

Volumes de Fano faibles obtenus par éclatement d'une courbe de \mathbf{P}^3

Jean D'Almeida

Résumé Une variété de Fano faible est une variété admettant un diviseur anticanonique gros et numériquement effectif. On donne une caractérisation des volumes de Fano faibles obtenus par éclatement d'une courbe de \mathbf{P}^3 . Le résultat est optimal.

Abstract We characterize smooth curves in \mathbf{P}^3 whose blowup produces a threefold with big and nef anticanonical divisor.

1. Introduction

L'éclaté de d points de \mathbf{P}^2 donne une surface de del Pezzo (diviseur anticanonique ample) si et seulement si les points vérifient les conditions suivantes :

- (i) Le nombre de points est au plus huit.
- (ii) Trois points quelconques ne sont pas alignés, six points quelconques ne sont pas sur une même conique, les huit points ne sont pas sur une cubique singulière en l'un des points.

L'éclaté de d points de \mathbf{P}^2 donne une surface de del Pezzo faible (diviseur anticanonique gros et numériquement effectif) si et seulement si les points vérifient les conditions suivantes :

- (i) Le nombre de points est au plus huit.
- (ii) Quatre points quelconques ne sont pas alignés et sept points quelconques ne sont pas sur une même conique.

On s'intéresse au problème analogue en considérant l'éclatement X d'une courbe lisse irréductible de degré d et de genre g de \mathbf{P}^3 . On dit que X est un volume de Fano si le diviseur anticanonique $-K_X$ est ample. On dit que X est un volume de Fano faible si le diviseur anticanonique $-K_X$ est gros et numériquement effectif. J. Blanc et S. Lamy [1] ont obtenu le résultat suivant.

THÉORÈME 1.1

Soit X l'éclatement d'une courbe lisse irréductible de degré d et de genre g de \mathbf{P}^3 .

La variété X est faiblement Fano si et seulement si l'une des conditions suivantes est réalisée :

- (a) $(g, d) \in A_1 = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (1, 3), (1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 6)\}$.
- (b) $(g, d) \in A_2 = \{(1, 5), (5, 7), (10, 9)\}$ et la courbe n'a pas de quadrisécante.
- (c) $(g, d) \in A_3 = \{(0, 5), (0, 6), (1, 6), (2, 6), (3, 4), (3, 7), (4, 7), (6, 7), (7, 8), (9, 8), (9, 9), (12, 10), (19, 12)\}$ et la courbe n'a pas de quintisécante et est tracée sur une surface quartique lisse.
- (d) $(g, d) \in A_4 = \{(0, 7), (1, 7), (2, 7), (2, 8), (3, 8), (4, 8), (5, 8), (6, 9), (7, 9), (8, 9), (10, 10), (11, 10), (14, 11)\}$ et la courbe n'a pas de quintisécante, pas de conique 9-sécante, pas de cubique gauche 13-sécante et est tracée sur une surface quartique lisse.

Nous allons montrer que l'on peut se passer des hypothèses relatives à la conique, la cubique gauche et la surface quartique lisse. On va montrer qu'il suffit dans les cas (c) et (d) de supposer que la courbe n'a pas de quintisécante.

Voici les grandes lignes de la preuve. On montrera que l'idéal de la courbe est engendré par des surfaces de degré 4. Si toutes ces surfaces étaient singulières, elles auraient un point singulier commun (Bertini). Il existe donc une surface quartique lisse contenant la courbe. Il ne peut y avoir de conique 9-sécante ni de cubique gauche 13-sécante à la courbe car (Bezout) elles seraient contenues dans toute surface quartique contenant la courbe.

Je tiens à remercier le rapporteur pour le travail extrêmement minutieux qu'il a effectué.

2. Notations et rappels

On considère la suite exacte $0 \rightarrow I_{C/\mathbf{P}^r} \rightarrow O_{\mathbf{P}^r} \rightarrow O_C \rightarrow 0$ où $O_{\mathbf{P}^r}$ désigne le faisceau structural de l'espace projectif de dimension r sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle et I_{C/\mathbf{P}^r} le faisceau d'idéaux définissant une courbe C dans \mathbf{P}^r . Cette suite exacte induit une suite exacte longue de cohomologie. On notera $h^i(F)$ la dimension du groupe de cohomologie $H^i(F)$.

2.1. Régularité et multiséchantes

Un faisceau cohérent F sur \mathbf{P}^r est dit m -régulier si $h^i(F(m-i)) = 0$ pour $i > 0$. Si F est m -régulier alors F est $(m+1)$ -régulier et $F(m)$ est engendré par ses sections globales. On considère une courbe lisse C irréductible de degré d et de genre g de \mathbf{P}^r . On suppose que la courbe n'est pas contenue dans un hyperplan. On dira que la courbe C est m -régulière si son faisceau d'idéaux I_{C/\mathbf{P}^r} est m -régulier. La courbe C est $(d+2-r)$ -régulière (voir [5]). La courbe est $(d+1-r)$ -irrégulière si et seulement si C est rationnelle et a une $(d+2-r)$ -sécante (voir [5]).

Pour $r = 3$ et si l'une des conditions suivantes est réalisée : $d = 7$ et $g > 1$, $d = 9$ et $g > 0$ ou $d \geq 10$, on a l'équivalence entre $h^1(I_{C/\mathbf{P}^3}(d-4)) \neq 0$ et l'existence d'une $(d-2)$ -sécante à la courbe C (voir [2]).

Si la courbe est tracée sur une surface de degré inférieur ou égal à trois alors la condition $h^1(I_{C/\mathbf{P}^3}(n)) \neq 0$ implique que la courbe a une $(n+2)$ -sécante

(voir [3]). La réciproque est vraie avec l'hypothèse supplémentaire $n > d/2 - 1$ (voir [3]).

2.2. Liaison

Soient C et C' deux courbes de \mathbf{P}^3 de degrés d et d' et de genres arithmétiques g et g' . On suppose qu'elles sont liées par deux surfaces S et T de degrés s et t (voir [9]). On a $C \cup C' = S \cap T$. On a $g - g' = (s + t - 4)(d - d')/2$ et $g(C \cup C') = g + g' - 1 + i$ où i est le nombre d'intersection de C et C' . D' une résolution localement libre

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow I_{C/P^3} \rightarrow 0$$

on déduit une résolution localement libre

$$0 \rightarrow B^*(-s-t) \rightarrow A^*(-s-t) \oplus O_{P^3}(-s) \oplus O_{P^3}(-t) \rightarrow I_{C'/P^3} \rightarrow 0$$

où $*$ désigne le dual.

2.3. Genre maximum d'une courbe non contenue dans une surface de bas degré

On utilisera le résultat suivant [7] and [6] :

On note $G(d, s) = \max\{g(C), C \subset \mathbf{P}^3, \text{ courbe lisse irréductible de degré } d \text{ non contenue dans une surface de degré } < s\}$ où $g(C)$ désigne le genre de la courbe C .

(1) Si $s(s-1) < d$, $G(d, s) = 1 + [d(d+s^2-4s) - r(s-r)(s-1)]/2s$, $d+r \equiv 0(s)$, $0 \leq r < s$. On a $g(C) = G(d, s)$ si et seulement si C est liée à une courbe plane de degré r par des surfaces de degrés s et $(d+r)/s$.

(2) Si $s^2 - 2s + 3 \leq d \leq s(s-1)$, alors $G(d, s) = s^3 - 5s^2 + 9s - 6 + \nu(\nu + 2 - s - 3)/2$ où $\nu = d - (s^2 - 2s + 3)$. Si $g(C) = G(d, s)$ la courbe C est arithmétiquement normale tracée sur une surface de degré s .

(3) Si $s^2 - 2s + 2 = d$ alors $G(d, s) = 1 + (s-3)d$. On a $g(C) = G(d, s)$ si et seulement si C est la courbe des zéros d'une section de $E(s-1)$ où E est un fibré de corrélation nulle ($\text{rang}(E) = 2$, E stable, $c_1(E) = 0$, $c_2(E) = 1$).

2.4. Résolutions graduées minimales

On utilisera aussi des résultats relatifs aux résolutions graduées minimales (voir [8]). Si $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ est une fonction, on définit la différence première ∂f par $\partial f(n) = f(n) - f(n-1)$. Soit C une courbe lisse irréductible de degré d et de genre g de \mathbf{P}^3 . On pose $\gamma(n) = \partial^3 h^0(I_{C/P^3}(n)) - 1$ pour $n \geq 0$. Si on considère une résolution graduée minimale

$$0 \rightarrow \bigoplus_{n \geq 0} O_{P^3}^{a(n)}(-n) \rightarrow \bigoplus_{n \geq 0} O_{P^3}^{b(n)}(-n) \rightarrow \bigoplus_{n \geq 0} O_{P^3}^{c(n)}(-n) \rightarrow I_{C/P^3} \rightarrow 0$$

on pose $r(n) = a(n) - b(n) + c(n)$. On a alors $r = \partial \gamma$ et $d = \frac{-1}{2} \sum_n n^2 r(n)$ et $g - 1 = \frac{-1}{6} \sum_n n^3 r(n) + \sum_n n^2 r(n)$. On a $\max\{n/c(n) \neq 0\} \leq \min\{n/b(n) \neq 0\}$ et $\max\{n/b(n) \neq 0\} \leq \min\{n/a(n) \neq 0\}$.

Ceci impose de très fortes contraintes aux valeurs des entiers $a(n), b(n)$ et $c(n)$.

2.5. Groupes de points de \mathbf{P}^2

On utilisera enfin le résultat suivant : voir [4].

On considère un groupe de points Z de degré d de \mathbf{P}^2 . On note $\tau = \max\{n, h^1(I_{Z/\mathbf{P}^2}(n)) \neq 0\}$. Si $\tau \geq d/3$ le groupe de points vérifie l'une des conditions suivantes :

- (1) Il y a $\tau + 2$ points alignés ;
- (2) Il y a $2\tau + 2$ ou $2\tau + 3$ points sur une conique ;
- (3) $\tau = d/3$ et le groupe de points est intersection complète d'une cubique et d'une courbe de degré τ .

Notre objectif sera de déterminer la résolution de la courbe et de montrer (sauf dans un cas) que $c(n) = 0$ pour $n > 4$. On obtiendra alors la surface quartique lisse et on écartera la conique 9-sécante et la cubique gauche 13-sécante.

3. Le théorème

On cherche à caractériser les courbes lisses irréductibles de degré d et de genre g de \mathbf{P}^3 dont l'éclatement produit un volume faiblement Fano. On considère les ensembles suivants :

$$B_1 = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 5), (3, 6), (4, 6), (19, 12)\},$$

$$B_2 = \{(5, 7), (10, 9)\},$$

$$B_3 = \{(0, 5), (0, 6), (1, 6), (2, 6), (3, 4), (3, 7), (4, 7), (6, 7), (7, 8), (9, 8), (9, 9), (12, 10), (0, 7), (1, 7), (2, 7), (2, 8), (3, 8), (4, 8), (5, 8), (6, 9), (7, 9), (8, 9), (10, 10), (11, 10), (14, 11)\}.$$

THÉORÈME 3.1

Soit C une courbe lisse irréductible de degré d et de genre g de \mathbf{P}^3 . L'éclatement de \mathbf{P}^3 le long de C est une variété de Fano faible si et seulement si l'une des conditions suivantes est réalisée :

- (i) $(g, d) \in B_1$,
- (ii) $(g, d) \in B_2$ et C ne contient pas quatre points alignés,
- (iii) $(g, d) \in B_3$ et C ne contient pas cinq points alignés.

Preuve

On remarque d'abord que le couple $(1, 5)$ apparaît dans le théorème de [1] dans l'ensemble A_2 . Or une courbe elliptique de degré cinq ne peut avoir de quadrisécante. Elle serait rationnelle ! Il suffit de considérer le pinceau de plans contenant la quadrisécante. De même le couple $(19, 12)$ apparaît dans le théorème de [1] dans l'ensemble A_3 . Or une courbe de degré 12 et de genre 19 est une intersection complète d'une surface cubique et d'une surface quartique. Deux preuves de ce fait sont données à la fin de l'article. La courbe ne peut donc pas avoir de 5-sécante.

Nous devons donc montrer que pour $(g, d) \in B_3$, si la courbe n'a pas de 5-sécante alors elle est tracée sur une surface quartique lisse et n'a pas de conique 9-sécante ni de cubique gauche 13-sécante.

La stratégie sera de déterminer la résolution graduée minimale de la courbe. On constatera sauf dans un cas que l'idéal de la courbe est engendré par des surfaces quartiques. Si toutes ces quartiques étaient singulières, elles seraient singulières en un même point et la courbe C serait singulière. Le fait que l'idéal de la courbe soit engendré par des quartiques écarte aussi la possibilité d'avoir une conique 9-sécante ou une cubique gauche 13-sécante car ces courbes seraient contenues dans toute surface quartique contenant C . La méthode utilisée est la suivante. Il faut d'abord déterminer les entiers $h^0(I_{C/P^3}(n))$. C'est la principale difficulté. On utilise pour cela les résultats relatifs à la régularité et aux multisécantes, les techniques de liaison, les informations sur le genre maximum d'une courbe non contenue dans une surface de bas degré et les résultats relatifs au groupe de points obtenu en considérant une section de la courbe par un plan général. Il faut ensuite calculer les différences successives pour obtenir les entiers $r(n)$ introduits dans le paragraphe 2.4. La dernière étape est l'obtention des entiers $a(n), b(n)$ et $c(n)$. Ces entiers sont soumis à de fortes contraintes. On doit en particulier retrouver les entiers $h^0(I_{C/P^3}(n))$ à partir de la résolution. On peut donc conclure après quelques vérifications qui ne présentent aucune difficulté et qui sont, selon l'expression consacrée, laissées au lecteur indulgent.

Il faut passer en revue les différents cas :

d ≤ 5

La courbe est 4-régulière (voir [5]).

d = 6

Si la courbe n'a pas de 5-sécante, elle est 4-régulière (voir [5]).

d = 7, g ≥ 2

La courbe est 4-régulière s'il n'y a pas de 5-sécante (voir [2]).

d = 7, g = 0

Si la courbe est tracée sur une surface de degré inférieur ou égal à trois, elle a une 5-sécante car $h^1(I_{C/P^3}(3)) \neq 0$ (voir [3]). On suppose qu'il n'y a pas de 5-sécante. La courbe est 5-régulière (voir [5]). On a $h^1(I_C(t)) = 0$ pour $t \geq 4$. On a $h^0(I_C(4)) = 6, h^0(I_C(5)) = 20, h^0(I_C(6)) = 41, h^0(I_C(7)) = 70$. On calcule les différences successives et on obtient $r(4) = 6, r(5) = -4, r(6) = -3, r(7) = 2$. On en déduit la résolution

$$0 \rightarrow O_{P^3}^2(-7) \rightarrow O_{P^3}^3(-6) \oplus O_{P^3}^4(-5) \rightarrow O_{P^3}^6(-4) \rightarrow I_{C/P^3} \rightarrow 0.$$

d = 7, g = 1

Si la courbe est tracée sur une surface de degré trois, elle a une 5-sécante (voir [3]). On suppose qu'il n'y a pas de 5-sécante. La courbe est 5-régulière (voir [5]). On a $h^1(I_C(t)) = 0$ pour $t \geq 4$. On a $h^0(I_C(4)) = 7, h^0(I_C(5)) = 21, h^0(I_C(6)) = 42, h^0(I_C(7)) = 71$. On obtient $r(4) = 7, r(5) = -7, r(6) = 0, r(7) = 1$ et la résolution

$$0 \rightarrow O_{P^3}(-7) \rightarrow O_{P^3}^7(-5) \rightarrow O_{P^3}^7(-4) \rightarrow I_{C/P^3} \rightarrow 0.$$

d = 8, g = 2

Si la courbe est tracée sur une surface cubique, elle a une 5-sécante (voir [3]). S'il n'y a pas de 5-sécante, $h^1(I_C(4)) = 0$ (voir [2]). On a $h^0(I_C(4)) = 4, h^0(I_C(5)) = 17, h^0(I_C(6)) = 37, h^0(I_C(7)) = 65$. On obtient $r(4) = 4, r(5) = 1, r(6) = -7, r(7) = 3$ et la résolution est

$$0 \rightarrow O_{P^3}^3(-7) \rightarrow O_{P^3}^7(-6) \rightarrow O_{P^3}(-5) \oplus O_{P^3}^4(-4) \rightarrow I_C/P^3 \rightarrow 0.$$

Il faut ici un argument supplémentaire puisqu'il y a une surface quintique parmi les générateurs de l'idéal. Si toutes les surfaces quartiques étaient singulières, elles seraient singulières en un même point. On note F_1, F_2, F_3, F_4 les quatre surfaces quartiques et G la surface quintique. Si la surface G était aussi singulière en ce point, alors ce serait un point de C et un point singulier de C . Ce serait absurde. On peut toujours se ramener à cette situation en remplaçant G par $G + L_1F_1 + L_2F_2 + L_3F_3 + L_4F_4$ où les L_i sont des formes linéaires convenablement choisies. La courbe est donc tracée sur une surface quartique lisse. La courbe n'a pas de conique 9-sécante sinon elle aurait neuf points dans un plan. C'est impossible puisqu'elle est de degré huit. On suppose que la courbe a une cubique gauche 13-sécante. On utilise les résultats du paragraphe 2.2. On considère deux surfaces quartiques lisses contenant la courbe. L'intersection résiduelle est une courbe de degré 8 et de genre arithmétique 2. Le genre arithmétique π de l'intersection complète de deux surfaces de degré s et t vérifie $2\pi - 2 = st(s + t - 4)$. L'intersection des deux surfaces quartiques a donc un genre arithmétique égal à 33. La courbe C et la courbe résiduelle ont donc 30 points communs. Si la courbe C admet une cubique gauche 13-sécante alors la courbe résiduelle est la réunion de cette cubique gauche et d'une courbe de degré 5 et de genre 2 qui rencontre la courbe C en $17 = 30 - 13$ points. Cette courbe de degré 5 est sur une quadrique. Cette quadrique contiendrait donc 17 points de la courbe C . Elle contiendrait donc la courbe C par Bezout. C'est impossible.

d = 8, g = 3

Si la courbe est sur une surface cubique il y a une 5-sécante. S'il n'y a pas de 5-sécante alors $h^1(I_C(4)) = 0$ (voir [2]). On a $h^0(I_C(4)) = 5, h^0(I_C(5)) = 18, h^0(I_C(6)) = 38, h^0(I_C(7)) = 66$. On obtient $r(4) = 5, r(5) = -2, r(6) = -4, r(7) = 2$ et la résolution est

$$0 \rightarrow O_{P^3}^2(-7) \rightarrow O_{P^3}^4(-6) \oplus O_{P^3}^2(-5) \rightarrow O_{P^3}^5(-4) \rightarrow I_C/P^3 \rightarrow 0.$$

d = 8, g = 4

Si la courbe est sur une surface cubique il y a une 5-sécante. S'il n'y a pas de 5-sécante on a $h^1(I_C(4)) = 0$. On a alors $h^0(I_C(4)) = 6, h^0(I_C(5)) = 19, h^0(I_C(6)) = 39, h^0(I_C(7)) = 67$. On obtient $r(4) = 6, r(5) = -5, r(6) = -1, r(7) = 1$ et la résolution est

$$0 \rightarrow O_{P^3}(-7) \rightarrow O_{P^3}(-6) \oplus O_{P^3}^5(-5) \rightarrow O_{P^3}^6(-4) \rightarrow I_C/P^3 \rightarrow 0.$$

d = 8, g = 5

Si la courbe est tracée sur une surface cubique on a une 5-sécante car on aurait $h^1(I_C(3)) \neq 0$ (voir [3]). Si la courbe n'est pas tracée sur une surface de degré

inférieur ou égal à trois, la résolution est [6] :

$$0 \rightarrow O_{P^3}^2(-6) \rightarrow O_{P^3}^8(-5) \rightarrow O_{P^3}^7(-4) \rightarrow I_C/P^3 \rightarrow 0.$$

d = 8, g = 6

La courbe n'est pas sur une quadrique. Elle est sur une surface cubique. Elle est sur seule surface cubique sinon elle serait liée à une droite par deux surfaces cubiques et serait de genre 7 (voir paragraphe 2.2). S'il n'y a pas de 5-sécante alors $h^1(I_C(4)) = 0$ (voir [2]). On a $h^0(I_C(3)) = 1, h^0(I_C(4)) = 8, h^0(I_C(5)) = 21, h^0(I_C(6)) = 41$. On obtient $r(3) = 1, r(4) = 4, r(5) = -5, r(6) = 1$ et la résolution est

$$0 \rightarrow O_{P^3}(-6) \rightarrow O_{P^3}^5(-5) \rightarrow O_{P^3}^4(-4) \oplus O_{P^3}(-3) \rightarrow I_C/P^3 \rightarrow 0.$$

d = 8, g = 7

La courbe n'est pas tracée sur une quadrique. On a $s = 3$ et $G(8, 3) = 7$ (voir [7], [6] et paragraphe 2.3). La courbe est liée à une droite par deux surfaces cubiques. La résolution est

$$0 \rightarrow O_{P^3}^2(-5) \rightarrow O_{P^3}(-4) \oplus O_{P^3}^2(-3) \rightarrow I_C/P^3 \rightarrow 0.$$

d = 8, g = 9

La courbe est l'intersection complète d'une quadrique et d'une quartique. La résolution est

$$0 \rightarrow O_{P^3}(-6) \rightarrow O_{P^3}(-4) \oplus O_{P^3}(-2) \rightarrow I_C/P^3 \rightarrow 0.$$

d = 9, g = 6

Si la courbe est tracée sur une surface de degré inférieur ou égal à trois il y a une 5-sécante (voir [3]). S'il n'y a pas de 5-sécante on a $h^1(I_C(5)) = 0$ (voir [2]). On a $h^0(I_C(4)) = c(4) \geq 4, h^0(I_C(5)) = 16, h^0(I_C(6)) = 35, h^0(I_C(7)) = 62, h^0(I_C(8)) = 98$. On obtient $r(4) = c(4), r(5) = 16 - 4c(4), r(6) = 6c(4) - 29, r(7) = 18 - 4c(4), r(8) = c(4) - 4$. De $c(4) \geq 5$ on déduit $b(5) > 0$ et $c(6) > 0$. C'est impossible. On a donc $c(4) = 4$ et on obtient la résolution

$$0 \rightarrow O_{P^3}^2(-7) \rightarrow O_{P^3}^5(-6) \rightarrow O_{P^3}^4(-4) \rightarrow I_C \rightarrow 0.$$

d = 9, g = 7

Si la courbe est sur une surface cubique il y a une 5-sécante. S'il n'y a pas de 5-sécante on a $h^1(I_C(5)) = 0$. On a $h^0(I_C(4)) = c(4) \geq 5, h^0(I_C(5)) = 17, h^0(I_C(6)) = 36, h^0(I_C(7)) = 63, h^0(I_C(8)) = 99$. On obtient $r(4) = c(4) \geq 5, r(5) = 17 - 4c(4), r(6) = 6c(4) - 32, r(7) = 21 - 4c(4), r(8) = c(4) - 5$. De $c(4) \geq 6$ on déduit $b(5) > 0$ et $c(6) > 0$. C'est impossible. On a donc $c(4) = 5$ et la résolution est

$$0 \rightarrow O_{P^3}(-7) \rightarrow O_{P^3}^2(-6) \oplus O_{P^3}^3(-5) \rightarrow O_{P^3}^5(-4) \rightarrow I_C/P^3 \rightarrow 0.$$

d = 9, g = 8

Si la courbe est sur une surface cubique il y a une 5-sécante. S'il n'y a pas de 5-sécante alors $h^1(I_C(5)) = 0$. On a alors $h^0(I_C(4)) = c(4) \geq 6, h^0(I_C(5)) = 18, h^0(I_C(6)) = 37, h^0(I_C(7)) = 64$. On obtient $r(4) = c(4), r(5) = 18 - 4c(4),$

$r(6) = 6c(4) - 35, r(7) = 24 - 4c(4)$. On suppose que $c(4) > 6$. On sait que $c(7) = 0$ puisque la courbe est 6-régulière. On a donc $r(7) = a(7) - b(7) \leq -4$ et donc $b(7) \geq 4$. Il en résulte que $a(6) \neq 0$. Donc $r(6) = -b(6) + c(6) \geq 7$. On a alors $c(6) \geq 7$. Mais alors $r(5) = a(5) - b(5) + c(5) < 0$ implique que $b(5) \neq 0$ car $a(5) = 0$. On a alors $c(6) \neq 0$ et $b(5) \neq 0$. C'est impossible. On a donc $c(4) = 6$ et la résolution est

$$0 \rightarrow O_{P^3}(-6) \rightarrow O_{P^3}^6(-5) \rightarrow O_{P^3}^6(-4) \rightarrow I_C/P^3 \rightarrow 0.$$

d = 9, g = 9

La courbe n'est pas sur une quadrique. Elle est sur une surface cubique (une seule sinon elle serait intersection complète de deux surfaces cubiques et serait de genre 10). La courbe est liée à une cubique gauche par une surface cubique et une surface quartique (voir paragraphe 2.2). La résolution est

$$0 \rightarrow O_{P^3}^3(-5) \rightarrow O_{P^3}^3(-4) \oplus O_{P^3}(-3) \rightarrow I_C/P^3 \rightarrow 0.$$

d = 10, g = 10

Si la courbe est sur une surface cubique il y a une 5-sécante. S'il n'y a pas de 5-sécante on a $h^1(I_C(6)) = 0$ (voir [2]). On a $h^0(I_C(4)) = 4 + a, a \geq 0, h^0(I_C(5)) = 15 + b, b \geq 0, h^0(I_C(6)) = 33, h^0(I_C(7)) = 59, h^0(I_C(8)) = 94$. On obtient $r(4) = 4 + a, r(5) = -1 + b - 4a, r(6) = 6a - 4b - 3, r(7) = 6b - 4a + 1, r(8) = -4b + a$. On remarque d'abord que $b \leq a$ sinon en considérant un plan général H de \mathbf{P}^3 on aurait la suite exacte $H^1(I_C(4)) \rightarrow H^1(I_C(5)) \rightarrow H^1(I_{C \cap H/H}(5))$ déduite de $0 \rightarrow I_C(-1) \rightarrow I_C \rightarrow I_{C \cap H/H} \rightarrow 0$. On aurait alors $H^1(I_{C \cap H/H}(5)) \neq 0$. Il en résulterait que le groupe de points $C \cap H$ contient 7 points alignés [4] (voir paragraphe 2.5). C'est absurde. Si $a = 1$ et $b = 1$ on a $r(8) = -3, r(7) = 3, r(6) = -1, r(5) = -4, r(4) = 5$. La courbe est 7-régulière donc $c(8) = 0$ et $b(8) \geq 3$. On en déduit que $a(7) = 0$ puis que $c(7) \geq 3$. Mais $a(6) = 0$ donne $b(6) \geq 1$. On a donc $c(7) \neq 0$ et $b(6) \neq 0$. C'est absurde. Si $a = 1$ et $b = 0$ on a $r(8) = 1, r(7) = -3, r(6) = 3, r(5) = -5, r(4) = 5$. On a $b(7) \geq 3$. On en déduit que $a(5) = a(6) = 0$ puis que $c(6) \neq 0$ et $b(5) \neq 0$. C'est impossible. On a donc $a = b = 0$ et la résolution est

$$0 \rightarrow O_{P^3}(-7) \rightarrow O_{P^3}^3(-6) \oplus O_{P^3}(-5) \rightarrow O_{P^3}^4(-4) \rightarrow I_C \rightarrow 0.$$

d = 10, g = 11

Si la courbe est sur une surface cubique il y a une 5-sécante. S'il n'y a pas de 5-sécante on prend $s = 4$ dans le résultat de [7] and [6]. La courbe est le schéma des zéros d'une section de $E(3)$ où E est un fibré de corrélation nulle (voir paragraphe 2.3). On a

$$0 \rightarrow O_{P^3} \rightarrow E(1) \rightarrow I_{L \cup L'/P^3}(2) \rightarrow 0$$

où L et L' sont deux droites disjointes de P^3 . Il en résulte que $h^1(E(-1)) = h^2(E(-3)) = 1$. Tous les autres h^1 et h^2 sont nuls. On a

$$0 \rightarrow O_{P^3} \rightarrow E(3) \rightarrow I_C/P^3(6) \rightarrow 0.$$

Le fibré E est 1-régulier et $I_C(4)$ est engendré par ses sections globales.

d = 10, g = 12

Si la courbe est sur une quadrique elle est de bidegré (3, 7) et a donc des 7-sécantes. Ceci est exclu. Sinon $G(10, 3) = 12$ et la courbe est liée par une surface cubique et une surface quartique à une courbe plane de degré 2 (voir paragraphe 2.3). La résolution est donc

$$0 \rightarrow O_{P^3}(-6) \oplus O_{P^3}(-5) \rightarrow O_{P^3}(-3) \oplus O_{P^3}^2(-4) \rightarrow I_{C/P^3} \rightarrow 0.$$

d = 11, g = 14

Si la courbe est tracée sur une surface de degré inférieur ou égal à trois, il y a une 5-sécante. S'il n'y a pas de 5-sécante on a $G(11, 4) = 14$. La courbe est arithmétiquement normale tracée sur une surface quartique. La courbe résiduelle dans une intersection complète (4, 4) est de degré 5 et de genre 2 (voir paragraphe 2.3). La résolution de la courbe est

$$0 \rightarrow O_{P^3}(-6) \oplus O_{P^3}^2(-5) \rightarrow O_{P^3}^4(-4) \rightarrow I_{C/P^3} \rightarrow 0.$$

d = 12, g = 19

La courbe n'est pas tracée sur une quadrique et on a $G(12, 3) = 19$. La courbe est une intersection complète et la résolution est

$$0 \rightarrow O_{P^3}(-7) \rightarrow O_{P^3}(-4) \oplus O_{P^3}(-3) \rightarrow I_{C/P^3} \rightarrow 0$$

(voir paragraphe 2.3).

Cela peut aussi s'obtenir de la manière suivante. Le théorème de Riemann-Roch donne $h^0(O_C(3)) - h^1(O_C(3)) = 18$. Si $h^1(O_C(3)) = 0$ alors $h^0(O_C(3)) = 18$ et $h^0(I_{C/P^3}(3)) = 2$. C'est impossible car le degré de C est strictement plus grand que 9. On a donc $h^1(O_C(3)) \neq 0$. Le faisceau $O_C(3)$ est spécial et a le même degré que le fibré canonique de C . C'est donc le fibré canonique. On a donc $h^1(O_C(3)) = 1$ et $h^0(O_C(3)) = 1$. La courbe est tracée sur une surface cubique. On a aussi $h^0(O_C(4)) = 30$ et donc $h^0(I_{C/P^3}(4)) \geq 5$. On peut donc trouver une surface quartique contenant C et n'ayant pas la surface cubique comme composante. La courbe de degré 12 est donc l'intersection complète d'une surface cubique et d'une surface quartique.

Une telle courbe ne peut bien évidemment pas avoir de 5-sécante car cette droite serait contenue dans la surface cubique et dans la surface quartique et serait une composante de la courbe.

Références

- [1] J. Blanc and S. Lamy, *Weak Fano threefolds obtained by blowing-up a space curve and construction of Sarkisov links*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **105** (2012), 1047–1075. MR 2997046. DOI 10.1112/plms/pds023.
- [2] J. D'Almeida, *Courbes de l'espace projectif: Séries linéaires incomplètes et multisécantes*, J. Reine Angew. Math. **370** (1986), 30–51. MR 0852508. DOI 10.1515/crll.1986.370.30.

- [3] ———, *Une propriété des courbes tracées sur une surface de degré inférieur ou égal à trois*, C. R. Math. Acad. Sci. Soc. R. Can. **8** (1986), 203–207. [MR 0841643](#).
- [4] P. Ellia and C. Peskine, “Groupes de points de \mathbf{P}^2 : Caractère et position uniforme” dans *Algebraic Geometry (L’Aquila, 1988)*, Lecture Notes in Math. **1417**, Springer, Berlin, 1990, 111–116. [MR 1040554](#). [DOI 10.1007/BFb0083336](#).
- [5] L. Gruson, R. Lazarsfeld, and C. Peskine, *On a theorem of Castelnuovo, and the equations defining space curves*, Invent. Math. **72** (1983), 491–506. [MR 0704401](#). [DOI 10.1007/BF01398398](#).
- [6] L. Gruson and C. Peskine, “Genre des courbes de l’espace projectif” dans *Algebraic Geometry (Tromsø, 1977)*, Lecture Notes in Math. **687**, Springer, Berlin, 1978, 31–59. [MR 0527229](#).
- [7] ———, “Postulation des courbes gauches” in *Algebraic Geometry—Open Problems (Ravello, 1982)*, Lecture Notes in Math. **997**, Springer, Berlin, 1983, 218–227. [MR 0714751](#). [DOI 10.1007/BFb0061646](#).
- [8] M. Martin-Deschamps and D. Perrin, *Sur la classification des courbes gauches*, Astérisque **184–185**, Soc. Math. France, Paris, 1990. [MR 1073438](#).
- [9] C. Peskine and L. Szpiro, *Liaison des variétés algébriques, I*, Invent. Math. **26** (1974), 271–302. [MR 0364271](#).

Laboratoire Paul Painlevé, Mathématiques, Université Lille 1, Villeneuve d’Ascq, France