REMARQUES SUR LA DEFINITION ET SUR LES PROPRIETES DES LOIS STABLES

PAR
E. J. AKUTOWICZ

Introduction

Le présent article traite surtout des processus aléatoires engendrés par une loi stable de probabilité de densité

$$S_\sigma(y, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\xi - t|\xi|^\sigma}\, d\xi, \qquad -\infty < y < \infty,$$

sur la demi-droite R_+: $0 \leq t < \infty$, où le paramètre σ est restreint à l'intervalle $1 \leq \sigma < 2$. Un processus aléatoire est souvent identifiable avec une mesure de probabilité dans un espace fonctionnel. Par exemple, le processus du mouvement brownien, qui correspond à $\sigma = 2$, est identifié avec la mesure de Wiener dans l'espace des fonctions numériques sur R_+ appartenant à chaque classe de Lipschitz d'exposant $<\frac{1}{2}$. Nous montrerons, en profitant des idées de L. Schwartz et Yu. V. Prohorov, qu'il est tout à fait naturel du point de vue de l'analyse fonctionnelle de considérer les processus stables ($1 \leq \sigma < 2$) comme de bonnes mesures de Radon concentrées sur le dual d'un espace de Banach B_ω, défini par un poids $\omega(t) > 0$ convenable. L'espace B_ω consiste en les limites uniformes des fonctions réelles étagées sur certains sous-intervalles de R_+. Il est muni de la norme

$$\| \phi \|_\omega = \max_{t \geq 0} | \phi(t) | \, \omega(t) \qquad (\phi \in B_\omega).$$

Le dual $\mathfrak{M}_\omega$ de B_ω consiste donc en des fonctions d'ensembles, additives au sens restreint.

Evidemment, cela dépend du choix du poids ω. L'expérience montre, ainsi que les travaux de S. Bochner [2], [3], que le poids $\omega(t)$ devrait être suffisamment grand pour les valeurs de t voisines de $t = 0$, et que, d'autre part, $\omega(t)$ peut être arbitrairement petit ailleurs (même identiquement nul). Un choix convenable de ω est

$$\omega(t) \sim t^{1/\sigma - (1+\epsilon)} \qquad (t \to 0+)$$

où $\epsilon > 0$ est arbitrairement petit. C'est là, peut-être, le contenu principal de ce travail.

Dans un autre article [1], nous montrerons que les mesures construites ici peuvent être utilisées pour résoudre certaines équations d'évolution perturbées.

1. L'espace B_ω et son dual $\mathfrak{M}_\omega$

Dans la suite nous entendrons par "mesure" une mesure de Radon [4], [12].

Received January 13, 1967.

Désignons par A une famille dénombrable de partitions de R_+ :

$$\alpha_n: 0 < t_1^{(n)} < t_2^{(n)} < \cdots < t_n^{(n)} = l_n, \qquad n = 1, 2, \cdots,$$

où $n/l_n = n^\rho$, $0 < \rho < 1$ (ρ sera fixé plus loin). Les $t_k^{(n)}$ sont des nombres $k \cdot n^{-\rho}$ équirépartis sur l'intervalle $(0, l_n)$. Pour les besoins des constructions suivantes, il importe seulement que la longueur l_n tende vers l'infini et que la maille l_n/n tende vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Si $n < m$, on exige que $\alpha_n \subset \alpha_m$. Dorénavant nous écrirons α sans indice.

Soit ω un poids positif et continu défini sur R_+ : $\omega(t) > 0$, $t \in R_+$. (ω sera choisi convenablement plus loin.)

Désignons par C l'ensemble des combinaisons linéaires (finies, réelles) des fonctions caractéristiques $\chi_{a,b}$ des intervalles d'extrémités a, b situés dans $\bigcup_{\alpha \in A} \alpha$. Nous distinguerons $[a,b]$, $]a,b[$, $]a,b]$, $[a,b[$, bien que, *a posteriori*, ce ne soit pas nécessaire. On définit l'espace B_ω comme l'ensemble des limites uniformes des fonctions de la classe C dans la norme

$$\| \phi \|_\omega = \max | \phi(t) | \, \omega(t).$$

C'est un espace de Banach.

Désignons par $\mathfrak{F}$ la famille des réunions finies d'intervalles d'extrémités dans $\bigcup_{\alpha \in A} \alpha$ et par $\mathfrak{M}_\omega$ la famille des fonctions réelles μ définies sur $\mathfrak{F}$, additives au sens restreint[1], et bornées en ce sens:

$$\sup_{\|\phi\|_\omega \leq 1} \left| \int_{R_+} \phi \, d\mu \right| < \infty.$$

Il est bien connu [7, vol. I, chap. III] que $\mathfrak{M}_\omega$ coïncide avec le dual de l'espace B_ω, $\mu(\chi_E) = \mu(E)$, $E \in \mathfrak{F}$.

A chaque élément $\mu \in \mathfrak{M}_\omega$ et à chaque partition $\alpha \in A$ on fait correspondre le vecteur des "incréments de μ suivant α": $g_\alpha : \mu \to (\mu(E_k))$, E_k désignant les intervalles de α. g_α est alors une application de l'espace $\mathfrak{M}_\omega$ sur un espace euclidien E^α.[2] Si $\alpha \subset \beta$ on a $E^\alpha \subset E^\beta$. Il existe les projections canoniques

$$f_{\alpha,\beta}: E^\beta \to E^\alpha$$

avec les relations habituelles de cohérence:

$$f_{\alpha,\alpha} = \text{Identité}, \quad f_{\alpha,\beta} \circ f_{\beta,\gamma} = f_{\alpha,\gamma} \text{ si } \alpha \subset \beta \subset \gamma.$$

On a $g_\alpha = f_{\alpha,\beta} \circ g_\beta$ si $\alpha \subset \beta$.

Posons:

$$E = \prod_{\alpha \in A} E^{\cdot\alpha},$$

[1] Cela signifie que si $E_1, \cdots, E_n$ appartiennent à $\mathfrak{F}$, $E_j \cap E_k = \emptyset$ $(j \neq k)$, alors $\mu(E_1 \cup \cdots \cup E_n) = \mu(E_1) + \cdots + \mu(E_n)$.

[2] En désignant les intervalles de la partition α par E_k, on munit l'espace E^α de la norme

$$\| (y_1, \cdots, y_n) \| = \Sigma_k | y_k | / \omega_k,$$

où $\omega_k = \sup_{t \in E_k} \omega(t)$.

où $E^{\cdot\alpha}$ désigne le compactifié d'Alexandroff de l'espace E^{α}. L'espace produit E est donc compact.

Puisque le sous-espace C est dense dans B_ω, on peut identifier l'espace $\mathfrak{M}_\omega$ avec une partie de E: $\mathfrak{M}_\omega \subset E$. L'observation suivante s'avèrera utile.

LEMME 1. *La topologie vague de $\mathfrak{M}_\omega$ comme dual de B_ω est plus fine que la topologie induite du produit E.*

Démonstration. Parmi les voisinages vagues de 0 dans $\mathfrak{M}_\omega$ se trouvent les ensembles

$$\left\{\mu : \left|\int \chi_{a_k, b_k}\, d\mu\right| < r, k = 1, \cdots, N\right\},$$

c'est-à-dire, les intersections avec $\mathfrak{M}_\omega$ d'ensembles d'une base de voisinages de 0 de la topologie produit. C.Q.F.D.

2. Lois stables de probabilité

Nous désignons par $S = S_\sigma = S_\sigma(y, s)$ la densité de la loi stable de probabilité de paramètre σ, $0 < \sigma < 2$:

$$S_\sigma(y, s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\xi - s|\xi|^\sigma}\, d\xi, \quad s > 0, -\infty < y < \infty. \tag{2.1}$$

Le comportement asymptotique de ces lois de probabilité nous sera utile. (Voir [9, Chapitre VII].)

LEMME 2. *Il existe deux fonctions $c_j = c_j(s, \sigma) > 0, j = 1, 2,$ telles que*

$$S_\sigma(R, s) \sim \frac{c_1}{R^{\sigma+1}}, \qquad \int_{|y|>R} S_\sigma(y, s)\, dy \sim \frac{c_2}{R^\sigma}, \qquad R \to +\infty, \tag{2.2}$$

ces fonctions sont de la forme,

$$c_j(s, \sigma) = s\, k_j(\sigma), \qquad j = 1, 2, \tag{2.3}$$

où k_j ne dépend pas de s.

Soit α une partition de la classe A, $\alpha = \{s_0 < s_1 < \cdots < s_n\}$, $s_0 > 0$. Soient $V_1, \cdots, V_n$ des ensembles boreliens linéaires arbitraires. La mesure produit,

$$\begin{aligned} &P_\alpha(y_k \in V_k\,;\, s_k \in \alpha) \\ &\quad = \int_{V_1} \cdots \int_{V_n} S_\sigma(y_1, s_1 - s_0) \cdots S_\sigma(y_n, s_n - s_{n-1})\, dy_1 \cdots dy_n \\ &\quad = \prod_{k=1}^{n} \int_{V_k} S_\sigma(y_k, s_k - s_{k-1})\, dy_k, \end{aligned} \tag{2.4}$$

est une mesure de probabilité dans chaque $E^{\cdot\alpha}$. L'ensemble des P_α, $\alpha \in A$, est une famille cohérente de mesures: si $\alpha \subset \beta$, alors

$$P_\beta(f_{\alpha,\beta}^{-1}(B)) = P_\alpha(B)$$

pour toute partie borelienne B de $E^{\cdot\alpha}$. En d'autres termes,

$$P_\alpha = f_{\alpha,\beta}(P_\beta), \qquad \text{si } \alpha \subset \beta.$$

On a donc une forme linéaire continue définie sur l'algèbre des fonctions continues sur le compact E qui ne dépendent que d'un nombre fini de coordonnées. D'après le théorème de Weierstrass-Stone, cette algèbre de fonctions est dense (pour la topologie uniforme) dans l'algèbre de toutes les fonctions continues sur E. Il existe donc une mesure de probabilité P dans E qui prolonge toutes les mesures P_α et P est unique.

Démontrons maintenant que la mesure P est en réalité concentrée sur l'espace $\mathfrak{M}_\omega \subset E$. Evidemment, cette démonstration dépendra du poids; le vrai problème est de déterminer le plus petit espace sur lequel la mesure P est concentrée. Nous allons utiliser un critère général, exposé dans le numéro 3 (écrits encore inédits de N. Bourbaki, cours de L. Schwartz à la Sorbonne pendant l'année scolaire 1964–1965).

3. Critère d'existence d'une mesure de Radon dans les espaces topologiques

Ce numéro est consacré à l'application d'un critère général d'existence d'une mesure de Radon bornée dans un espace topologique complètement régulier (Proposition 2). La Proposition 3 traite le cas particulier qui nous intéresse. Pour plus de détails sur ce chapitre de la théorie de l'intégration, on renvoie le lecteur intéressé au livre de Gelfand et Vilinkin [8, Chapitre IV] et aux mémoires de Prokhorov [10], [11].

Rappelons que les mesures de Radon se transportent d'un espace à un autre par les applications continues. Désignons par $\mathfrak{M}(E)$ l'ensemble de toutes les mesures de Radon bornées sur E.

Proposition 1. *Soient τ_1 et τ_2 deux topologies complètement régulières sur un ensemble E, τ_1 étant plus fine que τ_2. Appelons E_1 et E_2 les espaces E munis de τ_1 et τ_2 et i l'injection continue, $i : E_1 \to E_2$. L'application*[3]*:*

$$\mu_1 \to i(\mu_1) = \mu_2 \tag{3.1}$$

de $\mathfrak{M}(E_1)$ dans $\mathfrak{M}(E_2)$ est injective et conserve les normes (c'est-à-dire les variations totales); les mesures μ_1 et μ_2 sont identiques. (Voir [5, Chapitre V, § 6, Proposition 3 et Théorème 1].)

Avec les mêmes hypothèses on a:

Proposition 2. *Pour qu'une mesure μ_2 de $\mathfrak{M}(E_2)$ provienne comme en* (3.1) *d'une mesure μ_1 de $\mathfrak{M}(E_1)$, il faut et il suffit que μ_2 soit concentrée sur une réunion dénombrable de compacts de τ_1.*

[3] Rappelons que $i(\mu_1)$ désigne la mesure sur E_2 telle que $i(\mu_1)(B) = \mu_1(i^{-1}(B))$ pour toute partie borelienne B de E_2.

Démonstration. La nécessité de la condition étant évidente, montrons sa suffisance. Soit $\mu_2 \in \mathfrak{M}(E_2)$ une mesure concentrée sur la réunion d'une suite de compacts $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_n \subset \cdots$ de E_1. Soit $\mu_2 \mid K_n$ la mesure induite par μ_2 sur K_n. Alors $\mu_2 \mid K_n$ est une mesure sur K_n muni de la topologie τ_1 parce que les topologies τ_1 et τ_2 coïncident sur K_n. Elle a donc une image par l'injection continue $K_n \rightarrow E_1$, soit λ_n. Prenons maintenant la suite de mesures dans E_1,

$$\lambda_1, \lambda_2 - \lambda_1, \cdots, \qquad \lambda_n - \lambda_{n-1}, \cdots,$$

respectivement concentrées sur

$$K_1, K_2 - K_1, \cdots, \qquad K_n - K_{n-1}, \cdots.$$

On a

$$i(\lambda_n \mid K_n) = \mu_2 \mid K_n,$$

donc

$$i((\lambda_n - \lambda_{n-1}) \mid (K_n - K_{n-1})) = \mu_2 \mid (K_n - K_{n-1}).$$

Il est évident que

$$\textstyle\sum_n \| \mu_2 \mid (K_n - K_{n-1}) \| = \| \mu_2 \| < \infty.$$

Puisque l'injection i conserve les normes, et puisque la mesure $\lambda_n - \lambda_{n-1}$ est concentrés sur $K_n - K_{n-1}$, on obtient

$$\textstyle\sum_n \| \lambda_n - \lambda_{n-1} \| < \infty.$$

Donc la série

$$\textstyle\sum_n (\lambda_n - \lambda_{n-1})$$

converge vers une mesure μ_1 sur E_1. On a aussi:

$$i(\mu_1) \mid (K_n - K_{n-1}) = \mu_2 \mid (K_n - K_{n-1}).$$

Puisque les mesures $i(\mu_1)$ et μ_2 sont toutes deux concentrées sur la réunion des K_n, on a $i(\mu_1) = \mu_2$ tout court. C.Q.F.D.

Revenons à notre système projectif particulier, $E^{\cdot\alpha}$, P_α, g_α, $f_{\alpha,\beta}$, $\mathfrak{M}_\omega \subset E = \prod_\alpha E^{\cdot\alpha}$, $\mathfrak{M}_\omega$ étant muni de la topologie vague.

Proposition 3. *Pour que les mesures de probabilité P_α sur les $E^{\cdot\alpha}$ proviennent d'une mesure de probabilité P concentrée sur $\mathfrak{M}_\omega$, il faut et il suffit que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K de $\mathfrak{M}_\omega$ tel que pour tout indice $\alpha \in A$ on ait*

$$P_\alpha(\mathrm{proj}_\alpha(K)) \geq 1 - \varepsilon; \tag{3.2}$$

dans ce cas le mesure P est unique[4].

Démonstration. Nécessité: soit P une mesure de probabilité sur $\mathfrak{M}_\omega$ avec $P_\alpha = \mathrm{proj}_\alpha(P)$ pour tout $\alpha \in A$. Il existe un compact K de $\mathfrak{M}_\omega$ tel que

[4] En réalité, ce critère a été établi dans un contexte beaucoup plus général par L. Schwartz (loc. cit.). Nous avons simplement copié sa démonstration pour l'espace qui nous intéresse.

$P(K) \geq 1 - \varepsilon$. Alors

$$P_\alpha(\mathrm{proj}_\alpha(K)) = \mathrm{proj}_\alpha(P)(\mathrm{proj}_\alpha(K))$$
$$= P(\mathrm{proj}_\alpha^{-1}(\mathrm{proj}_\alpha(K))) \geq P(K) \geq 1 - \varepsilon.$$

Suffisance: Soit B une partie finie de A. Posons

$$E^B = \textstyle\prod_{\beta \in B} E^{\cdot\beta}.$$

Appelons proj_B la projection canonique de E sur E^B. Si α est un élément de A qui majore B, on a une application continue,

$$f_{B,\alpha} : x^\alpha \longrightarrow (f_{\beta,\alpha}(x^\alpha))_{\beta \in B},$$

de $E^{\cdot\alpha}$ dans E^B. Pour tout élément $x \in \mathfrak{M}_\omega$ on a:

$$\mathrm{proj}_B(x) = f_{B,\alpha}(\mathrm{proj}_\alpha(x)). \tag{3.3}$$

D'après le théorème de Kolmogoroff, la mesure P existe dans le produit E et on a les lois cohérentes de probabilité $P_B = \mathrm{proj}_B(P)$.

Pour le compact K en question on a

$$\begin{aligned} P_B(\mathrm{proj}_B(K)) &= P_B(f_{B,\alpha}(\mathrm{proj}_\alpha(K))) \\ &= P_\alpha(f_{B,\alpha}^{-1}[f_{B,\alpha}(\mathrm{proj}_\alpha(K))]), \end{aligned} \tag{3.4}$$

d'après (3.3). Mais d'après l'hypothèse (3.2), (3.4) entraîne

$$P_B(\mathrm{proj}_B)K)) \geq P_\alpha(\mathrm{proj}_\alpha(K)) \geq 1 - \varepsilon. \tag{3.5}$$

Puisque $P_B = \mathrm{proj}_B(P)$, (3.5) s'écrit

$$P(\mathrm{proj}_B^{-1}(\mathrm{proj}_B(K))) \geq 1 - \varepsilon. \tag{3.6}$$

Mais d'autre part si $B' \supset B$, on a

$$\mathrm{proj}_B^{-1}(\mathrm{proj}_B(K)) \supset \mathrm{proj}_{B'}^{-1}(\mathrm{proj}_{B'}(K)).$$

Les ensembles $\mathrm{proj}_B^{-1}(\mathrm{proj}_B(K))$ étant fermés, on peut, d'après une propriété fondamentale des mesures de Radon, passer à la limite dans (3.6). Il résulte:

$$P(K) = P(\textstyle\bigcap_{B \subset A, B \text{ fini}} \mathrm{proj}_B^{-1}(\mathrm{proj}_B(K))) \geq 1 - \varepsilon.$$

La mesure P est donc concentrée sur une suite dénombrable de compacts de $\mathfrak{M}_\omega$. Vu la Proposition 2 et le Lemme du numéro 2, la démonstration est ainsi achevée.

4. Existence de certaines lois de probabilité dans l'espace $\mathfrak{M}_\omega$

On peut interpréter le critère du numéro précédent comme établissant que les bonnes mesures de probabilité dans les espaces fonctionnels sont presque concentrées sur un compact. Pour l'espace $\mathfrak{M}_\omega$ la question se pose, de savoir quels sont les poids ω pour lesquels la mesure P est concentrée sur $\mathfrak{M}_\omega$. Bien entendu, il faudra chercher un poids aussi petit que possible. De tels résultats seront des analogues du fait que la mesure de Wiener est concentrée sur les classes de Lipschitz d'exposant $<\frac{1}{2}$. On a été amené à conjecturer que le poids ω ne devrait pas être trop petit au voisinage de $s = 0$.

THÉORÈME. *Fixons le paramètre σ, $1 \leq \sigma < 2$. Soit ρ réel, $0 < \rho < 1$; soit ω un poids positif, continu et décroissant sur $0 < s < \infty$; supposons, en outre, en ce qui concerne la rapidité de croissance de $\omega(s)$ lorsque $s \searrow 0$, que*

$$0 < C^{te} \leq \omega(s) \cdot s^{(\sigma-\rho)/\sigma\rho} \leq C^{te} < \infty \qquad (0 < s \leq 1); \tag{4.1}$$

$\omega(s)$ peut être arbitrairement petit dans le voisinage $(s > 1)$ de $+\infty$. Alors la mesure de probabilité P est concentrée sur $\mathfrak{M}_\omega$; elle est uniquement déterminée par le paramètre σ d'après la définition (2.4).

Démonstration. Dans l'espace $\mathfrak{M}_\omega$ muni de la topologie vagu, les boules

$$K = K_R = \{x : \| x \|_\omega \leq R\}, \tag{4.2}$$

sont compactes. Etant donné $\varepsilon > 0$, nous cherchons donc une boule K_R de rayon R suffisamment grand, telle que pour toute partition $\alpha \in A$ on ait

$$P_\alpha(\mathrm{proj}_\alpha(K)) \geq 1 - \varepsilon.$$

Notons que la fonction

$$\alpha \to P_\alpha(\mathrm{proj}_\alpha(K))$$

est décroissante en α (K étant fixe). En effet, si $\alpha \subset \beta$,

$$\begin{aligned} P_\alpha(\mathrm{proj}_\alpha(K)) &= P_\alpha(f_{\alpha,\beta}(\mathrm{proj}_\beta(K))) \\ &= P_\beta(f^{-1}_{\alpha,\beta}(f_{\alpha,\beta}(\mathrm{proj}_\beta(K)))) \\ &\geq P_\beta(\mathrm{proj}_\beta(K)). \end{aligned} \tag{4.3}$$

(D'ailleurs, il est évident qu'il y a plus de facteurs $\int S\, dy_k$ dans (2.4) pour β qu'il n'y en a pour α.)

Vu (4.3), il suffit d'obtenir une bonne majoration de $P_\beta(\mathrm{proj}_\beta(\complement K))$. Notons l'inclusion:

$$\mathrm{proj}_\beta(\complement_E K) \supset \complement_{E^\beta}(\mathrm{proj}_\beta(K)).$$

On va montrer:

$$\cap_{\beta\in A}\{\mathrm{proj}_\beta(\complement_E K)\backslash\complement_{E^\beta}(\mathrm{proj}_\beta K)\} = \emptyset. \tag{4.4}$$

En effet, si μ est un élément quelconque de $\complement_E K$, on a

$$\sup_\beta \| \mathrm{proj}_\beta\, \mu \| = \| \mu \| > R.$$

D'autre part, si $\nu \in K$, on a

$$\| \mathrm{proj}_\beta\, \nu \| \leq R.$$

Donc, si la partition β est suffisamment fine, $\mathrm{proj}_\beta\, \mu$ est exclu de l'ensemble $\mathrm{proj}_\beta K$, d'où la relation (4.4).

Puisque la mesure de probabilité P prolonge chaque mesure P_β, de (4.4) on tire la conclusion:

$$\lim_\beta P_\beta(\operatorname{proj}_\beta(\complement_E K)) = \lim_\beta P_\beta(\complement_{E^\beta}(\operatorname{proj}_\beta K)).$$

Il suffit donc d'obtenir une bonne majoration, uniforme en β, de

$$P_\beta(\complement_{E^\beta} \operatorname{proj}_\beta K)).$$

La boule $K = K_R$ est définie comme

$$\left\{\mu \in \mathfrak{M}_\omega : \sup_{\|\varphi\|_\omega \leq 1} \left| \int_{R_+} \varphi \, d\mu \right| \leq R \right\}.$$

En faisant usage du théorème de Hahn-Banach, on voit que l'ensemble $\operatorname{proj}_\beta K$ peut être identifié avec l'ensemble des formes linéaires continues μ sur B_ω telles que, pour toute fonction $\sum_k c_k \chi_{E_k}$ étagée sur les intervalles E_k de la partition $\beta \in A$ et qui satisfait à la condition

$$\max_{t \geq 0} | \textstyle\sum_k c_k \chi_{E_k}(t) | \omega(t) \leq 1,$$

on ait

$$| \langle \mu, \textstyle\sum_k c_k \chi_{E_k} \rangle | \leq R.$$

C'est le cas si et seulement si

$$\textstyle\sum_k | \mu(E_k) | / \omega_k \leq R,$$

où

$$\omega_k = \sup_{t \in E_k} \omega(t).$$

Donc

$$\complement (\operatorname{proj}_\beta K) = \{\mu \in \mathfrak{M}_\omega : \textstyle\sum_k | \mu(\chi_{E_k}) | / \omega_k > R\}.$$

En désignant le vecteur $(\mu(\chi_{E_k}))$ de l'espace E^β par (y_k), on a

$$H_\beta \equiv \complement_{E^\beta}(\operatorname{proj}_\beta K) = \{(y_k) : \textstyle\sum_k | y_k | / \omega_k > R\}. \tag{4.5}$$

De (4.5) il vient ($n = \dim E^\beta$):

$$H_\beta \subset \{(y_j) : | y_j | > (R/n)\omega_j \quad \text{pour au moins un indice } j\}.$$

Pour abréger, posons:

$$F_{kn} = \{(y_j) : | y_k | \leq (R/n)\omega_k\},$$

$$E_{\nu n} = \{(y_j) : | y_\nu | > (R/n)\omega_\nu\}.$$

Il s'ensuit que H_β se décompose en parties disjointes:

$$H_\beta = H_1 \cup \cdots \cup H_n$$

où

$$H_1 \subset E_{1n}, \quad H_2 \subset F_{1n} \cap E_{2n}, \quad H_3 \subset F_{1n} \cap F_{2n} \cap E_{3n}, \quad \cdots,$$

$$H_n \subset F_{1n} \cap F_{2n} \cap \cdots F_{n-1,n} \cap E_{nn}.$$

Ceci posé on aura:

$$P_\beta(H_\beta) = \sum_{\nu=1}^{n} P_\beta(H_\nu)$$

(4.7) $$= \sum_{\nu=2}^{n} \prod_{k=1}^{\nu-1} \int_{F_{kn}} S(y_k, s_k - s_{k-1})\, dy_k \int_{E_{\nu n}} S(y_\nu, s_\nu - s_{\nu-1})\, dy_\nu + \int_{E_{1n}} S(y_1, s_1 - s_0)\, dy_1$$

Nous allons évaluer la quantité (4.7) en plusieurs étapes. $C_1, C_2, \cdots$ désigneront diverses constantes.

I. Le terme qui correspond à $\nu = 1$ est

$$\int_{E_{1n}} S(y_1, s_1 - s_0)\, dy_1 = \int_{|y_1|>(R/n)\omega(n^{-\rho})} S(y_1, n^{-\rho})\, dy_1$$

$$\leq \int_{|y|>C_1R} S(y, 1)\, dy = o(1), \qquad (R \to \infty)$$

car $\omega(n^{-\rho}) \geq C_2 \cdot n^{1-(\rho/\sigma)}$.

II. Fixons $\eta > 1$, $\eta - 1 < \rho/(\sigma - \rho)$. Posons $\Lambda = R^{\sigma\rho/(\sigma-\rho)}$. Pour $2 \leq \nu \leq \Lambda^{1/\eta}$ on a alors:

$$\omega_\nu = \omega(\nu n^{-\rho}) \geq \omega(\Lambda^{1/\eta} \cdot n^{-\rho})$$

$$\geq C_3[\Lambda^{1/\eta} \cdot n^{-\rho}]^{1/\sigma - 1/\rho}$$

$$= C_3\, R^{-1/\eta} \cdot n^{1-(\rho/\sigma)},$$

donc $R\omega_\nu \cdot n^{-1+(\rho/\sigma)} \geq C_4\, R^{(\eta-1)/\eta}$. Il s'ensuit que

$$\int_{|y_\nu|>(R/n)\omega_\nu} S(y_\nu, s_\nu - s_{\nu-1})\, dy_\nu \leq \int_{|y_\nu|>C_4R^{(\eta-1)/\eta}} S(y_\nu, 1)\, dy_\nu \leq \frac{C_5}{R^{\sigma(\eta-1)/\eta}},$$

où la constante C_5 ne dépend que de σ. Pour $2 \leq \nu \leq \Lambda^{1/\eta}$ on a donc une contribution à (4.7) inférieure à

$$C_5\, R^{(1/\eta)[\sigma\rho/(\sigma-\rho)] - \sigma(\eta-1)/\eta} = C_5\, R^{(\sigma/\eta)(\rho/(\sigma-\rho)-(\eta-1))} = o(1) \quad (R \to \infty).$$

III. Etudions maintenant l'intervalle

(4.8) $$\Lambda^{1/\eta} < \nu \leq C_0\, \Lambda,$$

où la constante C_0 sera choisie suffisamment grande dans l'étape IV. Pour les indices k tels que

$$\tfrac{1}{2}\Lambda^{1/\eta} \leq k \leq \nu,$$

on a des majorations comme suit:

$$\int_{|y_k|<(R/n)\omega_k} S(y_k, s_k - s_{k-1})\, dy_k$$

$$\leq \int_{|y|<R\omega(1/2\Lambda^{1/\eta}\cdot n^{-\rho})/n^{1-(\rho/\sigma)}} S(y, 1)\, dy$$

$$\leq \int_{|y|<C_6 R^{(\eta-1)/\eta}} S(y, 1)\, dy$$

$$= 1 - \int_{|y|>C_6 R^{(\eta-1)/\eta}} S(y, 1)\, dy \leq 1 - \frac{c_{\sigma\rho}}{R^{(\eta-1)\sigma/\eta}},$$

où $c_{\sigma\rho} > 0$ ne dépend que de σ et de ρ. En insérant cette majoration dans (4.7) pour $\frac{1}{2}\Lambda^{1/\eta}$ facteurs $\int_{F_{kn}} \cdots$ d'indice $k \leq \nu$ (ce qui est loisible puisque $\nu > \Lambda^{1/\eta}$), on obtient, pour chaque ν de l'intervalle (4.8), pour le $\nu^{\text{ième}}$ terme dans la somme $\sum_\nu$ de (4.7), la majoration

$$\{1 - (c_{\sigma\rho}/R^{\sigma(\eta-1)/\eta})\}^{(1/2)\Lambda^{1/\eta}},$$

qui est asymptotiquement égale à

$$\exp\,(-\tfrac{1}{2}c_{\sigma\rho}\, R^{\lambda}),$$

où

$$\lambda = \frac{\sigma}{\eta}\left(\frac{\rho}{\sigma - \rho} - (\eta - 1)\right) > 0,$$

lorsque $R \to \infty$. Donc la contribution totale à la somme (4.7) des termes aux indices ν marqués dans (4.8) est inférieure à

$$C_7\, C_0\, R^{\sigma\rho/(\sigma-\rho)} \cdot \exp\,(-\tfrac{1}{2}c_{\sigma\rho}\, R^{\lambda}),$$

ce qui tend bien vers 0 lorsque $R \to \infty$.

IV. Passons aux indices ν tels que

$$C_0\,\Lambda < \nu \leq n^{\rho}. \tag{4.9}$$

En tenant compte de l'expression (2.1) pour $S_\sigma(y, s)$, on obtient

$$\int_{|y|\leq a} S_\sigma(y, s)\, dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a\xi}{\xi} \exp\,(-s\,|\,\xi\,|^{\sigma})\, d\xi,$$

donc, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz:

$$\left|\int_{|y|\leq a} S_\sigma(y, s)\, dy\right|$$

$$\leq \frac{1}{\pi}\sqrt{a} \cdot \sqrt{\int \left(\frac{\sin \xi}{\xi}\right)^2 d\xi} \cdot \sqrt{\int \exp\,(-2s\,|\,\xi\,|^{\sigma})\, d\xi} \tag{4.10}$$

$$\leq C_8 \sqrt{a/s^{1/\sigma}}.$$

En utilisant (4.10), on trouve pour les termes d'indice (4.9) dans (4.7) la majoration

$$\sum_{\nu\in(4.9)} \sqrt{C_9 \prod_{k=1}^{\nu-1} \frac{R}{n^{1-(\rho/\sigma)}}\, \omega_k}, \tag{4.11}$$

Puisque

$$\omega_k = \omega(k\cdot n^{-\rho}) \leq C_{10}(k\cdot n^{-\rho})^{1/\sigma-1/\rho},$$

la borne (4.11) est inférieure à

$$\sum_{\nu\in(4.9)} \sqrt{(C_{11}R)^{\nu-1}(\nu-1)^{(\sigma-\rho)/\sigma\rho}}. \tag{4.12}$$

La formule de Stirling permet de remplacer (4.12) par

$$\sum_{\nu\in(4.9)} \sqrt{\left(\frac{C_{11}Re^M}{(\nu-1)^M}\right)^{\nu-1}(2\pi(\nu-1))^{-M/2}}, \qquad M = (\sigma-\rho)/\sigma\rho,$$

$$\leq \sum_{\nu\in(4.9)} \sqrt{\left(\frac{C_{11}e^M}{C_0^M}\right)^{\nu-1}(2\pi(\nu-1))^{-M/2}} \tag{4.13}$$

$$\leq \frac{C_{12}}{C_0^{M/4}R^{1/4}} \sum_{\nu\in(4.9)} \sqrt{\left(\frac{C_{11}\,e^M}{C_0^M}\right)^{\nu-1}} = o(1) \qquad (R\to\infty),$$

à condition qu'on fixe $C_0^M > C_{11}\,e^M$.

V. Pour les indices ν avec $n^\rho < \nu \leq n$, des majorations de type (4.11) montrent que ω_ν peut être arbitrairement petit. C.Q.F.D.

5. Les processus stables, $0 < \sigma < 1$

Soit $X(t)$ le processus stable, séparable, de paramètre σ, $0 < \sigma < 1$. Evaluons la probabilité de l'évènement

$$\int_0^\infty \frac{|\,dX(t)|}{\omega(t)} < \infty,$$

où le poids est positif et continu, quelconque. La fonction caractéristique de la variable aléatoire

$$y = \int_0^\infty \frac{|\,dX(t)|}{\omega(t)},$$

étant [13, p. 146], pour deux constants $m > 0$, $c_0 > 0$,

$$\mathcal{E}(e^{-\lambda y}) = \exp\left\{-\lambda m \int_0^\infty \frac{dt}{\omega(t)} - c_0 \int_0^\infty dt \cdot \int_0^\infty [1-\exp(-\lambda x/\omega(t))]\,\frac{dx}{x^{\sigma+1}}\right\}$$

on voit que la probabilité en question égale

$$\lim_{\lambda\downarrow 0} \mathcal{E}(e^{-\lambda y}) = 1,$$

si

$$\int_0^\infty \frac{dt}{\omega(t)} < \infty \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \frac{dt}{\omega(t)^\sigma} < \infty,$$

et elle égale 0 si

$$\int_0^\infty \frac{dt}{\omega(t)} = +\infty \quad \text{ou} \quad \int_0^\infty \frac{dt}{\omega(t)^\sigma} = +\infty.$$[5]

BIBLIOGRAPHIE

1. E. J. AKUTOWICZ, *Sur certaines équations d'évolution*, Annali di Pisa, vol. XXI (1967), pp. 401–419.
2. S. BOCHNER, *Harmonic analysis and the theory of probability*, Berkeley and Los Angeles, 1955.
3. ———, *Length of random paths in general homogeneous spaces*, Ann. of Math., vol. 57 (1953), pp. 309–313.
4. N. BOURBAKI, *Mesures sur des espaces non localement compacts*, Rédaction N° 421, (inédit).
5. ———, *Intégration*, Eléments de mathématiques, Chap. V, Paris, Hermann, 1955.
6. J. L. DOOB, *Stochastic processes*, New York, Wiley, 1953.
7. N. DUNFORD AND J. SCHWARTZ, *Linear operators*, Part I, New York, Interscience, 1958.
8. I. M. GELFAND UND N. J. VILENKIN, *Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen) IV*, Einige Anwendungen der harmonischen Analyse, Gelfandsche Raumtripel, Hochschulbücher für Mathematik, Band 50, Berlin, 1964.
9. B. W. GNEDENKO UND A. N. KOLMOGOROFF, *Grenzverteilungen von Summen unabhängiger Zufallsgrössen*, Berlin, Akademie-Verlag, 1959.
10. YU. V. PROHOROV, *The method of characteristic functionals*. Proceedings 4th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability Theory, vol. II, Berkeley and Los Angeles, 1961, p. 403–419.
11. ———, *The convergence of random processes and limit theorems in the theory of probability*, Theory Probability Appl., vol. 4 (1956), p. 177.
12. L. SCHWARTZ, *Mesures de Radon sur les espaces topologiques arbitraires*, Cours à la Sorbonne, 1964–1965. (Polycopié).
13. Скороход, А. В., Случайные Процессы с Независимыми Приращениями, Москва 1964.

FACULTÉ DES SCIENCES
MONTPELLIER, FRANCE

[5] Pour des résultats plus fins, même en N dimensions, $0 < \sigma < N$, voir un article de J. Takeuchi, *A local asymptotic law for the transient stable process*, Proc. Japan Acad., vol. 40 (1964), pp. 141–144.