ILLINOIS JOURNAL OF MATHEMATICS
Volume 27, Number 1, Spring 1983

DIE GRUPPE A_5 ALS FIXPUNKTFREIE AUTOMORPHISMENGRUPPE

VON

HANS KURZWEIL

Die Gruppe A operiere als Automorphismengruppe auf der endlichen, auflösbaren Gruppe G, und zwar fixpunktfrei, d.h. es gelte $C_G(A) = 1$; weiter sei $(|G|, |A|) = 1$ vorausgesetzt. In [6] und [7] zeigen wir für eine Reihe von nichtauflösbaren Gruppen A, daß dann die nilpotente Länge (= Fittinglänge) von G durch eine Zahl c beschränkt ist, die allein von A abhängt. Im Falle $A \simeq A_5$ (alternierende Gruppe vom Grade 5) konnten wir $c \leqslant 17$ beweisen [6]. Angeregt durch allgemeinere Überlegungen in [7] betrachten wir hier noch einmal diesen speziellen Fall und beweisen jetzt die Abschätzung

$$c \leqslant 5,$$

die nahe am genauen Wert von c liegt, da einfache Beispiele $3 \leqslant c$ belegen [6, S. 401]. Der hier vorgelegte Beweis ist recht elementar; er verwendet nur allgemein bekannte Hilfssätze, und vor allem kommt er ohne den recht aufwendigen Apparat der Fittingketten [2] aus, den wir in [6] und [7] wesentlich benützen.

Außerdem läßt sich der Beweis auf fixpunktfreie Gruppen A übertragen, die eine sehr ähnliche Struktur wie die Gruppe A_5 besitzen; wir verweisen auf die Bemerkungen am Schluß der Arbeit.

Die *Bezeichnungen* sind wie üblich, oder wie im nächsten Abschnitt erklärt. Die nilpotente Länge einer auflösbaren Gruppe G ist die das Minimum der Längen aller Normalreihen von G, deren Faktoren nilpotent sind; sie sei mit $h(G)$ bezeichnet. Dem Referenten danke ich für sein sehr sorgfältiges Lesen der Arbeit.

1. Hilfssätze

In diesem Abschnitt sei durchgehend folgende Situation vorausgesetzt: Es seien B, K, N, V Gruppen, so daß gilt:

B operiert als Automorphismengruppe auf K,

(*) $$(|K|, |B|) = 1,$$

Received February 3, 1981.

K ist auflösbar,

N ist ein B-invarianter Normalteiler von K,

V ist eine elementarabelsche Gruppe, auf der das semidirekte Product KB operiert; wir schreiben V additiv und betrachten V als KB-Modul,

(*) $$(|V|, |B|) = 1,$$

K operiert treu auf V.

Bekanntlich folgt aus (*)

$$\mathbf{C}_{K/M}(B) = \mathbf{C}_K(B)M/M$$

für jede B-zulässige Faktorgruppe K/M von K [4, 7.8]; dies wird im Folgenden ohne besonderen Hinweis angewandt.

Wegen (*) gilt auch [4, 7.5]:

1.1. *Die Gruppe KB operiere als Permutationsgruppe auf einer Menge Ω; die Operation von K auf Ω sei transitiv. Dann existiert ein $\alpha \in \Omega$ mit $\alpha^B = \alpha$.*

Für $\alpha^k \in \Omega = \alpha^K$, $b \in B$, folgt daher $(\alpha^k)^b = \alpha^{bk^b} = \alpha^{k^b}$.

Eine *homogene N-Komponente* von V ist eine maximale Summe von zueinander isomorphen irreduziblen N-Untermodulen $\neq 0$ von V. Die Menge aller homogenen N-Komponenten von V sei mit $\Omega(V, N)$ bezeichnet. V ist ein *homogener* N-Modul, wenn $\Omega(V, N) = \{V\}$ gilt.

Folgende Bemerkungen ergeben sich aus dem bekannten Satz von Clifford [4, 12.7].

1.2. *Die Gruppe KB operiert als Permutationsgruppe auf der Menge $\Omega(V, N)$ vermöge*

$$U \xrightarrow{x} U^x, \ x \in KB,$$

und zwar ist diese Operation transitiv, falls V ein homogener KB-Modul ist; in diesem Fall gilt zudem

$$V = \sum_{U \in \Omega(V,N)} U.$$

Speziell für $N = K$ ergibt sich:

1.3. *Es operiere KB irreduzibel auf V. Dann operiert B transitiv auf $\Omega(V, K)$; für $U \in \Omega(V, K)$ gilt*

$$\bigcap_{b \in B} \mathbf{C}_K(U)^b \leq \mathbf{C}_K(V) = 1$$

Immer gilt:

1.4. *$\Sigma_{U \in \Omega(V,N)} U$ ist direkt.*

Aus 1.2 und 1.4 folgt:

1.5. *Sei $U \in \Omega(V, N)$, $S := \mathbf{N}_B(U)$, und $W := \langle U^B \rangle = \bigoplus_{b \in B:S} U^b$. Dann gilt*

$$\mathbf{C}_W(B) = \left\{ \sum_{b \in B:S} u^b | u \in \mathbf{C}_U(S) \right\};$$

dabei sei $B:S$ ein Vertretersystem $\{Sb\}$ von S in B.

Ein Spezialfall von 1.5 ist:

1.6. *Seien U, S, W wie in 1.5. Dann gilt*

$$\mathbf{C}_U(S) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{C}_{\langle U^B \rangle}(B) = 0;$$

insbesondere folgt $\mathbf{C}_U(S) = 0$ aus $\mathbf{C}_V(B) = 0$.

1.7. *Als K-Modul sei V vollständig reduzibel. Sei $\hat{V}$ ein KB-Faktormodul $\neq 0$ von V; es sei $\hat{U} \in \Omega(\hat{V}, K)$, so daß $\hat{U}^B = \hat{U}$ und $\mathbf{C}_{\hat{U}}(B) \neq 0$ gilt. Dann existiert ein $U \in \Omega(V, K)$ mit $U^B = U$ und $\mathbf{C}_U(B) \neq 0$.*

Beweis. Sei $\phi : V \to \hat{V}$ der kanonische KB-Epimorphismus. Da V vollständig reduzibel ist, existiert zu jedem irreduziblen K-Untermodul $\hat{W}$ von $\hat{U}$ ein irreduzibler K-Untermodul W von V mit $\phi(W) = \hat{W}$. Man findet daher ein $U \in \Omega(V, K)$ mit $\phi(U) = \hat{U}$. Da B den K-Isomorphietyp von $\hat{U}$ fixiert ($\hat{U}^B = \hat{U}$), fixiert es auch den von U, d.h. $U^B = U$. Es ist daher $\phi|_U : U \to \hat{U}$ ein B-Epimorphismus, aus $\mathbf{C}_{\hat{U}}(B) \neq 0$ ergibt sich also $\mathbf{C}_U(B) \neq 0$, beachte (*).

1.8. *Sei V ein homogener K-Modul. Dann existiert ein $U \in \Omega(V, N)$ mit $U^B = U$.*

Beweis. Aus 1.2 folgt (mit $B = 1$), daß K transitiv auf $\Omega := \Omega(V, N)$ operiert; die Behauptung folgt daher aus 1.1.

1.9. *Die Gruppe B sei perfekt ($B' = B$), und V sei ein homogener K-Modul. Dann gilt $\mathbf{C}_K(B) \neq 1$, falls $K \neq 1$.*

Beweis. Dazu sei N ein abelscher Normalteiler $\neq 1$ der auflösbaren Gruppe K. Nach 1.8 existiert ein $U \in \Omega(V, N)$ mit $U^B = U$; sei M die B-invariante Gruppe $N/\mathbf{C}_N(U)$. Weil eine abelsche Gruppe auf einem irreduziblen Modul zyklisch operiert, ist M zyklisch, wird daher von der perfekten Gruppe B zentralisiert. Aus (*) folgt $\mathbf{C}_N(B) \neq 1$ falls $M \neq 1$. Im Falle $\mathbf{C}_N(U) = N$ folgt

$$N = N^x \leqslant \mathbf{C}_K(U^x)$$

für alle $x \in KB$, also $N \leqslant \mathbf{C}_K(V)$ nach 1.2.

1.10. *Es sei V ein homogener K-Modul. Es gelte* $\mathbf{C}_V(B) = 0$, *aber* $\mathbf{C}_V(D) \neq 0$ *für jedes $D \mathrel{\underset{\neq}{\triangleleft}} B$. Weiter sei vorausgesetzt:*

(+) *Ist L ein abelscher B-invarianter Abschnitt von K, so existiert ein $x \in L$ mit* $\mathbf{C}_B(x) = \mathbf{C}_B(L)$.

Dann operiert $\mathbf{C}_K(B)$ *transitiv auf* $\Omega(V, N)$.

Beweis. Für $N = K$ ist dies richtig, da $\Omega(V, K) = \{V\}$ vorausgesetzt ist. Wegen der Auflösbarkeit von K findet man einen B-invarianten Normalteiler M, $N \mathrel{\underset{\neq}{\triangleleft}} M$, von K, so daß M/N abelsch ist. Per Induktion nach $|\mathrm{K:N}|$ sei bereits bewiesen:

(i) $\mathbf{C}_K(B)$ *operiert transitiv auf* $\Omega(V, M)$.

Insbesondere normalisiert B jedes $W \in \Omega(V, M)$, nach 1.8. Für ein solches W setze $\Omega := \Omega(W, N)$; dann operiert MB als Permutationsgruppe auf Ω. Wegen $N \leqslant$ Kern (M auf Ω) folgt aus 1.2, daß die abelsche Gruppe M/N eine reguläre Permutationsgruppe L auf Ω induziert, auch diese ist B-invariant. Nach Voraussetzung (+) existiert ein $x \in L$ mit

$$\mathbf{C}_B(x) = \mathbf{C}_B(L) =: S.$$

Wegen 1.1 operiert B genauso auf Ω wie auf L; es existiert darum ein $U \in \Omega$ mit

$$S = \mathbf{N}_B(U).$$

Aus $\mathbf{C}_V(B) = 0$ und 1.6 folgt $\mathbf{C}_U(S) = 0$. Da $L = \mathbf{C}_L(S)$ transitiv auf Ω operiert, folgt daraus $\mathbf{C}_W(S) = 0$, mit (i) und $\mathbf{C}_K(B) \leqslant \mathbf{C}_K(S)$ schließlich $\mathbf{C}_V(S) = 0$. Die minimale Wahl von B erzwingt nun $S = B$ (setze $D = S \trianglelefteq B$). Es operiert daher $\mathbf{C}_M(B)$ transitiv auf $\Omega(W, N)$ für jedes $W \in \Omega(\mathrm{V}, M)$, also auch $\mathbf{C}_K(B)$ transitiv auf $\Omega(V, N)$ nach (i).

Aus 1.10 folgt:

1.11. *Die Situation sei wie in* 1.10, *und N sei eine p-Gruppe. Dann gilt:*

(a) $\mathbf{Z}(N) \leqslant \mathbf{C}_N(B)$

(b) *Es gelte $N' \leqslant$* $\mathbf{Z}(N)$. *Dann operiert* $\mathbf{C}_N(D)$ *treu auf* $\mathbf{C}_V(D)$ *für jedes $D \mathrel{\underset{\neq}{\triangleleft}} B$.*

Beweis. Wegen 1.10 können wir für den Beweis von (a) und (b) annehmen, daß V ein homogener N-Modul ist. Dann ist V nach 1.2 auch ein homogener X-Modul für jeden Normalteiler X von N, für den $N = X\mathbf{C}_N(X)$ gilt.

(a) Insbesondere ist V ein homogener $\mathbf{Z}(N)$-Modul. Nach dem Schur'schen Lemma [4, 12.2] ist daher die abelsche Gruppe $Z := \mathbf{Z}(N)$ zyklisch, also auch die Automorphismengruppe $B/D =: E$ von Z, wobei $D := \mathbf{C}_B(Z)$ ist (beachte (*)). Im Falle $D = B$ wird Z von B zentralisiert. Sei $D \ntrianglelefteq B$, also $W := \mathbf{C}_V(D) \neq 0$ nach Voraussetzung. Dann ist ZE eine Frobeniusgruppe, die treu auf W operiert; bekanntlich folgt daraus für das zyklische Komplement E, daß $\mathbf{C}_W(E) \neq 0$ ([4, 12.8], vergleiche 1.14) im Widerspruch zu $\mathbf{C}_W(E) \leqslant \mathbf{C}_V(B) = 0$.

(b) Hier ist $X := \mathbf{C}_N(D)$ ein Normalteiler von N wegen $\mathbf{Z}(N) \leqslant X$ und $N' \leqslant \mathbf{Z}(N)$. Bekanntlich gilt $N = X\mathbf{C}_N(X)$ wegen (*) [4, 7.14]. Da V nun ein homogener X-Modul ist, operiert X auf jedem Untermodul $\neq 0$ von V treu; ein solcher ist $\mathbf{C}_V(D)$ nach Voraussetzung, beachte $D \trianglelefteq B$.

Folgende Untergruppenliste der Gruppe A_5 entnehme man z.B. [3, S. 227].

1.12. *Sei $\mathcal{B}$ die Menge der echten Untergruppen $B \neq 1$ einer zur Gruppe A_5 isomorphen Gruppe. Sie $\mathcal{B}_{mi}$ bzw. $\mathcal{B}_{ma}$ die Menge der minimalen bzw. maximalen Gruppen in $\mathcal{B}$. Dann gilt:*

$\mathcal{B} = \mathcal{B}_{ma} \mathbin{\dot\cup} \mathcal{B}_{mi} \mathbin{\dot\cup} \{B\}$, *wobei* $B \simeq Z_2 \times Z_2$;
$|B| \in \{2, 3, 5\}$ *für* $B \in \mathcal{B}_{mi}$;
$B \in \mathcal{B}_{ma}$ *ist eine Frobeniusgruppe der Ordnung* $4 \cdot 3$, $3 \cdot 2$ *oder* $5 \cdot 2$.

1.13. *Für $B \in \mathcal{B}$ gilt $(+)$ in* 1.10.

Dies zu beweisen ist eine Übungsaufgabe, siehe auch [7, §8].

1.14. *Die Ordnung von K sei ungerade. Sei V ein irreduzibler KB-Modul und sei $B \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_{ma}$. Es gelte $\mathbf{C}_V(B) = 0$. Dann wird K von einer Untergruppe $1 \neq D \leqslant B$ zentralisiert.*

Im Falle $|B| = 2$ ist dies trivial. Im Falle $|B| \in \{3, 5\}$ folgt dies aus Th. 3.1 in [8]. Im Falle $B \simeq Z_2 \times Z_2$ (nur hier benötigt man, daß V irreduzibel ist) entnimmt man die Behauptung entweder Th. 4.1 in [8], oder leitet sie leicht aus 1.11 ab.

1.15. *Sei V ein homogener K-Modul, und sei $B \in \mathcal{B} \setminus B_{mi}$. Es gelte $\mathbf{C}_V(B) = 0$, aber $\mathbf{C}_V(D) \neq 0$ für jedes $D \trianglelefteq B$. Schließlich sei $N' \leqslant \mathbf{Z}(N)$ und N eine p-Gruppe. Dann gilt*

$$\mathbf{C}_N(E) = \mathbf{C}_N(B)$$

für jeden maximalen Normalteiler E von B.

Beweis. Nach 1.13 gilt 1.11.b für $D = E$. Danach operiert $\mathbf{C}_N(E)$ treu auf $W := \mathbf{C}_V(E) \neq 0$, beide Gruppen sind B-invariant ($E \trianglelefteq B$); auf ihnen operiert also die Gruppe $F := B/E$. Aus $\mathbf{C}_V(B) = 0$ folgt $\mathbf{C}_W(F) = 0$. Wegen $|F| \in \{2, 3\}$ (siehe 1.12) und 1.14 wird $\mathbf{C}_N(E)$ von F zentralisiert; es folgt $\mathbf{C}_N(E) = \mathbf{C}_N(B)$.

1.16. *Der K-Modul V sei vollreduzibel. Es sei $B \in \mathcal{B}_{ma}$ und E sei der Frobeniuskern von B. Es gelte*

$$0 \neq \mathbf{C}_V(E) = \mathbf{C}_V(B).$$

Dann existiert ein $U \in \Omega(V, K)$, so daß entweder (i) *oder* (ii) *gilt:*

(i) $U^B = U$ *und* $\mathbf{C}_U(B) \neq 0$
(ii) *Es existiert* $S \leqslant B$ *mit* $|S| \in \{2, 3\}$ *und* $\mathbf{C}_U(S) = U$.

Beweis. Da V vollreduzibel ist, gilt

$$V = \sum_{U \in \Omega(V,K)} U.$$

Sei $S = \mathbf{N}_B(U)$ für $U \in \Omega(V, K)$. Gilt $\mathbf{C}_U(S) = 0$ für jedes $U \in \Omega(V, K)$, so folgt $\mathbf{C}_V(B) = 0$ aus 1.6, entgegen der Voraussetzung $0 \neq \mathbf{C}_V(E) = \mathbf{C}_V(B)$. Es existiert also ein $U \in \Omega(V, K)$, so daß

$$\mathbf{C}_U(S) \neq 0.$$

Sei $T := E \cap S$. Dann folgt für $W = \langle U^B \rangle = \bigoplus_{b \in B:S} U$:

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_{e \in E:T} u^e \,\middle|\, u \in \mathbf{C}_U(T) \right\} &\leqslant \mathbf{C}_W(E) \quad (1.5) \\ &= \mathbf{C}_W(B) \\ &= \left\{ \sum_{b \in B:S} u^b \,\middle|\, u \in \mathbf{C}_U(S) \right\} \quad (1.5), \end{aligned}$$

also $\mathbf{C}_U(S) = \mathbf{C}_U(T)$, und $|B : S| = |E : T|$.

Sei $T = 1$. Dann ist $\mathbf{C}_U(S) = U$ and S ein Komplement von E in B, also $|S| \in \{2, 3\}$; es folgt (ii). Im Falle $T = E$ gilt $S = B$, es folgt (i). Sei schließlich $1 \neq T \subsetneqq E$, also B die Frobeniusgruppe der Ordnung $4 \cdot 3$. Dann ist $|E : T| = 2$, also $|B : S| = 2$; B besitzt aber keine Untergruppe der Ordnung 6.

2. Das Ergebnis

Hier beweisen wir den

SATZ. *Die zur Gruppe A_5 isomorphe Gruppe A operiere als Automorphismengruppe fixpunktfrei auf der auflösbaren Gruppe G; es sei $(|G|, |A|) = 1$ vorausgesetzt. Dann gilt $h(G) \leqslant 5$.*

Beweis. Sei $G \neq 1$. Aus einem Reduktionsargument von E. C. Dade [2, S.511] folgt, daß G eine A-invariante Untergruppe Y besitzt, so daß $\mathbf{\Phi}(Y) \leqslant \mathbf{Z}(Y)$, und für $X := Y/\mathbf{\Phi}(Y)$, $H := \mathbf{N}_G(Y)/\mathbf{C}_G(Y)$ folgendes gilt:

(1) *X ist ein treuer, irreduzibler HA-Modul, $h(H) = h(G) - 1$.*

Im Falle $H \neq 1$ ergibt dasselbe Argument, angewandt auf H, eine A-invariante Untergruppe Y_1 von H_1, so daß $\mathbf{\Phi}(Y_1) \leqslant \mathbf{Z}(Y_1)$, und für $X_1 := Y_1/\mathbf{\Phi}(Y_1)$, $H_1 := \mathbf{N}_H(Y_1)/\mathbf{C}_H(Y_1)$ gilt:

(2) *X_1 ist ein treuer, irreduzibler H_1A-Modul, $h(H_1) = h(H) - 1$.*

Wir beweisen nun vieles gleichzeitig für den HA-Modul X wie für den H_1A-Modul X_1, formulieren aber nur für das Paar X, H.

Zunächst zerlegen wir den irreduziblen HA-Modul X in seine H-Komponenten.

(3) *Sei $V \in \Omega(X, H)$ und $S = \mathbf{N}_A(V)$. Dann gilt $\mathbf{C}_V(S) = 1$.*
(4) *Ist $H \neq 1$, so ist $S \neq A$.*

Die erste Behauptung folgt aus $\mathbf{C}_X(A) = 1$ und 1.6 (setze $V = X$, $B = A$), die zweite aus 1.9.

Sei $D \leqslant A$. In der Menge $\mathscr{G}$ aller A-invarianter Abschnitte (= sections) Z von G ordnen wir D eine Untermenge $\mathscr{G}(D)$ folgendermaßen zu:

$$Z \in \mathscr{G}(D) \Leftrightarrow \bigcap_{a \in A} [Z, D^a] = 1.$$

Offenbar gilt $\mathscr{G} = \mathscr{G}(D)$, falls $D = 1$, und $\mathscr{G}(D) = \{1\}$, falls $D = A$ (wegen $\mathbf{C}_G(A) = 1$).

(5) *Sei $U \neq 1$ ein H-invarianter Abschnitt von X mit $[H, D] \leqslant \mathbf{C}_H(U)$ für $D \leqslant A$. Dann gilt $H \in \mathscr{G}(D)$.*

Denn A operiert transitiv auf den Isomorphietypen irreduzibler H-Untermodulen von X nach (1) und 1.3. Weiter ist X als H-Modul vollreduzibel; also gilt

$$\bigcap_{a \in A} [H, D^a] = \bigcap_{a \in A} [H, D]^a \leqslant \bigcap_{a \in A} \mathbf{C}_H(U^a) \leqslant \mathbf{C}_H(X) = 1.$$

Wir behandeln zunächst die Fälle $G \in \mathscr{G}(D)$ für $D \in \mathscr{B}$ (wie in 1.12), und zeigen:

(6) *Sei $G \in \mathscr{G}(D)$, $D \in \mathscr{B}$. Dann existiert ein $V \in \Omega(X, H)$ mit $V^D = V$ und $[H, D] \leqslant \mathbf{C}_H(V) = \mathbf{C}_H(\mathbf{C}_V(D))$.*

Wegen $G \in \mathscr{G}(D)$ liegt die A-invariante Untergruppe Y nicht in $[G, D]$, die Faktorgruppe $X = Y/\mathbf{\Phi}(Y)$ wird also nicht von $[G, D] \cap Y$ gedeckt. Danach existiert eine HD-invariante Faktorgruppe $\hat{X} \neq 1$ von X, die von D zentralisiert wird. Da der H-Modul X vollreduzibel ist, findet sich eine Komponente $V \in \Omega(X, H)$ mit $V^D = V$, welche $\hat{X}$ nicht trivial "schneidet" (vergleiche Beweis von 1.7 mit $V = X$ und $U = V$). Insbesondere folgt

$\mathbf{C}_V(D) \neq 1$. Wegen $[H, D] \leqslant \mathbf{C}_H(\hat{X}) \leqslant \mathbf{C}_H(V)$ ist $\mathbf{C}_V(D)$ unter H invariant. Dies beweist (6).

(7) *Seien G, V, D wie in* (6) *und $S = \mathbf{N}_A(V)$. Dann gilt $D \lneqq S$ und $H \in \mathscr{G}(\langle D^S \rangle)$.*

Denn $D = S$ widerspricht (3). Wegen $V^S = V$ folgt

$$\begin{aligned}[H, D^s] &= [H, D]^s \\ &\leqslant \mathbf{C}_H(C_V(D))^s \quad (6) \\ &= \mathbf{C}_H(V)^s \quad (6) \\ &= \mathbf{C}_H(V)\end{aligned}$$

für alle $s \in S$, also $[H, \langle D^S \rangle] \leqslant \mathbf{C}_H(V)$; nun ergibt (5) (setze $U = V$, $D = \langle D^S \rangle$) die Behauptung $H \in \mathscr{G}(\langle D^S \rangle)$.

(8) *Sei $G \in \mathscr{G}(D)$, $D \in \mathscr{B}$. Dann folgt $H \in \mathscr{G}(B)$, wobei $B \in \mathscr{B}_{ma}$ oder $B \simeq Z_2 \times Z_2$ und $D \simeq Z_2$.*

Zum Beweis sei S wie in (7). Sei zunächst $D \trianglelefteq S$. Nach (6) operiert S/D auf $H/\mathbf{C}_H(V)$ und $\mathbf{C}_V(D)$, und zwar fixpunktfrei auf $\mathbf{C}_V(D)$, da $\mathbf{C}_V(S) = 1$. Wegen $|S/D| \in \{2, 3\}$ (beachte $D \trianglelefteq S$) können wir 1.14 anwenden (setze $K = H/\mathbf{C}_H(V)$, $B = S/D$). Danach folgt $[H, S] \leqslant \mathbf{C}_H(V)$, also mit (5) $H \in \mathscr{G}(S)$. Wegen $1 \neq D \trianglelefteq S$, $D \neq S$ (7) und $S \neq A$ (4) sind nur die Fälle $S \in \mathscr{B}_{ma}$ oder $|D| = 2$ und $S \simeq Z_2 \times Z_2$ möglich, setze $B := S$.

Sei nun D nicht normal in S. Dann folgt $B := \langle D^S \rangle \in \mathscr{B}_{ma}$ oder $|S| = 12$, $|D| = 2$ und $B \simeq Z_2 \times Z_2$; die Behauptung folgt also aus (7).

Wir unterscheiden nun die Fälle $G \in \mathscr{G}(D)$, $D \in \mathscr{B}$:

1. *Fall. Gilt $D \in \mathscr{B}_{ma}$, so $h(G) \leqslant 1$.* Andernfalls ist $H \neq 1$; dann widersprechen sich (3) und (6), da $D = S$ wegen der Maximalität von D ($A \neq S$ nach (4)).

2. *Fall. Gilt $D \simeq Z_2 \times Z_2$, so $h(G) \leqslant 2$.* Denn nach (8) liegt H in $\mathscr{G}(B)$, wobei $B \in \mathscr{B}_{ma}$; Aus Fall 1 folgt also $h(H) \leqslant 1$, siehe (2).

3. *Fall. Gilt $D \in \mathscr{B}_{mi}$, so $h(G) \leqslant 3$.* Nach (8) liegt H in $\mathscr{G}(B)$, wobei entweder $B \in \mathscr{B}_{ma}$ oder $B \simeq Z_2 \times Z_2$ gilt. Im ersten Fall folgt $h(H) \leqslant 1$, also $h(G) \leqslant 2$ aus Fall 1; im zweiten Fall folgt $h(H) \leqslant 2$, also $h(G) \leqslant 3$ aus Fall 2.

Wir kommen nun zu dem allgemeinen Fall. Es sei $H \neq 1$ und:

$$V \in \Omega(X, H), \quad S = \mathbf{N}_A(V)$$

$$K = H/\mathbf{C}_H(V), \quad N = Y_1/\mathbf{C}_{Y_1}(V)$$

$$\hat{X}_1 = N/\Phi(N).$$

(9) *$\hat{X}_1$ ist eine H_1S-invariante Faktorgruppe $\neq 1$ von $X_1 = Y_1/\Phi(Y_1)$.*

Andernfalls gilt mämlich $Y_1 = \Phi(Y_1)\mathbf{C}_{Y_1}(V)$, also $Y_1 = \mathbf{C}_V(Y_1)$ und wir erhalten den Widerspruch

$$\begin{aligned} Y_1 &= Y_1^A \\ &\leqslant \bigcap_{a \in A} \mathbf{C}_H(V^a) \\ &= \mathbf{C}_H(X) \quad (1.3) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Wegen $\mathbf{C}_V(S) = 1$ (3) existiert eine Untergruppe B von A, so daß

(10) $B \leqslant S$, $\mathbf{C}_V(B) = 1$, *aber* $\mathbf{C}_V(D) \neq 1$ *für jedes* $D \lneqq B$.

Dieses B sei im Folgenden fixiert. Der Fall $B = 1$ führt wegen $V = \mathbf{C}_V(B)$ zu $V = 1$, also $X = 1$ im Widerspruch zu $G \neq 1$.

4. *Fall.* *Gilt* $B \in \mathcal{B}_{mi}$, *so ist* $h(G) \leqslant 4$. Sei U ein irreduzibler KB-Untermodul von V. Wegen $\mathbf{C}_U(B) = 1$ folgt aus 1.14 (setze $U = V$), daß K von B zentralisiert wird; nach (5) gilt daher $H \in \mathcal{G}(B)$. Aus Fall 3 folgt $h(H) \leqslant 3$, aus (1) daher die Behauptung.

5. *Fall.* *Ist* $B \simeq Z_2 \times Z_1$, *so gilt* $h(G) \leqslant 4$. Sei U wie eben. Nach 1.14 wird K von $D \leqslant B$, $D \neq 1$ zentralisiert; es liegt daher H in $\mathcal{G}(D)$. Aus Fall 2 oder Fall 3 folgt $h(H) \leqslant 3$, also $h(G) \leqslant 4$.

6. *Fall.* *Gilt* $B \in \mathcal{B}_{ma}$, *so ist* $h(G) \leqslant 5$. Sei E nämlich der maximale Normalteiler von B, also $|E| \in \{4, 3, 5\}$. Wegen unserer Annahme (10) folgt aus 1.15, $\mathbf{C}_N(E) = \mathbf{C}_N(B)$, insbesondere

$$\mathbf{C}_{\hat{X}_1}(E) = \mathbf{C}_{\hat{X}_1}(B), \quad \hat{X}_1 \text{ wie in (9).}$$

Sei zunächst $\mathbf{C}_{\hat{X}_1}(E) = 1$. Für einen irreduziblen H_1E-Untermodul U_1 von $\hat{X}_1$ folgt dann aus 1.14, daß $H_1/\mathbf{C}_{H_1}(U_1)$ von einer Untergruppe $D \leqslant E$, $D \neq 1$ zentralisiert wird. Aus (5) folgt $H_1 \in \mathcal{G}(D)$, also $h(H_1) \leqslant 3$ nach Fall 2 oder 3. Aus (2) folgt $h(G) \leqslant 5$.

Sei nun $\mathbf{C}_{\hat{X}_1}(E) \neq 1$. Da $\hat{X}_1$, wie X_1 als K-Modul vollreduzibel ist, können wir 1.16 anwenden (setze $V = \hat{X}_1$, $K = H_1/\mathbf{C}_{H_1}(\hat{X}_1)$. Danach existiert ein $\hat{U}_1 \in \Omega(\hat{X}_1, H_1)$, so daß (i) oder (ii) gilt:

(i) $\hat{U}_1^B = \hat{U}_1$, $\mathbf{C}_{\hat{U}_1}(B) \neq 1$.
(ii) *Es existiert* $D \in \mathcal{B}_{mi}$ *so daß* $\mathbf{C}_{\hat{U}_1}(D) = \hat{U}_1$

Sei zunächst (i) richtig. Nach 1.7 (setze $V = X_1$, $\hat{V} = \hat{X}_1$) existiert ein $U_1 \in \Omega(X_1, H)$ mit $U_1^B = U_1$ und $\mathbf{C}_{U_1}(B) \neq 0$. Weil B eine maximale Untergruppe von A ist, folgt daraus $\mathbf{N}_A(U_1) = A$ wegen (3) (angewandt auf das Paar X_1, H_1); aus (4) folgt $H_1 = 1$, also $h(G) \leqslant 2$.

Es gelte nun (ii). Die Gruppe $H_1/\mathbf{C}_{H_1}(\hat{U}_1)$ wird daher von D zentralisiert. Aus (5) (angewandt auf das Paar X_1, H_1) folgt $H_1 \in \mathcal{G}(D)$, also $h(H_1) \leqslant 3$ nach Fall 2 oder 3. Es folgt $h(G) \leqslant 5$.

Da im Falle $B = A$, also $A = S$ aus (4) $H = 1$ folgt, haben wir alle möglichen Fälle diskutiert und damit unseren Satz bewiesen.

Abschließend zwei Bemerkungen

(1) Für eine Gruppe A sei $n(A)$ das Maximum der Längen n aller Untergruppenreihen

$$1 = B_1 <_{\neq} B_2 <_{\neq} \dots <_{\neq} B_n = A$$

von A. Es ist $n(A) = 5$ für $A \simeq A_5$; daher besagt unser Satz $h(G) \leqslant n(A)$ für G, A wie dort. Mit einem geringfügig allgemeineren Beweis läßt sich diesselbe Aussage

$$h(G) \leqslant n(A)$$

auch für eine einfache Automorphismengruppe A beweisen, sofern jede maximale Untergruppe von A einen abelschen Normalteiler von Primzahlindex besitzt. Speziell gilt also $h(G) \leqslant 6$ falls $A \simeq PSL(2, 2^3)$ und $h(G) \leqslant 8$ falls $A \simeq PSL(2, 2^5)$.

(2) Dies führt zu der Vermutung, daß auch im allgemeinen Fall (für beliebiges A) die nilpotente Länge von G eine enge Funktion der Zahl $n(A)$ ist. Dies würde gut zu den Ergebnissen passen, die für auflösbares A bekannt sind; hier ist $n(A) + 1$ die Länge einer Kompositionsreihe von A; vergleiche [1] und [5].

LITERATUR

1. T. R. Berger, *Nilpotent fixed point free automorphism groups of solvable groups,* Math. Z., vol. 131 (1973), pp. 305–312.
2. E. C. Dade, *Carter subgroups and Fitting heights of finite solvable groups,* Illinois J. Math., vol. 13 (1969), pp. 449–514.
3. B. Huppert, *Endliche Gruppen,* Springer, N.Y., 1967.
4. H. Kurzweil, *Endliche Gruppen,* Springer, N.Y., 1977.
5. ———, *p-Automorphismen von auflösbaren p'-Gruppen,* Math. Z., vol. 120 (1971), pp. 326–354.
6. ———, *Minimal einfache Gruppen als fixpunktfreie Automorphismengruppen,* Comm. Algebra, vol. 5 (1977), pp. 397–442.
7. ———, *Auflösbare Gruppen, auf denen nicht auflösbare Gruppen operiënen,* erscheint in Manuscripta Mathematica.
8. E. Shult, *On groups admitting fixed point free abelian operator groups,* Illinois J. Math., vol. 9 (1965), pp. 701–720.

Universität Erlangen
Erlangen, Deutschland