J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
38-1 (1998) 1-20

Solution globale de l'équation d'un gaz visqueux isotherme dans le demi-espace assujetti à une grande force exterieure dérivant d'un potentiel

Par

Rachid BENABIDALLAH

1. Introduction

Dans cet article, on se propose de démontrer l'existence et l'unicité de la solution globale du système d'équations

$$\partial_t u - \frac{1}{\rho} A u + \nabla \sigma + (u \cdot \nabla) u = 0, \tag{1.1}$$

$$\partial_t \sigma + u \cdot \nabla \sigma - u \cdot \nabla \Phi + \nabla \cdot u = 0, \tag{1.2}$$

$$\sigma = \log (\rho / \rho_{eq}) \tag{1.3}$$

avec les conditions initiales

$$u|_{t=0} = u_0, \qquad \sigma|_{t=0} = \log (\rho_0 / \rho_{eq}) = \sigma_0, \tag{1.4}$$

sous l'hypothèse de la petitesse des conditions initiales u_0, σ_0.

L'opérateur A figurant dans (1.1) est donné par

$$A u = \mu \Delta u + \lambda \nabla (\nabla \cdot u) \tag{1.5}$$

avec deux constantes positives μ et λ vérifiant la condition $\lambda \geq \mu/3$, tandis que $\Phi = \Phi(x)$ est une fonction scalaire donnée. Quant à la fonction $\rho_{eq} = \rho_{eq}(x)$, elle est donnée par

$$\rho_{eq} = \exp(-\Phi(x)). \tag{1.6}$$

Les équations (1.1) - (1.3) sont à envisager dans un domaine non borné Ω de $\mathbf{R}^3$ et pour $t > 0$. Dans ce travail nous considérons le cas où Ω est le demi-espace $\mathbf{R}^3_+ = \{ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 | x_3 > 0 \}$. Nous signalons en outre que le résultat d'existence et d'unicité locales (théorème 3.1) est valable également pour le cas où Ω est un domaine extérieur, plus précisément le complémentaire d'un compact de $\mathbf{R}^3$. La solution u devra en outre vérifier la condition

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u \to 0 \quad \text{pour} \quad |x| \to \infty. \tag{1.7}$$

Communicated by Prof. K. Ueno, May 22, 1995
Revised September 30, 1997

Pour la fonction Φ on suppose les hypothèses suivantes:

$$\Phi \in L^\infty(\Omega), \tag{1.8}$$

$$\nabla\Phi \in L^\infty(\Omega) \cap L^2(\Omega), \tag{1.9}$$

$$\partial_{x_i}\partial_{x_j}\Phi \in W_3^1(\Omega) \quad (i, j=1, 2, 3). \tag{1.10}$$

On remarque que (1.6) et (1.8) (et la régularité de Φ) entraînent l'existence de deux constantes positives $\underline{m}$ et $\overline{m}$ telles que

$$0<\underline{m} \leq \rho_{eq}(x) \leq \overline{m} < \infty \quad \forall x \in \Omega. \tag{1.11}$$

Si on substitue les relations (1.3), (1.5) et (1.6) dans les équations (1.1) et (1.2), ces dernières s'expriment sous la forme

$$\partial_t u - \frac{1}{\rho}(\mu\Delta u + \lambda \nabla (\nabla \cdot u)) + (u \cdot \nabla) u + \frac{1}{\rho}\nabla \rho = -\nabla\Phi, \tag{1.1 bis}$$

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0. \tag{1.2 bis}$$

Le système d'équations (1.1) bis et (1.2) bis est un modèle simplifié du mouvement d'un gaz visqueux dont la température est considérée constante et la pression est proportionnelle à la densité, mouvement assujetti à une force extérieure dérivant d'un potentiel Φ.

Le résultat fondamental concernant la solution globale du système d'équations d'un gaz visqueux est dû à Matsumura et Nishida [7], [8], qui ont démontré l'existence et l'unicité de la solution globale du système d'un gaz visqueux calorifère sous les hypothèses que les données initiales soient petites et que le potentiel Φ soit suffisamment voisin d'une constante. Plus récemment, Matsumura et Padula [9] ont démontré que dans un domaine borné un résultat analogue a lieu même avec une grande force dérivant d'un potentiel. D'autre part, dans [2], nous avons prouvé l'existence et l'unicité de la solution globale du système (1.1) bis et (1.2) bis dans l'espace tout entier sous une grande force dérivant d'un potentiel.

Dans la suite, pour une fonction u à valeurs dans $\mathbf{R}^3$ on désignera par ∇^α ($\alpha = 1, 2, 3$) les vecteurs de $\mathbf{R}^{3^n}$ ($n = 2, 3, 4$ respectivement) dont les composantes sont $\partial_{x_i}u_j$ $(i, j=1, 2, 3)$, $\partial_{x_i}\partial_{x_j}u_k$ $(i, j, k=1, 2, 3)$ et $\partial_{x_i}\partial_{x_j}\partial_{x_k}u_l$ $(i, j, k, l=1, 2, 3)$ respectivement.

En outre, si u et ψ sont des fonctions définies dans $\mathbf{R}_+^3$ à valeurs respectivement dans $\mathbf{R}^3$ et $\mathbf{R}$ on entendra par $D_\tau u$ et $D_\tau\psi$ les vecteurs de $\mathbf{R}^6$ et de $\mathbf{R}^2$ dont les composantes sont respectivement les dérivées premières tangentielles $\partial_{x_i}u_j$ $(i=1, 2$ et $j=1, 2, 3)$ et $\partial_{x_i}\psi$ $(i=1, 2)$. Quant à $D_\tau^2 u$ et $D_\tau^2\psi$ ils sont les vecteurs de $\mathbf{R}^{12}$ et de $\mathbf{R}^4$ dont les composantes sont respectivement les dérivées secondes tangentielles $\partial_{x_i}\partial_{x_j}u_k$ $(i, j=1, 2$ et $k=1, 2, 3)$ et $\partial_{x_i}\partial_{x_j}\psi$ $(i, j=1, 2)$.

Par ailleurs, on notera

$$\|\cdot\|_{L^p}, \quad \|\cdot\|_{L^r(t_0,t_1;\, H^p)}$$

au lieu de $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$, $\|\cdot\|_{L^r(t_0,t_1;\,H^p(\Omega))}$ les normes dans $L^p(\Omega)$ et $L^r(t_0, t_1; H^p(\Omega))$. Mais lorsqu'il s'agit d'un sous-domaine Ω' de Ω, on le précisera toujours par la notation

$$\|\cdot\|_{L^p(\Omega')}.$$

Je tiens à remercier le professeur H. Fujita Yashima pour les discussions très utiles que j'ai eues avec lui.

2. Préliminaires

Nous introduisons les opérateurs différentiels ∇_A et $\tilde{\nabla}_A$. Ils sont caractérisés par les relations

$$-(u, Av)_{L^2} = (\nabla_A u, \nabla_A v)_{L^2}, \tag{2.1}$$

$$\nabla_A(\phi u) = (\tilde{\nabla}_A \phi) u + \phi \nabla_A u, \tag{2.2}$$

vérifiées pour toutes fonctions u, v et ϕ à valeurs respectivement dans $\mathbf{R}^3$, $\mathbf{R}^3$ et $\mathbf{R}$ assez régulières et telles que

$$u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Plus précisément, ils sont définis par les relations

$$\nabla_A u = {}^t(a_1, \cdots, a_{10}) \tag{2.3}$$

avec

$$a_1 = \sqrt{\mu}\,\partial_{x_1} u_1, \quad a_2 = \sqrt{\mu}\,\partial_{x_1} u_2, \ \cdots, \ a_8 = \sqrt{\mu}\,\partial_{x_3} u_2$$

$$a_9 = \sqrt{\mu}\,\partial_{x_3} u_3, \quad a_{10} = \sqrt{\lambda}\,(\nabla\cdot u) = \sqrt{\lambda}\sum_{i=1}^{3} \partial_{x_i} u_i$$

et

$$\tilde{\nabla}_A \phi = (b_{ij}) \quad (\text{matrice}\,(10\times 3)) \tag{2.4}$$

avec

$$b_{11} = b_{22} = b_{33} = \sqrt{\mu}\,\partial_{x_1}\phi, \ b_{41} = b_{52} = b_{63} = \sqrt{\mu}\,\partial_{x_2}\phi,$$
$$b_{71} = b_{82} = b_{93} = \sqrt{\mu}\,\partial_{x_3}\phi, \ b_{10j} = \sqrt{\lambda}\,\partial_{x_j}\phi \ (j=1, 2, 3),$$
$$\text{les autres } b_{ij} = 0.$$

On voit aisément que les opérateurs ∇_A et $\tilde{\nabla}_A$ définis ci-dessus vérifient les relations (2.1) et (2.2). Nous allons maintenant rappeler quelques résultats classiques. On rappelle d'abord le

Lemme 2.1. *Soit Ω le demi-espace $\mathbf{R}^3_+$ ou un domaine extérieur de $\mathbf{R}^3$. Si $Au \in H^k(\Omega)$, alors on a pour $k=0, 1$*

$$\|\nabla^2 u\|_{H^k} \le c\,(\|Au\|_{H^k} + \|u\|_{L^2}) \tag{2.5}$$

avec une constante c.

Remarque. La presence dans (2.5) de la norme de u dans $L^2(\Omega)$ est due au fait que notre domaine Ω est non borné.

Démonstration. C'est un résultat classique (voir par exemple [1]).

On considère le système d'équations de Stokes

$$
\left\{\begin{array}{l}
-\mu\Delta v+\nabla p=f, \\
\nabla\cdot v=h, \\
v|_{\partial\Omega}=v|_{\infty}=0.
\end{array}\right. \tag{2.6}
$$

On a alors le

Lemme 2.2. *Soit Ω le demi-espace $\mathbf{R}^3_+$ ou un domaine extérieur de $\mathbf{R}^3$. On suppose que v et p vérifient (2.6). Si $f\in H^1(\Omega)$, $h\in H^2(\Omega)$, alors on a les inégalités*

$$\|\nabla^2 v\|^2_{L^2}+\|\nabla p\|^2_{L^2}\leq c\,(\|h\|^2_{H^1}+\|f\|^2_{L^2}+\|\nabla v\|^2_{L^2}), \tag{2.7}$$

$$\|\nabla^3 v\|^2_{L^2}+\|\nabla^2 p\|^2_{L^2}\leq c\,(\|h\|^2_{H^2}+\|f\|^2_{H^1}+\|\nabla v\|^2_{L^2}), \tag{2.8}$$

avec une constante positive c.

Remarque. Le terme $\|\nabla v\|^2_{L^2}$ figurant dans le deuxième membre de (2.7) et de (2.8) n'est pas nécessaire lorsque il s'agit du demi-espace.

Démonstration. Voir le lemme 4.3 de [8].

3. Solution locale

Théorème 3.1. *Soit Ω le demi-espace $\mathbf{R}^3_+$ ou un domaine extérieur assez régulier de $\mathbf{R}^3$. Sous les hypothèses (1.8)-(1.10), si on a*

$$u_0\in H^2(\Omega), \qquad \sigma_0\in H^2(\Omega), \tag{3.1}$$

alors il existe un $T'>0$ tel que les équations (1.1)-(1.3) avec les conditions (1.4) admettent dans l'intervalle $[0, T']$ une solution et une seule dans la classe

$$u\in L^\infty(0, T'; H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega))\cap L^2(0, T'; H^3(\Omega)), \tag{3.2}$$

$$\sigma\in L^\infty(0, T'; H^2(\Omega)). \tag{3.3}$$

Remarque. L'intervalle $[0, T']$ mentionné dans l'énoncé du théorème 3.1 dépend de u_0 et σ_0. Mais, les raisonnements qui nous ont conduit au théorème 3.1 nous ont permis de déterminer $T'>0$ comme fonction d'un nombre positif M de telle sorte que la solution subsiste au moins dans $[0, T']$ quelque soient les données initiales u_0, σ_0 vérifiant

$$\|u_0\|_{H^2}+\|\sigma_0\|_{H^2}\leq M.$$

Démonstration. L'existence d'une solution locale (u, σ) dans un certain intervalle $[0, T']$ a été établie (voir [2]) comme le point fixe d'une application résultant de la résolution des équations linéarisées

$$\partial_t u - \frac{1}{\rho} A u = f(v), \tag{3.4}$$

$$\partial_t \sigma + v \cdot \nabla \sigma = g(v), \tag{3.5}$$

où ρ, f et g sont des fonctions données.

En effect, pour v donnée, on résoud d'abord l'équation de continuité (3.5) correspondante à

$$g(v) = v \cdot \nabla \Phi - \nabla \cdot v.$$

Soit $\sigma(v)$ sa solution. On pose

$$\bar{\rho} = \rho(v) = \rho_{eq} \exp(\sigma(v))$$

et on résoud l'équation linéaire (3.4) correspondante à

$$\rho = \bar{\rho}, \qquad f(v) = -(v \cdot \nabla) v - \nabla \sigma(v).$$

Sa solution qu'on désignera par

$$u = G(v)$$

définit ainsi une application dont le point fixe nous fournira la solution locale du système (1.1)-(1.3) (pour les détails voir [2]).

4. Estimations a priori

Dans la suite nous ne considérons que le cas où $\Omega = \mathbf{R}^3_+$ et nous établirons des estimations *a priori* sur u et σ. Ces estimations seront obtenues sous l'hypothèse

$$\|\nabla \sigma\|_{L^\infty(0, \infty; L^3)} \leq \delta_0, \tag{4.1}$$

où δ_0 est un nombre positif donné, on verra que l'hypothèse (4.1) sera vérifiée sous les hypothèses du théorème 5.1. Ces estimations nous permetterons dans le paragraphe suivant de prolonger la solution sur l'intervalle $[0, \infty[$.

A cette fin on définit les fonctions $\mathscr{D}_0$ et $\mathscr{L}_0$ de t $(0 \leq t \leq T)$ par

$$\mathscr{D}_0(t) = \|\nabla u\|^2_{H^2} + \|\nabla \sigma\|^2_{H^1} + \|\sqrt{\rho}\, \partial_t u\|^2_{L^2} + \|\sqrt{\rho}\, \nabla \partial_t u\|^2_{L^2}, \tag{4.2}$$

$$\mathscr{L}_0(t) = \|\nabla u\|^2_{L^2} + \|\sqrt{\rho}\, \nabla \sigma\|^2_{L^2} + \|\sqrt{\rho}\, \nabla^2 \sigma\|^2_{L^2}. \tag{4.3}$$

On a la

Proposition 4.1. *Soit* $\Omega = \mathbf{R}^3_+$. *Si* (u, σ) *est la solution du système d'équations* (1.1)-(1.3) *appartenant à la classe* (3.2)-(3.3) *et si les hypothèses du théorème* 3.1 *ainsi que l'hypothèse* (4.1) *sont vérifiées, alors on a les inégalités* *suivantes*

$$(4.4)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\|\sqrt{\rho}u(t)\|_{L^2}^2+\int_\Omega \rho_{eq}(\sigma e^\sigma - e^\sigma+1)+\int_0^t\|\nabla_A u(s)\|_{L^2}^2 ds= \\ \quad =\frac{1}{2}\|\sqrt{\rho}_0 u_0\|_{L^2}^2+\int_\Omega \rho_{eq}(\sigma_0 e^{\sigma_0}-e^{\sigma_0}+1), \end{cases}$$

$$(4.5)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2+\int_\Omega (\rho u)\cdot\nabla\sigma+\int_0^t\|\sqrt{\rho}\,\partial_t u\|_{L^2}^2 ds\le c\,(\|u_0\|_{H^1}^2+\|\sigma_0\|_{H^1}^2)+ \\ \quad +c_1\int_0^t(\exp\|\sigma\|_{L^\infty})\|\nabla u\|_{L^2}^2 ds+c\int_0^t\left(\exp\frac{1}{2}\|\sigma\|_{L^\infty}\right)\mathscr{D}_0(s)\mathscr{L}_0^{\frac{1}{2}}(s)\,ds, \end{cases}$$

$$(4.6)\quad \begin{cases} \int_0^t\|\sigma'\|_{L^2(\Omega')}^2 ds\le c_2\int_0^t(\exp 2\|\sigma\|_{L^\infty})\|\nabla u\|_{L^2}^2 ds+ \\ \quad +c_3\int_0^t(\exp\|\sigma\|_{L^\infty})\|\sqrt{\rho}\,\partial_t u\|_{L^2}^2 ds+c\int_0^t\mathscr{D}_0(s)\mathscr{L}_0(s)\,ds, \end{cases}$$

$$(4.7)\quad \begin{cases} \|\sqrt{\rho}\,\nabla\sigma(t)\|_{L^2}^2+\int_0^t(\|\nabla\sigma\|_{L^2}^2+\|\nabla^2 u\|_{L^2}^2)\,ds\le \\ \quad \le c\,(\|\nabla u_0\|_{L^2}^2+\|\nabla\sigma_0\|_{L^2}^2)+c\int_0^t(\exp 3\|\sigma\|_{L^\infty})\mathscr{D}_0(s)\mathscr{L}_0(s)\,ds+ \\ \quad +c_4\int_0^t(\exp 2\|\sigma\|_{L^\infty})(\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\sqrt{\rho}\,\partial_t u\|_{L^2}^2)\,ds+c_5\int_0^t\|\sigma'\|_{L^2(\Omega')}^2 ds, \end{cases}$$

$$(4.8)\quad \begin{cases} \|Au(t)\|_{L^2}^2-2\int_\Omega \rho\,(Au)\cdot\nabla\sigma+\int_0^t\|\sqrt{\rho}\,\nabla_A\partial_t u\|_{L^2}^2 ds\le \\ \quad \le c\,(\|Au_0\|_{L^2}^2+\|\nabla\sigma_0\|_{L^2}^2)+c\int_0^t\left(\exp\frac{3}{2}\|\sigma\|_{L^\infty}\right)\mathscr{D}_0(s)\mathscr{L}_0^{\frac{1}{2}}(s)\,ds+ \\ \quad +c_6\int_0^t\|\sqrt{\rho}\,\partial_t u\|_{L^2}^2 ds+c_7\int_0^t(\exp\|\sigma\|_{L^\infty})\|\nabla u\|_{H^1}^2 ds, \end{cases}$$

$$(4.9)\quad \begin{cases} \|\sqrt{\rho}\,\nabla^2\sigma(t)\|_{L^2}^2+\int_0^t(\|\nabla^3 u\|_{L^2}^2+\|\nabla^2\sigma\|_{L^2}^2)\,ds\le c\,(\|\sigma_0\|_{H^2}^2+\|u_0\|_{H^2}^2)+ \\ \quad +c\int_0^t(\exp 3\|\sigma\|_{L^\infty})\mathscr{D}_0(s)\;(\mathscr{L}_0^{\frac{1}{2}}(s)+\mathscr{L}_0(s))\,ds+ \\ \quad +c_8\int_0^t(\exp 2\|\sigma\|_{L^\infty})(\|\sqrt{\rho}\,\nabla\partial_t u\|_{L^2}^2+\|\nabla u\|_{H^1}^2+\|\sqrt{\rho}\,\partial_t u\|_{L^2}^2+\|\nabla\sigma\|_{L^2}^2) \end{cases}$$

où c *et* c_i $(i=1,\cdots,8)$ *sont des constantes qui ne dépendent que de* δ_0, μ, λ *et* Φ, *tandis que* Ω' *et* σ' *figurant dans* (4.6) *et* (4.7) *sont données par* (4.10) *et* (4.12) *plus bas.*

Pour la commodité de l'exposition, nous décomposerons la démonstration de la proposition 4.1 en six parties correspondantes à l'égalité (4.4) et aux inégalités (4.5) - (4.9).

Mais avant d'aborder la démonstration des inégalités, il nous est commode de définir la fonction w qui nous sera nécessaire pour établir l'inégalité (4.6).

En effet, soit Ω' un sous-domaine borné de Ω tel que

$$\left(\frac{1}{|\Omega'|^{\frac{1}{6}}}\|\nabla\Phi\|_{L^2(\Omega)}+\|\nabla\Phi\|_{L^3(\Omega\setminus\Omega')}\right)\leq\frac{1}{4\bar{m}\sqrt{2}},\tag{4.10}$$

où $\bar{m}$ est la constante figurant dans (1.11).

On considère maintenant l'équation

$$\nabla\cdot w=\sigma' \quad \text{dans } \Omega',\tag{4.11}$$

où

$$\sigma'=\sigma-\frac{1}{|\Omega'|}\int_{\Omega'}\sigma\tag{4.12}$$

avec la condition aux limites

$$w|_{\partial\Omega'}=0.\tag{4.13}$$

On a alors le

Lemme 4.1. *Le système d'équations* (4.11) *avec la conditions* (4.13) *admet au moins une solution* $w\in H_0^1(\Omega')$ *satisfaisant à l'estimation*

$$\|w\|_{H_0^1(\Omega')}\leq c\|\sigma'\|_{L^2(\Omega')}\tag{4.14}$$

avec une constante c *ne dépendant pas de* $\sigma'\in L^2(\Omega')$.

Démonstration. L'existence d'une solution $w\in H_0^1(\Omega')$ et son estimation (4.14) sont des conséquence immédiates de résultats connus (voir [6]).

Pour la démonstration des inégalités (4.4)-(4.9), nous convenons d'indiquer par $\langle(1.1),\cdot\rangle$, $\langle D_\tau(1.1),\cdot\rangle$, $\langle D_\tau^2(1.1),\cdot\rangle$ ou $\langle D_\tau(1.2),\cdot\rangle$, $\langle D_\tau^2(1.2),\cdot\rangle$ le produit scalaire des équations (1.1) ou (1.2), auxquelles sont éventuellement appliqués les opérateurs différentiels D_τ et D_τ^2, avec des fonctions convenables à préciser.

Dans la suite, c désignera des constantes qui ne dépendent ni de u ni de σ. On utilisera constamment les théorèmes d'immersion de Sobolev, y compris le théorème de Morrey (voir par exemple [4]), sans toutefois les citer explicitement dans chaque démonstration d'inégalité où ils seront appliqués.

Démonstration de (4.4). Le produit scalaire $\langle(1.1),\rho u\rangle$ nous donne

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\sqrt{\rho}u\|_{L^2}^2-\frac{1}{2}\int_\Omega(\partial_t\rho)|u|^2+\|\nabla_A u\|_{L^2}^2-\\ -\int_\Omega(\rho u)\cdot((u\cdot\nabla)u)+\int_\Omega(\rho u)\cdot\nabla\sigma=0.\end{aligned}\tag{4.15}$$

En vertu de (1.2) bis, on a

$$\frac{1}{3}\int_\Omega(\partial_t\rho)|u|^2=-\frac{1}{2}\int_\Omega\nabla\cdot(\rho u)|u|^2=\int_\Omega(\rho u)\cdot((u\cdot\nabla)u),$$

$$\int_\Omega(\rho u)\cdot\nabla\sigma=\int_\Omega(\partial_t\rho)\sigma=\frac{d}{dt}\int_\Omega\rho_{eq}(\sigma e^\sigma-e^\sigma+1).$$

Donc, en intégrant (4.15) par rapport à t, on obtient facilement l'égalité (4.4).

Démonstration de (4.5). A l'aide de la relation

$$\int_\Omega (\rho\partial_t u)\cdot\nabla\sigma = \frac{d}{dt}\int_\Omega (\rho u)\cdot\nabla\sigma - \int_\Omega (\partial_t\rho)u\cdot\nabla\sigma - \int_\Omega \rho|\partial_t\sigma|^2,$$

le produit scalaire $\langle(1.1), \rho\partial_t u\rangle$ s'écrit sous la forme

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\nabla_A u\|_{L^2}^2 + 2\int_\Omega (\rho u)\cdot\nabla\sigma\right) + \|\sqrt{\rho}\,\partial_t u\|_{L^2}^2 = \sum_{i=1}^{3} I_i \tag{4.16}$$

avec

$$I_1 = -\int_\Omega (\rho\partial_t u)\cdot((u\cdot\nabla)u),$$
$$I_2 = \int_\Omega \rho(\partial_t\sigma)u\cdot\nabla\sigma, \quad I_3 = \int_\Omega \rho(\partial_t\sigma)^2.$$

Il n'est pas difficile de voir que

$$|I_1| \le c\left(\exp\frac{1}{2}\|\sigma\|_{L^\infty}\right)\|\sqrt{\rho}\,\partial_t u\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla u\|_{H^1}.$$

Quant aux termes I_2 et I_3, compte tenu de (1.2) et de la condition (4.1) (voir aussi (1.9)), on a

$$|I_2 + I_3| \le c(\exp\|\sigma\|_{L^\infty})\|\nabla u\|_{L^2}^2.$$

Ces estimations, jointes à (4.16), nous donnent, en intégrant par rapport à t, l'inégalité (4.5).

Démonstration de (4.6). On considère le produit scalaire dans $L^2(\Omega')$ de l'équation (1.1) avec la fonction $-w$ (voir (4.10)-(4.13)). Il s'exprime sous la forme

$$\|\sigma'\|_{L^2(\Omega')}^2 = \sum_{i=1}^{4} I_i \tag{4.17}$$

avec

$$I_1 = \int_{\Omega'} \partial_t u\cdot w, \quad I_2 = \int_{\Omega'} ((u\cdot\nabla)u)\cdot w,$$
$$I_3 = \int_{\Omega'} \frac{1}{\rho}(\nabla_A u)\cdot\nabla_A w, \quad I_4 = \int_{\Omega'} \frac{1}{\rho}(\nabla_A u)\cdot((\tilde{\nabla}_A\Phi - \tilde{\nabla}_A\sigma)w).$$

Or, compte tenu de (1.3) et de (4.14), on a

$$|I_1| \le \frac{1}{4}\|\sigma'\|_{L^2(\Omega')}^2 + c(\exp\|\sigma\|_{L^\infty})\|\sqrt{\rho}\,\partial_t u\|_{L^2}^2.$$

Il est, d'autre part, facile d'estimer I_2, de sorte que, à l'aide de (4.14), on a

$$|I_2| \leq \frac{1}{4}\|\sigma'\|^2_{L^2(\Omega')} + c\|\nabla u\|^2_{L^2}\|\nabla u\|^2_{H^1}.$$

Quant aux termes I_3 et I_4, compte tenu de la condition (4.1) et de (4.14), on a

$$|I_3 + I_4| \leq \frac{1}{4}\|\sigma'\|^2_{L^2(\Omega')} + c(\exp 2\|\sigma\|_{L^\infty})\|\nabla u\|^2_{L^2}.$$

Cela étant, en adjoignant les estimations relatives aux termes I_i $(i=1,\cdots,4)$ et en les intégrant par rapport à t, on déduit de (4.17) l'inégalité (4.6).

Démostration de (4.7). On considère maintenant les produits scalaires

$$\langle D_\tau(1.1), \rho D_\tau u\rangle, \qquad \langle D_\tau(1.2), \rho D_\tau \sigma\rangle.$$

A l'aide de la relation

$$D_\tau(\nabla \cdot u) = D_\tau(u \cdot \nabla \Phi) - D_\tau\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)$$

(voir (1.2)), où

$$\frac{d\varphi}{dt} = \partial_t \varphi + u \cdot \nabla \varphi \tag{4.18}$$

(φ étant générique), et de la relation

$$\int_\Omega \rho(D_\tau(\nabla \cdot u))D_\tau\sigma = -\int_\Omega \rho(D_\tau u) \cdot D_\tau(\nabla \sigma) - \int_\Omega \rho(\nabla \sigma - \nabla \Phi) \cdot (D_\tau u)D_\tau\sigma,$$

conséquence immédiate d'une intégration par parties et du fait que $D_\tau u|_{\partial\Omega} = 0$, la somme des produits scalaires envisagés ci-dessus, s'écrit sous la forme

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\sqrt{\rho}D_\tau\sigma\|^2_{L^2} + \|\sqrt{\rho}D_\tau u\|^2_{L^2}) + \mu\|\nabla D_\tau u\|^2_{L^2} + \lambda\left\|D_\tau\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)\right\|^2_{L^2} = \sum_{i=1}^5 I_i \tag{4.19}$$

avec

$$I_1 = \int_\Omega \rho u \cdot (\nabla D_\tau \Phi)D_\tau\sigma, \quad I_2 = \int_\Omega (D_\tau\Phi)Au \cdot (D_\tau u),$$

$$I_3 = -\int_\Omega (D_\tau\sigma)Au \cdot (D_\tau u), \quad I_4 = 2\lambda\int_\Omega \left(D_\tau\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)\right)(D_\tau(u \cdot \nabla \Phi)),$$

$$I_5 = -\int_\Omega \rho(((D_\tau u) \cdot \nabla)u) \cdot (D_\tau u), \quad I_6 = -\lambda\int_\Omega |D_\tau(u \cdot \nabla \Phi)|^2.$$

Or, compte tenu de (1.9), on a

$$|I_1 + I_2| \leq \frac{\varepsilon_1}{2}(\|\nabla \sigma\|^2_{L^2} + \|\nabla^2 u\|^2_{L^2}) + \frac{c}{\varepsilon_1}\|\nabla_A u\|^2_{L^2}$$
$$+ \frac{c}{\varepsilon_1}(\exp 2\|\sigma\|_{L^\infty})\|\nabla u\|^2_{L^2} \quad (\varepsilon_1 > 0).$$

Il est, d'autre part, facile d'estimer I_3 et I_4, de sorte que

$$|I_3| \leq \frac{\mu}{4} \| \nabla D_\tau u \|_{L^2}^2 + c(\exp \|\sigma\|_{L^\infty}) \| \nabla^2 u \|_{L^2}^2 (\|\sqrt{\rho}\, \nabla \sigma\|_{L^2}^2 + \|\sqrt{\rho}\, \nabla^2 \sigma\|_{L^2}^2),$$

$$|I_4| \leq \frac{\lambda}{2} \left\| D_\tau\left(\frac{d\sigma}{dt}\right) \right\|_{L^2}^2 + c\| \nabla u \|_{L^2}^2.$$

Quant à I_5 et I_6, on a

$$|I_5 + I_6| \leq \frac{\mu}{4} \| \nabla D_\tau u \|_{L^2}^2 + c(\exp 2\|\sigma\|_{L^\infty}) \| \nabla u \|_{L^2}^2 \| \nabla u \|_{H^1}^2 + c\| \nabla u \|_{L^2}^2.$$

Ces estimations, jointes à (4.19), nous donne, en rappelant les expressions (4.2) et (4.3) de $\mathscr{D}_0$ et de $\mathscr{L}_0$,

$$\begin{aligned}(4.20) \qquad \frac{d}{dt}(\|\sqrt{\rho} D_\tau \sigma\|_{L^2}^2 + \|\sqrt{\rho} D_\tau u\|_{L^2}^2) + \mu \| \nabla D_\tau u \|_{L^2}^2 + \lambda \left\| D_\tau\left(\frac{d\sigma}{dt}\right) \right\|_{L^2}^2 \leq \\ \leq c(\exp 2\|\sigma\|_{L^\infty}) \mathscr{D}_0 \mathscr{L}_0 + c\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + 1\right) \| \nabla u \|_{L^2}^2 + \\ + \frac{c}{\varepsilon_1}(\exp 2\|\sigma\|_{L^\infty}) \| \nabla u \|_{L^2}^2 + \varepsilon_1 (\| \nabla \sigma \|_{L^2}^2 + \| \nabla^2 u \|_{L^2}^2).\end{aligned}$$

On considère maintenant les équations

$$\partial_{x_3}\left(\frac{d\sigma}{dt}\right) + \partial_{x_3}(\nabla \cdot u) = \partial_{x_3}(u \cdot \nabla \Phi),$$
$$\rho \partial_t u_3 - \mu \Delta u_3 - \lambda \partial_{x_3}(\nabla \cdot u) + \rho \partial_{x_3} \sigma + \rho (u \cdot \nabla) u_3 = 0.$$

En éliminant de ces équations le terme $\partial_{x_3}^2 u_3$, on obtient

$$\begin{aligned}(4.21) \qquad (\mu + \lambda) \partial_{x_3}\left(\frac{d\sigma}{dt}\right) + \rho \partial_{x_3} \sigma = -\rho \partial_t u_3 + (\mu + \lambda) \partial_{x_3}(u \cdot \nabla \Phi) - \\ - \rho (u \cdot \nabla) u_3 + \mu (\partial_{x_1}^2 u_3 + \partial_{x_2}^2 u_3) - \\ - \mu \partial_{x_3}(\partial_{x_1} u_1 + \partial_{x_2} u_2).\end{aligned}$$

Comme, en rappelant (4.18), des calculs nous conduisent à

$$(4.22) \qquad \left\langle \partial_{x_3}\left(\frac{d\sigma}{dt}\right), \rho \partial_{x_3} \sigma \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\sqrt{\rho}\, \partial_{x_3} \sigma\|_{L^2}^2 + \int_\Omega (\partial_{x_3} u) \cdot (\nabla \sigma) \rho \partial_{x_3} \sigma,$$

le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ de (4.21) avec $\rho \partial_{x_3} \sigma + (\mu + \lambda) \partial_{x_3}\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)$ nous donne

$$(4.23) \qquad (\mu + \lambda) \frac{d}{dt} \|\sqrt{\rho}\, \partial_{x_3} \sigma\|_{L^2}^2 + \|\rho \partial_{x_3} \sigma\|_{L^2}^2 + (\mu + \lambda)^2 \left\| \partial_{x_3}\left(\frac{d\sigma}{dt}\right) \right\|_{L^2}^2 = \sum_{i=1}^4 I_i$$

avec

$$I_1 = -2(\mu + \lambda) \int_\Omega \rho (\partial_{x_3} u) \cdot (\nabla \sigma) \partial_{x_3} \sigma,$$
$$I_2 = \int_\Omega (-\rho \partial_t u_3 + (\mu + \lambda) \partial_{x_3}(u \cdot \nabla \Phi)) \left(\rho \partial_{x_3} \sigma + (\mu + \lambda) \partial_{x_3}\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)\right),$$

$$I_3 = -\int_\Omega \rho((u\cdot\nabla)u_3)\left(\rho\partial_{x_3}\sigma + (\mu+\lambda)\,\partial_{x_3}\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)\right),$$

$$I_4 = \mu\int_\Omega (\partial^2_{x_1}u_3 + \partial^2_{x_2}u_3)\left(\rho\partial_{x_3}\sigma + (\mu+\lambda)\,\partial_{x_3}\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)\right),$$

$$I_5 = -\mu\int_\Omega (\partial_{x_3}(\partial_{x_1}u_1 + \partial_{x_2}u_2))\left(\rho\partial_{x_3}\sigma + (\mu+\lambda)\,\partial_{x_3}\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)\right).$$

On a évidemment

$$|I_1| \le \frac{1}{8}\|\rho\partial_{x_3}\sigma\|^2_{L^2} + c\,(\exp\|\sigma\|_{L^\infty})\,(\|\sqrt{\rho}\,\nabla\sigma\|^2_{L^2} + \|\sqrt{\rho}\,\nabla^2\sigma\|^2_{L^2})\,\|\nabla^2 u\|^2_{L^2},$$

$$\begin{aligned}|I_2+I_3| \le \frac{1}{4}\|\rho\partial_{x_3}\sigma\|^2_{L^2} &+ \frac{(\mu+\lambda)^2}{2}\left\|\partial_{x_3}\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)\right\|^2_{L^2} +\\ &+ c\,(\exp 2\|\sigma\|_{L^\infty})\,\|\nabla u\|^2_{L^2}\|\nabla u\|^2_{H^1} +\\ &+ c\,(\exp\|\sigma\|_{L^\infty})\,\|\sqrt{\rho}\,\partial_t u\|^2_{L^2} + c\|\nabla u\|^2_{L^2}.\end{aligned}$$

En outre, on a

$$|I_4+I_5| \le \frac{1}{8}\|\rho\partial_{x_3}\sigma\|^2_{L^2} + \frac{(\mu+\lambda)^2}{4}\left\|\partial_{x_3}\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)\right\|^2_{L^2} + \mu^2\|\nabla D_\tau u\|^2_{L^2}.$$

En adjoignant les estimations relatives aux termes I_i $(i=1,\dots,5)$, on déduit de (4.23), l'inégalité

$$\begin{aligned}(4.24)\qquad \frac{d}{dt}\|\sqrt{\rho}\,\partial_{x_3}\sigma\|^2_{L^2} &+ \frac{1}{2(\mu+\lambda)}\|\rho\partial_{x_3}\sigma\|^2_{L^2} + \frac{\mu+\lambda}{4}\left\|\partial_{x_3}\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)\right\|^2_{L^2} \le\\ &\le c\,(\exp 2\|\sigma\|_{L^\infty})\,\mathscr{D}_0\mathscr{L}_0 +\\ &+ \mu\|\nabla D_\tau u\|^2_{L^2} + c\,(\exp\|\sigma\|_{L^\infty})\,\|\sqrt{\rho}\,\partial_t u\|^2_{L^2} + c\|\nabla u\|^2_{L^2}.\end{aligned}$$

Si on rappelle la relation évidente

$$(4.25)\qquad \left\|\frac{d\sigma}{dt}\right\|_{L^2} \le c\|\nabla u\|_{L^2},$$

conséquence immédiate de (1.2) et des conditions (1.9) et (4.1), en adjoignant les inégalités (4.20) et (4.24) à (4.25) et en rappelant l'hypothèse $\lambda \ge \mu/3$, on obtient

$$\begin{aligned}(4.26)\qquad \frac{d}{dt}(\|\sqrt{\rho}\,\nabla\sigma\|^2_{L^2} &+ \|\sqrt{\rho}D_\tau u\|^2_{L^2}) + \frac{\mu+\lambda}{4}\left\|\frac{d\sigma}{dt}\right\|^2_{H^1} \le\\ &\le c\,(\exp 2\|\sigma\|_{L^\infty})\,\mathscr{D}_0\mathscr{L}_0 +\\ &+ c\left(\frac{1}{\varepsilon_1}+1\right)\|\nabla u\|^2_{L^2} + \frac{c}{\varepsilon_1}(\exp 2\|\sigma\|_{L^\infty})\,\|\nabla u\|^2_{L^2} +\\ &+ \varepsilon_1(\|\nabla\sigma\|^2_{L^2} + \|\nabla^2 u\|^2_{L^2}) + c\,(\exp\|\sigma\|_{L^\infty})\,\|\sqrt{\rho}\,\partial_t u\|^2_{L^2}.\end{aligned}$$

L'inégalité (4.26) étant établie, on applique le lemme 2.2 avec

$$v = u,$$
$$p = \rho_{eq}\sigma',$$

$$h=(u\cdot\nabla\Phi)-\frac{d\sigma}{dt},$$
$$f=f_1+f_2+f_3$$

(voir (4.12), (4.18)), où

$$f_1=-\rho\partial_t u+\lambda\nabla h-\rho(u\cdot\nabla)u,$$
$$f_2=(\rho_{eq}-\rho)\nabla\sigma'=(\rho_{eq}-\rho)\nabla\sigma,$$
$$f_3=\sigma'\rho_{eq}\nabla\Phi.$$

Il vient, compte tenu de la relation

$$\|\nabla\sigma\|_{L^2}\le c\,(\|\nabla(\rho_{eq}\sigma')\|_{L^2}+\|\sigma'\rho_{eq}\nabla\Phi\|_{L^2})$$

(voir (1.11)), que

$$\|\nabla^2 u\|_{L^2}^2+\|\nabla\sigma\|_{L^2}^2\le c\Big(\|h\|_{H^1}^2+\sum_{i=1}^{3}\|f_i\|_{L^2}^2\Big). \tag{4.27}$$

Or, on a

$$\|h\|_{H^1}^2+\|f_1\|_{L^2}^2\le c\left\|\frac{d\sigma}{dt}\right\|_{H^1}^2+c\,(\exp\|\sigma\|_{L^\infty})\|\sqrt{\rho}\,\partial_t u\|_{L^2}^2$$
$$+c\,(\exp 2\|\sigma\|_{L^\infty})\|\nabla u\|_{L^2}^2\|\nabla u\|_{H^1}^2+c\|\nabla u\|_{L^2}^2.$$

En outre, grâce à la relation

$$\|(1-e^{\sigma})\|_{L^p}\le(\exp\|\sigma\|_{L^\infty})\|\sigma\|_{L^p}\quad(p\in[1,\infty]), \tag{4.28}$$

il est aisé de voir, grâce à l'égalité

$$\rho_{eq}-\rho=\rho_{eq}(1-e^{\sigma}) \tag{4.29}$$

(voir (1.3)), que

$$\|f_2\|_{L^2}^2\le c\,(\exp 3\|\sigma\|_{L^\infty})\|\sqrt{\rho}\,\nabla\sigma\|_{L^2}^2(\|\nabla\sigma\|_{L^2}^2+\|\nabla^2\sigma\|_{L^2}^2).$$

Pour estimer le terme f_3, on considère le sous-domaine borné Ω' de Ω satisfaisant à la condition (4.8) et on écrit

$$\|f_3\|_{L^2}^2=\int_{\Omega'}\rho_{eq}^2|\sigma'|^2|\nabla\Phi|^2+\int_{\Omega\setminus\Omega'}\rho_{eq}^2|\sigma'|^2|\nabla\Phi|^2.$$

Compte tenu de (1.11), de (4.12) et de la condition (4.10), on a

$$\|f_3\|_{L^2}^2\le\overline{m}^2\|\nabla\Phi\|_{L^\infty}^2\|\sigma'\|_{L^2(\Omega')}^2$$
$$+\overline{m}^2\Big(\|\nabla\Phi\|_{L^3(\Omega\setminus\Omega')}^2+\frac{1}{|\Omega'|^{\frac13}}\|\nabla\Phi\|_{L^2(\Omega)}^2\Big)\|\sigma\|_{L^6}^2\le$$
$$\le c\|\sigma'\|_{L^2(\Omega')}^2+\frac12\|\nabla\sigma\|_{L^2}^2.$$

Ces estimations, jointes à (4.27), nous donne

$$\|\nabla^2 u\|_{L^2}^2+\|\nabla\sigma\|_{L^2}^2\leq\tilde{c}_1\left\|\frac{d\sigma}{dt}\right\|_{H^1}^2+c\|\nabla u\|_{L^2}^2+c\|\sigma'\|_{L^2(\Omega')}^2+$$
$$+c(\exp\|\sigma\|_{L^\infty}^2)\|\sqrt{\rho}\,\partial_t u\|_{L^2}^2+c(\exp 3\|\sigma\|_{L^\infty})\mathcal{L}_0\mathcal{D}_0. \tag{4.30}$$

Cela ètant, si on adjoint (4.30) multipliée par $\frac{\mu+\lambda}{4\tilde{c}_1}$ à (4.26) dans laquelle on choisit $\varepsilon_1=\frac{\mu+\lambda}{8\tilde{c}_1}$, on obtient, en l'intégrant par rapport à t, l'inégalité (4.7).

Démonstration de (4.8). On considère le produit scalaire de l'équation (1.1) avec $-\rho\partial_t Au$. Il s'exprime sous la forme

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|Au\|_{L^2}^2-2\int_\Omega \rho Au\cdot\nabla\sigma\right)+\|\sqrt{\rho}\,\nabla_A\partial_t u\|_{L^2}^2=\sum_{i=1}^{6}I_i \tag{4.31}$$

avec

$$I_1=-\int_\Omega \rho(\nabla_A\partial_t u)\cdot(\tilde{\nabla}_A\sigma)\partial_t u,\quad I_2=\int_\Omega \rho(\nabla_A\partial_t u)\cdot(\tilde{\nabla}_A\Phi)\partial_t u,$$
$$I_3=-\int_\Omega \rho(\nabla_A\partial_t u)\cdot((\tilde{\nabla}_A\sigma-\tilde{\nabla}_A\Phi)\ ((u\cdot\nabla)u)),$$
$$I_4=-\int_\Omega \rho(\nabla_A\partial_t u)\cdot\nabla_A((u\cdot\nabla)u),$$
$$I_5=-\int_\Omega \rho(Au)\cdot\nabla(\partial_t\sigma),\quad I_6=-\int_\Omega \rho(\partial_t\sigma)(Au)\cdot\nabla\sigma.$$

Or, on a

$$|I_1+I_2|\leq\frac{1}{2}\|\sqrt{\rho}\,\nabla_A\partial_t u\|_{L^2}^2+c\|\sqrt{\rho}\,\partial_t u\|_{L^2}^2$$
$$+c\left(\exp\frac{3}{2}\|\sigma\|_{L^\infty}\right)\|\sqrt{\rho}\,\nabla_A\partial_t u\|_{L^2}^2(\|\sqrt{\rho}\,\nabla\sigma\|_{L^2}+\|\sqrt{\rho}\,\nabla^2\sigma\|_{L^2}).$$

D'autre part, il est aisé d'obtenir à l'aide de (4.1)

$$|I_3+I_4|\leq c\left(\exp\frac{1}{2}\|\sigma\|_{L^\infty}\right)\|\sqrt{\rho}\,\nabla_A\partial_t u\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla^2 u\|_{H^1}.$$

Par ailleurs, en s'appuyant encore sur (4.1), on a

$$|I_5+I_6|\leq c(\exp\|\sigma\|_{L^\infty})\|\nabla^2 u\|_{L^2}\|\partial_t\nabla\sigma\|_{L^2}.$$

Or, si on applique l'opérateur ∂_{x_i} $(i=1,2,3)$ à l'équation (1.2), on obtient

$$\|\partial_t\nabla\sigma\|_{L^2}\leq c\|\nabla u\|_{H^1}+c'\|\nabla u\|_{H^1}\|\nabla^2\sigma\|_{L^2}.$$

Il en résulte que

$$|I_5+I_6|\leq c\left(\exp\frac{3}{2}\|\sigma\|_{L^\infty}\right)\|\nabla u\|_{H^1}^2\|\sqrt{\rho}\,\nabla^2\sigma\|_{L^2}+c(\exp\|\sigma\|_{L^\infty})\|\nabla u\|_{H^1}^2.$$

En adjoignant maintenant ces estimations à (4.31), on obtient, en l'intégrant par rapport à t, l'inégalité (4.8).

Démonstration de (4.9). A l'aide des relations

$$D_\tau^2(\nabla\cdot u)=D_\tau^2(u\cdot\nabla\Phi)-D_\tau^2\Big(\frac{d\sigma}{dt}\Big)$$

(voir (1.2), (4.18)) et

$$\int_\Omega\rho(D_\tau^2(\nabla\cdot u))(D_\tau^2\sigma)=-\int_\Omega\rho(D_\tau^2u)\cdot(D_\tau^2\nabla\sigma)$$
$$-\int_\Omega\rho(\nabla\sigma-\nabla\Phi)\cdot(D_\tau^2u)(D_\tau^2\sigma),$$

conséquence immédiate d'une intégration par parties et du fait que $\partial_{x_i}\partial_{x_j}u|_{\partial\Omega}=0$ $(i,j=1,2)$, la somme des produits scalaires

$$\langle D_\tau^2(1.1),\rho D_\tau^2u\rangle+\langle D_\tau^2(1.2),\rho D_\tau^2\sigma\rangle,$$

nous donne par un raisonnement analogue à (4.20) (voir aussi (4.2)-(4.3)) l'inégalité

$$\begin{aligned}(4.32)\qquad &\frac{d}{dt}(\|\sqrt{\rho}D_\tau^2u\|_{L^2}^2+\|\sqrt{\rho}D_\tau^2\sigma\|_{L^2}^2)+\mu\|\nabla D_\tau^2u\|_{L^2}^2+\lambda\Big\|D_\tau^2\Big(\frac{d\sigma}{dt}\Big)\Big\|_{L^2}^2\le\\ &\le c\Big(1+\frac{1}{\varepsilon_2}\Big)(\exp 2\|\sigma\|_{L^\infty})\mathscr{L}_0\mathscr{D}_0+\\ &+\varepsilon_2\|\nabla D_\tau\sigma\|_{L^2}^2+c\Big(\frac{1}{\varepsilon_2}+1\Big)(\exp 2\|\sigma\|_{L^\infty})\|\nabla u\|_{H^1}^2\quad(\varepsilon_2>0).\end{aligned}$$

On applique maintenant à l'équation (4.21) l'opérateur différentiel D_τ et on en fait le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ avec $\rho D_\tau\partial_{x_3}\sigma+(\mu+\lambda)D_\tau\partial_{x_3}\Big(\frac{d\sigma}{dt}\Big)$. On obtient alors par un raisonnement analogue à (4.23) et par les techniques usuelles d'estimations, l'inégalité

$$\begin{aligned}(4.33)\qquad &\frac{d}{dt}\|\sqrt{\rho}D_\tau\partial_{x_3}\sigma\|_{L^2}^2+\frac{1}{4(\mu+\lambda)}\|\rho D_\tau\partial_{x_3}\sigma\|_{L^2}^2+\frac{\mu+\lambda}{4}\Big\|D_\tau\partial_{x_3}\Big(\frac{d\sigma}{dt}\Big)\Big\|_{L^2}^2\le\\ &\le c(\exp 2\|\sigma\|_{L^\infty})\mathscr{D}_0\,(\mathscr{L}_0+\mathscr{L}_0^{\frac{1}{2}})+\mu\|\nabla D_\tau^2u\|_{L^2}^2\\ &+c(\exp 3\|\sigma\|_{L^\infty})(\|\sqrt{\rho}\,\nabla_A\partial_tu\|_{L^2}^2+\|\nabla\sigma\|_{L^2}^2)+c\|\nabla u\|_{H^1}^2.\end{aligned}$$

Cela ètant, si on adjoint (4.32) à (4.33) et en se servant de la relation évidente

$$\Big\|D_\tau\Big(\frac{d\sigma}{dt}\Big)\Big\|_{L^2}^2\le c\|\nabla^2u\|_{L^2}^2$$

(voir (1.2) et (4.18)), on obtient

$$\begin{aligned}(4.34)\qquad &\frac{d}{dt}(\|\sqrt{\rho}D_\tau^2u\|_{L^2}^2+\|\sqrt{\rho}D_\tau\nabla\sigma\|_{L^2}^2)+\frac{\mu+\lambda}{4}\Big\|D_\tau\Big(\frac{d\sigma}{dt}\Big)\Big\|_{H^1}^2\le\\ &\le c(\exp 2\|\sigma\|_{L^\infty})\mathscr{D}_0(\mathscr{L}_0+\mathscr{L}_0^{\frac{1}{2}})+\varepsilon_2\|\nabla D_\tau\sigma\|_{L^2}^2+\end{aligned}$$

$$+c\,(\exp 3\|\sigma\|_{L^\infty})\,(\|\sqrt{\rho}\,\nabla_A\partial_t u\|_{L^2}^2+\|\nabla u\|_{H^1}^2+\|\nabla\sigma\|_{L^2}^2).$$

Par ailleurs, si on applique à l'équation (4.21) l'opérateur différentiel ∂_{x_3} et on en fait le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ avec $\rho\partial_{x_3}^2\sigma+(\mu+\lambda)\,\partial_{x_3}^2\Big(\dfrac{\partial\sigma}{dt}\Big)$, on obtient on raisonnant tout comme dans la démonstration de (4.33), l'inégalité

$$(4.35)\qquad \frac{d}{dt}\|\sqrt{\rho}\,\partial_{x_3}^2\sigma\|_{L^2}^2+\frac{1}{4(\mu+\lambda)}\|\rho\partial_{x_3}^2\sigma\|_{L^2}^2+\frac{(\mu+\lambda)}{4}\Big\|\partial_{x_3}^2\Big(\frac{d\sigma}{dt}\Big)\Big\|_{L^2}^2\leq\Sigma',$$

où Σ' est obtenu en substituant $\mu\|\nabla^2 D_\tau u\|_{L^2}^2$ à $\mu\|\nabla D_\tau^2 u\|_{L^2}^2$ dans le second membre de (4.33).

Si on applique maintenant le lemme 2.2 avec

$$\begin{aligned}&v=\partial_{x_i}u,\\&p=\partial_{x_i}(\rho_{eq}\sigma),\\&h=\partial_{x_i}\Big(u\cdot\nabla\Phi-\frac{d\sigma}{dt}\Big)\qquad(i=1,\,2),\\&f=f_1+f_2+f_3,\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}&f_1=\partial_{x_i}(-\rho\partial_t u-\rho(u\cdot\nabla)u)+\lambda\nabla h,\\&f_2=\partial_{x_i}((\rho_{eq}-\rho)\,\nabla\sigma),\\&f_3=\partial_{x_i}(\rho_{eq}\sigma\nabla\Phi),\end{aligned}$$

on obtient, compte tenu de la relation

$$\|\nabla\partial_{x_i}\sigma\|_{L^2}\leq c\,(\|\nabla\partial_{x_i}(\rho_{eq}\sigma)\|_{L^2}+\|\nabla\sigma\|_{L^2})$$

(voir (1.9) − (1.11)), l'inégalité

$$(4.36)\qquad \|\nabla^2 D_\tau u\|_{L^2}^2+\|\nabla D_\tau\sigma\|_{L^2}^2\leq c\,\Big(\|h\|_{H^1}^2+\sum_{i=1}^{3}\|f_i\|_{L^2}^2+\|\nabla\sigma\|_{L^2}^2\Big).$$

Or, grâce à la condition (4.1), on a

$$\begin{aligned}\|h\|_{H^1}^2+\|f_1\|_{L^2}^2\leq\tilde{c}_2\Big\|D_\tau\Big(\frac{d\sigma}{dt}\Big)\Big\|_{H^1}^2&+c\|\nabla u\|_{H^1}^2\\&+c\,(\exp 3\|\sigma\|_{L^\infty})\,(\|\sqrt{\rho}\,\partial_t u\|_{L^2}^2+\|\sqrt{\rho}\,\nabla_A\partial_t u\|_{L^2}^2)\\&+c\,(\exp 2\|\sigma\|_{L^\infty})\,\|\nabla u\|_{L^2}^2\|\nabla^2 u\|_{H^1}^2.\end{aligned}$$

D'autre part, il est aisé de voir, compte tenu des relations (4.28) - (4.29), que

$$\|f_2\|_{L^2}^2\leq c\,(\exp 3\|\sigma\|_{L^\infty})\,\|\nabla\sigma\|_{H^1}^2\,(\|\sqrt{\rho}\,\nabla\sigma\|_{L^2}^2+\|\sqrt{\rho}\,\nabla^2\sigma\|_{L^2}^2).$$

Quant au terme f_3, on a évidemment

$$\|f_3\|_{L^2}^2\leq c\|\nabla\sigma\|_{L^2}^2.$$

Ces estimations, jointes à (4.36), nous donnent

(4.37) $$\|\nabla^2 D_\tau u\|_{L^2}^2+\|\nabla D_\tau\sigma\|_{L^2}^2\leq\tilde{c}_2\left\|D_\tau\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)\right\|_{H^1}^2+c(\exp 3\|\sigma\|_{L^\infty})\mathcal{L}_0\mathcal{D}_0+ +c(\exp 3\|\sigma\|_{L^\infty})(\|\sqrt{\rho}\,\partial_t u\|_{L^2}^2+\|\sqrt{\rho}\,\nabla_A\partial_t u\|_{L^2}^2) +c(\|\nabla\sigma\|_{L^2}^2+\|\nabla u\|_{H^1}^2).$$

En multipliant maintenant (4.37) par $\kappa_1=\frac{\mu+\lambda}{8\tilde{c}_2}$ et en choisissant dans (4.34) $\varepsilon_2=\frac{\kappa_1}{2}$, on obtient, en les adjoignant

(4.38) $$\frac{d}{dt}(\|\sqrt{\rho}D_\tau^2 u\|_{L^2}^2+\|\sqrt{\rho}D_\tau\nabla\sigma\|_{L^2}^2)+\kappa_1\|\nabla^2 D_\tau u\|_{L^2}^2+\frac{\kappa_1}{2}\|\nabla D_\tau\sigma\|_{L^2}^2+ +\frac{\mu+\lambda}{8}\left\|D_\tau\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)\right\|_{H^1}^2\leq c(\exp 3\|\sigma\|_{L^\infty})\mathcal{D}_0(\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_0^{\frac{1}{2}})+ +c(\exp 3\|\sigma\|_{L^\infty})(\|\nabla u\|_{H^1}^2+\|\sqrt{\rho}\,\partial_t u\|_{L^2}^2+\|\sqrt{\rho}\,\nabla_A\partial_t u\|_{L^2}^2+\|\nabla\sigma\|_{L^2}^2).$$

Si on rappelle les relations évidentes

$$\left\|\frac{d\sigma}{dt}\right\|_{H^1}^2\leq c\|\nabla u\|_{H^1}^2,$$
$$\|(\rho-\rho_{eq})\partial_{x_3}^2\sigma\|_{L^2}\leq c\left(\exp\frac{3}{2}\|\sigma\|_{L^\infty}\right)\|\nabla\sigma\|_{H^1}\|\sqrt{\rho}\,\nabla^2\sigma\|_{L^2},$$

conséquences immédiates de (1.3), de (4.18) et de (4.28)-(4.29), on obtient (voir aussi (1.11)), en adjoignant (4.38) à (4.35) multipliée par $\kappa_2=\min(1,\mu^{-1}\kappa)$, l'inégalité

(4.39) $$\frac{d}{dt}(\|\sqrt{\rho}D_\tau^2 u\|_{L^2}^2+(1-\kappa_2)\|\sqrt{\rho}D_\tau\nabla\sigma\|_{L^2}^2)+\kappa_2\frac{d}{dt}\|\sqrt{\rho}\,\nabla^2\sigma\|_{L^2}^2+ +\kappa_3\|\nabla^2\sigma\|_{L^2}^2+\frac{\mu+\lambda}{8}\kappa_2\left\|\frac{d\sigma}{dt}\right\|_{H^2}^2\leq\Sigma'',$$

où $\kappa_3=\min\left(\frac{\kappa_1}{2},\frac{\kappa_2\underline{m}^2}{4(\mu+\lambda)}\right)$ (voir (1.11) pour $\underline{m}$), tandis que Σ'' désigne le second membre de (4.38).

Finalement, si on applique encore le lemme 2.2 avec

$$v=u,$$
$$p=(\rho\sigma-\lambda\nabla\cdot u),$$
$$h=u\cdot\nabla\Phi-\frac{d\sigma}{dt},$$
$$f=f_1+f_2,$$

où

$$f_1=-\rho\partial_t u-\rho(u\cdot\nabla)u,$$
$$f_2=\rho\sigma(\nabla\sigma-\nabla\Phi),$$

on obtient en particulier

$$\|\nabla^3 u\|_{L^2}^2 \leq c\,(\|h\|_{H^2}^2 + \|f_1\|_{H^1}^2 + \|f_2\|_{H^1}^2). \tag{4.40}$$

Or, grâce à la condition (4.1), on a

$$\begin{aligned}\|h\|_{H^2}^2 + \|f_1\|_{H^1}^2 \leq \tilde{c}_3 \left\|\frac{d\sigma}{dt}\right\|_{H^2}^2 + \|\nabla u\|_{H^1}^2 + \\ + c\,(\exp 2\|\sigma\|_{L^\infty})\,\|\nabla u\|_{L^2}^2 \|\nabla^2 u\|_{H^1}^2 \\ + c\,(\exp 3\|\sigma\|_{L^\infty})\,(\|\sqrt{\rho}\,\partial_t u\|_{L^2}^2 + \|\sqrt{\rho}\,\nabla_A \partial_t u\|_{L^2}^2).\end{aligned}$$

Quant à f_2, on a

$$\|f_2\|_{H^1}^2 \leq c\,(\exp 3\|\sigma\|_{L^\infty})\,\|\sqrt{\rho}\,\nabla^2\sigma\|_{L^2}^2 \|\nabla\sigma\|_{H^1}^2 + c\,(\exp 2\|\sigma\|_{L^\infty})\,\|\nabla\sigma\|_{L^2}^2.$$

Ces estimations, jointes à (4.40), nous donnent

$$\begin{aligned}\|\nabla^3 u\|_{L^2}^2 \leq \tilde{c}_3 \left\|\frac{d\sigma}{dt}\right\|_{H^2}^2 + c\|\nabla u\|_{H^1}^2 + c\,(\exp 2\|\sigma\|_{L^\infty})\,\mathscr{L}_0 \mathscr{D}_0 + \\ + c\,(\exp 3\|\sigma\|_{L^\infty})\,(\|\sqrt{\rho}\,\partial_t u\|_{L^2}^2 + \|\sqrt{\rho}\,\nabla_A \partial_t u\|_{L^2}^2 + \|\nabla\sigma\|_{L^2}^2).\end{aligned} \tag{4.41}$$

Cela étant, en multipliant (4.41) par $\frac{(\mu+\lambda)\kappa_2}{8\tilde{c}_3}$ et en l'adjoignant à (4.39), on obtient, en l'intégrant par rapport à t, l'inégalité (4.9), ce qui achève la démonstration de la proposition 4.1.

5. Solution globale

Théorème 5.1. *Soit* $\Omega = \mathbf{R}^3_+$. *On suppose que* ρ_{eq} *et* Φ *satisfont aux conditions* (1.8) - (1.11) *et que les normes* $\|u_0\|_{H^2}$ *et* $\|\sigma_0\|_{H^2}$ *sont suffisamment petites. Alors les équations* (1.1) - (1.3) *admettent une solution et une seule* (u, σ) *dans la classe*

$$\begin{cases} u \in L^\infty(0, \infty; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \ \nabla u \in L^2(0, \infty; H^2(\Omega)), \\ \sigma \in L^\infty(0, \infty; H^2(\Omega)), \ \nabla\sigma \in L^2(0, \infty; H^1(\Omega)). \end{cases} \tag{5.1}$$

Démonstration. Le théorème 5.1 résultera du théorème 3.1, si nous démontrons une estimation *a priori* en vertu de laquelle les normes $\|u(t)\|_{H^2}$ et $\|\sigma(t)\|_{H^2}$ restent uniformément bornées pour tout $t \in [0, \infty[$. En effet, si elles restent bornées pour tout t par une même constante, le théorème 3.1 implique que (u, σ) peut-être prolongée à l'intervalle $[t, t+T']$ (voir la remarque au théorème 3.1) et en réitérant cette procédure, on peut prolonger (u, σ) à tout l'intervalle $[0, \infty[$.

A cette fin, on introduit les fonctions $\mathscr{D}(t)$ et $\mathscr{L}(t)$; on pose en effet

$$\mathscr{D}(t) = \|\nabla u\|_{H^2}^2 + \|\nabla\sigma\|_{H^1}^2 + \|\sqrt{\rho}\,\partial_t u\|_{L^2}^2 + \|\sqrt{\rho}\,\nabla_A \partial_t u\|_{L^2}^2 + \|\sigma'\|_{L^2(\Omega')}^2, \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(t) = \frac{1}{2}k_1\|\sqrt{\rho}u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}k_2\|\nabla_A u\|_{L^2}^2 + k_4\|\sqrt{\rho}\,\nabla\sigma\|_{L^2}^2 + k_5\|Au\|_{L^2}^2 + \\ + k_6\|\sqrt{\rho}\,\nabla^2\sigma\|_{L^2}^2 + k_1 I_1 + k_2 I_2 + k_5 I_3,\end{aligned} \tag{5.3}$$

où

$$
(5.4)\qquad \begin{cases} I_1=\int_\Omega \rho_{eq}(\sigma e^\sigma-e^\sigma+1), \\ I_2=\int_\Omega (\rho u)\cdot\nabla\sigma, \\ I_3=-2\int_\Omega \rho Au\cdot\nabla\sigma, \end{cases}
$$

tandis que k_i ($i=1,\dots,6$) sont des constantes à déterminer convenablement. Elles seront définies par les relations (5.8)-(5.13).

Nous voulons en effet choisir les constantes k_i ($i=1,\dots,6$) de sorte que, sous l'hypothèse (4.1) et l'hypothèse

$$
(5.5)\qquad \|\sigma\|_{L^\infty(0,\infty;\,L^\infty)}\le\delta_1
$$

avec une constante positive δ_1, on ait

$$
(5.6)\qquad \mathscr{L}(t)\ge 0,
$$

$$
(5.7)\qquad \mathscr{L}(t)+\alpha\int_0^t\mathscr{D}(s)ds\le\mathscr{L}(0)+\beta\int_0^t\mathscr{D}(s)\,(\mathscr{L}(s)+\mathscr{L}^{\frac{1}{2}}(s))ds,
$$

avec deux constantes positives α et β ne dépendant que de δ_1 outre les constantes données du problème.

Nous nous proposons de déterminer les constantes k_i ($i=1,\dots,6$) par les relations suivantes

$$
(5.8)\qquad k_6=1,
$$
$$
(5.9)\qquad k_5=1+c_8\exp 2\delta_1,
$$
$$
(5.10)\qquad k_4=1+\max(k_5c_9,\ c_7k_5\exp\delta_1+c_8\exp 2\delta_1),
$$
$$
(5.11)\qquad k_3=1+c_5,
$$
$$
(5.12)\qquad k_2=1+c_3k_3\exp\delta_1+c_4k_4\exp\delta_1+c_6k_5+c_8\exp 2\delta_1,
$$
$$
(5.13)\qquad k_1=1+\max\left(K,\ \frac{k_2^2}{k_4}\right)
$$

avec

$$
K=k_2c_1\exp\delta_1+k_3c_2\exp 2\delta_1+k_4c_4\exp 2\delta_1+c_7k_5\exp\delta_1+c_8\exp 2\delta_1.
$$

(c_i ($i=1,\dots,8$) sont les constantes figurant dans (4.4)-(4.9), tandis que c_9 est donnée dans (5.16)).

Pour montrer (5.6), on remarque d'abord que

$$
(5.14)\qquad \frac{1}{2}\underline{m}\|\sigma\|_{L^2}^2\le I_1\le c\|\sigma\|_{L^2}^2
$$

qui résulte immédiatement de (1.3), de (1.11), de (5.5) et de la relation évidente

$$
\frac{1}{2}r^2\le re^r-e^r+1\le r^2\exp|r|\qquad\forall r\in\mathbf{R}.
$$

D'autre part, on voit aisément que, sous l'hypothèse (5.5), on a

$$|I_2| \leq \frac{k_4}{2k_2}\|\sqrt{\rho}\,\nabla\sigma\|_{L^2}^2 + \frac{k_2}{2k_4}\|\sqrt{\rho}u\|_{L^2}^2, \tag{5.15}$$

$$|I_3| \leq \frac{1}{4}\|Au\|_{L^2}^2 + c_9\|\sqrt{\rho}\,\nabla\sigma\|_{L^2}^2. \tag{5.16}$$

Si on rappelle la définition de $\mathscr{L}(t)$ (voir (5.3) - (5.4), (5.8) - (5.13)), on voit aisément que les inégalités (5.15) - (5.16) entraînent (5.6).

Ces relations impliquent, en outre (voir aussi le lemme 2.1), qu'il existe deux constantes positives ν_1 et ν_2 tells que

$$\nu_1(\|u(t)\|_{H^2}^2 + \|\sigma(t)\|_{H^2}^2) \leq \mathscr{L}(t) \leq \nu_2(\|u(t)\|_{H^2}^2 + \|\sigma(t)\|_{H^2}^2). \tag{5.17}$$

D'autre part, en sommant l'égalité (4.4) et les inégalités (4.5) - (4.9) multipliées par les constantes k_i $(i=1,\dots,6)$ données par (5.8) - (5.13), on obtient immédiatement l'inégalité (5.7) avec deux constantes α et β.

Or, en vertu de (5.17), on a

$$\begin{cases} \|\nabla\sigma(t)\|_{L^3}^2 \leq c\mathscr{L}(t) \\ \|\sigma(t)\|_{L^\infty}^2 \leq c'\mathscr{L}(t) \end{cases} \tag{5.18}$$

avec deux constantes positives c et c'.

On suppose maintenant que

$$\mathscr{L}(0) < \min\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4\alpha}{\beta}}\right), \frac{\delta_0^2}{c'}, \frac{\delta_1^2}{c}\right). \tag{5.19}$$

Alors, comme on a

$$\beta(r + \sqrt{r}) < \alpha$$

pour $r \in \left[0, \frac{\alpha}{\beta} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{4\alpha}{\beta}}\right[$, on déduit de (5.7) que

$$\mathscr{L}(t) \leq \mathscr{L}(0) \quad \forall t > 0. \tag{5.20}$$

D'où il résulte des relations (5.18) - (5.20) que

$$\begin{cases} \|\nabla\sigma\|_{L^\infty(0,\infty;L^3)} \leq \delta_0, \\ \|\sigma\|_{L^\infty(0,\infty;L^\infty)} \leq \delta_1, \end{cases} \tag{5.21}$$

c'est-á-dire que les hypothèses (4.1) et (5.5) sont vérifiées.

Donc, maintenant on peut dire que (5.19) entraîne (5.20) sans les hypothèses (4.1) et (5.5). Par conséquent, en vertu de (5.17), sous l'hypothèse (5.19) on obtient l'estimation *a priori*

$$\|u(t)\|_{H^2}^2 + \|\sigma(t)\|_{H^2}^2 \leq \frac{1}{\nu_1}\mathscr{L}(0),$$

pour tout $t \in [0, \infty[$, ce qui d'après le théorème 3.1 (voir aussi sa remarque), nous permet de prolonger la solution (u, σ) dans tout l'intervalle $[0, \infty[$.

Finalement, comme

$$\alpha-\beta(\mathscr{L}(t)+\mathscr{L}^{\frac{1}{2}}(t))\geq\gamma>0$$

(voir (5.19)-(5.20)), on déduit de (5.7) que

$$\mathscr{D}(\cdot)\in L^1(0, \infty).$$

En rappelant l'expression de $\mathscr{D}(\cdot)$ (voir (5.2)), on voit aisément que u et σ appartiennent à la classe donnée par (5.1).

L'unicité de la solution résulte du théorème 3.1, ce qui achève la démonstration du théorème 5.1.

Université de Tizi-Ouzou, Tizi-Ouzou, Algérie et
Dipartimento di Matematicà, Università di Pisa
Via F. Buonarroti n. 2, 56127 Pisa, Italy

Bibliographie

[1] S. Agmon, A. Douglis and L. Nirenberg, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II, Comm. Pure Appl. Math., **12** (1959) 36-89.

[2] R. Benabidallah, Solution globale de l'équation d'un gaz visqueux isotherme dans l'espace entier avec une grande force extérieure dérivant d'un potentiel, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **94** (1995), 245-274.

[3] R. Benabidallah et H. Fujita Yashima, Solution locale pour l'equation d'un gaz visqueux isotherme, Rend. Accad. Naz. Sci. dei XL, Mem. Mat., **111**-17 (1993), 49-81.

[4] H. Brezis, Analyse fonctionnelle-Théorie et application-. Masson (Paris), 1987.

[5] R. Finn, On the exterior stationary problem for the Navier-Stokes equations and associated perturbation problems, Arch. Rat. Mech. Anal., **19** (1965), 363-406.

[6] O. A. Ladyzhenskaya, The mathematical theory of viscous incompressible flow, Gordon and Breach (New York, London, Paris), 1969.

[7] A. Matsumura and T. Nishida, The initial value problem for the equation of a motion viscous and heat-conducting gases, J. Math. Kyoto Univ., **20** (1980), 67-104.

[8] A. Matsumura and T. Nishida, Initial boundary value problems for the equations of motion compressible viscous and heat-conducting fluids, Comm. Math. Phys., **89** (1983), 445-464.

[9] A. Matsumura and M. Padula, Stability of stationary flows of compressible fluids subject to large external potential forces, Stab. Anal. Cont. Media, **2**, (1992), 183-202.