Lambda, \xi_\pi)} - \alpha'_\sigma e^{-(\sigma\Lambda, \xi_\pi)})$ pour tout $\sigma \in A_3$, où $\xi_\pi = (i\pi, 0, -i\pi)$.

Pour étudier la condition d'invariance par w_0, on va exhiber une base de F_Λ. On obtient des éléments de F_Λ

1) nuls sur A^1 en prenant $\alpha_\sigma = \alpha'_\sigma = 0$, soit

$$A_\Lambda = \begin{cases} e^{(\Lambda, T)} + e^{(\Lambda, w_1 T)} \\ 0 \\ 0 \end{cases}, \qquad B_\Lambda = \begin{cases} 0 \\ e^{(\Lambda, T)} + e^{(\Lambda, w_1 T)} \\ 0 \end{cases}.$$

On obtient 6 éléments indépendants de F_Λ en prenant $\{A_{\sigma\Lambda}, B_{\sigma\Lambda} : \sigma \in A_3\}$.

2) non nuls sur A^1 en prenant $A_\sigma + A'_\sigma = 0$ et $t_\sigma + t'_\sigma = 0$.

1^{er} cas. $e^{(\Lambda, \xi_\pi)} \neq e^{-(\Lambda, \xi_\pi)} \Longleftrightarrow \lambda_1 - \lambda_3 \notin \boldsymbol{Z}$.

Posons alors

$$C_\Lambda=\begin{cases} e^{(\Lambda,T)}-e^{(\Lambda,w_1T)} \\ 0 \\ 2\dfrac{e^{(\Lambda,\Theta-\xi_\pi)}+e^{(\Lambda,w_1(\Theta-\xi_\pi))}}{e^{(\Lambda,\xi_\pi)}-e^{-(\Lambda,\xi_\pi)}} \end{cases},\qquad D_\Lambda=\begin{cases} 0 \\ e^{(\Lambda,T)}-e^{(\Lambda,w_1T)} \\ -2\dfrac{e^{(\Lambda,\Theta)}+e^{(\Lambda,w_1\Theta)}}{e^{(\Lambda,\xi_\pi)}-e^{-(\Lambda,\xi_\pi)}} \end{cases}.$$

2^e cas. $e^{(\Lambda,\xi_\pi)}=c^{-(\Lambda,\xi_\pi)} \Longleftrightarrow \lambda_1-\lambda_3\in \boldsymbol{Z}^*$.

Posons alors, en notant $m=\lambda_1-\lambda_s$,

$$E_\Lambda=\begin{cases} 0 \\ 0 \\ e^{(\Lambda,\Theta)}+e^{(\Lambda,w_1\Theta)}=e^{(\Lambda,\Theta+w_1\Theta)}\cos m\theta \end{cases},\qquad F_\Lambda=\begin{cases} e^{(\Lambda,T)}-e^{(\Lambda,w_1T)} \\ (-4)^m[e^{(\Lambda,T)}-e^{(\Lambda,w_1T)}] \\ -[e^{(\Lambda,\Theta)}-e^{(\Lambda,w_1\Theta)}] \end{cases}.$$

On obtient pour base de F_Λ:

$$\{A_{\sigma\Lambda},\ B_{\sigma\Lambda},\ C_{\sigma\Lambda}D_{\sigma\Lambda}: \sigma\in A_3\} \qquad \text{si } \lambda_i-\lambda_j\notin \boldsymbol{Z},$$

$$\{A_{\sigma\Lambda},\ B_{\sigma\Lambda},\ E_\Lambda,\ F_\Lambda,\ C_{\gamma\Lambda},\ D_{\gamma\Lambda}: \sigma\in A_3 \text{ et } \gamma\in A_3\setminus\{I\}\}$$
$$\text{si } \lambda_1-\lambda_3\in \boldsymbol{Z}^* \text{ et } \lambda_i-\lambda_2\notin \boldsymbol{Z},$$

$$\{A_{\sigma\Lambda},\ B_{\sigma\Lambda},\ E_{\sigma\Lambda},\ F_{\sigma\Lambda}: \sigma\in A_3\} \qquad \text{si } \lambda_i-\lambda_j\in \boldsymbol{Z}^*.$$

c) $\dim G_\Lambda=9$.

Pour déterminer les triplets de F_Λ qui vérifient la conditions (2), il suffit de regarder composante sur A_0^0. Comme F_Λ et C_Λ ont la même composante sur A_0^0 il est inutile, pour le faire, de distinguer les différents cas ci-dessus. Il est clair que $B_{\sigma\Lambda}$, $D_{\sigma\Lambda}$ et $E_{\sigma\Lambda}$ appartiennent à G_Λ pour $\sigma\in A_3$. D'autre part l'élément $\sum x_\sigma A_{\sigma\Lambda}+y_\sigma C_{\sigma\Lambda})$ vérifie la condition (2) si on a $x_\sigma+y_\sigma=-x_{w_1w_0\sigma}+y_{w_1w_0\sigma}$ pour tout $\sigma\in A_3$. On pose $\tau=w_1w_0$. L'espace G_Λ admet pour base:

$$\{B_{\sigma\Lambda},\ D_{\sigma\Lambda},\ G_{\sigma\Lambda}-A_{\tau\sigma\Lambda}+A_{\tau^2\sigma\Lambda}: \sigma\in A_3\} \qquad \text{si } \lambda_i-\lambda_j\notin \boldsymbol{Z},$$

$$\{B_\Lambda,\ E_\Lambda,\ F_\Lambda-A_{\tau\Lambda}+A_{\tau^2\Lambda},\ B_{\sigma\Lambda},\ D_{\sigma\Lambda},\ C_{\sigma\Lambda}-A_{\tau\sigma\Lambda}+A_{\tau^2\sigma\Lambda}: \sigma\in A_3\setminus\{1\}\}$$
$$\text{si } \lambda_1-\lambda_3\in \boldsymbol{Z}^* \text{ et } \lambda_1-\lambda_2\notin \boldsymbol{Z},$$

$$\{B_{\sigma\Lambda},\ E_{\sigma\Lambda},\ F_{\sigma\Lambda}-A_{\tau\sigma\Lambda}+A_{\tau^2\sigma\Lambda}: \sigma\in A_3\} \qquad \text{si } \lambda_i-\lambda_j\in \boldsymbol{Z}^*.$$

B. Cas où $\Lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ est semi-régulier, c'est-à-dire $\lambda_1=\lambda_3\neq\lambda_2$. On pose $\lambda_1=\lambda_3=\lambda$ et $\lambda_2=\mu$.

a) $\dim E_\Lambda=18$.

Le stabilisateur de Λ dans S_3 est le sous-groupe $\{1, w_1\}$. Les polynômes harmoniques relativement à ce sous-groupe sont engendrés par 1 et t_1-t_3. Le résultat cité en A implique que le triplet $(\varphi_0^0, \varphi_0^0, \varphi^1)$ appartient à E_Λ si et seulement s'il existe des nombres complexes A_σ, A'_σ, t_σ, t'_σ, α_σ et α'_σ $(\sigma\in A_3)$ tels que:

$$\varphi_0^0(T)=\sum_{\sigma\in A_3}(A_\sigma+A'_\sigma(t_1-t_3))e^{(\sigma\Lambda,T)}$$

$$\varphi_0^0(T)=\sum_{\sigma\in A_3}(t_\sigma+t'_\sigma(t_1-t_3))e^{(\sigma\Lambda,T)},$$

$$\varphi_1^0(T)=\sum_{\sigma\in A_3}(t_\sigma+t'_\sigma(t_1-t_3))e^{(\sigma\Lambda,T)},$$

$$\varphi^1(\Theta)=\sum_{\sigma\in A_3}(\alpha_\sigma+\alpha'_\sigma 2i\Theta)e^{(\sigma\Lambda,\Theta)}.$$

b) $\dim F_\Lambda=14$

En effet, si on pose $A_3=\{1,\tau,\tau^2\}$ avec $\tau=w_1w_0$, les conditions de sauts (4) s'écrivent:

$$(\mathrm{I})\Longleftrightarrow\begin{cases} A'_1=-\alpha'_1 \\ 2(A'_0+A'_{\tau^2})+(\lambda-\mu)(A_\tau-A_{\tau^2})=-2(\alpha'_\tau+\alpha'_{\tau^2})-(\lambda-\mu)(\alpha_\tau-\alpha_{\tau^2})\end{cases}$$

$$(\mathrm{II})\Longleftrightarrow\begin{cases} t'_1=-\alpha'_1 \\ 2(t'_\tau+t'_{\tau^2})+(\lambda-\mu)(t_\tau-t_{\tau^2})=-2[\alpha'_\tau e^{(\lambda-\mu)i\pi}+\alpha'_{\tau^2}e^{-(\lambda-\mu)i\pi}] \\ \qquad -(\lambda-\mu)[(\alpha_\tau+2i\pi\alpha'_\tau)e^{(\lambda-\mu)i\pi}-(\alpha_{\tau^2}+2i\pi\alpha'_{\tau^2})e^{-(\lambda-\mu)i\pi}].\end{cases}$$

On obtient une base de F_Λ en prenant:

1) des éléments nuls sur A^1,

$$A_\Lambda=\begin{cases} e^{(\Lambda,T)} \\ 0 \\ 0\end{cases},\quad A'_\Lambda=\begin{cases} e^{(\tau\Lambda,T)}+e^{(\tau^2\Lambda,T)} \\ 0 \\ 0\end{cases},\quad A''_\Lambda=\begin{cases} (t_1-t_2)[e^{(\tau\Lambda,T)}-e^{(\tau^2\Lambda,T)}] \\ 0 \\ 0\end{cases},$$

$$B_\Lambda=\begin{cases} 0 \\ e^{(\Lambda,T)} \\ 0\end{cases},\quad B=\begin{cases} 0 \\ e^{(\tau\Lambda,T)}+e^{(\tau^2\Lambda,T)} \\ 0\end{cases},\quad B''_\Lambda=\begin{cases} 0 \\ (t_1-t_3)[e^{(\tau\Lambda,S)}-e^{(\tau^2\Lambda,T)}] \\ 0\end{cases},$$

$$C_\Lambda=\begin{cases} e^{(\tau\Lambda,T)}\left(1-\frac{\lambda-\mu}{2}(t_1-t_3)\right)-e^{(\tau^2\Lambda,T)}\left(1-\frac{\lambda-\mu}{2}(t_1-t_3)\right) \\ 0 \\ 0\end{cases},$$

$$D_\Lambda=\begin{cases} 0 \\ e^{(\tau\Lambda,T)}\left(1-\frac{\lambda-\mu}{2}(t_1-t_3)\right)-e^{(\tau^2\Lambda,T)}\left(1-\frac{\lambda-\mu}{2}(t_1-t_3)\right). \\ 0\end{cases}$$

2) des éléments non nuls sur A^1,

$$F_\Lambda=\begin{cases} 0 \\ 0 \\ e^{(\Lambda,\Theta)}\end{cases},\quad F_\Lambda=\begin{cases} (t_3-t_1)e^{(\Lambda,T)} \\ (t_3-t_1)e^{(\Lambda,T)} \\ 2i\theta e^{(\Lambda,\Theta)}\end{cases},$$

$$G_\Lambda=\begin{cases} 0 \\ \left(\frac{\lambda-\mu}{2i}\sin(\lambda-\mu)\pi\right)(t_1-t_3)[e^{\langle\tau\Lambda,T\rangle}+e^{\langle\tau^2\Lambda,T\rangle}]\,, \\ e^{\langle\tau\Lambda,\Theta\rangle}+e^{\langle\tau^2\Lambda,\Theta\rangle} \end{cases}$$

$$H'_\Lambda=\begin{cases} -\frac{\lambda-\mu}{2}(t_1-t_3)[e^{\langle\tau\Lambda,T\rangle}+e^{\langle\tau^2\Lambda,T\rangle}] \\ -\frac{\lambda-\mu}{2}\cos((\lambda-\mu)\pi)(t_1-t_3)[e^{\langle\tau\Lambda,T\rangle}+e^{\langle\tau^2\Lambda,T\rangle}]\,, \\ e^{\langle\tau\Lambda,\Theta\rangle}-e^{\langle\tau^2\Lambda,\Theta\rangle} \end{cases}$$

$$I_\Lambda=\begin{cases} 0 \\ [(\mu-\lambda)i\pi\cos((\lambda-\mu)\pi)-i\sin((\lambda-\mu)\pi)](t_1-t_3)[e^{\langle\tau\Lambda,T\rangle}+e^{\langle\tau^2\Lambda,T\rangle}]\,, \\ 2i\theta(e^{\langle\tau\Lambda,\Theta\rangle}-e^{\langle\tau^2\Lambda,\Theta\rangle}) \end{cases}$$

$$J_\Lambda=\begin{cases} -(t_1-t_3)(e^{\langle\tau\Lambda,T\rangle}+e^{\langle\tau^2\Lambda,T\rangle}) \\ [(\lambda-\mu)\pi\sin((\lambda-\mu)\pi)-\cos((\lambda-\mu)\pi)](t_1-t_3)[e^{\langle\tau\Lambda,T\rangle}+e^{\langle\tau^2\Lambda,T\rangle}]\,. \\ 2i\theta(e^{\langle\tau\Lambda,\Theta\rangle}+e^{\langle\tau^2\Lambda,\Theta\rangle}) \end{cases}$$

c) $\dim G_\Lambda=9$

Il est clair que B_Λ, B'_Λ, B''_Λ, D_Λ, E_Λ, G_Λ, I_Λ vérifient la condition (2) et sont indépendants. Pour obtenir une base de G_Λ on les complète par

$$H_\Lambda-\frac{\lambda-\mu}{2}J_\Lambda \quad \text{et} \quad 2A_\Lambda-A'_\Lambda+C_\Lambda-\frac{\lambda-\mu}{4}J_\Lambda$$

d'où le résultat.

Remarque. Les seuls éléments de G_Λ non nuls sur A_0^0 sont les multiples de

$$2A_\Lambda-A'_\Lambda+C_\Lambda-\frac{\lambda-\mu}{4}J_\Lambda\,.$$

C. Cas où $\Lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ est singulier c'est-à-dire $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$. On pose $\lambda=\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$.

a) $\dim E_\Lambda=18$.

L'espace des polynômes harmoniques relativement au groupe S_3 est de dimension 6. Si on pose pour $T=(t_1, t_2, t_3)$

$$t=\frac{t_1-t_3}{2}, \quad u=t_2, \quad \eta=\frac{t_1-t_3}{2}\,,$$

cet espace admet pour base:

$$P_0=1, \quad P_1=u-t, \quad P_2=\eta\,,$$

$$P_3=(u-t)^2-3\eta^2, \quad P_4=\eta(u-t), \quad P_5=\eta((u-t)^2-\eta^2)\,.$$

On note Q_j ($j=0, 1, \cdots, 5$) les polynômes obtenus à partir des P_j en remplaçant η par $i\theta$. Le triplet $(\varphi_0^0, \varphi_1^0, \varphi^1)$ appartient à E_Λ si et seulement s'il existe des nombres complexes A_j, t_j, x_j ($j=0, 1, \cdots, 5$) tels que:

$$\varphi_0^0(T)=\sum_{k=1}^{5} A_k P_k e^{\langle \Lambda, T\rangle},$$

$$\varphi_1^0(T)=\sum_{k=1}^{5} t_k p_k e^{\langle \Lambda, T\rangle},$$

$$\varphi^1(\Theta)=\sum_{k=1}^{5} \alpha_k Q_k e^{\langle \Lambda, T\rangle}.$$

b) $\dim F_\Lambda=12$

Avec les nouvelles variables la condition (4) s'écrit:

$$(\mathrm{I}) \Longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial\eta}\varphi_0^0|_{\eta=0}=\frac{\partial}{\partial\theta}\varphi^1|_{\theta=0},$$

$$(\mathrm{II}) \Longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial\eta}\varphi^0|_{\eta=0}=\frac{\partial}{\partial\theta}\varphi^1|_{\theta=\pi}.$$

Puisque $e^{\langle \Lambda, T\rangle}=e^{\langle \Lambda, \Theta\rangle}=e^{\lambda(2t+u)}$, on en déduit:

$$(\mathrm{I}) \Longleftrightarrow A_2=-\alpha_2,\quad A_4=-\alpha_4,\quad A_5=-\alpha_5,$$

$$(\mathrm{II}) \Longleftrightarrow t_4=-\alpha_4,\quad t_5=-\alpha_5,\quad t_2=-\alpha_2-3\pi^2\alpha_5+6i\pi\alpha_3.$$

On obtient une base de F_Λ en prenant:

$$A_\Lambda=\begin{cases} e^{\langle \Lambda, T\rangle} \\ 0 \\ 0 \end{cases} \qquad A'_\Lambda=\begin{cases} 0 \\ e^{\langle \Lambda, T\rangle} \\ 0 \end{cases} \qquad A''_\Lambda=\begin{cases} 0 \\ 0 \\ e^{\langle \Lambda, \Theta\rangle} \end{cases}$$

$$B_\Lambda=\begin{cases} (u-t)e^{\langle \Lambda, T\rangle} \\ 0 \\ 0 \end{cases} \qquad B'_\Lambda=\begin{cases} 0 \\ (u-t)e^{\langle \Lambda, T\rangle} \\ 0 \end{cases} \qquad B''_\Lambda=\begin{cases} 0 \\ 0 \\ (u-t)e^{\langle \Lambda, \Theta\rangle} \end{cases}$$

$$C_\Lambda=\begin{cases} ((u-t)^2-3\eta^2)e^{\langle \Lambda, T\rangle} \\ 0 \\ 0 \end{cases} \qquad C'_\Lambda=\begin{cases} 0 \\ ((u-t)^2-3\eta^2)e^{\langle \Lambda, T\rangle} \\ 0 \end{cases}$$

$$D_\Lambda=\begin{cases} -\eta e^{\langle \Lambda, T\rangle} \\ -\eta e^{\langle \Lambda, T\rangle} \\ i\theta e^{\langle \Lambda, \Theta\rangle} \end{cases} \qquad E_\Lambda=\begin{cases} -\eta(u-t)e^{\langle \Lambda, T\rangle} \\ -\eta(u-t)e^{\langle \Lambda, T\rangle} \\ i\theta(u-t)e^{\langle \Lambda, \Theta\rangle} \end{cases}$$

$$F_\Lambda=\begin{cases} 0 \\ 6i\pi\eta e^{\langle \Lambda, T\rangle} \\ ((u-t)^2+3\theta^2)e^{\langle \Lambda, \Theta\rangle} \end{cases} \qquad G_\Lambda=\begin{cases} -\eta((u-t)^2-\eta^2)e^{\langle \Lambda, T\rangle} \\ (-\eta((u-t)^2-\eta^2)-3\pi^2\eta)e^{\langle \Lambda, T\rangle} \\ i\theta((u-t)^2+\theta^2)e^{\langle \Lambda, \Theta\rangle} \end{cases}$$

c) $\dim G_\Lambda=9$

Les polynômes S_3-harmoniques vérifiant $P(w_0T)=-P(T)$ sont engendrés par:

$$P_1 - P_2,\ P_3 + 2P_4,\ P_5\,.$$

On en déduit que G_Λ admet pour base:

$$\begin{Bmatrix} A'_\Lambda,\ A''_\Lambda,\ B'_\Lambda,\ B''_\Lambda,\ C'_\Lambda,\ F_\Lambda \\ B_\Lambda + D_\Lambda,\ C_\Lambda - 2E_\Lambda,\ C_\Lambda \end{Bmatrix}$$

Conclusion. Pour toutes les valeurs de Λ la dimension de $D'_\Lambda(X)$ est égale à 9.

DÉPARTMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE TECHNOLOGIE INDUSTRIELLE

Bibliographie

[1] M.F. Atiyah, Characters of semi-simple Lie groups (Lectures given in Oxford), Mathematical Institute, Oxford, 1976.
[2] D. Barbasch and D.A. Vogan, Jr., The Local Structure of Characters, J. Funct. Anal., **37** (1980), 27-55.
[3] F.A. Berezin, Laplace operators on semi-simple Lie groups, Amer. Math. Soc. Transl., **21** (1962), 239-339.
[4] N. Bopp, Formule d'inversion pour $GL(3,\boldsymbol{C})/U(2.1)$, Publ. IRMA, Univ. Strasbourg, (1985), 1-15.
[5] G.B. Elkington, Centralizers of unipotent elements in semisimple algebraic groups, J. of Algebra, **23** (1972), 137-163.
[6] J. Faraut, Distributions spheriques sur les espaces hyperboliques, J. Math. Pures Appl., **58** (1979), 369-444.
[7] M. Flensted-Jensen, K-finite joint eigenfunctions of $U(g)^k$ on a non-Riemannian semisimple symmetric space G/H, Lect. Notes in Math., **880** (1981), 91-101, Springer.
[8] Harish-Chandra, The characters of semisimple Lie groups, Trans. Amer. Math. Soc., **83** (1956), 98-163.
[9] Harish-Chandra, Spherical functions on a semisimple Lie group, I. Amer. J. Math., **80** (1958), 241-310; II, ibid., **80** (1958), 553-613.
[10] Harish-Chandra, Invariant distributions on Lie algebras, Amer. J. Math., **86** (1963), 271-309.
[11] S. Helgason, Differential geometry and symmetric spaces, Pure and Appl. Math. Vol. 12, Academic Press, New York, 1962.
[12] S. Helgason, Analysis on Lie groups and homogeneous Spaces, Conf. Board Math. Sci. Series, No. 14, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1972.
[13] T. Hirai, Invariant eigendistributions of Laplace operators on real simple Lie groups I, Japan. J. Math., **39** (1970), 1-68.
[14] T. Hirai, Invariant eigendistributions of Laplace operators on real simple Lie groups II, Japan. J. Math. New Series, **2** (1976), 27-89.
[15] R. Hotta and M. Kashiwara, Quotients of the Harish-Chandra system by primitive ideals, Giornate di Geometria, Roma 1984, RM, Birkäuser 1985.
[16] N. Jacobson, Lie algebras, Interscience, New York, 1962.
[17] M. Kashiwara, A. Kowata, K. Minemura, K. Okamoto, T. Oshima and M. Tanaka, Eigenfunctions of invariant differential operators on a symmetric space, Ann. of Math., **107** (1978), 1-39.
[18] M.T. Kosters, Spherical distributions on rank one symmetric spaces, thesis, Univ. of Leiden, 1983.
[19] T. Oshima and T. Matsuki, Orbits on affine symmetric spaces under the action of the isotropy subgroups, J. Math. Soc. Japan, **32** (1980), 399-414.
[20] S. Sano and N. Bopp, Distribution spheriques invariantes sur l'espace semi-simple G_c/G_R,

RIMS Kôkyûrou, **598** (1986), 117-180.
[21] S. Sano and J. Sekiguchi, The Plancherel formula for $SL(2, \boldsymbol{C})/SL(2, \boldsymbol{R})$, Scient. Papers of the College of General Education, Univ. of Tokyo, **30** (1980), 93-105.
[22] S. Sano, Some properties of spherical distributions on $Sp(2, C)/Sp(2, \boldsymbol{R})$, Bull. of the Institute of Vocational Training, **13** (1984), 111-116.
[23] S. Sano, Invariant spherical distributions and the Fourier inversion formula on $GL(n, \boldsymbol{C})/GL(n, \boldsymbol{R})$, J. Math. Soc. Japan, **36** (1984), 191-219.
[24] S. Sano, Distributions sphériques invariantes sur l'espace semi-simple et son c-dual, Lect. Notes in Math., **1243** (1985), Springer-Verlag.
[25] S. Sano, Une intégral invariante sur l'algèbre de Lie symétrique semi-simple, Advanced Studies in Pure Math., **14** (1988), 449-517.
[26] S. Sano, Distributions sphériques invariantes de la series discrete sur l'espace symetrique semi-simple G_c/G_R, Scient. Papers of the College of Arts and Sciences, Univ. of Tokyo, **39** (1989), 57-71.
[27] L. Schwartz, Théorie des distributions, Hermann, 1950.
[28] J. Sekiguchi, Invariant spherical hyperfunctions on the tangent space of a symmetric space, Adv. St. in pure Math., **6** (1985), 83-126.
[29] M. Sugiura, Unitary representations and harmonic analysis Kodansha, Tokyo, 1975.
[30] R. Takahashi, Sur les functions sphériques et la formule de Plancherel dans le groupe hyperbolique, Japan. J. Math., **31** (1961), 55-90.
[31] P.C. Trombi-V.S. Varadarajan, Asymptotic behaviour of eigenfunctions on a semisimple Lie group: The discrete spectrum, Acta Math., **129** (1972), 237-280.
[32] G. van Dijk, Invariant eigendistributions on the tangent space of a rank one semisimple symmetric space, Math. Ann., **268** (1984), 405-416.
[33] V.S. Varadarajan, Harmonic Analysis on real reductive groups, Lecture Notes in Math., **576** (1977), Springer-Verlag.
[34] G. Warner, Harmonic Analysis on semi-simple Lie groups, Vol. 1, 2, Springer-Verlag, 1972.

Note ajoutée après le rédaction du manuscript. Le preprint de P. Harink "Fonctions généralisées sphériques sur G_c/G_R", que j'ai reçus après avoir terminé la rédaction de cet article, contient des démonstrations différentes des résultats de [20] et [24].