

# FONCTIONS ALÉATOIRES À CORRÉLATION LINÉAIRE

PAR PAUL LÉVY

## I. INTRODUCTION

### I.1

1°. Un système *laplacien* de variables aléatoires est caractérisé par les deux propriétés suivantes: chaque variable dépend de la loi de Laplace<sup>1</sup>, et la corrélation entre les différentes variables est linéaire. Les fonctions aléatoires laplaciennes d'une ou plusieurs variables, ou d'un point d'un espace quelconque, sont caractérisées par les deux mêmes propriétés. Nous nous proposons d'étudier les fonctions ou les systèmes de variables obtenus en abandonnant la première propriété, et en ne conservant que la corrélation linéaire.

Plusieurs définitions de cette notion sont possibles. Nous dirons d'abord qu'une variable aléatoire  $Y$  *dépend linéairement* d'un système de variables  $X_v$ , si elle est de la forme  $U + V$ ,  $U$  étant une fonctionnelle linéaire certaine, presque sûrement bien définie, des  $X_v$ , et  $V$  étant indépendant de ces variables. Dans ce cas,  $Y$  peut aussi être représenté par  $U_1 + V_1$ , avec

$$U_1 = U + c, \quad V_1 = V - c,$$

$c$  étant un nombre certain, et il n'y a pas d'autre représentation de la même forme. Précisons que  $U$  peut être identiquement nul. L'indépendance de  $Y$  par rapport aux  $X_v$  est donc un cas particulier de la dépendance linéaire.

Si les  $X_v$  sont en nombre infini, la définition de  $U$  implique la convergence presque sûre d'une certaine expression, série ou intégrale, et il peut arriver que cette condition ne soit pas vérifiée quand les  $X_v$  sont tous nuls. C'est seulement dans le cas où, pour les  $X_v$  tous nuls,  $U$  prend une valeur bien définie  $u_0$ , qu'on peut mettre  $U$  sous la forme  $U_0 + u_0$ , et ramener son étude à celle d'une fonction linéaire et homogène des  $X_v$ . Dans le cas général, on peut arriver à un résultat analogue en exprimant  $U$  en fonction de variables auxiliaires  $X_v - a_v$  (les  $a_v$  étant des nombres certains). Malgré cela, nous ne pourrions pas toujours nous contenter de considérer les cas où  $U$  est une fonction linéaire et homogène des variables choisies.

Dans le cas laplacien, on peut supposer toutes les variables semi-réduites, et prendre pour  $U$  la valeur probable conditionnelle de  $Y$  quand les  $X_v$  sont

---

Received November 19, 1956. Footnotes 6 and 10 and a few lines in nos II.2.3°, III.6.3° and III.8.2° modified in proof.

<sup>1</sup> La *loi de Laplace* est la loi souvent appelée loi de Gauss, ou loi normale. Une variable aléatoire  $X$ , laplacienne ou non, sera dite semi-réduite si  $E(X) = 0$ , et réduite si de plus  $E(X^2) = 1$ . Les variables laplaciennes réduites seront désignées par les lettres  $\xi$  ou  $\eta$ , avec ou sans indices, et les différentes variables  $\xi_i$  et  $\eta_j$  qui interviennent dans une même expression analytique seront toujours supposées indépendantes les unes des autres.

connus. Mais cela n'est pas possible pour une théorie générale: les premiers moments des  $X_v$  et de  $Y$  n'existent pas toujours.

2°. Nous dirons qu'un ensemble  $E$  de variables aléatoires  $X_v$  est à *corrélation linéaire complète* si, quel que soit le sous-ensemble  $E' \subset E$  de variables  $X_v$  que l'on suppose connues, chaque variable inconnue dépend linéairement des variables connues. Nous verrons que cette définition ne conduit qu'à une généralisation triviale des systèmes laplaciens. D'autres applications de la notion de dépendance linéaire sont plus intéressantes.

La première suppose essentiellement une relation d'ordre entre les variables considérées. Il peut notamment s'agir d'une suite finie, infinie ou transfinie, de variables aléatoires, ou d'une fonction aléatoire  $\Phi(t)$  du temps  $t$ , définie sur tout ou partie de l'axe des  $t^2$ . Pour un tel système ordonné, nous dirons qu'il est à *corrélation linéaire*, ou encore qu'il *appartient à la classe  $K$* , si, quelle que soit la variable  $X$  de ce système, quand on connaît, soit l'ensemble de toutes les variables qui précèdent  $X$ , soit cet ensemble complété par  $X$ , toutes les variables inconnues dépendent linéairement de l'ensemble des variables connues.

Une classe beaucoup plus étendue s'obtient en introduisant la notion de *corrélation linéaire indirecte*. La fonction étudiée  $\Phi(x)$  peut alors être une fonction aléatoire d'une variable  $x$  de nature absolument quelconque. Nous introduirons d'autre part un système auxiliaire qui sera, soit un ensemble absolument quelconque de variables aléatoires  $V_v$ , indépendantes les unes des autres, soit l'ensemble des accroissements successifs d'une fonction aléatoire additive  $Z(u)$ ,  $u$  étant une variable réelle<sup>3</sup>. Nous désignerons par  $K_i$  la classe des fonctions  $\Phi(x)$  qui peuvent être définies comme fonctions linéaires certaines des  $V_v$ , et par  $K_i^*$  la classe de celles qui sont des fonctions linéaires certaines des accroissements d'une fonction  $Z(u)$ . Si une fonction  $Z(u)$  admet des discontinuités mobiles, elle n'appartient pas à  $K_i$ . Donc  $K_i^*$  n'est pas contenu dans  $K_i$ . Inversement  $K_i$  contient des fonctions qui dépendent effectivement d'une infinité non dénombrable de variables aléatoires indépendantes, et n'est pas contenu dans  $K_i^*$ .

Une fonction  $Z(u)$ , si, pour fixer les idées, on la suppose nulle pour  $u = 0$ , peut d'ailleurs toujours être considérée comme la limite, au sens de Bernoulli, ou même en probabilité, de fonctions dépendant linéairement d'un système de variables aléatoires indépendantes, à savoir les différences

$$Z[(n+1)\tau] - Z(n\tau),$$

---

<sup>2</sup> Une théorie plus générale n'est pas exclue. Dans le plan euclidien, par exemple, on peut définir une relation d'ordre en disant que le point  $x, y$  précède le point  $x', y'$  si l'on a, soit  $x < x'$ , soit  $x = x', y < y'$ . Mais il ne semble pas qu'il y ait intérêt à développer une théorie reposant sur une convention aussi arbitraire. Quand nous parlons du temps  $t$ , cela implique non seulement qu'il s'agisse d'un point d'une droite, mais aussi que cette droite soit orientée.

<sup>3</sup> On pourrait introduire ici, au lieu de  $Z(u)$ , une fonction aléatoire additive d'ensemble dans un espace quelconque, ou, en d'autres termes, une intégrale multiple à éléments aléatoires indépendants. Mais la généralisation serait illusoire.

$\tau$  étant infiniment petit. Si donc elles n'appartiennent en général pas à la classe  $K_i$ , elles appartiennent toujours à sa fermeture  $\bar{K}_i$ , et il en est de même de toutes les fonctions de la classe  $K_i^*$ . Cette fermeture  $\bar{K}_i$  apparaît ainsi comme la classe la plus générale dans cet ordre d'idées. Ce sont les fonctions de cette classe, c'est-à-dire *toutes celles qu'il est possible de définir par un passage à la limite* en partant de fonctions de  $K_i$ , que nous appellerons *fonctions à corrélation linéaire indirecte*.

En parlant de passage à la limite, nous admettons naturellement la définition la moins restrictive, de manière à obtenir réellement toutes les fonctions qu'il est possible de définir comme il vient d'être dit. Mais l'influence de la définition de la limite n'est pas ce qu'on pourrait croire à première vue. Ainsi, pour une suite de variables aléatoires  $X_n$ , s'il y a convergence de leurs lois vers celle d'une variable  $X$ , la corrélation entre  $X$  et  $X_n$  n'intervient pas, et rien n'empêche de définir cette corrélation de manière qu'il y ait convergence en probabilité de  $X_n$  vers  $X$ , et par suite convergence presque sûre pour une suite partielle convenablement choisie. Ces trois modes de convergence donnent donc la même définition pour la fermeture d'un ensemble de variables aléatoires. La même remarque s'applique à celle d'une classe de fonctions aléatoires.

## 1.2

1°. Occupons-nous maintenant de la recherche de représentations explicites des fonctions considérées, et en particulier des fonctions de la classe  $K_i^*$ . Les fonctions  $Z(u)$  sont aujourd'hui bien connues, et on peut considérer comme représentation explicite d'une fonction  $\Phi(x)$  n'importe quelle formule du type

$$(I.2.1) \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, u) dZ(u),$$

pourvu que l'intégrale soit presque sûrement bien définie.

Mais cette forme est en fait beaucoup trop restrictive. On sait qu'une fonction  $Z(u)$  peut se mettre sous la forme

$$(I.2.2) \quad Z(u) = f(u) + X(u) + Y(u) + S(u),$$

où  $f(u)$  est une fonction certaine,  $X(u)$  une fonction additive, laplacienne, et semi-réduite,  $Y(u)$  une somme ou une somme compensée de discontinuités mobiles, et  $S(u)$  une somme de discontinuités fixes. Nous supposons  $f(u) = 0$ , ce qui n'est pas une restriction essentielle; en ajoutant  $f(u)$ , on ne fait en effet qu'ajouter un terme certain à  $\Phi(t)$ . La fonction  $Z(u)$  n'a alors pas d'autre discontinuité que des sauts, définis chacun par les deux nombres  $u_\nu$  et

$$y_\nu = y(u_\nu) = Z(u_\nu + 0) - Z(u_\nu - 0).$$

Les sauts s'obtiennent ainsi par des opérations linéaires en fonction de  $Z(u)$ . D'ailleurs les sauts de  $S(u)$  correspondent à au plus une infinité dénombrable

de valeurs de  $u$  connues d'avance, et où  $Y(u)$  est *presque sûrement* continu<sup>4</sup>. On saura donc de chaque saut si c'est un saut de  $Y(u)$  ou de  $S(u)$ . Donc  $Y(u)$ ,  $S(u)$ , et par suite  $X(u)$  sont des fonctions linéaires certaines de  $Z(u)$ , et il en est de même de toutes les fonctions  $\Phi(x)$  de la forme

$$(I.2.3) \quad \Phi(x) = \varphi(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} [F(x, u) dX(u) + G(x, u) dY(u) + H(x, u) dS(u)].$$

Ces fonctions appartiennent donc à la classe  $K_i^*$ ; mais toutes les fonctions de cette classe ne sont pas représentables par la formule (I.2.3). C'est seulement la fermeture de l'ensemble des fonctions (I.2.3) qui coïncide avec  $K_i^{*5}$ .

Cette formule (I.2.3), réduite au terme laplacien, a déjà été considérée par G. Maruyama [8]. Il considérait seulement une intégrale étendue à l'intervalle  $(0, 1)$ ; ce n'est pas une différence essentielle, puisqu'un changement de variable sur  $u$  permet de ramener une forme à l'autre.

Nous ne reviendrons pas sur la formule générale (I.2.3), mais insisterons sur le cas particulier que nous allons définir maintenant. Indiquons seulement d'abord que tous les résultats qui ne font pas intervenir les notions de représentations propres ou impropres, ou canoniques, s'étendent sans peine au cas général.

2°. Nous désignerons par  $C$  la classe des fonctions  $\Phi(t)$  du temps  $t$ , définies pour  $t > 0$ , et représentables par la formule (I.2.3), l'intervalle d'intégration étant réduit à  $(0, t)$ . Si de plus  $\varphi(t) = 0$ , nous obtenons la classe  $C_0$  des fonctions de la forme

$$(I.2.4) \quad \Phi(t) = \int_0^t [F(t, u) dX(u) + G(t, u) dY(u) + H(t, u) dS(u)] \quad (t > 0).$$

Nous désignerons les trois termes par  $\Phi_1(t)$ ,  $\Phi_2(t)$  et  $\Phi_3(t)$ , et par  $C_i$  l'ensemble des fonctions  $\Phi_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

Si on précise que l'on intègre de  $-0$  à  $t$ , si  $H(t, 0) = \varphi(t)$  et

$$S(+0) - S(-0) = 1,$$

la différence entre  $C_0$  et  $C$  disparaît. Mais il semble préférable de supposer essentiellement que les discontinuités de  $S(u)$  sont fixes, mais aléatoires, c'est-à-dire que, pour chaque saut,  $u$ , étant connu,  $y$ , a au moins deux valeurs possibles [y compris zéro, éventuellement; dès que  $\Pr(y, \neq 0) > 0$ , le point  $u$ , où il en est ainsi est un saut possible, rattaché à  $S(u)$  et non à  $Y(u)$ ]. Si

<sup>4</sup> Pour l'étude d'une fonction particulière, on peut ne pas s'occuper du cas où  $S(u)$  et  $Y(u)$  ont un saut commun; c'est un cas dont la probabilité est nulle. Mais on ne peut pas opérer de même pour une famille de fonctions telle que  $Y(\lambda u) + S(u)$ ; il y aurait des valeurs du paramètre  $\lambda$ , non connues d'avance, pour lesquelles les résultats presque sûrs pour chaque valeur donnée de  $\lambda$  seraient en défaut.

<sup>5</sup> Ce résultat sera démontré dans un travail séparé.

$y_v$  n'avait qu'une valeur possible, le terme  $H(t, u_v)y_v$  serait connu, et devrait être rattaché à  $\varphi(t)$ . La classe  $C_0$  n'est ainsi qu'une partie de  $C$ .

On ne restreint par contre rien en supposant, ce que nous ferons toujours, que l'on a

$$(I.2.5) \quad X(0) = Y(0) = S(0) = 0.$$

L'intérêt de la formule (I.2.4) pour l'étude des processus stochastiques provient de ce qu'on introduit successivement les différents accroissements élémentaires  $dZ(u)$  dont dépend  $\Phi(t)$ . Il peut alors arriver que l'information donnée par la variation de  $Z(u)$  dans n'importe quel intervalle  $(t, t')$  (avec  $0 \leq t < t'$ ) coïncide exactement avec l'information nouvelle obtenue quand  $\Phi(u)$ , déjà connu dans  $(0, t)$ , est donné dans  $(t, t')$ . Mais il n'en est pas toujours ainsi. C'est ce qui nous obligera à distinguer les représentations *propres*, *semi-propres*, ou *impropres*, et à considérer spécialement les représentations *canoniques*.

Après une brève indication donnée incidemment dès 1950 [4, note de la p. 353], l'auteur a entrepris en 1955 une étude systématique du cas laplacien [5, Chap. 4; voir aussi 6]. L'objet essentiel du présent travail est l'extension des principaux résultats aux fonctions de la classe  $C$ , et l'étude des relations entre cette classe et la classe  $K$  définie au n° I.1.2°.

### I.3

1°. Le Chapitre II, qui a encore un caractère préliminaire, est un complément aux travaux qui viennent d'être cités. Bien que plusieurs théorèmes soient simplement rappelés sans démonstration, nous n'avons pas pu éviter certaines répétitions. Ce retour sur le cas laplacien nous a tout de même paru nécessaire, pour plusieurs raisons. D'une part, il y a un assez grand nombre de résultats nouveaux. D'autre part, dans aucun des travaux cités, nous ne nous étions placé exactement au point de vue du présent travail.

Dans [5], la fonction étudiée était de la forme

$$(I.3.1) \quad \Phi(t) = \int_0^t F(t, u) dX_0(u) = \int_0^t F(t, u) \xi_u \sqrt{du},$$

où  $X_0(u)$  est la fonction de Wiener; les  $\xi_u$  ont la signification indiquée note<sup>1</sup>. Dans le présent travail, au lieu de  $X_0(u)$ , nous introduisons une fonction aléatoire laplacienne, additive, semi-réduite, à cela près quelconque. Sans entraîner de difficulté essentielle, cette généralisation oblige à modifier la plupart des énoncés.

Dans [5] et [6], nous avons introduit les  $\sigma$ -fonctions, qui sont aux fonctions mesurables et de carrés sommables ce que les distributions de L. Schwartz sont aux fonctions sommables. Si, pour chaque  $t$  fixe,  $F(t, u)$  est une  $\sigma$ -fonction de  $u$ , le troisième membre de la formule (I.3.1) conserve un sens; mais, si ce noyau n'est pas une vraie fonction, la fonction aléatoire ainsi obtenue

n'est pas une fonctionnelle certaine de  $X_0(u)$ . Elle peut ne pas appartenir à la classe  $C_1$ . Pour l'étude de cette classe, nous devons nous borner au cas où, dans l'expression de  $\Phi_1(t)$  (n° I.2.2°), le noyau est une vraie fonction.

Enfin, dans [6], nous nous étions proposé de présenter un exposé purement analytique, et quelques brèves notes indiquaient seules l'interprétation probabiliste des principaux résultats. Ici, au contraire, nous nous plaçons au point de vue probabiliste.

2°. Dans le Chapitre III, après quelques remarques simples sur la notion de corrélation linéaire, et sur les fonctions à corrélation linéaire complète, nous étudions surtout les fonctions de la classe  $C$ . L'étude de  $\Phi_1(t)$  ayant fait l'objet du Chapitre II, nous aurons à considérer les fonctions  $\Phi_2(t)$  et  $\Phi_3(t)$ , et à étudier les problèmes posés par l'addition de ces trois fonctions. La notion de représentation canonique se généralisant tout naturellement, les problèmes les plus importants sont sans doute ceux relatifs à la caractérisation et aux conditions d'existence des représentations canoniques, et ceux relatifs aux conditions pour qu'une fonction de la classe  $C$  soit à corrélation linéaire.

Plusieurs des problèmes posés ne sont que partiellement résolus. Le présent travail n'est qu'une première esquisse d'une théorie qui semble mériter de nouvelles recherches. L'auteur serait heureux de voir d'autres chercheurs s'y intéresser.

## II. LE CAS LAPLACIEN

### II.1. Représentations propres, semi-propres, ou impropres

1°. Nous étudierons ici les fonctions de la forme

$$(II.1.1) \quad \Phi(t) = \int_0^t F(t, u) dX(u) \quad (t > 0),$$

où  $X(u)$  est une fonction aléatoire laplacienne, additive, et semi-réduite. Nous supposons  $X(0) = 0$ , et poserons

$$E\{X^2(u)\} = \omega(u),$$

de sorte que,  $X_0(u)$  étant la fonction de Wiener, on a

$$(II.1.2) \quad X(u) = X_0[\omega(u)], \quad \delta X(u) = \xi_u \sqrt{\delta \omega(u)} \quad (u, \delta u \geq 0).$$

La fonction non décroissante  $\omega(u)$  peut ne pas être continue, de sorte que  $\Phi(t)$  peut ne pas se réduire au terme  $\Phi_1(t)$  du n° I.3.2°, mais être de la forme  $\Phi_1(t) + \Phi_3(t)$ . Si  $\omega(u)$  est constant dans certains intervalles  $i_\nu$ , les valeurs du noyau  $F(t, u)$  pour  $u \in i_\nu$  sont absolument indifférentes. Pour la *partie utile* du demi-axe  $u \geq 0$ , c'est-à-dire dans l'ensemble fermé complémentaire de la réunion de ces intervalles  $i_\nu$ , les conditions à imposer au noyau résultent des formules évidentes

$$(II.1.3) \quad E\{\Phi^2(t)\} = \int_0^t F^2(t, u) \, d\omega(u),$$

$$(II.1.4) \quad E\{\Phi(t_1)\Phi(t_2)\} = \Gamma(t_1, t_2) = \int_0^{\min(t_1, t_2)} F(t_1, u) F(t_2, u) \, d\omega(u)$$

$$(II.1.5) \quad E\{\Phi(t_1)X(t_2)\} = \int_0^{\min(t_1, t_2)} F(t_1, u) \, d\omega(u).$$

Dans ces deux dernières formules,  $t = \text{Min}(t_1, t_2) \geq 0$ .

Un système de variables aléatoires laplaciennes semi-réduites étant bien défini par sa covariance, on voit que: pour que chaque  $\Phi(t)$  considéré isolément soit bien défini, il faut et il suffit que  $F^2(t, u) \, d\omega(u)$  soit sommable dans  $(0, t)$ ; le carré du noyau intervient seul, et son signe est indifférent. Pour qu'on puisse parler du système des deux fonctions aléatoires  $X(t)$  et  $\Phi(t)$ , il faut de plus que  $F(t, u)$ , considéré en dehors des  $i_v$  comme une fonction de  $\omega(u)$ , soit, pour chaque  $t$  fixe, une fonction mesurable de  $\omega(u)$ ; son signe n'est plus indifférent.

Mais ce qui nous importe surtout, c'est la définition intrinsèque de  $\Phi(t)$ . Pour que cette fonction aléatoire soit bien définie, il faut et il suffit que la covariance  $\Gamma(t_1, t_2)$  soit bien définie par la formule (II.1.4). La conclusion est alors intermédiaire entre les deux précédentes. On ne change rien en multipliant  $F(t, u)$  par un facteur  $\varepsilon(u)$ , mesurable ou non, toujours égal à  $\pm 1$ . Il n'y a d'ailleurs aucun intérêt à introduire des facteurs  $\varepsilon(u)$  non mesurables, et nous supposons toujours que  $F(t, u)$  soit, en dehors des  $i_v$ , une fonction mesurable de  $\omega(u)$ . Cela ne diminue pas la généralité des fonctions  $\Phi(t)$  représentées par la formule (II.1.1). Par contre la variation du noyau en fonction de  $t$  est absolument quelconque. Toute restriction restreindrait la classe des fonctions  $\Phi(t)$  considérées.

2°. Les variables  $\xi_u$  introduites dans l'expression (II.1.2) de  $\delta X(u)$  sont de deux sortes différentes. Aux points de discontinuité de  $\omega(u)$  correspondent des  $\xi_u$  *instantanés* qui interviennent avec des multiplicateurs finis dans l'expression de  $X(t)$ , pour  $t > u$ . Pour les autres points, un  $\xi_u$  isolé n'influe pas sur  $X(t)$ , et on ne peut parler que d'un  $\xi_u$  *moyen* relatif à un petit intervalle  $(u, u + du)$  (nous supposons toujours  $du > 0$ ). La notation  $\xi_u$  reste commode; mais la présence du paramètre continu  $u$  ne doit pas faire oublier que la fonction  $X(\cdot)$ , et par suite  $\Phi(\cdot)$ , ne dépendent jamais que d'une infinité dénombrable de paramètres aléatoires indépendants.

L'effet d'un  $\xi_u$  instantané sur  $\Phi(t)$  est nul ou non en même temps que  $F(t, u)$ . Dans le cas d'un  $\xi_u$  moyen, ou d'un  $\xi_u$  dont on ignore la nature, on ne peut considérer  $\xi_u$  comme *sans effet sur  $\Phi(t)$  jusqu'à l'instant  $T > u$*  que s'il existe un intervalle semi-ouvert  $[u, u')$  ( $u < u' \leq T$ ) qu'on puisse négliger dans le calcul de  $\Phi(t)$ , jusqu' à l'instant  $T$ , c'est-à-dire tel que, pour tout  $t \in [u, T)$ , on ait

$$(II.1.6) \quad \int_{u-0}^{\text{Min}(t, u')} F^2(t, v) \, d\omega(v) = 0.$$

Si d'ailleurs on convient que, pour  $v > t$ ,  $F(t, v) = 0$ , on peut prendre simplement  $[u, u')$  comme intervalle d'intégration. Tous les  $\xi_v$  d'indices  $v \in (u, u')$  seront alors aussi sans effet jusqu'à l'instant  $T$ .

Désignons par  $f(u)$  la borne supérieure des  $T$  tels que  $\xi_u$  soit sans effet jusqu'à l'instant  $T$ . Si  $f(u) = u$ ,  $\xi_u$  a un effet immédiat sur  $\Phi(t)$ . Si

$$u < f(u) < \infty,$$

$\xi_u$  a un effet différé. Si  $f(u) = \infty$ ,  $\xi_u$  est sans effet. Nous désignerons respectivement par  $E_0$ ,  $E_1$ ,  $E_2$  les ensembles des  $u \geq 0$  pour lesquels ces trois conditions sont réalisées. D'après la remarque qui vient d'être faite sur la condition (II.1.6),  $E_2$  et la réunion  $E_1 \cup E_2$  sont des réunions d'intervalles ouverts à droite.

La représentation de  $\Phi(t)$  par la formule (II.1.1) sera dite *propre* si  $E_1$  et  $E_2$  sont vides, c'est-à-dire si tout  $\xi_u$  d'indice  $u \geq 0$  a un effet immédiat. Elle sera *impropre* si  $E_1$  n'est pas vide. Enfin, dans le cas où  $E_1$  est vide, mais non  $E_2$ , elle sera dite *semi-propre*. Certains des  $\xi_u$  ont alors un effet immédiat; les autres sont définitivement sans effet [ils ne peuvent pas être tous sans effet si  $\Phi(t)$  est effectivement aléatoire].

3°. Les définitions qui précèdent ne font intervenir que le produit

$$F^2(t, u) d\omega(u),$$

et, si ce produit est identiquement nul quand  $u$  varie dans un intervalle  $(u', u'')$ , on n'a pas besoin de se demander lequel des facteurs est nul. La fonction  $\Phi(t)$  est la même dans tous les cas, et sa représentation la plus simple, en ce sens qu'elle n'introduit aucun élément inutile, s'obtient en annulant à la fois les deux facteurs.

Des conditions un peu différentes, qui obligent à distinguer les rôles des deux facteurs, se présentent si, considérant une fonction  $X(u)$  définie par la donnée de  $\omega(u)$ , on étudie l'ensemble des fonctions  $\Phi(t)$  déduites de cette fonction  $X(u)$ . Alors tous les ensembles  $E_2$  relatifs à ces fonctions  $\Phi(t)$  ont une partie commune  $E_2^1$ , qui est la réunion des intervalles  $i_v$ , dans chacun desquels  $\omega(u)$ , et par suite  $X(u)$ , sont constants. Le noyau intervient seulement dans la décomposition de l'ensemble complémentaire en trois sous-ensembles  $E_0$ ,  $E_1$ ,  $E_2''$ , tels que  $\xi_u$  soit à effet immédiat, à effet retardé, ou définitivement sans effet, suivant que  $u$  appartient à l'un ou l'autre de ces sous-ensembles. Nous dirons alors que le noyau  $F(t, u)$ , et la représentation (II.1.1) de  $\Phi(t)$ , sont *propres relativement à  $X(u)$*  [ou à  $\omega(u)$ ], si  $E_1$  et  $E_2''$  sont vides, *semi-propres* si  $E_1$  est vide, mais non  $E_2''$ , et *impropres* si  $E_1$  n'est pas vide. Si  $\omega(u)$  est constamment croissant, ces définitions coïncident avec celles données plus haut pour les représentations, et nous supprimerons l'indication de la fonction  $X(u)$  ou  $\omega(u)$ . Dans ces conditions, un noyau propre est aussi propre relativement à n'importe quelle fonction  $X(u)$ ; un noyau semi-propre peut rester semi-propre, ou devenir propre relativement à certaines fonctions  $X(u)$ .

## II.2. Classes de représentations équivalentes

1°. Une fonction de la forme (II.1.1) étant bien définie par sa covariance  $\Gamma(t_1, t_2)$ , cela revient au même de chercher toutes les représentations d'une fonction  $\Phi(t)$  par cette formule, ou toutes celles de  $\Gamma(t_1, t_2)$  par la formule (II.1.4). Ces représentations peuvent être groupées en *classes de représentations équivalentes*, deux représentations étant dites équivalentes si on peut passer de l'une à l'autre à l'aide des quatre opérations **a**, **b**, **c**, **d** que nous allons définir. Les deux premières sont triviales, et il nous arrivera de ne même pas considérer comme distinctes deux représentations déduites l'une de l'autre par ces seules opérations, qui laissent invariant chaque élément des intégrales (II.1.3) et (II.1.4). Les opérations **c** et **d** impliquent au contraire un changement dans l'aspect des représentations considérées.

2°. *L'opération a.* Elle consiste à changer un des facteurs  $F(t, u)$  et  $d\omega(u)$  quand l'autre est nul. Si par exemple  $\omega(u)$  est donné d'abord, on peut, pour chaque valeur de  $t$ , choisir un ensemble  $e_t$  sur lequel l'intégrale de  $\omega(u)$  soit nulle (ensemble de  $\omega$ -mesure nulle), et changer  $F(t, u)$  quand  $u \in e_t$ .

En principe, nous supposons que cette opération a été utilisée pour annuler à la fois  $F(t, u)$  et  $d\omega(u)$  dans tout intervalle  $(u', u'')$  où un des facteurs est constamment nul. Alors l'ensemble  $E_2''$  sera vide. On peut donc, sans restreindre la classe des fonctions  $\Phi(t)$  considérées, ne considérer que des noyaux propres ou impropres par rapport à la fonction  $X(u)$  à laquelle ils sont associés.

On peut aussi utiliser l'opération **a** pour supprimer certaines discontinuités du noyau.

*L'opération b.* C'est le remplacement simultané de  $F(t, u)$  par

$$F_1(t, u) = F(t, u)/\varphi[\omega(u)]$$

et de  $dX(u)$  par  $dX_1(u) = \varphi[\omega(u)] dX(u)$ , donc de  $d\omega(u)$  par

$$d\omega_1(u) = \varphi^2[\omega(u)] d\omega(u),$$

la fonction  $\varphi(\omega)$  étant mesurable et de carré sommable dans tout intervalle fini. Si d'ailleurs  $\varphi(\omega) = \varepsilon(\omega) = \pm 1$ , cette opération est sans effet sur  $\omega(u)$ , et on retrouve une remarque déjà faite sur le signe du noyau.

Si la fonction  $\omega(u)$  est toujours croissante et absolument continue, on peut ainsi remplacer  $\omega(u)$  par  $\omega_0(u) = u$ , c'est-à-dire ramener la fonction  $\Phi(t)$  à la forme (I.3.1). Mais dans le cas général, cela n'est possible qu'en introduisant des  $\sigma$ -fonctions. Si les noyaux sont des vraies fonctions, la formule (II.1.1), même si la fonction  $\omega(u)$  est supposée continue, est plus générale que la formule (I.3.1).

3°. *L'opération c.* C'est un changement de variable, substituant à  $u$ , dans l'intégrale (II.1.1), une nouvelle variable  $v = g(u)$ . Si on veut transformer ainsi une représentation propre, il faut que l'on ait toujours  $v \leq u$ . Mais, dans le cas d'une représentation impropre, cette condition n'est pas nécessaire. En supposant  $\omega(u)$  donné d'avance, nous pouvons considérer

n'importe quelle correspondance biunivoque entre un ensemble  $E'$  de valeurs de  $u$  et un ensemble  $E''$  de valeurs de  $v$  qui vérifie les deux conditions suivantes: si  $u$  est borné,  $v$  l'est aussi, et inversement; la partie de  $E''$  intérieure à  $(0, v)$  est, pour tout  $v > 0$ , la transformée d'un ensemble ayant une  $\omega$ -mesure  $\omega_1(v)$  bien définie. Il en résulte une opération  $\mathbf{c}$  applicable à l'intégrale (II.1.1) si  $F(t, u)$  est nul sauf si on a à la fois  $u \in E'$  et  $t > \text{Max}(u, v)$ . Cette intégrale prend alors la forme

$$(II.2.1) \quad \int_0^t F_1(t, v) \eta_v \sqrt{d\omega_1(v)} = \int_0^t F_1(t, v) dX_1(v),$$

le nouveau noyau n'étant de même différent de zéro que si on a à la fois  $v \in E''$  et  $t > \text{Max}(u, v)$ ; les  $\eta_v$  sont toujours des variables laplaciennes réduites.

Si, en partant d'une représentation impropre, on peut obtenir ainsi une représentation propre ou semi-propre, c'est évidemment en prenant pour  $E'$  la réunion de  $E_0$  et  $E_1$ , et en prenant pour  $v$  la fonction  $f(u)$  du n° II.1.2° [c'est-à-dire l'instant où  $\xi_u$  commence à agir sur  $\Phi(t)$ ]. Si  $\omega(u)$  est continu et que tous les  $v$  ainsi obtenus soient distincts, on obtient une représentation propre ou semi-propre, et, aux opérations  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  près, c'est la seule qu'on puisse obtenir par un changement de variable  $v = g(u)$ .

4°. *L'opération d.* C'est une extension de l'opération  $\mathbf{c}$ , reposant sur la remarque qu'une variable  $\xi$  peut être remplacée par une somme  $\sum c_\nu \xi_\nu$  de termes indépendants, ou même par une intégrale, et que, à condition que leurs coefficients soient proportionnels, on peut inversement réunir plusieurs termes, ou même une infinité, en un seul. Cette opération peut alors être associée à une relation non biunivoque entre l'ancienne variable  $u$  et la nouvelle variable  $v$ ; il peut même arriver à la fois qu'à certains  $u$  correspondent plusieurs  $v$  (ou même un intervalle), et que l'inverse ait lieu aussi.

Le caractère commun à toutes les opérations effectuées en application de cette remarque est qu'on ne peut réunir ou séparer que des éléments ayant des multiplicateurs  $F(t, u_\nu)$  qui cessent en même temps d'être nuls, pour  $t = f(u_\nu)$ , et ensuite varient proportionnellement. Deux représentations équivalentes correspondent donc à un même ensemble de fonctions de  $t$  (du moins à des facteurs constants près) obtenues en fixant  $u$  (ou  $v$ ).

Parmi ces représentations, il y a au plus une représentation propre ou semi-propre, et on l'obtient, s'il y en a une, en attribuant le nouvel indice  $v$  à tous les éléments  $\xi_u$  pour lesquels  $f(u) = v$ . La condition nécessaire et suffisante pour que la classe de représentations considérées comporte une représentation propre ou semi-propre est donc que, pour chaque  $v$ , d'une part les  $\eta_\nu$  instantanés qu'il faudrait réunir à cet instant, d'autre part les  $\eta_\nu$  moyens relatifs à l'intervalle élémentaire  $(v, v + dv)$ , aient des coefficients proportionnels et puissent être réunis. Il n'en est évidemment pas toujours ainsi.

Une autre remarque importante relative à l'opération  $\mathbf{d}$  est qu'une fonction  $\Phi(t)$  dont l'expression fait apparaître des  $\xi_u$  instantanés relatifs à des instants  $u > 0$  peut, par la décomposition de ces  $\xi_u$ , être ramenée à une expression

de la même forme (II.1.1) dans laquelle figurera une fonction  $X(u)$  presque sûrement continue. La condition que  $\omega(u)$  soit continu, sauf peut être à l'origine du processus, ne restreint donc pas la classe des fonctions représentables par la formule (II.1.1). Naturellement les représentations ainsi obtenues en étalant un  $\xi_u$  instantané sur un intervalle fini ne seront jamais propres ni semi-propres. Supposer à la fois que  $\omega(u)$  soit continu et que la représentation soit propre ou semi-propre, restreint essentiellement la classe des fonctions  $\Phi(t)$  considérées.

5°. THÉORÈME II.2. *Sous la seule condition que  $\omega(t)$  soit continu à l'origine, la fonction  $\Phi(t)$  représentée par la formule (II.1.1) peut aussi être représentée par la formule (I.3.1).*

Nous venons de voir en effet qu'on peut d'abord, par l'opération **d**, obtenir une représentation de la même forme (II.1.1) pour laquelle  $\omega(u)$  est continu pour tout  $u \geq 0$ . Faisons ensuite un nouveau changement de variable  $v = h[\omega(u)]$ , la fonction  $h(\omega)$  étant croissante, absolument continue et s'annulant avec  $\omega$ . L'élément différentiel  $dX(u) = \xi_u \sqrt{d\omega(u)}$  prend alors la forme  $\eta_v \varphi(v) \sqrt{dv}$ ,  $\Phi(t)$  prend la forme

$$\int_0^{h[\omega(t)]} F_1(t, v) \eta_v \sqrt{dv},$$

et il suffit qu'on choisisse la fonction  $h(\omega)$  de manière que  $h[\omega(t)] \leq t$  (pour tout  $t > 0$ ), ce qui est toujours possible, pour avoir ainsi une représentation de la forme (I.3.1).

Ce théorème ne rend pas inutile l'étude de la forme générale (II.1.1).

Il vaut mieux représenter une fonction  $\Phi(t)$  par une représentation propre ou semi-propre de cette forme que par une représentation impropre de la forme (I.3.1). Ses propriétés sont mieux mises en évidence.

### II.3. Possibilité de l'existence de plusieurs classes. Classes généralisées

1°. Pour montrer qu'il peut y avoir plusieurs classes de représentations d'une même fonction  $\Phi(t)$ , il suffit de montrer qu'il peut y avoir plusieurs représentations propres. Nous avons déjà à plusieurs reprises, dans nos travaux antérieurs, indiqué l'exemple de la fonction

$$(II.3.1) \quad \Phi(t) = \int_0^t [u + k(t - u)] \xi_u \sqrt{du}.$$

Le calcul de la covariance montre immédiatement que deux valeurs  $k_1$  et  $k_2$  de  $k$  liées par la relation  $k_1 + k_2 + 1 = 0$  correspondent à deux représentations différentes de la même fonction.

Nous allons montrer maintenant qu'une fonction aussi simple que la fonction  $\Phi(t) = X_0(t)$  admet des représentations propres de la forme (I.3.1.), à

noyau continu, sauf à l'origine, et qui dépendent d'un nombre arbitrairement grand de paramètres arbitraires. Elles sont de la forme

$$(II.3.2) \quad \Phi(t) = \int_0^t \left[ c_0 + \sum_1^n c_h \left( \frac{u}{t} \right)^{\alpha_h} \right] \xi_u \sqrt{du},$$

les  $\alpha_h$  étant  $> -\frac{1}{2}$  et tous différents les uns des autres, et de zéro.

Si  $n = 0$ ,  $c_0 = \pm 1$  donne la représentation habituelle de  $X_0(t)$ . Pour  $n = 1$ , en identifiant la covariance  $\Gamma(t_1, t_2)$  de  $\Phi(t)$  à celle de  $X_0(t)$ , qui est  $t = \text{Min}(t_1, t_2)$ , et en écartant la solution  $c_1 = 0$ ,  $c_0 = \pm 1$ , on trouve

$$c_0 = \varepsilon \frac{\alpha + 1}{\alpha}, \quad c_1 = -\varepsilon \frac{2\alpha + 1}{\alpha} \quad (\varepsilon = \pm 1),$$

de sorte que  $X_0(t)$  peut être représenté par la formule

$$(II.3.3) \quad X_0(t) = \int_0^t \left( \frac{\alpha + 1}{\alpha} - \frac{2\alpha + 1}{\alpha} \frac{u^\alpha}{t^\alpha} \right) \xi_u \sqrt{du} \quad (\alpha > -\frac{1}{2})^6.$$

Dans le cas général, en écartant les solutions qui annulent certains  $c_h$  (déjà obtenues pour des valeurs plus petites de  $n$ ), on trouve un système de  $n$  équations linéaires et homogènes,

$$(II.3.4) \quad \frac{c_0}{\alpha_h + 1} + \sum_1^n \frac{c_k}{\alpha_h + \alpha_k + 1} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

à déterminant non nul (sauf pour des systèmes exceptionnels de valeurs des  $\alpha_h$ ), qui définit tous les  $c_p$  en fonction de  $c_0$ , et une équation qui, compte tenu des autres, définit  $c_0^2$ . On a donc bien des représentations de  $X_0(t)$ , évidemment propres, et qui dépendent des  $n$  paramètres  $\alpha_h$ .

2°. Lorsque deux représentations d'une même fonction  $\Phi(t)$  n'appartiennent pas à une même classe, au sens du n° II.2, on peut se demander s'il n'est pas possible de les ramener l'une à l'autre par des opérations autres que celles définies à cet endroit. Nous allons voir qu'en effet cela est parfois possible, et que l'introduction d'une nouvelle opération  $e$  permet de définir des classes plus générales de représentations.

Revenons à cet effet à ce que nous avons dit à propos de la recherche d'une représentation propre, qui s'effectue en remplaçant chaque indice d'une variable  $\xi_u$  par le nouvel indice  $f(u)$ . Cette opération peut conduire à attribuer le même indice à plusieurs variables différentes, de sorte qu'on peut, par exemple, obtenir une expression de la forme

$$(II.3.5) \quad \Phi(t) = \int_0^t [F_1(t, u)\xi_u + F_2(t, u)\xi'_u] \sqrt{du}.$$

<sup>6</sup> Des conséquences de cette formule seront développées dans le travail déjà mentionné (note <sup>5</sup>). Disons seulement qu'elle permet d'obtenir des représentations propres pour des fonctions qui à première vue ne semblaient pas en admettre.

Nous avons déjà observé que, si le rapport des deux noyaux est indépendant de  $t$ , c'est-à-dire si  $F_1(t, u) = F(t, u) \varphi_1(u)$  et  $F_2(t, u) = F(t, u) \varphi_2(u)$ , on peut remplacer  $\varphi_1(u) \xi_u + \varphi_2(u) \xi'_u$  par un terme unique  $\varphi(u) \eta_u$ , et obtenir ainsi une représentation propre ou semi-propre de  $\Phi(t)$ . C'est le cas le plus simple de l'opération **d**. Supposons maintenant que  $F_1(t, u)$  et  $F_2(t, u)$  soient seulement proportionnels dans un intervalle fini  $(u, u')$ ,  $u'$  étant une fonction de  $u$ . Comme  $\xi_u$  et  $\xi'_u$  sont des fonctions linéaires certaines des variables indépendantes  $\eta_u$  et

$$\eta'_u = \frac{\varphi_1(u)\xi'_u - \varphi_2(u)\xi_u}{\varphi(u)},$$

$\Phi(t)$  prend la forme

$$\int_0^t [F(t, u)\varphi(u)\eta_u + G(t, u)\eta'_u] \sqrt{du},$$

$G(t, u)$  étant nul si  $t < u'$ . Il peut alors arriver que, pour  $t > u'$ ,  $F(t, u)$  et  $G(t, u)$  varient proportionnellement, ce qui permettrait de réunir les deux termes en un seul et d'avoir une représentation propre ou semi-propre de  $\Phi(t)$ .

Telle est, dans un cas très simple, l'opération que nous désignerons par **e**. D'une manière générale, elle peut comprendre la décomposition de chaque  $\xi_u$  en un nombre fini ou infini de termes indépendants, celle du noyau en un nombre fini ou infini de termes, un changement de variable qui peut ne pas être le même pour les différents termes ainsi distingués, et enfin, s'il est devenu possible, le regroupement des termes correspondant à une même valeur de la nouvelle variable. Tandis qu'au n° II.2 chaque élément conservait son multiplicateur, ici la décomposition du noyau en plusieurs termes peut faire apparaître de nouvelles fonctions de  $t$ .

3°. Naturellement, à l'aide des cinq opérations maintenant définies, on peut définir des classes d'équivalence plus générales que celles du n° II.2. Indiquons brièvement pourquoi nous avons préféré la définition du n° II.2.

D'abord, si on entreprend de définir des classes généralisées, il est difficile de s'arrêter dans cette généralisation, et on est conduit à dire que deux représentations sont *équivalentes au sens large*, ou appartiennent à une même *classe généralisée*, si elles représentent une même fonction aléatoire, c'est-à-dire si elles correspondent à une même covariance. Or il n'est pas facile de déduire de cette équivalence au sens large une opération analogue à celles du n° II.2 qui puisse dans tous les cas conduire de l'une à l'autre, et qui par suite permette dans tous les cas d'obtenir toutes les représentations équivalentes à l'une d'elles.

D'une manière générale, si les notations  $\xi_u$  et  $\xi'_u$  représentent respectivement les variables réduites qui figurent dans les deux représentations considérées, il peut arriver que la donnée des  $\xi_u$  soit équivalente à celle des  $\xi'_u$ ,

ou qu'elle ne le soit pas. Ce dernier cas se produit dans l'exemple indiqué au début du n° II.3.1°, si on se place dans un intervalle fini  $(0, T)$ ; le premier au contraire est réalisé pour  $T$  infini. Dans les deux cas, on peut représenter l'ensemble des  $\xi_u$  et des  $\xi'_u$  dans un espace de Hilbert convenable, et dire qu'il s'agit d'un changement de coordonnées dans cet espace. Mais cette formule peu précise ne résout rien; il faudrait, étant donnée la représentation de  $\Phi(t)$  à l'aide des  $\xi_u$ , chercher tous les systèmes de variables  $\xi'_u$  tels qu'il soit possible de les introduire successivement dans l'expression des valeurs successives de  $\Phi(t)$ , de manière à obtenir une représentation de la forme (II.1.1.).

Ainsi le problème qui consiste à déduire d'une formule du type (II.1.1), ou (I.3.1), toutes les représentations possibles de la même fonction  $\Phi(t)$  par la même formule, n'est pas résolu par l'opération **e** et ne semble pas près d'être résolu. Dans la définition de classes d'équivalence de plus en plus générales, l'introduction de l'opération **e** semble d'autant moins marquer une étape importante qu'elle repose sur une propriété particulière de la loi de Laplace, et ne peut pas s'étendre aux fonctions non laplaciennes de la classe  $C$ . Au contraire, en nous bornant aux quatre opérations du n° II.2 (ou même, si on préfère, aux opérations **c** et **d**, les autres ne changeant rien d'essentiel), nous avons défini des classes qui contiennent chacune au plus une représentation propre, circonstance qui ne subsiste pas pour des classes généralisées. C'est la dernière des raisons qui nous ont fait préférer les définitions du n° II.2.

#### II.4. Représentations canoniques

1°. Dans la formule

$$(II.4.1) \quad \Phi(t') = \int_0^t F(t', u) dX(u) + \int_t^{t'} F(t', u) dX(u) \quad (0 < t < t'),$$

le premier terme est toujours la valeur probable conditionnelle de  $\Phi(t')$  quand  $X(u)$  est connu dans  $(0, t)$ . Si, quels que soient  $t \in (0, T)$  et  $t' \in (t, T)$ , il est aussi la valeur probable conditionnelle de  $\Phi(t')$  quand  $\Phi(u)$  est connu dans  $(0, T)$ , nous dirons que la représentation (II.1.1) de  $\Phi(t)$  est *canonique* dans  $(0, T)$ . Nous dirons qu'elle est *canonique* si elle est canonique dans  $(0, \infty)$ .

Aux opérations **a** et **b** près, la représentation canonique est unique. En effet, pour une telle représentation, le premier terme de l'expression (II.4.1) a une définition intrinsèque, indépendante de la représentation considérée, et est connu quand  $\Phi(u)$  est connu dans  $(0, t')$ . Il en est donc de même de sa variation  $F(t', t)dX(t)$  (pour  $t'$  fixe et  $t$  variable), ce qui définit le noyau et la fonction  $X(t)$ , aux opérations **a** et **b** près.

On peut aussi définir le caractère canonique par la condition que la donnée de  $\Phi(u)$  dans  $(0, t)$  soit exactement équivalente à la donnée des  $\xi_u$  dans la partie de cet intervalle qui n'appartient pas à  $E_2$ . En effet cette dernière donnée définit toujours la partie utile de la variation de  $X(u)$ , jusqu'à l'ins-

tant  $t$ , et par suite les valeurs de la fonction  $\Phi$  jusqu'à cet instant. Inversement, pour une représentation canonique, la donnée de la fonction  $\Phi$  jusqu'à l'instant  $t$  entraîne, comme nous venons de le voir, la connaissance de

$$F(t', u) dX(u)$$

pour  $u < t$  et  $t'$  quelconque, donc de tous les  $\xi_u$  relatifs à l'intervalle  $(0, t)$  et ayant un multiplicateur non identiquement nul.

*Une condition nécessaire pour que la représentation de  $\Phi(t)$  soit canonique est que l'ensemble  $E_1$  soit vide.* Dans le cas contraire, en effet, on peut déterminer  $u, t, t'$  de manière que  $u < t < f(u) \leq t', \Phi(t')$  dépendant effectivement de  $\xi_u$ . Le premier terme de l'expression (II.4.1) en dépend donc, et il ne peut pas être une fonction linéaire certaine des valeurs de la fonction  $\Phi$  dans  $(0, t)$ , qui n'en dépendent pas, puisque  $t < f(u)$ . La représentation n'est donc pas canonique.

*Il n'y a donc pas de représentation canonique impropre: une représentation canonique est, soit propre, soit semi-propre.* Dans ce dernier cas,  $E_2$  est composé d'intervalles où il ne se passe rien de nouveau, c'est à dire que les valeurs de la fonction  $\Phi(t)$  dans un tel intervalle  $(u', u'')$  sont des fonctions linéaires certaines de ses valeurs dans  $(0, u')$ . On peut supprimer ces intervalles sans rien changer d'essentiel; on risque seulement, sur tout ou partie de l'axe des  $t$ , de remplacer une fonction de  $t$  par une fonction d'un élément d'un ensemble dénombrable.

On démontre aisément qu'une fonction définie par une représentation impropre de la forme (II.1.1) n'admet pas toujours de représentation canonique. Nous verrons au n° II.4.5° qu'il peut en être de même d'une fonction définie par une représentation propre.

2°. Nous dirons que le noyau  $F(t, u)$  est canonique *relativement à la fonction*  $X(u)$  si la représentation (II.1.1) de  $\Phi(t)$  est canonique. Nous allons donner la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi. Comme il n'y a pas de représentation canonique impropre, et qu'une représentation semi-propre peut, par l'opération **a** qui est sans effet sur le caractère canonique, être rendue propre relativement à une nouvelle fonction  $X(u)$ , le problème est résolu par le théorème suivant:

**THÉORÈME II.4.** *Pour qu'un noyau  $F(t, u)$  propre relativement à  $X(u)$  soit canonique dans  $(0, T)$  relativement à cette fonction, il faut et il suffit que l'équation de Volterra-Stieltjes*

$$(II.4.2) \quad \int_0^t F(t, u) dx(u) = 0 \quad (0 < t < T)$$

*n'ait aucune solution non constante dans  $(0, T)$  et telle que, pour tout  $T$  positif, on ait*

$$(II.4.3) \quad \int_0^T \frac{dx^2(u)}{d\omega(u)} < \infty .$$

Précisons d'abord la signification de la condition (II.4.3). Elle implique avant tout que, dans tout intervalle où  $\omega(u)$  est constant,  $x(u)$  soit aussi constant. On peut alors considérer  $x(u)$  comme une fonction  $h[\omega(u)]$  de  $\omega(u)$ , cette fonction  $h(\omega)$  étant indéterminée dans tout intervalle

$$[\omega(u_\nu - 0), \omega(u_\nu + 0)]$$

qui correspond à un point de discontinuité  $u_\nu$  de  $\omega(u)$ . On rend l'intégrale (II.4.3) minima en supposant, pour chaque point  $u_\nu$ , que  $h(\omega)$  varie linéairement de  $x(u_\nu - 0)$  à  $x(u_\nu + 0)$  quand  $\omega$  varie de  $\omega(u_\nu - 0)$  à  $\omega(u_\nu + 0)$ . Cela fait, la condition (II.4.3) exprime que  $h(\omega)$  est une fonction absolument continue, dont la dérivée est de carré sommable dans  $[0, \omega(T)]$ .

La démonstration du théorème énoncé repose sur la représentation des variables laplaciennes dans l'espace de Hilbert. On sait que chaque variable laplacienne semi-réduite  $X_h$  peut être représentée dans cet espace  $\Omega$  par un point  $A_h$ , ou par le vecteur  $\overline{OA}_h$  issu de l'origine, de manière que la covariance  $E(X_h X_k)$  soit égale au produit intérieur  $\overline{OA}_h \cdot \overline{OA}_k$ . Cela revient au même de définir un système de variables  $X_h$ , ou de définir la forme de la figure formée par  $O$  et les points  $A_h$ .

Désignons par  $A(t)$  et  $B(t)$  les points de  $\Omega$  qui représentent ainsi les variables aléatoires  $X(t)$  et  $\Phi(t)$ , par  $L_{T,X}$  et  $L_{T,\Phi}$  les lieux de ces points quand  $t$  varie de zéro à  $T$ , et par  $\Omega_{T,X}$  et  $\Omega_{T,\Phi}$  les plus petites variétés linéaires contenant respectivement ces deux lieux. Les remarques du n° II.4.1° se traduisent géométriquement dans les termes suivants:  $\Omega_{T,\Phi}$  est toujours contenu dans  $\Omega_{T,X}$ ; la réciproque est vraie si et seulement si le noyau  $F(t, u)$  est à la fois propre et canonique relativement à  $X(u)$ . Dans ce cas,  $\Omega_{T,X}$  et  $\Omega_{T,\Phi}$  coïncident exactement.

Pour démontrer le théorème II.4, il suffit donc de démontrer que: *pour que  $\Omega_{T,X}$  soit contenu dans  $\Omega_{T,\Phi}$  (et coïncide par suite avec  $\Omega_{T,\Phi}$ ), il faut et il suffit qu'il n'existe aucune fonction  $x(u)$ , non constante dans  $(0, T)$ , et qui vérifie à la fois les conditions (II.4.2) et (II.4.3).*

La démonstration résulte immédiatement du lemme suivant.

LEMME II.4. *Pour qu'une fonction  $x(u)$ , définie dans  $(0, T)$ , puisse être considérée comme le produit scalaire de  $\overline{OA}(u)$  et d'un vecteur unitaire convenablement choisi dans  $(0, T)$ , il faut et il suffit que*

$$(II.4.4) \quad \int_0^T \frac{dx^2(u)}{d\omega(u)} = 1.$$

Ce lemme a été démontré dans [6], dans le cas où  $\omega(u) = u$ , donc

$$X(u) = X_0(u).$$

On peut passer de là au cas général en remplaçant  $X_0(u)$  par  $X_0[\omega(u)] = X(u)$ . On peut aussi traiter directement le cas général. Rappelons seulement que la démonstration repose sur le fait que les rapports  $dx(u)/\sqrt{d\omega(u)}$  sont les

cosinus des angles que le vecteur unitaire considéré fait avec les directions deux à deux rectangulaires  $A(u)A(u + du)$ .

La démonstration du théorème II.4 est maintenant immédiate.

Supposons d'abord que  $\Omega_{T,x}$  ne soit pas contenu dans  $\Omega_{T,\Phi}$ , c'est à dire qu'il y ait dans  $\Omega_{T,x}$  au moins une droite  $D$  passant par  $O$  et perpendiculaire à  $\Omega_{T,\Phi}$ . Désignons par  $x(u)$  l'abscisse, comptée à partir de  $O$ , de la projection du point  $A(u)$  sur cette droite. Cette fonction, d'après le lemme II.4, vérifie la condition (II.4.4), donc aussi (II.4.3). D'autre part, d'après la définition de la droite  $D$ , quand  $t$  varie de  $0$  à  $T$ ,  $OB(t)$  est constamment perpendiculaire à cette droite, c'est à dire que l'équation (II.4.2) est aussi vérifiée.

Inversement, supposons les conditions (II.4.2) et (II.4.3) vérifiées par une fonction  $x_1(u)$  non constante, donc par la fonction  $x_2(u) = x_1(u) - x_1(0)$  qui s'annule à l'origine, et pour toutes les fonctions  $x(u) = cx_2(u)$ . Si nous choisissons  $c$  de manière que la condition (II.4.4) soit vérifiée, il existe, d'après le lemme II.4, une droite  $D$  contenue dans  $\Omega_{T,x}$  et telle que  $x(u)$  mesure la projection de  $OA(u)$ . La condition (II.4.2) exprime alors que, pour  $t \in (0, T)$ ,  $OB(t)$  est constamment perpendiculaire à  $D$ . Donc  $\Omega_{T,\Phi}$  l'est aussi, et n'est qu'une partie de  $\Omega_{T,x}$ , ce qui termine la démonstration du théorème II.4.

3°. *Cas du noyau régulier et non nul à l'origine.* Nous dirons que le noyau  $F(t, u)$  est régulier s'il est continu ainsi que ses dérivées  $\partial F(t, u)/\partial t = f(t, u)$  et  $\partial F(t, u)/\partial u = g(t, u)$ <sup>7</sup>. Si de plus  $F(0, 0) \neq 0$ , il existe alors un intervalle  $(0, T)$ , fini ou infini, où  $F(t, t) \neq 0$ . L'équation (II.4.2), en supposant  $x(0) = 0$ , s'écrit

$$(II.4.5) \quad F(t, t)x(t) - \int_0^t g(t, u)x(u) du = 0.$$

C'est une équation de Volterra sans second membre, qui n'admet aucune solution non identiquement nulle dans  $(0, T)$ . Donc: *si le noyau  $F(t, u)$  est régulier et si  $F(t, t)$  n'est jamais nul pour  $0 \leq t < T$ , la représentation (II.1.1) de  $\Phi(t)$  est canonique, et cela quelle que soit la fonction aléatoire  $X(u)$ .*

Si d'ailleurs  $F(t, u)$  et  $f(t, u)$  sont continus, on a, pour  $dt > 0$ ,

$$(II.4.6) \quad \delta\Phi(t) = dt \int_0^t f(t, u) dX(u) + F(t, t)\delta X(t),$$

$$(II.4.7) \quad F^2(t, t)\delta\omega(t) = E\{[\delta\Phi(t)]^2\} + O(dt^2).$$

Cette dernière formule donne une définition intrinsèque de l'intégrale

$$\int_0^t F^2(u, u) d\omega(u).$$

---

<sup>7</sup> Cette définition n'est pas la même que dans [6], où nous n'avons considéré le noyau comme régulier que si de plus  $F(t, t)$  est différent de zéro, au moins pour  $t = 0$ , donc dans un intervalle  $(0, T)$ .

En nous bornant pour simplifier aux représentations du type (I.3.1), pour lesquelles  $\omega(u) = u$ , nous voyons que, pour toutes les représentations de cette forme et à noyaux réguliers d'une même fonction aléatoire,  $F^2(t, t)$  a la même valeur, et, si cette valeur ne s'annule pas pour  $t < T$ , elles sont canoniques dans  $(0, T)$ . De l'unicité de la représentation canonique résulte alors que: *si, dans l'expression (I.3.1) de  $\Phi(t)$ , le noyau est régulier, et si  $F(t, t) \neq 0$  pour  $0 \leq t < T$ ,  $\Phi(t)$  n'a pas d'autre représentation de la même forme à noyau continu et ayant par rapport à  $t$  une dérivée continue, à cela près qu'on peut remplacer  $F(t, u)$  par  $-F(t, u)$ .*

Remarquons à ce sujet que, si  $F(t, t) = 0$  (identiquement), l'opération  $\mathbf{c}$  conduit à une infinité d'autres noyaux continus. Mais, pour un noyau continu, si  $F(t, t)$  n'est pas nul, elle ne peut que conduire à un nouveau noyau discontinu.

4°. *Exemple de noyau continu et nul à l'origine.* Considérons, associé à la fonction  $X_0(u)$ , le noyau

$$(II.4.8) \quad F(t, u) = \sum_0^n \alpha_h u^{\alpha_h} t^{p-\alpha_h} \quad (0 \leq \alpha_h \leq p).$$

La fonction  $\Phi(t)$  qu'il définit est, au facteur  $t^p$  près, de la forme (II.3.2). La covariance est de la forme

$$(II.4.9) \quad \Gamma(t_1, t_2) = \sum_0^n c_h t^{p+1+\alpha_h} t'^{p-\alpha_h}$$

$$[t = \text{Min}(t_1, t_2), t' = \text{Max}(t_1, t_2)],$$

et on déduit aisément des expressions des  $c_h$  en fonction des  $\alpha_h$  qu'à chaque noyau  $\pm F(t, u)$  correspondent un nombre impair d'autres noyaux  $\pm F_\nu(t, u)$  qui représentent la même fonction aléatoire, donc, en général, au moins un distinct du noyau donné. On est donc assuré a priori que ce noyau n'est pas toujours canonique.

Appliquons le théorème (II.4). L'équation (II.4.2) formée avec le noyau (II.4.8) s'intègre comme l'équation différentielle du type d'Euler auquel elle se ramène aisément si les  $\alpha_h$  sont entiers. On cherche des solutions de la forme  $x(u) = u^s$ , et on obtient l'équation en  $s$

$$(II.4.10) \quad \sum_0^n \frac{\alpha_h}{\alpha_h + s} = 0.$$

La solution générale de l'équation (II.4.2) est alors une combinaison linéaire des fonctions  $u^s$  obtenues en prenant pour  $s$  les racines de l'équation (II.4.10), ou, s'il y a des racines multiples, ces fonctions multipliées par les puissances de  $\log u$ . S'il y a des couples de racines imaginaires  $s = \sigma \pm i\tau$ , les fonctions  $u^s$  qui leur correspondent doivent être remplacées par  $u^\sigma \cos(\tau \log u)$  et  $u^\sigma \sin(\tau \log u)$ . Or la condition (II.4.3), pour toutes ces fonctions, est vérifiée si la partie réelle de  $s$  est  $> \frac{1}{2}$ , et seulement dans ce cas. Il résulte alors immédiatement du théorème II.4 que: *la condition nécessaire et suffisante pour que le noyau (II.4.8) soit canonique relativement à  $X_0(u)$  est que l'équation (II.4.10) n'ait aucune racine à partie réelle  $> \frac{1}{2}$ .*

5°. De l'exemple précédent résulte une conséquence importante relative aux noyaux non canoniques. On peut choisir les coefficients  $\alpha_k$  de manière à identifier l'équation (II.4.10) à n'importe quelle équation algébrique de degré  $n$ . On peut donc s'arranger pour qu'elle ait un nombre arbitrairement grand  $q$  de racines  $s_k$  à parties réelles  $> \frac{1}{2}$ . Il y a alors  $q$  fonctions  $x_k(u)$ , linéairement indépendantes, qui vérifient à la fois les conditions (II.4.2) et (II.4.3).

Qu'il s'agisse ou non de l'exemple considéré, cela signifie qu'on peut, dans  $\Omega_{\tau, x_0}$ , définir une variété linéaire à  $q$  dimensions orthogonale à  $\Omega_{\tau, \Phi}$ . Cela veut dire que,  $\Phi(t)$  étant donné dans  $(0, T)$ ,  $X_0(t)$  n'est pas dans cet intervalle une fonction linéaire certaine des valeurs de  $\Phi(t)$ , mais seulement de ces valeurs et de  $q$  autres variables laplaciennes, entre lesquelles n'existe aucune relation certaine, de sorte que, même si elles ne sont pas indépendantes, n'importe quel système de valeurs numériques est possible. Si donc  $X_0^*(t)$  est une détermination possible de  $X_0(t)$ , quand  $\Phi(t)$  est donné dans  $(0, t)$ , la formule

$$X_0(t) = X_0^*(t) + \sum^q c_k x_k(t)$$

définit d'autres déterminations possibles. Les variables  $c_k$  ne sont pas connues, mais forment un système laplacien (elles seront naturellement de mieux en mieux connues quand  $T$  augmente, et peuvent cesser, pour  $T$  infini, d'être aléatoires).

Revenant à l'exemple considéré au 4°, supposons que tous les  $\alpha_k$  soient compris entre  $\frac{1}{2}$  et 1, et considérons la fonction

$$\Psi(t) = \int_0^t \Phi(\tau) d\tau + X_1(t - 1),$$

où  $X_1(u)$  représente 0 si  $u \leq 0$  et  $X_0(u)$  si  $u > 0$ . On peut aussi écrire

$$\Psi(t) = \int_0^{t_0} \left[ 1 + \int_u^t F(\tau, u) d\tau \right] \xi_u \sqrt{du} + \int_{t_0}^t \xi_u \sqrt{du}$$

$$[t_0 = \text{Max}(0, t - 1)].$$

La représentation de cette fonction  $\Psi(t)$  est propre. Nous avons ainsi l'exemple annoncé de fonction définie par une représentation propre, et qui n'admet aucune représentation canonique. En effet, si  $\Phi(t)$  est connu dans  $(0, 1)$ ,  $X_0(u)$  apparaît comme défini dans cet intervalle par une formule de la forme

$$X_0(u) = X_0^*(u) + \sum^q c_k u^{\alpha_k},$$

tous les  $\alpha_k$  étant compris entre  $\frac{1}{2}$  et 1. Les  $c_k$  sont inconnus. Le premier terme de  $\Psi(t)$  étant dérivable, dès que  $t$  dépasse la valeur un,  $X_0(t - 1)$  est connu à  $O(t - 1)$  près, et il ne peut y avoir qu'un système de valeurs des  $c_k$  compatibles avec les données. Nous avons donc  $q$  renseignements nouveaux connus dès l'instant  $1 + 0$ . Or une représentation canonique ne peut

pas introduire au même instant plus d'un  $\xi_u$  instantané. Si donc  $q > 1$ , la fonction considérée n'admet pas de représentation canonique.

6°. Pour terminer ce chapitre, mentionnons brièvement deux problèmes importants, traités dans nos travaux antérieurs. Le premier consiste à chercher, pour une fonction laplacienne définie par sa covariance, une représentation de la forme (II.1.1). Il se ramène à la recherche d'une solution de l'équation intégrale (II.1.4). Nous l'avons étudié dans [6], en nous bornant au cas où  $\omega(u) = u$ , et résolu dans le cas où il existe un noyau régulier et ne s'annulant pas sur la droite  $t = u$ , ainsi que dans des cas qui se ramènent à ce cas, par exemple celui où  $\Phi(t)$  est  $p$  fois dérivable, et où le noyau  $\partial^p F(t, u)/\partial t^p$  vérifie la condition précédente. Dans le cas général, le problème n'est pas résolu; c'est d'ailleurs un problème spécial aux classes de fonctions aléatoires dans lesquelles une fonction est bien définie par sa covariance, ce qui n'est pas le cas de la classe  $C$ . Nous n'avons donc pas de raison d'y revenir ici.

L'autre problème est l'application des formules (I.3.1) ou (II.1.1) à l'étude des propriétés de la fonction aléatoire  $\Phi(t)$ .

Une première application est relative aux conditions d'existence de ses dérivées. En supposant, pour fixer les idées, que  $\delta\omega(t)$  et  $dt$  soient toujours du même ordre de grandeur, et que le noyau  $F(t, u)$  soit continu ainsi que sa dérivée  $f(t, u) = \partial F(t, u)/\partial t$ , il résulte de la formule (II.4.6) que, si  $F(t, t) = 0$ , on a presque sûrement

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_0^t \frac{\partial F(t, u)}{\partial t} dX(u),$$

tandis que cette dérivée n'existe pas si  $F(t, t) \neq 0$ . Les conditions d'existence et les valeurs de toutes les dérivées de  $\Phi(t)$  en résultent immédiatement.

Ces résultats très simples s'étendent sans difficulté à  $\Phi_2(t)$  et  $\Phi_3(t)$ ; il faut seulement tenir compte de ce qu'aux points de discontinuité de  $Y(u)$  [ou de  $S(u)$ ],  $dY(u)$  [ou  $dS(u)$ ] est un nombre fini, au lieu d'être un infiniment petit de l'ordre de grandeur de  $\sqrt{d\omega(u)}$ , en moyenne quadratique.

Une autre application, étudiée dans [5], est relative à la condition que doit remplir le noyau pour que  $\Phi(t)$  soit ce que nous avons appelé une *fonction markovienne d'ordre  $p$ , au sens large*. Ici encore, la généralisation est possible. Mais il vaut sans doute mieux, pour ce problème, se placer dans une classe de fonctions aléatoires qui n'est pas la classe  $C$ . Nous pensons revenir sur cette question dans un autre travail.

### III. LE CAS NON LAPLACIEN

#### III.1. La notion de corrélation linéaire réciproque

La notion générale de dépendance linéaire a été définie au n° I.1.1°. Nous avons évité à cet endroit le mot "corrélation", qui éveille l'idée, en l'espèce non conforme à la réalité, d'une relation réciproque.

Plaçons-nous d'abord dans le cas de deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$ . La dépendance de  $Y$  par rapport à  $X$  et celle de  $X$  par rapport à  $Y$  s'expriment respectivement par les formules

$$(III.1.1) \quad Y = aX + V,$$

$$(III.1.2) \quad X = bY + V',$$

où  $V$  est indépendant de  $X$ ,  $V'$  de  $Y$ , et où  $a$  et  $b$  sont des nombres certains.

Ce sont deux conditions distinctes. Si toutes les deux sont réalisées, nous dirons qu'il y a *corrélacion linéaire réciproque* entre  $X$  et  $Y$ . Il en est ainsi manifestement dans les trois cas suivants.

*Premier cas:*  $a = 0$ ; alors  $X$  et  $Y$  sont indépendants, et  $b$  est aussi nul. Ce cas comprend comme cas particulier celui où une au moins des variables  $X$  et  $Y$  se réduit à un nombre certain.

*Deuxième cas:* il y a une relation linéaire certaine entre  $X$  et  $Y$ , tous les deux effectivement aléatoires; alors  $ab = 1$ .

*Troisième cas:*  $X$  et  $Y$  forment un système laplacien.

**THÉORÈME III.1.** *Il n'y a corrélacion linéaire réciproque entre  $X$  et  $Y$  dans aucun autre cas<sup>8</sup>.*

Supposons en effet que les conditions (III.1.1) et (III.1.2) soient vérifiées, et que  $X$  et  $Y$  ne soient, ni indépendants, ni liés par une relation certaine. Il s'agit de montrer qu'ils forment un système laplacien.

Remarquons d'abord que,  $V$  et  $V'$  étant effectivement aléatoires, la fonction de dispersion de  $Y$  est au moins égale, et non identique, à celle de  $aX$ . Elle est de même au plus égale à celle de  $X/b$ . Donc  $ab < 1$ .

Désignons maintenant par  $\varphi_1(z)$ ,  $\varphi_2(z)$ ,  $\varphi_3(z)$ ,  $\varphi_4(z)$  et  $\varphi(u, v)$  les fonctions caractéristiques de  $X$ ,  $Y$ ,  $V$ ,  $V'$  et la fonction caractéristique jointe de  $X$  et  $Y$ , et par  $\psi_1(z)$ ,  $\dots$ ,  $\psi_4(z)$  et  $\psi(u, v)$  leurs logarithmes, supposés nuls pour  $z = 0$ . Ce sont des fonctions continues, bien définies par continuité sur l'axe réel, tant qu'elles restent finies.

On déduit des formules (III.1.1) et (III.1.2)

$$(III.1.3) \quad \begin{cases} \psi(u, v) = \log E[e^{i(ux+vy)}] \\ \qquad \qquad \qquad = \psi_1(u + av) + \psi_3(v) = \psi_2(v + bu) + \psi_4(u). \end{cases}$$

En éliminant  $\psi_3(v)$  et  $\psi_4(u)$  par des dérivations, on a

$$(III.1.4) \quad a\psi_1''(u + av) = b\psi_2''(v + bu) \qquad (ab \neq 0).$$

(Ces dérivées peuvent être des distributions; on peut aussi éviter d'utiliser la théorie des distributions en remplaçant les dérivées par des différences finies).

---

<sup>8</sup> Cf. G. Darmon [1]. Il faut noter que cet auteur n'a fait que supprimer une hypothèse inutile dans un théorème de M. Fréchet [2], qui lui-même se réfère à un théorème de S. Bernstein qui lui a servi de point de départ.

Comme le jacobien de  $u + av$  et  $v + bu$  est  $1 - ab > 0$ , ces deux fonctions sont indépendantes, et il résulte de (III.1.4) que  $\psi_1''$  et  $\psi_2''$  sont des constantes, donc que  $\psi_1$  et  $\psi_2$  sont des polynômes du second degré, donc que  $X$  et  $Y$  sont des variables laplaciennes, c.q.f.d.

### III.2. Fonctions à corrélation linéaire complète

Soit  $x$  un élément d'un espace  $\mathcal{E}$  absolument quelconque, et  $\Phi(x)$  une fonction aléatoire de  $x$ . Nous dirons que cette fonction est à *corrélation linéaire complète* si, quel que soit le sous-ensemble  $\mathcal{E}'$  de  $\mathcal{E}$ , les valeurs de  $\Phi(x)$  en dehors de  $\mathcal{E}'$  dépendent linéairement de ses valeurs dans  $\mathcal{E}'$ .

Cette propriété devant être vérifiée si  $\mathcal{E}'$  ne comprend qu'un élément  $u$ , on voit qu'il y a nécessairement corrélation linéaire réciproque entre deux valeurs  $X = \Phi(x_1)$  et  $Y = \Phi(x_2)$  de  $\Phi(x)$ . On déduit alors du théorème III.1 le théorème suivant:

**THÉORÈME III.2.** *La fonction à corrélation linéaire complète, définie dans  $\mathcal{E}$ , la plus générale, s'obtient de la manière suivante: on divise  $\mathcal{E}$  en un ensemble quelconque d'ensembles disjoints  $\mathcal{E}_n$ . Dans chaque  $\mathcal{E}_n$ , ou bien les différentes valeurs de  $\Phi(x)$  forment un système laplacien, ou bien elles sont des fonctions linéaires certaines d'une seule variable aléatoire, de nature absolument quelconque. Elles sont en tout cas indépendantes des valeurs de  $\Phi(x)$  en dehors de cet ensemble  $\mathcal{E}_n$ .*

Plusieurs systèmes laplaciens indépendants pouvant être réunis en un système unique, on ne restreint rien en supposant que les  $\Phi(x)$  ne forment un système laplacien que dans un seul (au plus) des  $\mathcal{E}_n$ .

La classe des fonctions à corrélation linéaire complète n'est ainsi qu'une extension triviale de la classe des fonctions laplaciennes.

### III.3. Fonctions à corrélation linéaire indirecte

1°. Rappelons que nous désignons par  $K_i$  la classe des fonctions

$$(III.3.1) \quad \Phi(x) = f(x) + \sum \varphi_\nu(x) V_\nu,$$

$f(x)$  et les  $\varphi_\nu(x)$  étant des fonctions certaines, et les  $V_\nu$  étant des variables aléatoires indépendantes les unes des autres;  $x$  est un élément d'un ensemble donné, absolument quelconque. Il peut y avoir une infinité non dénombrable de variables  $V_\nu$ ; mais la formule (III.3.1) n'a de sens que si la somme qui y figure est presque sûrement convergente, ce qui implique que, pour chaque  $x$ , il y ait au plus une infinité dénombrable de termes différents de zéro.

**THÉORÈME III.3.** *Une fonction aléatoire  $Z(u)$  de la variable réelle  $u$ , additive et s'annulant avec  $u$ <sup>9</sup>, appartient toujours à la fermeture  $\bar{K}_i$  de la classe  $K_i$ .*

<sup>9</sup> La restriction  $Z(0) = 0$  n'est pas essentielle. Mais le théorème ne subsisterait pas si,  $Z(u)$  étant défini d'abord à une constante près, on définissait cette constante par une condition non linéaire.

Pour qu'elle appartienne à  $K_i$ , il faut et il suffit qu'elle soit sans discontinuité mobile.

Observons d'abord que, si  $Z(u)$  est de la forme (III.3.1), il en est de même de  $Z(u + 0) - Z(u - 0)$ , ce qui permet la séparation des trois termes  $X(u)$ ,  $Y(u)$  et  $S(u)$ ; ils appartiennent séparément à cette classe, et il suffit de démontrer le théorème séparément pour les trois termes. Or il est connu, ou évident, pour  $X(u)$  et  $S(u)$ . Il reste à montrer que  $Y(u)$  appartient à  $\bar{K}_i$ , mais non à  $K_i$ .

Le premier point résulte de ce que, si  $Y_\tau(u)$  désigne la fonction continue égale à  $Y(u - 0)$  si  $u$  est multiple de  $\tau$  et variant linéairement dans chacun des intervalles séparés par ces multiples,  $Y(u)$  est la limite presque sûre de  $Y_\tau(u)$  quand  $\tau$  tend vers zéro, sauf peut-être aux points de discontinuité, ce qui n'empêche pas  $Y(u - 0)$  et  $Y(u + 0)$  d'être bien définis. D'autre part  $Y_\tau(u)$  est pour chaque  $u$  une fonction linéaire certaine des variables aléatoires

$$V_\nu = Y(n\tau) - Y[(\nu - 1)\tau],$$

qui sont indépendantes les unes des autres. Donc  $Y_\tau(u)$  appartient à  $K_i$  et  $Y(u)$  à  $\bar{K}_i$ .

Inversement, supposons que  $Y(u)$  appartienne à la classe  $K_i$ , c'est-à-dire soit à un terme certain près de la forme  $\sum \varphi_\nu(u)V_\nu$ , les  $V_\nu$  étant effectivement aléatoires, et indépendants les uns des autres. Les fonctions  $\varphi_\nu(u)$  sont nécessairement continues, car une discontinuité d'une de ces fonctions serait avec une probabilité positive une discontinuité de  $Y(u)$ , qui n'a pas de discontinuité fixe. Elles sont alors nulles, car autrement, en changeant un  $V_\nu$ , on changerait la fonction  $Y(u)$  sans changer ses sauts, ce qui est en contradiction avec la définition de cette fonction. Donc  $Y(u) = 0$ , c.q.f.d.

Le résultat annoncé dans l'Introduction au sujet des relations entre les classes  $K_i$  et  $K_i^*$  est maintenant évident. Une fonction de la classe  $K_i^*$ , c'est-à-dire une fonction  $\Phi(x)$  qui est une fonctionnelle linéaire certaine des accroissements successifs d'une fonction  $Z(u)$  peut, comme  $Z(u)$ , ne pas appartenir à  $K_i$ , mais appartient toujours à  $\bar{K}_i$ . Inversement une fonction de  $K_i$ , pouvant dépendre effectivement d'une infinité non dénombrable de variables aléatoires indépendantes, peut ne pas appartenir à  $K_i^*$ . Donc aucune des classes  $K_i$  et  $K_i^*$  ne contient l'autre, et c'est  $\bar{K}_i$  qui est la classe la plus générale qu'on puisse obtenir dans l'ordre d'idées considéré.

2°. Il serait intéressant de caractériser par des propriétés intrinsèques les fonctions  $\Phi(x)$  appartenant aux classes  $K_i$  et  $\bar{K}_i$ . Nous nous contenterons de quelques remarques simples relatives au cas où  $\Phi(x)$  se réduit à un système de deux variables aléatoires  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$ .

Si elles sont indépendantes, le système appartient à  $K_i$ . Dans le cas contraire, il ne peut appartenir à cette classe que si on peut mettre à la fois  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  sous les formes

$$(III.3.2) \quad \Phi_1 = V + \Psi_1, \quad \Phi_2 = aV + \Psi_2,$$

$a$  étant un nombre certain, et  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$  étant indépendants de  $V$ . Il faut donc qu'il y ait une même loi qui divise à la fois celle de  $\Phi_1$  et celle de  $\Phi_2/a$ . Il y a de nombreux cas où cette condition nécessaire n'est manifestement pas vérifiée. Ainsi, si  $\Phi_1$  dépend d'une loi indécomposable, elle ne l'est que si  $\Phi_2$  dépend linéairement de  $\Phi_1$ . Si  $\Phi_1$  dépend de la loi de Laplace,  $X$  ne peut être qu'une variable laplacienne; il faut donc que la loi de  $\Phi_2$  admette un diviseur laplacien. On a un énoncé analogue pour la loi de Poisson.

Lorsqu'on peut mettre  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  sous la forme (III.3.2), on obtient aisément la loi à deux variables  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$ . En désignant en effet respectivement par  $\varphi(x, y)$ ,  $\varphi_1(x, y)$  et  $\varphi_2(x)$  les fonctions caractéristiques du système  $(\Phi_1, \Phi_2)$ , de  $(\Psi_1, \Psi_2)$ , et de  $V$ , on a

$$\varphi(x, y) = E\{e^{i[(x+ay)V+x\Psi_1+y\Psi_2]}\} = \varphi_1(x, y)\varphi_2(x + ay),$$

formule qui définit  $\varphi_1(x, y)$ . On est alors ramené au problème analogue concernant  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$ , et il peut arriver qu'après un nombre fini d'opérations analogues on obtienne un nouveau système de variables qui soit à corrélation linéaire complète. Alors le système des variables  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  appartient à la classe  $K_i$ .

Il faut par contre remarquer qu'une conclusion négative ne peut être définitive que si on a étudié systématiquement toutes les représentations de  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  par les formules (III.3.2)<sup>10</sup>.

### III.4. Les suites de variables aléatoires à corrélation linéaire

Dans [5], comme préliminaire à l'étude du cas laplacien, nous avons étudié les suites définies respectivement par les formules

$$(III.4.1) \quad U_n = \sum_1^n b_{n,\nu} X_\nu,$$

$$(III.4.2) \quad U_n = \sum_1^{n-1} a_{n,\nu} U_\nu + b_n X_n,$$

où les  $X_\nu$  sont des variables laplaciennes indépendantes. Les principaux résultats subsistent si ce sont des variables aléatoires indépendantes, dépendant de lois quelconques. Sous la condition  $b_{n,n} \neq 0$ , si on part de la première formule, et  $b_n \neq 0$ , si on part de la seconde, toute suite représentable par une de ces formules l'est aussi par l'autre, et  $b_n$  s'identifie avec  $b_{n,n}$ . Ces représentations ont d'ailleurs un caractère canonique, en ce sens qu'à l'opération  $\mathbf{b}$  près (qui consiste ici à remplacer  $b_{n,\nu}$  et  $X_\nu$  par  $c_\nu b_{n,\nu}$  et  $X_\nu/c_\nu$ ), une suite  $\{U_n\}$  n'a qu'une représentation de chacune des deux formes considérées.

Si certains des  $b_n$  (ou des  $b_{n,n}$ ) sont nuls, les circonstances ne sont plus les mêmes. Le caractère canonique disparaît, mais peut être rétabli par des conventions convenables. La représentation (III.4.1) sera considérée comme *canonique* si tout indice  $\nu$  qui annule  $b_{\nu,\nu}$  annule toute la suite des  $b_{n,\nu}$ . La suite des  $U_n$  est alors indépendante de la variable  $X_\nu$  qui a un tel

<sup>10</sup> Pour ces problèmes de factorisation linéaire, voir les travaux de Spearman, de G. Darmais [1], et de P. Lévy [7].

indice; c'est un  $X_\nu$  inutile, et la variable  $U_\nu$  qui a le même indice est une fonction certaine des  $U_h$  d'indices  $h < \nu$ ; elle est aussi une variable inutile, qu'on peut éliminer au second membre de la formule (III.4.2). On en déduit que, dans le cas canonique, la donnée des  $X_\nu$  utiles d'indices  $\nu \leq n$  est exactement équivalente à celle des  $U_\nu$  de même indice, et que par suite, dans la formule

$$(III.4.3) \quad U_{n'} = \sum_1^n b_{n',\nu} X_\nu + \sum_{n+1}^{n'} b_{n',\nu} X_\nu,$$

le premier groupe de termes représente la valeur probable conditionnelle de  $U_{n'}$ , quand  $U_1, U_2, \dots, U_n$  sont connus. Cette propriété est caractéristique et peut être prise comme définition du caractère canonique de la représentation (III.4.1).

Pour la formule (III.4.2), c'est l'élimination des  $U_\nu$  inutiles qui caractérise les représentations qu'on peut considérer comme canoniques.

Remarquons encore que la formule (III.4.2) implique que la suite  $\{U_n\}$  soit à corrélation linéaire directe. La seconde ne définit qu'une corrélation linéaire indirecte. Une suite représentable par la formule (III.4.2) est toujours représentable par la formule (III.4.1). La réciproque, vraie aussi bien dans le cas canonique que dans le cas laplacien, n'est pas toujours vraie. Si par exemple, pour une valeur de  $n$ , on a  $b_{n-1} = 0, b_n = c \neq 0, b_{n,n-1} = c' \neq 0$ , l'expression de  $U_n$  introduit la combinaison  $cX_n + c'X_{n-1}$ , qui est indépendante des  $U_\nu$  d'indices  $\nu < n$ . En dehors du cas laplacien, il est impossible qu'une autre combinaison de  $X_{n-1}$  et  $X_n$  dépende linéairement de  $U_1, U_2, \dots, U_n$ . A moins que  $b_{n',n}$  et  $b_{n',n-1}$  ne soient, pour tous les  $n' > n$ , proportionnels à  $c$  et  $c'$ , la suite ainsi obtenue n'admet, ni représentation de la forme (III.4.2), ni représentation canonique de la forme (III.4.1).

### III.5. Passage à la limite. La classe C

En partant des suites qui viennent d'être étudiées, le passage du discontinu au continu conduit tout naturellement à considérer des fonctions aléatoires du type

$$(III.5.1) \quad \Phi(t) = \int_0^t F(t, u) dZ(u),$$

où  $Z(u)$  est une fonction aléatoire additive. Mais, comme nous l'avons vu au n° I.2, la classe des fonctions  $\Phi(t)$  qui, pour chaque  $t > 0$ , dépendent linéairement des accroissements successifs de  $Z(u)$  dans  $(0, t)$  est bien plus étendue, et nous nous proposons surtout d'étudier la classe C des fonctions

$$(III.5.2) \quad \Phi(t) = \varphi(t) + \int_0^t [F(t, u) dX(u) + G(t, u) dY(u) + H(t, u) dS(u)],$$

les notations étant celles du n° I.2, la classe  $C_0$  obtenue en annulant  $\varphi(t)$ , et les classes  $C_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) obtenues en réduisant  $\Phi(t)$  au  $i^{\text{ème}}$  terme de l'intégrale. Nous supposons toujours que  $X(u), Y(u)$  et  $S(u)$  s'annulent avec  $u$ .

On peut remarquer qu'on ne restreint pas la classe  $C$  en supposant  $G(t, u)$  et  $H(t, u)$  égaux. En effet  $S(u)$  ne varie qu'en des points  $u_\nu$ , donnés d'avance et qui forment au plus une suite infinie dénombrable. On ne change pas le dernier terme  $\Phi_3(t)$  de l'intégrale en changeant  $H(t, u)$  en dehors des points  $u_\nu$ , et on ne change presque sûrement pas  $\Phi_2(t)$  en changeant  $H(t, u)$  en ces points. On peut donc, sans changer la loi de probabilité qui définit la fonction  $\Phi(t)$ , supposer  $G(t, u)$  et  $H(t, u)$  égaux. Mais en raison des rôles très différents des fonctions  $\Phi_2(t)$  et  $\Phi_3(t)$ , il est préférable de les étudier séparément.

Le terme laplacien ayant été étudié au Chapitre II, nous avons à étudier  $\Phi_2(t)$  et  $\Phi_3(t)$ . Nous nous occuperons ensuite de l'étude générale de la classe  $C$ .

### III.6. Les fonctions $\Phi_2(t)$

1°. Rappelons d'abord la définition de  $Y(u)$  comme somme, ou somme compensée, de discontinuités mobiles. Un point  $u, y$  du plan des  $uy$  représente un saut de  $Y(u)$  si

$$Y(u + 0) - Y(u - 0) = y(u) \neq 0.$$

Ces sauts  $u_\nu, y_\nu$  forment au plus un ensemble infini dénombrable. Le nombre  $N(S)$  de ceux qui sont dans une aire  $S$  est une variable de Poisson, dont la valeur probable  $\mu(S)$  est une fonction d'aire additive, non négative, finie dans toute aire où  $u$  et  $|1/y|$  sont bornés, et nulle pour une aire réduite à une droite  $u = \text{const.}$  (condition sans laquelle il y aurait des discontinuités fixes). Il y a en outre une condition de convergence, que nous exprimerons en introduisant la fonction  $\mathbf{n}(t, y)$ , nulle pour  $y = \pm \infty$ , et dont la variation  $\mathbf{n}(t, y_2) - \mathbf{n}(t, y_1)$  représente, si  $y_1 < y_2$  et  $y_1 y_2 > 0$ , la valeur de  $\mu(S)$  pour l'aire  $0 < u < t, y_1 \leq y < y_2$ . La condition de convergence est alors que, pour tout  $t > 0$ , on ait

$$(III.6.1) \quad \omega_2(t) = \int^* \text{Min}(1, y^2) d_y \mathbf{n}(t, y) < \infty \quad \left( \int^* = \int_{-\infty}^{-0} + \int_0^{\infty} \right).$$

Dans ces conditions, le nombre des sauts  $u_\nu, y_\nu$  pour lesquels  $0 < u_\nu < u$ ,  $|y_\nu| > h > 0$  est presque sûrement fini. Désignons par  $Y_h(u - 0)$  la somme  $\sum y_\nu$  relative à ces sauts. Elle peut n'avoir pas de limite quand  $h$  tend vers zéro. Mais la condition (III.6.1) est nécessaire et suffisante pour qu'il y ait au moins une *somme compensée* des sauts

$$(III.6.2) \quad Y(u) = \lim_{h \searrow 0} [Y_h(u) - \psi(u, h)],$$

$\psi(u, h)$  étant le *terme compensateur* qu'on peut définir par exemple par la formule

$$(III.6.3) \quad \psi(u, h) = E\{Y_h(u) - Y_1(u)\} = \int_{h < |y| < 1} y d_y \mathbf{n}(u, y).$$

D'autres déterminations de  $\psi(u, h)$  peuvent être préférées. Sous des conditions un peu plus restrictives que (III.6.1), on peut prendre, soit zéro, soit  $E\{Y_h(u)\}$ . En changeant la détermination choisie, on ne fait qu'ajouter à  $Y(u)$ , et par suite à  $\Phi_2(t)$ , des termes certains. L'essentiel pour la suite est seulement qu'on suppose qu'une définition précise ait été choisie, de manière à pouvoir considérer  $Y(u)$  et  $\Phi_2(t)$  comme bien déterminés en fonction des sauts  $u_\nu, y_\nu$  ; ce sont des fonctions linéaires des  $y_\nu$ .

La fonction  $\omega_2(t)$  est une fonction non décroissante, continue (puisque les discontinuités fixes sont écartées), nulle pour  $u = 0$ , à cela près quelconque. Elle joue ici un rôle analogue à celui de  $\omega(u)$  dans l'étude de  $X(u)$ . Si elle est nulle dans un intervalle,  $Y_h(u)$  y est constant pour tout  $h > 0$ ; on peut alors supposer que  $\varphi(u, h)$  y soit constant aussi, de sorte que  $Y(u)$  est constant. Si au contraire  $\omega_2(u)$  y varie, il y a au moins une probabilité positive que  $Y(u)$  y varie aussi.

2°. Considérons maintenant la formule

$$(III.6.4) \quad \Psi(t) = \int_0^t g(u) dY(u),$$

et demandons-nous quelles conditions doit vérifier  $g(u)$  pour que cette formule définisse une fonction aléatoire, évidemment additive.

Remarquons d'abord que, quand les  $u_\nu$  sont déterminés, les valeurs de  $g(u)$  pour ces points  $u_\nu$  importent seules, de sorte qu'aucune condition de mesurabilité relative à  $g(u)$  n'est nécessaire pour que  $\Psi(t)$  ait un sens. Mais, si  $g(u)$  n'est pas mesurable,  $\Psi(t)$  n'est pas une fonction aléatoire, sauf si  $Y(u)$  dépend d'une loi symétrique et que  $|g(u)|$  soit seul mesurable. Même dans ce cas il n'y a pas d'intérêt à introduire de fonction non mesurable, et nous supposerons que  $g(u)$  soit constant dans tout intervalle où  $\omega_2(u)$  est constant, et soit une fonction mesurable de  $\omega_2(u)$ .

Les sauts de  $\Psi(t)$  se déduisent de ceux de  $Y(u)$  en remplaçant  $y_\nu$  par

$$g(u_\nu)y_\nu.$$

La condition de convergence, analogue à la condition (III.6.1), relative à  $\Psi(t)$  s'écrit alors

$$(III.6.5) \quad \iint_{0 < u < t, 0 < |y| < 1} \text{Min}[1, g^2(u)y^2] d_u d_y \mathbf{n}(u, y) < \infty$$

(les  $|y_\nu| > 1$  étant presque sûrement en nombre fini, il est inutile d'introduire les valeurs de  $y < -1$  ou  $> 1$ ).

Cette condition, nécessaire et suffisante pour l'existence d'une somme compensée des sauts  $g(u_\nu)y_\nu$  relatifs à l'intervalle  $(0, t)$ , n'est bien entendu suffisante, ni pour l'existence de la somme non compensée, ni pour celle de l'intégrale (III.6.4) où, si  $\psi(u, h)$  a la valeur (III.6.3), le terme compensateur a la valeur bien déterminée

$$(III.6.6) \quad \iint_{u \in (0, t), |y| \in (h, 1)} yg(u) d_u d_y \mathbf{n}(u, y).$$

Or, en appliquant à la fonction additive  $\Psi(t)$  les résultats rappelés à propos de  $Y(u)$ , on voit qu'un terme compensateur sûrement acceptable si les conditions (III.6.1) et (III.6.5) sont vérifiées s'obtient en intégrant la même expression dans le champ

$$(III.6.7) \quad 0 < u < t, \quad h < |y| < 1, \quad |g(u)y| \leq 1.$$

La condition nécessaire et suffisante qu'il faut ajouter aux précédentes pour que  $Y(t)$  et  $\Psi(t)$  soient en même temps bien définis est donc que l'intégrale de la même expression, étendue au champ

$$(III.6.8) \quad 0 < u < t, \quad 0 < |y| < 1, \quad |g(u)y| > 1,$$

qui est la limite, pour  $h$  tendant vers zéro, de la différence des deux intégrales précédentes, soit convergente. Les grandes valeurs de  $|g(u)y|$ , qui n'intervenaient pas dans la condition (III.6.1), peuvent empêcher qu'il en soit ainsi.

Remarquons que, sans faire intervenir cette condition supplémentaire, on peut modifier la définition de  $Y(u)$  en prenant pour  $\psi(t, h)$  l'intégrale de  $y d_u d_y \mathbf{n}(u, y)$  étendue à la région (III.6.7). On obtient ainsi deux fonctions additives  $Y(u)$  et  $\Psi(t)$ , liées par la relation (III.6.4), et qui ont les mêmes sauts que celles d'abord considérées. *L'ensemble des deux conditions (III.6.1) et (III.6.4) est ainsi nécessaire et suffisant pour l'existence de ces deux fonctions associées, ayant les sauts aléatoires dont la loi est définie par la fonction  $\mathbf{n}(u, y)$  et le multiplicateur  $g(u)$ .*

3°. Considérons maintenant la fonction aléatoire

$$(III.6.9) \quad \Phi_2(t) = \int_0^t G(t, u) dY(u).$$

Pour qu'elle ait un sens, la condition (III.6.1) étant toujours supposée vérifiée, il faut bien entendu que, pour chaque  $t$  fixe, la fonction  $G(t, u)$  soit une fonction  $g(u)$  acceptable, c'est-à-dire vérifiant la condition (III.6.5). Cette condition suffit, non pour que  $\Phi_2(t)$  ait un sens, mais pour qu'il existe une fonction

$$\Phi_2^*(t) = \lim_{h \searrow 0} \int_0^t G(t, u) d_u [Y(u) - \psi(t, u, h)]$$

où le terme compensateur, non aléatoire, peut dépendre de  $t$ . On ne peut évidemment le supprimer que moyennant une condition plus restrictive que la condition (III.6.4). Il y a lieu alors de se demander si on peut du moins rendre  $\psi(t, u, h)$  indépendant de  $t$ , et obtenir par suite pour  $\Phi_2^*(t)$  une représentation de la forme (III.6.9), où  $Y(u)$  serait simplement remplacé par  $Y(u) - \psi(u, h)$ . Cela n'est pas toujours possible. On le montre aisément en prenant pour  $Y(u)$  une fonction dépendant de la loi quasi-stable souvent considérée par l'auteur et par A. Khintchine<sup>11</sup>. Nous pensons développer

<sup>11</sup> V. par exemple P. LÉVY, *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, n° 59.

cet exemple dans un autre travail. Indiquons seulement ici qu'il entraîne le résultat suivant: *il peut arriver que l'ensemble  $C_z$  des fonctions  $\Phi(t)$  formées avec une fonction  $Z(u)$  préalablement définie ne soit pas fermée.* Cela conduit à poser le problème suivant, que nous n'avons pas résolu: *la classe  $C$  est-elle fermée?*

4°. Les notions de représentations propres, semi-propres ou impropres, et celles de classes de représentations équivalentes, exposées pour le cas laplacien aux nos II.1 et II.2, se généralisent sans difficulté. Plutôt que de recommencer l'exposé, nous allons signaler les différences.

La première est que, dans l'étude de  $X(u)$ , les discontinuités fixes étant maintenant exclues [puisqu'elles sont rattachées à  $S(u)$ ], les accroissements successifs de  $X(u)$ , donc les valeurs de  $\Phi_1(t)$ , ne dépendent que de ce que nous avons appelé les  $\xi_u$  moyens. Les accroissements successifs  $y_u$  de  $Y(u)$  sont au contraire des accroissements instantanés, et leurs effets, immédiats, différés, ou définitivement nuls, ne dépendent que de  $G(t, u_v)$ , sans qu'on ait à faire intervenir les  $u$  voisins de  $u_v$ . Mais les  $u_v$  sont aléatoires, la probabilité d'un saut en un point  $u$  donné est nulle, et c'est tout de même un intervalle élémentaire à droite de ce point qui joue le rôle essentiel. Nous devons donc considérer les sauts pour lesquels  $u_v \in (t_0, t_1)$  comme sans effet sur  $\Phi_2(t)$  avant un instant  $T > t_1$  si

$$(III.6.10) \quad \int_{t_0}^{t_1} \text{Max}_{t \in (u, T)} |G(t, u)| d\omega_2(u) = 0.$$

Sans savoir si  $t_0$  est un  $u_v$ , nous voyons que, ce qui importe pour la définition des représentations propres, semi-propres ou impropres, c'est de savoir si la condition (III.6.10) est vérifiée pour cette valeur de  $t_0$ , et pour  $t_1 - t_0$  suffisamment petit. C'est donc la condition (III.6.10) qui remplace ici la condition (II.1.6) relative au cas laplacien. Les définitions de la fonction  $f(u)$ , des ensembles  $E_0, E_1, E_2$ , et des représentations propres, semi-propres ou impropres, s'en déduisent comme dans le cas laplacien.

Il faut remarquer que la condition

$$(III.6.11) \quad \int_{t_0}^{\text{Min}(t, t_1)} |G(t, u)| d\omega_2(u) = 0 \quad [t \in (t_0, T)]$$

ne suffit pas à entraîner (III.6.10). Supposons par exemple  $G(t, u) = 1$  si  $t - 2u = 0$ , et  $G(t, u) = 0$  si  $t - 2u \neq 0$ , de sorte que  $\Phi_2(t)$  est égal au saut de  $Y(u)$  éventuellement réalisé à l'instant  $t/2$ . Alors chaque valeur de  $\Phi_2(t)$ , considérée isolément, est presque sûrement nulle. Mais, si  $\omega_2(u)$  est constamment croissant, la probabilité que  $\Phi_2(t)$  soit constamment nul dans un intervalle donné n'est jamais égale à un. Des circonstances analogues se produisent toujours quand la condition (III.6.11) est vérifiée, sans que la condition (III.6.10) le soit [dans l'exemple cité, elle ne l'est que si  $T < 2t_0$ ; si on suppose  $G(t, u)$  égal à 1 ou 0 suivant que  $t - u$  est rationnel ou non, la

condition (III.6.11) est toujours vérifiée et la condition (III.6.10) ne l'est jamais].

Une remarque analogue s'applique à l'extension de l'opération **a**. Si, sans changer la définition de  $Y(u)$ , on remplace  $G(t, u)$  par un autre noyau  $G_1(t, u)$ , la condition pour que la fonction  $\Phi_2(t)$  ne soit pas changée s'obtient en remplaçant  $G(t, u)$  par  $G_1(t, u) - G(t, u)$  dans la formule (III.6.10), et non dans la formule (III.6.11); cette formule doit naturellement être toujours vérifiée, ce qui revient à dire que

$$(III.6.12) \quad \int_0^\infty \text{Max}_{t>u} |G_1(t, u) - G(t, u)| d\omega_2(u) = 0.$$

5°. Les opérations **a** à **d** du n° II.2 subsistent sans autre changement. Il n'en est pas de même de l'opération **e** du n° II.3 puisqu'elle utilise une propriété spéciale des variables laplaciennes, qui, d'après le théorème cité de G. Darmon, n'est réalisée dans aucun autre cas. Il en résulte que, quand un élément  $y$  de la fonction  $Y(u)$  intervient dans  $\Phi_2(t)$  avec un multiplicateur  $g(t)$ ,  $yg(t)$  apparaît comme un élément essentiel de la fonction  $\Phi_2(t)$ . Sans doute, puisque  $y$  dépend d'une loi indéfiniment divisible, peut-il être remplacé par une somme de termes analogues, ou inversement réuni à d'autres termes. Mais on ne peut réunir ainsi que des termes ayant des multiplicateurs égaux ou proportionnels, et la somme des termes pouvant être réunis à un terme de multiplicateur  $g(u)$  défini à un facteur constant près est la même pour toutes les représentations de  $\Phi_2(t)$ . Il en résulte que: *pour une fonction  $\Phi_2(t)$ , il n'y a qu'une classe de représentations équivalentes.*

Si cette classe contient une représentation propre, on l'obtient en rattachant chaque élément  $yg(t)$  de  $\Phi_2(t)$  à la valeur de  $u$  égale à la borne inférieure des  $t$  pour lesquels  $g(t) \neq 0$ . Si, pour tout  $u > 0$ , les termes rattachés à la valeur  $u$  peuvent être réunis en un terme unique  $G(t, u) dY(u)$ , on obtient une représentation propre du type (III.6.9). Dans le cas contraire, on ne peut obtenir qu'une *représentation propre à plusieurs termes*; une telle représentation, qui n'introduit que des éléments  $dY_h(u)$  ( $h = 1, 2, \dots$ ) ayant un effet immédiat sur  $\Phi_2(t)$ , peut être préférable à la représentation impropre considérée d'abord. Elle montre plus naturellement les propriétés de  $\Phi_2(t)$ , et, sans être canonique au sens qui sera défini plus loin, elle a un caractère canonique (c'est-à-dire un caractère d'unicité) qui la rend intéressante.

Considérons par exemple la fonction

$$(III.6.13) \quad \Phi(t) = \int_0^t [\alpha t dY_1(u) + \beta u dY_2(u)],$$

où  $Y_1(u)$  et  $Y_2(u)$  sont deux déterminations indépendantes de la fonction de Poisson. Elle n'a pas de représentation *propre* à un terme. Il est facile au contraire d'en obtenir une représentation *impropre* à un terme, en introduisant par exemple une fonction  $Y(u)$  qui, dans tout intervalle  $(2^{2p}, 2^{2p+1})$  ( $p$  entier) aurait les mêmes sauts que  $Y_1(12u - 8.4^p)$  et dans tout intervalle

$(2^{2p+1}, 2^{2p+2})$  varierait comme  $Y_2(6u-8.4^p)$ . Sa donnée dans l'intervalle  $(4^p, 4^{p+1})$  détermine à la fois les sauts de  $Y_1(u)$  et ceux de  $Y_2(u)$  dans  $(4^{p+1}, 4^{p+2})$ ; donc, quel que soit  $t$ , sa donnée dans  $(0, t)$  y détermine à la fois  $Y_1(u)$  et  $Y_2(u)$ , donc  $\Phi(t)$ , qui est bien de la forme (III.6.9).

Observons enfin que la recherche d'une représentation propre montre qu'une fonction  $\Phi_2(t)$  à représentation impropre peut se transformer en une fonction  $\Phi_3(t)$ . Si par exemple,  $n$  étant la partie entière de  $t$ , on a

$$G(t, u) = \begin{cases} 1 & (u < n) \\ 0 & (u > n). \end{cases}$$

Alors  $\Phi_2(t) = Y(n)$ . C'est une fonction du type  $\Phi_3(t)$ . Inversement, toute fonction  $\Phi_3(t)$  dépendant d'une loi indéfiniment divisible peut se transformer en une fonction  $\Phi_1(t) + \Phi_2(t)$ .

Cela n'est pas en contradiction avec le fait qu'une fonction additive n'a qu'une représentation de la forme (I.2.2), à cela près qu'on peut ajouter à  $Y(u)$  et  $S(u)$  des termes non aléatoires qu'on retrancherait de  $f(u)$ . Donc, avec la même restriction pour les parties non aléatoires de  $\Phi_2(t)$  et  $\Phi_3(t)$ , une fonction de la classe  $C$  déduite d'une fonction  $Z(u)$  préalablement définie n'a qu'une représentation de la forme (III.5.2).

### III.7. Les fonctions $\Phi_3(t)$ et les fonctions $\Phi(t)$ les plus générales

1°. L'étude de  $\Phi_3(t)$  est à certains points de vue plus simple que celle de  $\Phi_2(t)$ ; cela provient de ce que  $S(u)$  est une somme de discontinuités fixes, c'est-à-dire réalisées à des instants  $u_\nu$  donnés d'avance, et qui forment au plus un ensemble dénombrable. On n'a donc à définir le multiplicateur

$$H(t, u_\nu) = H_\nu(t)$$

que pour les valeurs  $u_\nu$  de  $u$ , et aucune condition de continuité n'intervient.

Il y a naturellement une condition de convergence, qu'on peut exprimer en introduisant les fonctions caractéristiques  $\varphi_\nu(z)$  des sauts  $Y_\nu$  réalisés aux instants  $u_\nu$ . La condition pour que  $S(u)$  soit bien défini dans  $(0, t)$  est que le produit  $\prod \varphi_\nu(z)$ , étendu aux  $\nu$  pour lesquels  $u_\nu < t$ , soit convergent pour toutes les valeurs réelles de  $z$ . Pour que

$$(III.7.1) \quad \Phi_3(t) = \sum_{u_\nu < t} H_\nu(t) Y_\nu$$

soit bien défini, il est alors nécessaire et suffisant que le produit

$$(III.7.2) \quad \prod_{u_\nu < t} \varphi_\nu[H_\nu(t)z]$$

soit convergent.

On peut aussi introduire les conditions de Kolmogorov. Il faut d'abord que le nombre des sauts pour lesquels  $u_\nu \in (0, t)$ ,  $|Y_\nu| > 1$ , soit presque sûrement fini, c'est-à-dire que

$$(III.7.3) \quad \sum_{u_\nu < t} \Pr[|Y_\nu| > 1] < \infty.$$

S'il en est ainsi, les termes correspondant à ces sauts n'interviennent plus dans les conditions de convergence, et, qu'il s'agisse de  $S(t)$  ou de  $\Phi_3(t)$ , pour former ces conditions, on peut remplacer chaque  $Y_\nu$  par une variable tronquée  $Y'_\nu$ , égale à  $Y_\nu$  si  $|Y_\nu| \leq 1$ , et nulle dans le cas contraire. La condition préliminaire indiquée étant remplie, la condition nécessaire et suffisante pour que la somme  $\sum Y_\nu$  [étendue aux  $\nu$  pour lesquels  $u_\nu \in (0, t)$ ] soit presque sûrement convergente est que la somme  $\sum Y'_\nu$  soit convergente en moyenne quadratique.

Il faut ensuite étudier de la même manière la somme  $\Phi_3(t)$ , en introduisant la nouvelle variable tronquée  $Y''_\nu$ , égale à  $Y_\nu$  si on a  $|H(t, u_\nu)Y_\nu| \leq 1$ , et nulle dans le cas contraire. Pour que la série (III.7.1) soit presque sûrement convergente, il est alors nécessaire et suffisant que

$$(III.7.4) \quad \sum_{u_\nu < t} \text{Pr}[\text{Max } |H(t, u_\nu)Y_\nu| > 1] < \infty$$

[c'est-à-dire que les  $Y''_\nu \neq Y_\nu$  soient presque sûrement en nombre fini, pour l'intervalle  $(0, t)$ ], et que la série  $\sum H(t, u_\nu)Y''_\nu$  soit convergente en moyenne quadratique.

Pour la définition de  $S(u)$ , il est inutile d'introduire des sommes compensées, comme nous l'avons fait pour  $Y(u)$ . Si en effet la série  $\sum Y_\nu$  est divergente, mais qu'une somme compensée  $\sum (Y_\nu - a_\nu)$  soit presque sûrement convergente, nous pouvons remplacer  $Y_\nu$  par  $Y'_\nu = Y_\nu - a_\nu$  et poser

$$S_1(u) = \sum_{u_\nu \in (0, t)} Y'_\nu.$$

En ajoutant ensuite une fonction non aléatoire, on peut retrouver la fonction initiale ayant les sauts  $Y_\nu$ .

A cette différence près, les remarques faites à propos de  $\Phi_2(t)$  sur les termes compensateurs subsistent. Si la série (III.7.1) n'est pas presque sûrement convergente, il peut arriver qu'une série auxiliaire

$$(III.7.5) \quad \Phi_3^*(t) = \sum_{u_\nu < t} H(t, u_\nu) [Y_\nu - b_\nu(t)]$$

le soit, et qu'on ne puisse pas rendre le terme compensateur  $b_\nu(t)$  indépendant de  $t$ . On obtient alors des fonctions aléatoires qui, sans être de la forme  $\varphi(t) + \Phi_3(t)$ , sont limites de fonctions de cette forme.

2°. Il y a plusieurs manières d'étendre à  $\Phi_3(y)$ , puis aux fonctions les plus générales de la classe  $C$ , les notions de représentations propres ou impropres. Contentons-nous d'indiquer celle qui nous paraît préférable. En ce qui concerne la fonction

$$\Phi_3(t) = \int_0^t H(t, u) dS(u) = \sum_{u_\nu < t} H_\nu(t) Y_\nu,$$

nous ne nous occuperons pas des valeurs du noyau quand  $u$  n'est pas un  $u_\nu$ . Il peut être commode de le supposer nul, ou au contraire de conserver l'expression analytique qui le définit si  $u$  est un  $u_\nu$ . Seuls les  $H(t, u_\nu) = H_\nu(t)$  jouent un rôle, et nous supposons qu'aucun terme n'est identiquement nul.

Alors il n'y a pas de représentation semi-propre; nous dirons que la représentation est propre si, quels que soient l'indice  $\nu$  et le nombre positif  $\varepsilon$ , il existe un  $\tau \in (0, \varepsilon)$  tel que  $H_\nu(u_\nu + \tau) \neq 0$ ; elle est impropre dans le cas contraire.

Pour une fonction quelconque de la classe  $C$ , nous dirons qu'elle est propre si ceux des  $\Phi_i(t)$  qui ne sont pas identiquement nuls y sont définis par des représentations propres, qu'elle est impropre si un au moins de ces trois termes est défini par une représentation impropre; enfin qu'elle est semi-propre dans les autres cas.

Ces définitions ne s'imposent pas; on pourrait convenir que la représentation de  $\Phi_3(t)$  ne serait dite propre que si l'ensemble des  $u_\nu$  est partout dense. L'une ou l'autre définition semble préférable suivant qu'on considère  $\Phi_3(t)$  comme une intégrale de Stieltjes ou comme une série.

### III.8. La classe $K$ et les représentations canoniques des fonctions de la classe $C$

1°. Désignons toujours par  $K$  la classe des fonctions à corrélation linéaire. Dans le cas d'une fonction  $\Phi(t)$  du temps  $t$ ,  $K$  est donc la classe des fonctions telles que, si  $\Phi(u)$  est connu pour  $u < t$  (ou  $u \leq t$ ),  $\Phi(t')$  prend pour  $t' \geq t$  (ou  $t' > t$ ) la forme  $U(t, t') + V(t, t')$ ,  $U(t, t')$  étant une fonction linéaire certaine des valeurs connues, et  $V(t, t')$  étant indépendant de ces valeurs. On peut ajouter à  $U$  et retrancher de  $V$  n'importe quelle fonction certaine  $f(t, t')$ ; cela nous permet, quand c'est commode, de supposer que  $U(t, t) = \Phi(t)$ ,  $V(t, t) = 0$ .

LEMME III.8. *Pour chaque valeur fixe de  $t''$ ,  $U(t, t'')$  est une fonction aléatoire additive de  $t$ .*

Soit en effet  $t < t' < t''$ . Dans l'expression de  $U(t', t'')$  en fonction des  $\Phi(u)$  d'arguments  $u \leq t'$ , on peut remplacer ceux relatifs à l'intervalle  $(t, t')$  par  $U(t, u) + V(t, u)$ , et  $U(t', t'')$  prend la forme  $U' + V'$ ,  $U'$  contenant tous les termes qui finalement dépendent des valeurs de  $\Phi(u)$  dans  $(0, t)$  (et ils en dépendent linéairement), et  $V'$  étant indépendant de ces valeurs. Par suite

$$V' + V(t', t'') = \Phi(t'') - U'$$

n'en dépend pas non plus. L'expression

$$U(t, t'') - U' = V' + V(t', t'') - V(t, t'')$$

est alors fonction linéaire certaine de ces valeurs, tout en n'en dépendant pas. C'est donc un nombre certain  $f(t, t', t'')$ , et

$$U(t', t'') - U(t, t'') = V(t, t'') - V(t', t'') = V' - f(t, t', t'')$$

est indépendant des données relatives aux  $u < t$ , c.q.f.d.

La fonction  $\Phi(t) = U(t, t)$  apparaît ainsi, pour chaque  $t$  fixe, comme une somme d'éléments indépendants, dont chacun est l'effet de l'information sur

$\Phi(t)$  résultant de la donnée de cette fonction dans un intervalle élémentaire  $(u, u + du)$  ( $u < t$ ).

2°. L'extension naturelle des résultats du n° III.4 relatifs aux suites pourrait faire croire que les fonctions de la classe  $K$  sont de la forme (III.5.1), ou du moins de la forme plus générale (III.5.2). Mais il n'en n'est pas toujours ainsi: une fonction  $\Phi(t)$  à valeurs toutes indépendantes les unes des autres n'appartient pas à la classe  $C$ , ni même à sa fermeture  $\bar{C}$ .

Il n'est pas toujours facile de reconnaître si une fonction donnée de la classe  $K$  appartient à  $C$  et admet une représentation propre. Ainsi la fonction

$$(III.8.1) \quad \Phi(t) = \int_0^t (\alpha t \xi'_u + \beta u \xi''_u) \sqrt{du},$$

étant laplacienne, appartient à la classe  $K$ . Par analogie avec la fonction  $\Phi_2(t)$  définie par la formule (III.6.13), on pourrait croire qu'elle n'admet pas de représentation propre à un terme. Or si  $s$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  vérifient les formules

$$(III.8.2) \quad s^2 = \alpha^2 + \beta^2, \quad \lambda^2 + \lambda s = 2\alpha^2, \quad \lambda + \mu = s,$$

qui les définissent au signe près, la fonction considérée s'identifie avec la fonction

$$(III.8.3) \quad \Phi_1(t) = \int_0^t (\lambda t + \mu u) \xi_u \sqrt{du}.$$

Les deux fonctions ont en effet la même covariance

$$(III.8.4) \quad \alpha^2 t^2 t' + \frac{\beta^2}{3} t^3 = \left( \lambda^2 + \frac{\lambda \mu}{2} \right) t^2 t' + \left( \frac{\lambda \mu}{2} + \frac{\mu^2}{3} \right) t^3.$$

Dans un autre travail (déjà annoncé note<sup>5</sup>), nous montrerons que, pour qu'une fonction laplacienne de la forme

$$(III.8.5) \quad \int_0^t [F_1(t, u) \xi'_u + F_2(t, u) \xi''_u] \sqrt{du}$$

admette une représentation propre à un terme, il suffit qu'une telle représentation existe pour un des termes.

Nous n'insisterons pas ici sur cette question, et nous occuperons du problème inverse. Considérant une fonction définie par une représentation de la forme (III.5.2), il s'agit de reconnaître si elle appartient à la classe  $K$ . Ce problème est lié à la notion de représentation canonique.

3°. Nous avons déjà défini cette notion dans le cas laplacien. Pour la définir dans le cas général, en introduisant des vecteurs  $\vec{\mathfrak{F}}$  et  $\vec{\mathfrak{Z}}$  et en posant

$$\vec{\mathfrak{F}}(t, u) d\vec{\mathfrak{Z}}(u) = F(t, u) dX(u) + G(t, u) dY(u) + H(t, u) dS(u),$$

nous dirons que la représentation

$$(III.8.6) \quad \Phi(t) = \int_0^t \vec{\mathfrak{F}}(t, u) d\vec{\mathfrak{Z}}(u) \quad (t > 0)$$

d'une fonction de la classe  $C_0$  est *canonique*, si, dans la formule

$$(III.8.7) \quad \Phi(t') = \int_0^t \vec{F}(t', u) d\vec{Z}(u) + \int_t^{t'} \vec{F}(t, u) d\vec{Z}(u) \quad (0 < t < t'),$$

le premier terme est une fonction linéaire certaine des valeurs de  $\vec{Z}(u)$ , donc aussi de celles de  $Z(u)$ , dans  $(0, t)$ . La représentation correspondante de  $\varphi(t) + \Phi(t)$  sera dite *canonique* dans les mêmes conditions. Si  $Z(u)$  est une fonction laplacienne semi-réduite, cette définition coïncide bien avec celle du n° II.4.1°. Dans le cas plus général où  $Z(u)$  et  $\Phi(t)$  ont des premiers moments finis, la première intégrale de la formule (III.8.7) est, à un terme certain près, la valeur probable conditionnelle de  $\Phi(t')$  quand  $\Phi(u)$  est connu dans  $(0, t)$ .

Pour la même raison qu'au n° II.4.1°, une représentation canonique n'est jamais impropre.

La seconde intégrale de la formule (III.8.7) étant indépendante de ces valeurs connues, il est évident que: *pour qu'une fonction de la classe C admette une représentation canonique, il faut qu'elle appartienne à la classe K.*

La réciproque n'est évidemment pas exacte. Cela est aisément prouvé par quelques exemples simples. Le premier est celui indiqué au n° II.4.5°; il s'agit d'une fonction laplacienne admettant une représentation propre, donc appartenant à la fois aux classes  $K$  et  $C$ , et qui n'a pas de représentation canonique. Indiquons aussi celui de la fonction  $\Phi_3(t)$ , s'il arrive qu'en un point  $u_v$  isolé à droite s'introduisent deux sauts indépendants  $Y$  et  $Y'$ , avec des multiplicateurs  $h(t)$  et  $h_1(t)$ , nuls pour  $t \leq u_v$  et différents de zéro mais non proportionnels si  $t > u_v$ . C'est bien une fonction  $\Phi_3(t)$  puisqu'on peut rattacher le saut  $Y'$  à un instant  $u'_v < u_v$  et différent de tous les  $u_p$ . Elle appartient à la classe  $K$  puisque, pour tout  $t > u_v$ ,  $Y_v$  et  $Y'_v$  sont des fonctions linéaires certaines des valeurs de  $\Phi_3(t)$  dans  $(0, t)$ . Pourtant elle n'admet pas de représentation canonique; une telle représentation, nécessairement propre, devrait introduire au même instant les deux variables aléatoires  $Y$  et  $Y'$ , et ne serait pas du type (III.5.2).

Un autre exemple, dans le même ordre d'idées, est celui d'une fonction  $\Phi_3(t)$  qui, à un instant  $u_v$  isolé à droite, s'accroît brusquement d'une fonction analytique dépendant linéairement d'au moins deux paramètres indépendants. Cela n'empêche pas en principe son appartenance aux classes  $C$  et  $K$ . Mais cela empêche l'existence d'une représentation propre à un terme, donc celle d'une représentation canonique.

4°. *Etude de  $\Phi_2(t)$ .* Supposons d'abord que les sauts de  $Y(u)$  soient presque sûrement tous isolés à droite. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est d'ailleurs qu'à tout  $t \geq 0$  corresponde un  $t' > t$  tel que l'expression

$$\lim_{u \searrow 0} [\mathbf{n}(t, u) - \mathbf{n}(t, -u) - \mathbf{n}(t', u) + \mathbf{n}(t', -u)],$$

qui est le nombre probable des sauts dans l'intervalle  $(t, t')$ , soit fini<sup>12</sup>. Si alors la représentation (III.6.9) de  $\Phi_2(t)$  est propre, elle est aussi canonique.

Il s'agit de montrer que, si la fonction  $\Phi_2(t)$  est connue, on peut en déduire  $Y(u)$ , et par suite l'intégrale

$$(III.8.8) \quad \int_0^t G(t', u) dY(u),$$

par des formules linéaires. Les  $u_\nu$  qui correspondent aux sauts formant une suite finie ou transfinie dénombrable, il suffit d'observer que,  $Y(u)$  étant connu jusqu'à un instant  $t \pm 0$ , le premier  $u_\nu$  suivant  $t \pm 0$  est l'instant où l'intégrale (III.8.8) cesse de représenter  $\Phi_2(t')$ , et, qu'il soit  $= t$  ou  $> t$ , le  $y_\nu$  correspondant est bien défini parce que dans l'intervalle  $(u_\nu, u_{\nu+1})$ , on a

$$\Phi_2(t') = \int_0^{t' \pm 0} G(t', u) dY(u) + G(t', u_\nu) y_\nu,$$

$G(t', u_\nu)$  n'étant pas identiquement nul. On applique cette formule, successivement, à tous les  $u_\nu$  et à leurs points d'accumulation (qui ne sont d'ailleurs presque sûrement pas des sauts, car ils sont connus d'avance et il n'y a pas de discontinuités fixes). On a ainsi tous les accroissements successifs de  $Y(u)$ , et cela pour tout l'intervalle où  $\Phi_2(t)$  est défini; si en effet on était arrêté à un instant  $T$ , il n'y aurait qu'à repartir de cet instant comme nous venons de l'indiquer pour l'instant  $t$ .

5°. D'autre part, sans aucune restriction sur  $Y(u)$  montrons que: si le noyau  $G(t, u)$  est continu (pour  $0 \leq u \leq t$ ), et  $G(t, t) \neq 0$ , la représentation (III.6.9) de  $\Phi_2(t)$  est canonique.

Cela résulte des formules évidentes

$$(III.8.9) \quad \Phi_2(t + 0) - \Phi_2(t - 0) = G(t, t) [Y(t + 0) - Y(t - 0)].$$

$$(III.8.10) \quad \int_0^t G(t', u) dY(u) = \int_0^t \frac{G(t', u)}{G(u, u)} d\Phi_2(u).$$

Voici, dans le même ordre d'idées, un théorème impliquant des conditions beaucoup moins restrictives en ce qui concerne le noyau:

**THÉORÈME III.8.1.** Si  $Y(u)$  est une somme non compensée de discontinuités mobiles, si, en posant

$$(III.8.11) \quad G(t, u) = \frac{(t - u)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} g(t, u) \quad (\alpha \geq 0),$$

<sup>12</sup> Attirons à ce sujet l'attention sur le fait que pour une fonction  $Y(u)$ , donc aussi pour une fonction  $Z(u)$  quelconque, l'ensemble des points de discontinuité a presque sûrement pour ensemble dérivé un ensemble certain.

$g(t, u)$  est continu (pour  $0 \leq u \leq t$ ) et admet par rapport à  $t$  des dérivées continues jusqu'à l'ordre  $p$  ( $p$  étant la partie entière de  $\alpha$ ), si  $g(t, t) > 0$ , si enfin

$$-G_p(t, u) = -\frac{d^p G(t, u)}{dt^p}$$

est, pour  $t - u$  assez petit, une fonction convexe de  $t$ , la formule (III.6.9) donne une représentation canonique de la fonction  $\Phi_2(t)$  qu'elle définit.

Il s'agit de démontrer que  $Y(u)$  est dans  $(0, t)$  une fonction linéaire certaine des valeurs de  $\Phi_2(u)$  dans cet intervalle. Cela résultera de la formule

$$\begin{aligned} (III.8.12) \quad y(t) &= Y(t + 0) - Y(t - 0) \\ &= \lim_{\tau \searrow 0} \left\{ \frac{\Gamma(\alpha - p + 1)}{g(t, t)\tau^{\alpha-p}} \frac{d^p}{dt^p} [\Phi_2(t + \tau) - \Phi_2(t)] \right\}. \end{aligned}$$

Comme on a

$$(III.8.13) \quad \frac{d^p \Phi_2(t)}{dt^p} = \int_0^t G_p(t, u) dY(u),$$

il suffit d'établir la formule (III.8.12) dans l'hypothèse  $p = 0$ ; en effet la formule ainsi établie, appliquée à cette dérivée, équivaut à la formule générale qu'il s'agit de démontrer. Si d'ailleurs  $\alpha = 0$ , cette formule se réduit à la formule (III.8.9). Nous pouvons donc supposer  $p = 0$ ,  $0 < \alpha < 1$ .

Dans ces conditions  $G(t, u)$  est nul pour  $t = u$ , et, pour  $t - u$  positif et assez petit, c'est une fonction croissante et non convexe de  $t$ . En convenant que  $G(t, u) = 0$  si  $t < u$ , on a, pour  $\tau$  positif assez petit,

$$G(t + \tau, u) - G(t, u) \leq G(u + \tau, u) \sim \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} g(u, u) \quad (\tau \searrow 0).$$

D'autre part, quel que soit  $\varepsilon > 0$ , il existe presque sûrement un nombre  $\eta > 0$  tel que l'on ait, uniformément dans tout intervalle fini,

$$0 \leq \int_{t-\eta}^{t+\eta} |dY(u)| - |y(t)| < \varepsilon$$

et par suite, si  $\tau$  est  $\in (0, \eta)$  et tend vers zéro,

$$\begin{aligned} &\left| \int_{t-\eta}^{t+\tau} [G(t + \tau, u) - G(t, u)] dY(u) - G(u + \tau, u)y(t) \right| \\ &\leq \varepsilon \operatorname{Max}_{t-\eta \leq u \leq t+\eta} G(u + \tau, u) = \varepsilon O(\tau^\alpha). \end{aligned}$$

On a d'ailleurs, pour chaque  $\eta$  fixe

$$\int_0^{t-\eta} [G(t + \tau, u) - G(t, u)] dY(u) = O(\tau) = o(\tau^\alpha).$$

Il résulte alors de la formule (III.8.11), et de ce que  $\varepsilon$  est arbitrairement petit, que

$$\Phi_2(t + \tau) - \Phi_2(t) = \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} y(t) + o(\tau^\alpha),$$

ce qui est bien la formule à démontrer (pour  $p = 0$ ,  $0 < \alpha < 1$ ).

Le théorème à démontrer n'est d'ailleurs pas le plus général dans cet ordre d'idées; on peut par exemple remplacer  $(t - u)^\alpha$  par  $(t - u)^\alpha \lambda(t - u)$ ,  $\lambda(\tau)$  vérifiant la condition

$$\log \lambda(\tau) = o\left(\log \frac{1}{\tau}\right) \quad (\tau \rightarrow 0)$$

6°. Tout ce que nous venons de dire au sujet de  $\Phi_2(t)$  s'applique, sans changement essentiel à  $\Phi_3(t)$ , et même, dans des cas étendus, à  $\Phi_2(t) + \Phi_3(t)$ . Si en effet  $G(t, u)$  et  $H(t, u)$  sont, pour  $t - u$  très petit, du même ordre de grandeur, on peut appliquer directement le théorème III.8.1 à cette somme; dans la formule (III.8.12), le facteur dépendant de  $G(t, u)$  serait simplement remplacé par le facteur analogue relatif à  $H(t, u)$  si  $t$  est un point de discontinuité fixe de  $Z(u)$ . Si  $H(t, u) = o[G(t, u)]$  (toujours pour  $t - u$  très petit), on applique ce théorème d'abord pour déterminer  $Y(u)$  et  $\Phi_2(t)$ ;  $\Phi_3(t)$  en résulte, et une nouvelle application du même théorème donne  $S(u)$ . Si

$$G(t, u) = o[H(t, u)],$$

on détermine au contraire d'abord  $S(u)$  et  $\Phi_3(t)$ , ensuite  $\Phi_2(t)$  et  $Y(u)$ <sup>13</sup>.

Pour les fonctions  $\Phi(t)$  les plus générales, on a le théorème suivant, qui est presque évident.

**THÉORÈME III.8.2.** *Pour que la représentation (III.5.2) de  $\Phi(t)$  soit canonique, il faut et il suffit que la donnée de cette fonction dans n'importe quel intervalle  $(0, T)$  permette d'y déterminer  $\Phi_1(t)$ ,  $\Phi_2(t)$ ,  $\Phi_3(t)$  par des opérations linéaires, et que les représentations de ces trois fonctions soient séparément canoniques (donc propres ou semi-propres).*

Il est bien évident que l'ensemble de ces conditions est suffisant.

Réciproquement, si la représentation de  $\Phi(t)$  est canonique, cela signifie que

$$(III.8.14) \quad \int_0^t [F(t', u) dX(u) + G(t', u) dY(u) + H(t', u) dS(u)]$$

<sup>13</sup> Remarquons qu'on peut déterminer  $y(u)$  par la formule (III.8.12) en ne considérant qu'une suite particulière de valeurs de  $\tau = t - u$ . Or, pour chaque valeur de  $u$ , on peut toujours déterminer cette suite de manière à réaliser un des trois cas considérés. De même, si une formule du type (III.8.12) s'applique séparément à  $\Phi_2(t)$  et  $\Phi_3(t)$ , avec une même suite de valeurs de  $\tau$ , on pourra utiliser une suite partielle extraite de la précédente pour appliquer la même méthode à la détermination directe d'une des fonctions  $Y(u)$  et  $S(u)$  en fonction des valeurs de la somme  $\Phi_2(t) + \Phi_3(t)$ , et il en résulte que la représentation de cette somme, déduite des représentations données des deux termes, est canonique.

est, pour  $0 < t < t'$ , une fonction linéaire certaine des valeurs de  $\Phi(u)$  dans  $(0, t)$ . Or c'est une fonction additive de  $t$ , dans laquelle on peut séparer les trois termes par des opérations linéaires. On peut donc séparer  $\Phi_1(t)$ ,  $\Phi_2(t)$ , et  $\Phi_3(t)$ , et, en raison de l'indépendance de ces trois fonctions, les formules qui ont servi à déterminer les trois termes de la formule (III.8.14) ne font intervenir chacune qu'une de ces trois fonctions. Les conditions indiquées sont ainsi toutes vérifiées.

### III.9. Exemples, et remarques finales

1°. La recherche des conditions pour que  $\Phi(t)$  admette une représentation canonique, et celle des caractères qui permettent de reconnaître cette représentation, quand elle existe (problèmes qui sont d'ailleurs confondus dans le cas des fonctions sans terme laplacien, qui ne peuvent avoir qu'une représentation propre ou semi-propre facile à obtenir) se trouve décomposée par le théorème III.8.2 en quatre problèmes, dont trois ont déjà été étudiés et plus ou moins résolus. Il reste à étudier celui de l'addition de deux ou trois fonctions  $\Phi_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) ayant chacune une représentation canonique. Il y a a priori deux cas possibles: la représentation obtenue pour la somme est canonique, ou ne l'est pas. Nous allons montrer par des exemples que les deux cas sont effectivement possibles.

2°. Considérons d'abord la fonction

$$(III.9.1) \quad \Phi(t) = \Phi_1(t) + \Phi_3(t) = X_0(t) + \int_0^t (t - u) dS(u),$$

$X_0(t)$  étant toujours la fonction de Wiener, et les points de discontinuité  $u_\nu$  de  $S(u)$  pouvant être rangés en une suite de nombres qui croissent avec  $\nu$ . On sait que, si  $U_1(t)$  est la fonction continue égale à  $X_0(t)$  pour les points  $u_\nu$ , et variant linéairement dans tous les intervalles  $(u_\nu, u_{\nu+1})$ , les deux termes  $U_1(t)$  et  $U_2(t) = X_0(t) - U_1(t)$  dont  $X_0(t)$  est la somme sont indépendants. La somme  $U_2(t) + \Phi_3(t)$  est égale à  $\Phi(t)$  si  $t = u_\nu$ , et varie linéairement dans chacun des intervalles  $(u_\nu, u_{\nu+1})$ . Il en résulte évidemment que, si la fonction  $\Phi(t)$  est connue, sa variation dans un tel intervalle ne renseigne que sur  $U_1(t)$ . La suite des  $\Phi(u_\nu)$  donne seule des renseignements sur  $U_2(t)$  et  $\Phi_3(t)$ .

Si nous posons

$$X_0(u_{\nu+1}) - X_0(u_\nu) = \xi_\nu \sqrt{u_{\nu+1} - u_\nu}, \quad S(u_{\nu+0}) - S(u_\nu - 0) = Y_\nu,$$

la donnée de  $\Phi(u_1), \Phi(u_2), \dots, \Phi(u_{n+1})$  ne donne que  $n + 1$  équations dans lesquelles  $\xi_n$  et  $Y_n$  n'interviennent que par la combinaison

$$(III.9.2) \quad \xi_n \sqrt{u_{n+1} - u_n} + Y_n(u_{n+1} - u_n).$$

Or  $\xi_n$  est une variable laplacienne, pour laquelle tous les nombres réels sont des valeurs possibles. Quelle que soit la loi de  $Y_n$ , les valeurs a priori possibles pour cette variable restent donc possibles quand on connaît la somme (III.9.2). La donnée de  $\Phi(t)$  dans l'intervalle  $(0, t_{n+1})$  ne peut donc pas suf-

fire à déterminer séparément  $\xi_n$  et  $Y_n$  ; on ne peut donc pas déterminer séparément  $X_0(u)$  et  $S(u)$ , et la représentation (III.9.1) de  $\Phi(t)$  n'est pas canonique.

Observons, au sujet de cette fonction, qu'elle appartient à la classe  $K$  si les  $Y_v$  sont des variables laplaciennes, et seulement dans ce cas.

3°. Un exemple analogue est celui de la fonction

$$(III.9.3) \quad \Phi(t) = \Phi_1(t) + \Phi_2(t) = X_0(t) + \int_0^t (t-u) dY(u),$$

pourvu que le nombre probable des sauts soit fini dans tout intervalle fini. On peut en effet déterminer les  $u_v$  en déterminant d'abord les sauts  $u_h^*$  d'une fonction  $Y^*(u)$  définie comme  $Y(u)$ , mais en remplaçant  $\mathbf{n}(t, u)$  par  $2 \mathbf{n}(t, u)$ . On pourra alors déterminer  $Y(u)$  en se donnant d'abord  $Y^*(u)$ , puis en déterminant par un tirage au sort ceux des sauts de  $Y^*(u)$  qui doivent être conservés. Avant cette deuxième opération chaque  $y(u_h^*)$  a deux valeurs possibles, 0, et  $y^*(u_h^*)$ , et on retombe sur le cas étudié au 2°. Donc, si  $Y^*(u)$  est connu, et a fortiori si  $Y^*(u)$  est inconnu, la donnée de  $\Phi(t)$  ne suffit pas à déterminer  $Y(u)$ .

4°. Le théorème III.8.1 donne le moyen d'obtenir au contraire des représentations canoniques du type  $\Phi_1(t) + \Phi_2(t)$ . Il n'y a qu'à associer à une fonction  $\Phi_2(t)$  vérifiant les conditions de ce théorème une fonction  $\Phi_1(t)$  presque sûrement  $p$  fois dérivable et telle que

$$(III.9.4) \quad \frac{d^p}{dt^p} [\Phi_1(t + \tau) - \Phi_1(t)] = o(\tau^{\alpha-p}).$$

Alors la formule (III.8.12) subsiste si on remplace  $\Phi_2(t)$  par  $\Phi_1(t) + \Phi_2(t)$ . Il en résulte que, si cette somme  $\Phi(t)$  est connue dans  $(0, T)$ ,  $Y(u)$  y est connu; on en déduit  $\Phi_2(t)$ , puis  $\Phi_1(t)$ , et, si la représentation de  $\Phi_1(t)$  est canonique, celle de  $\Phi(t)$  l'est aussi.

Comme exemple de fonction  $\Phi_1(t)$  vérifiant la condition (III.9.4), indiquons tout de suite la fonction

$$(III.9.5) \quad \Phi_1(t) = \int_0^t (t-u)^\beta \xi_u \sqrt{du} \quad (\beta > \alpha - \frac{1}{2}).$$

Mais nous allons voir qu'on peut généraliser beaucoup ce résultat.

5°. Considérons d'abord une fonction  $\Phi(t)$  admettant presque sûrement et partout [au moins dans un intervalle  $(0, T)$ ] des dérivées continues jusqu'à l'ordre  $p$ , mais non jusqu'à l'ordre  $p + 1$ . Si elle est connue jusqu'à l'instant  $t_0$ , ces dérivées sont connues aussi à l'instant  $t_0$ , et, pour  $\tau = t - t_0$  positif et très petit, une série de Taylor réduite aux termes de degrés  $\leq p$  en donne une valeur approchée. Le reste  $R(t_0, \tau)$  est  $o(\tau^p)$ , mais n'est pas  $o(\tau^{p+1})$  (ou du moins il y a une probabilité positive qu'il ne le soit pas). C'est ce reste, ou un infiniment petit équivalent et plus simple, que nous appellerons la *partie singulière* de  $\Phi(t)$  à droite du point  $t_0$ . Les restes relatifs aux fonctions  $\Phi_i(t)$  seront désignés par  $R_i(t_0, \tau)$ .

L'introduction de cette notion de partie singulière rend assez intuitifs les résultats du n° III.8.5° et 6°. Si  $\Phi_2(t)$  est défini par sa représentation propre ou semi-propre, des conditions assez peu restrictives suffisent pour que

$$(III.9.6) \quad R_2(t, \tau) = G(t + \tau, t) [Y(t + \tau) - Y(t) + o(1)] \quad (\tau \searrow 0),$$

et un énoncé analogue s'applique à  $R_3(t, \tau)$ . On peut ainsi, dans des cas très étendus, non seulement déduire  $Y(u)$  de  $\Phi_2(t)$  et  $S(u)$  de  $\Phi_3(t)$ , mais déduire à la fois  $Y(u)$  et  $S(u)$  de la somme  $\Phi_2(t) + \Phi_3(t)$ .

La formule qui définit  $R_1(t, \tau)$  est très différente de la précédente. Supposons, pour fixer les idées, le noyau  $F(t, u)$  continu et admettant par rapport à  $t$  des dérivées continues jusqu'à l'ordre  $p$ , ce noyau et ses  $p - 1$  dérivées s'annulant avec  $t - u$  et la dérivée d'ordre  $p$  ne s'annulant pas et pouvant même être infinie. On peut alors, si  $\omega(u)$  n'est pas constant dans un petit intervalle à droite du point considéré, définir  $R_1(t, \tau)$ , ou du moins son ordre de grandeur, par la formule

$$R_1(t, \tau) \sim \int_t^{t+\tau} F(t + \tau, u) dX(u),$$

c'est-à-dire que cette partie singulière a le même ordre de grandeur que la partie de  $\Phi_1(t + \tau)$  qui reste aléatoire quand  $X(u)$  est connu dans  $(0, t)$ . Son ordre de grandeur probable est celui de l'écart type  $\sigma(t, \tau)$ , défini par

$$\sigma^2(t, \tau) = \int_t^{t+\tau} F^2(t + \tau, u) d\omega(u).$$

Sans faire intervenir une borne supérieure presque sûre de  $R_1(t, \tau)$ , rappelons que cet ordre de grandeur est presque sûrement réalisé, pour une suite de nombres  $\tau_n$  tendant assez rapidement vers zéro, avec une fréquence tendant vers l'unité. Il suffit donc que  $\sigma(t, \tau)$  soit à la fois  $o[G(t + \tau, t)]$  et

$$o[H(t + \tau, t)]$$

pour que l'addition du terme  $\Phi_1(t)$  n'empêche pas de déduire  $Y(u)$  et  $S(u)$  de  $\Phi(t)$ , donc aussi  $\Phi_1(t)$ , et  $X(u)$ , si la représentation de  $\Phi_1(t)$  est canonique. Il faudra seulement remplacer les formules du type (III.8.12) par des formules comportant des limites généralisées convenablement définies. Par exemple, dans le cas de la fonction (III.9.5), on pourra former un moyenne de Cesàro sur l'échelle logarithmique.

On peut même déduire de l'emploi de ces moyennes que les conditions

$$\sigma(t, \tau) = O[G(t + \tau, t)], \quad \sigma(t, \tau) = O[H(t + \tau, \tau)]$$

(pour  $t$  fixe et  $\tau \searrow 0$ ) sont suffisantes pour que l'addition de  $\Phi_1(t)$  n'empêche pas la détermination de  $Y(u)$  et  $S(u)$  par des formules linéaires quand  $\Phi(t)$  est connu. Ainsi la formule

$$\Phi(t) = \int_0^t \xi_u \sqrt{du} + \int_0^t (t - u)^\alpha dY(u)$$

est une représentation canonique, non seulement si  $\alpha < \frac{1}{2}$ , mais aussi si  $\alpha = \frac{1}{2}$ . Nous avons vu au n° III.9.3° que le résultat ne subsiste pas pour  $\alpha = 1$ , et on peut déduire du théorème II.4 qu'il ne subsiste pas pour  $\alpha > \frac{1}{2}$ . Par suite, certaines conditions de régularité étant admises<sup>14</sup>, l'emploi de moyennes généralisées ne semble pas loin de donner les meilleurs résultats possibles relatifs à l'extension du théorème III.8.1 aux fonctions  $\Phi(t)$  contenant un terme  $\Phi_1(t)$ .

## BIBLIOGRAPHIE

1. G. DARMOIS, *Analyse générale des liaisons stochastiques*, Revue de l'Institut international de statistique, 1953, pp. 2-8.
2. M. FRÉCHET, *Généralisation de la loi de probabilité de Laplace*, Annales de l'Institut Henri Poincaré, t. 12 (1951), pp. 1-29.
3. P. LÉVY, *Wiener's random function and other Laplacian random functions*, Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, held 1950, printed 1951, pp. 171-187.
4. ———, *Random functions: general theory with special reference to Laplacian random functions*, University of California Publications in Statistics, vol. 1 (1953), pp. 331-390.
5. ———, *A special problem of Brownian motion, and a general theory of Gaussian random functions*, Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, held 1955, printed 1956, vol. 2, pp. 133-175.
6. ———, *Sur une classe de courbes de l'espace de Hilbert et sur une équation intégrale non linéaire*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., t. 73 (1956), pp. 121-156.
7. ———, *Sur quelques problèmes de la théorie des liaisons stochastiques*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 244 (1957), pp. 1313-1316.
8. G. MARUYAMA, *The harmonic analysis of stationary stochastic processes*, Mem. Fac. Sci. Kyūsyū Univ. A, vol. 4 (1949), pp. 45-106.

## PARIS, FRANCE

---

<sup>14</sup> Des remarques analogues à celles de la note<sup>13</sup> montrent que les conditions de régularité ne sont pas aussi essentielles qu'on pourrait le penser, du moins pour une des parties de l'énoncé: le caractère canonique peut s'établir en ne considérant qu'une suite partielles de valeurs de  $\tau = t - u$ , et la régularité de  $G(u + \tau, u)$  n'est pas nécessaire.