The Annals of Probability
1978, Vol. 6, No. 2, 316-320

QUELQUES ENSEMBLES EXCEPTIONNELS EN THÉORIE DU POTENTIEL

PAR HÉLÈNE AIRAULT

Institut Henri Poincaré

The co-thinness of sets is studied by means of h-processes. Co-thin sets are characterized by a balayage property and are semipolar sets. The method avoids the use of time reversal.

1. Introduction. Dans la démonstration des théorèmes de Fatou [1, Théorème 2, Chapter III] on utilise une caractérisation "classique" des potentiels dans le complémentaire d'un ensemble polaire [4], à partir d'une condition de balayage sur les ensembles décroissants. On peut trouver une caractérisation du même genre pour des potentiels dans le complémentaire d'un ensemble "*plus gros*" qu'un polaire.

La théorie du potentiel considérée étant déterminée par un processus de Markov, cette caractérisation des potentiels est reliée à la notion de retournement du temps. On étudie la classe des ensembles complètement effilés, définis à l'aide de la réduite forte introduite dans [6] et reprise dans [1] et [2]. En fait, les "compléments coeffilés" sont les ensembles effilés en tout point pour le "processus retourné."

On démontre qu'un ensemble complètement coeffilé est semi-polaire et que le flot de processus relatif à cet ensemble possède une certaine propriété de dénombrabilité.

On indique comment cette propriété de dénombrabilité peut être utilisée dans la théorie du balayage. Ces résultats reprennent ceux de [2, 3].

2. Notations. Les hypothèses et résultats utilisés sont précisés ci-dessous.

E est un espace métrique localement compacte séparable; $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ est un espace de probabilité et $(\mathscr{F}_t)$ est une famille croissante de σ-algèbres, telles que $\mathscr{F} = \bigvee_{t \geq 0} \mathscr{F}_t$; $X = (X_t, \zeta, \mathscr{F}_t, P_x)$ est un processus de Markov standard sur E, ζ est la durée de vie et P_x est la probabilité associée au processus partant du point x. On désigne par P_t le semi-groupe correspondant au processus X. Soit $\mathscr{B}$ la σ-algèbre des ensembles universellement mesurables de E. Une fonction h positive et $\mathscr{B}$-mesurable est excessive si, pour tout réel $t \geqq 0$, on a $P_t h \leqq h$ et $\lim_{t \to 0} P_t h = h$. A toute fonction excessive h, on associe un h-processus dont les probabilités de transition sont définies par

$$P^h(t, x, L) = \int_L p(t, x, dz) \frac{h(z)}{h(x)} \qquad \text{si} \quad 0 < h(x) < +\infty$$
$$= X_L(x) \quad \text{sinon}$$

Received December 27, 1973; revised December 30, 1976.

AMS 1970 *subject classifications.* Primary 60J45; Secondary 60J50.

Key words and phrases. Martin space, exceptional sets, reversed process.

pour tout ensemble L appartenant à $\mathscr{B}[X_L$ désigne la fonction indicatrice associée à l'ensemble L].

Soit p_x^h(resp. E_x^h) la mesure de probabilité (resp. l'espérance) associée au h-processus partant de x. Pour un temps d'arrêt τ et $x \in E$, on définit $P_\tau h(x) = E_x[h(X_\tau)]$. Pour tout x tel que $h(x) < +\infty$, on a $P_\tau h(x) = h(x)E_x^h[\tau < \zeta]$.

3. On part des données suivantes.

(1) L'espace de Martin $\mathscr{U}$ [8] des fonctions excessives minimales et le noyau de Martin $(k_z, z \in \mathscr{U})$ existent.

(2) Pour tout $z \in \mathscr{U}$, k_z est excessive minimale, et l'application $(z, x) \to k_z(x)$ est mesurable sur $\mathscr{U} \times E$.

(3) E est identifié à un sous-ensemble de $\mathscr{U}$ tel que la topologie de E soit induite par celle de $\mathscr{U}$.

(4) Pour toute fonction excessive h, la limite suivante existe P_x^h p.s. $\lim_{t \to \zeta} X_t = X_{\zeta-}$.

(5) On a une représentation intégrale des fonctions excessives sur l'espace de Martin. Toute fonction excessive h s'écrit sous la forme $h(x) = \int k_z(x)\mu^h(dz)$ et μ^h est la mesure spectrale de la fonction excessive h.

Les notions suivantes sont utilisées dans [2]. Soit A un ensemble presque-borélien de E. $\tau_A = \inf\{s > 0 \mid X_s \in A\}$ est le premier temps d'entrée dans A. Si $X_s \notin A$, pour tout $s > 0$, on convient que $\tau_A = \zeta$. On pose $R_A = \{\tau_A \circ \theta_t + t < \zeta; \forall\, t < \zeta\}$ et on définit les fonctions excessives: $P_A h(x) = E_x[h(X_{\tau_A})]$ et $F_A h(x) = h(x)P_x^h[R_A]$.

Soit A un ensemble fermé de E, alors il existe une suite croissante (U_n) d'ouverts relativement compacts de E tels que $E - A = \bigcup_n U_n$ et $\bar{U}_n \subset U_{n+1}$ on pose $\tau_n = \inf\{t > 0 \mid X_t \notin U_n\}$. On dit qu'une fonction excessive h est harmonique dans $E - A$, si pour tout n, on a $P_{\tau_n} h = h$. Cette définition ne dépend pas de la suite (U_n) d'ouverts [5].

Sur l'ensemble des fonctions excessives, on considère l'ordre fort défini comme suit: si h et v sont excessives, on dit que $h \ll v$ si $v - h$ est excessive.

Par définition, une fonction excessive h est un potentiel dans $E - A$ si elle ne possède pas de minorante harmonique avec l'ordre fort qui soit non nulle [2].

Pour une fonction excessive h, les fonctions $P_{\tau_n} h$ et $P_A h$ sont respectivement les balayées de h sur le complémentaire de U_n et sur A. Soit θ_t l'opérateur de translation associé au processus X [7]. On définit les ensembles suivants

$$\Omega(A) = \{\tau_A = \zeta \ \text{ et } \ \forall\, n \ \ \tau_n < \zeta\}$$

et l'ensemble des translatés de $\Omega(A)$

$$T\Omega(A) = \bigcup_{t \geq 0} \{\tau_A \circ \theta_t + t = \zeta \ \text{ et } \ \forall\, n, \tau_n \circ \theta_t + t < \zeta\}\,.$$

$K_A h$ est la fonction excessive définie par

$$K_A h(x) = h(x)P_x^h[T\Omega(A)]\,.$$

4. Résultats et démonstrations.

(1) *Le problème de balayage est*: Comment doit être l'ensemble fermé A dans E pour que l'énoncé (T) ci-dessous soit vrai:

ENONCÉ (T). Une fonction excessive h est un potentiel dans $E - A$ si et seulement si $\lim_{n\to\infty} P_{\tau_n} h = P_A h$.

Remarquons que la condition (α) $\lim_{n\to\infty} P_{\tau_n} h = P_A h$ est toujours vérifiée si h est un potentiel dans $E - A$. En fait, la condition (α) est équivalente à la condition (α'). Pour tout x tel que $h(x) < +\infty$, on a $h(x)P_x^h[\Omega(A)] = 0$. Mais en général, pour une fonction excessive h, la condition (α) n'entraîne pas que h soit un potentiel dans $E - A$.

(2) *Ensembles coeffilés et balayage.*

DÉFINITION. On dit qu'un ensemble presque-borélien A est coeffilé en un point z si $P_A k_z \neq k_z$.

Le théorème suivant résout le problème de balayage posé.

THÉORÈME 1. *Soit A un ensemble fermé de E. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes*:

(1) *A est coeffilé en tout point $z \in A \cup (\mathscr{U} - E)$*;

(2) *L'énoncé (T) est vrai.*

DÉMONSTRATION. On utilise les mesures spectrales des fonctions excessives.

Si le point z appartient à $A \cup (\mathscr{U} - E)$, alors l'égalité $P_{\tau_n} k_z = k_z$ est vérifiée pour tout n. Supposons (1) vérifié. La condition $\lim_{n\to\infty} P_{\tau_n} k_z = P_A k_z$ entraine que z appartienne à $E - A$; c'est à dire k_z est un potentiel dans $E - A$. Réciproquement, si z appartient à $A \cup (\mathscr{U} - E)$ et si $P_A k_z = k_z$, on a $\lim_{n\to\infty} P_{\tau_n} k_z = P_A k_z$ et k_z est harmonique dans $E - A$. Ceci contredit l'énoncé (T).

(3) *Les ensembles coeffilés et le retournement du temps.*

DÉFINITION [1, chapter IV]. Un ensemble presque-borélien A est dit faiblement coeffilé en z si $F_A k_z = 0$.

Il est dit complètement coeffilé s'il est faiblement coeffilé en tout point de l'espace des sorties.

REMARQUES. On interprète le coeffilement en retournant le temps comme suit:

Sur l'ensemble $\zeta < +\infty$, on définit le processus retourné [9] par $\hat{X}_t(\omega) = \lim_{\varepsilon\to\infty} X_{\zeta-t-\varepsilon}(\omega)$ pour $t \in [0, \zeta(\omega)]$. Sur l'ensemble $(\zeta < +\infty)$, pour un presque borélien A, on pose $\hat{T}_A = \inf\{t > 0 \mid \hat{X}_{t-} \in A\}$. On a l'égalité $R_A = \{\omega \mid \hat{T}_A(\omega) = 0\}$. De plus, si z appartient à E, on a $P^{k_z}(\zeta < +\infty) = 1$ (voir [9; 1-4-C page 39]).

Soit z appartenant à E, un ensemble presque borélien A est faiblement coeffilé en z si et seulement si il est effilé en z pour le processus retourné. La démonstration résulte immédiatement des définitions.

Cependant, il paraît *difficile de retourner le temps* lorsque $z \in \mathscr{U} - E$ et *lorsque* *la durée de vie ζ est infinie.* La démonstration du théorème suivant donne un exemple où la notion de réduite forte remplace avantageusement celle de processus retourné.

THÉORÈME 2. *Un ensemble presque borélien complètement coeffilé est semi-polaire.*

DÉMONSTRATION. Soit A un ensemble complètement coeffilé et K un compact contenu dans A. Pour toute fonction excessive h, on a $F_K h = 0$. Soit C un ensemble finement parfait contenu dans K; on a $F_C P_C 1 = P_C 1$ puisque $\tau_C \circ \theta_{\tau_C} = 0$ P p.s. (voir [2], partie II, (3)). Donc $P_C 1 = 0$ et $C = \emptyset$. K ne contenant aucun ensemble finement parfait est semi-polaire. Tout compact de A étant semi-polaire, on en déduit [10] que A est semi-polaire.

5. Propriété de dénombrabilité de flot [3]. Application au balayage.

LEMME. *Soit A un ensemble fermé semi-polaire de E et soit $T_k(\omega)$ la suite des temps de passage dans A. Si la suite $T_k(\omega)$ n'a pas de point d'accumulation à gauche, l'égalité suivante est vérifiée.*

$$T\Omega(A) = \bigcup_{k\geq 0}\{\tau_A \circ \theta_{T_k} + T_k = \zeta \ \ et \ \ \forall\, n \ \ \tau_n \circ \theta_{T_k} + T_k < \zeta\}\,.$$

DÉMONSTRATION. On a évidemment

$$\bigcup_{k\geq 0}\{\tau_A \circ \theta_{T_k} + T_k = \zeta \ \ et \ \ \forall\, n \ \ \tau_n \circ \theta_{T_k} + T_k < \zeta\} \subset T\Omega(A)\,.$$

Réciproquement, soit $t \geqq 0$ et soit une trajectoire telle que

$$\tau_A \circ \theta_t(\omega) + t = \zeta(\omega) \ \ et \ \ \forall\, n,\, \tau_n \circ \theta_t(\omega) + t < \zeta(\omega)\,.$$

On pose

$$S_t(\omega) = \sup\{T_k(\omega) \mid T_k(\omega) < \zeta(\omega) \wedge t\}\,.$$

Comme la suite $(T_k(\omega))$ n'a pas de point d'accumulation à gauche, il existe k_t tel que $S_t(\omega) = T_{k_t}(\omega)$. Puisque $\tau_A \circ \theta_t + t = \zeta(\omega)$, on a l'égalité $\tau_A \circ \theta_{T_{k_t}}(\omega) + T_{k_t}(\omega) = \zeta(\omega)$. En effet si la trajectoire ne rentre plus dans A après t, comme elle ne rentre pas dans A entre $T_{k_t}(\omega)$ et t, elle ne rentre pas dans A après T_{k_t}. De plus, pout tout n, on a $\tau_n \circ \theta_t + t < \zeta$. Comme $T_{k_t}(\omega) < t$, on en déduit $\tau_n \circ \theta_{T_{k_t}}(\omega) + T_{k_t}(\omega) < \zeta(\omega)$.

THÉORÈME DE DÉNOMBRABILITÉ (voir [3]). *Soit A un ensemble fermé de E. Si A est complètement coeffilé, il existe une suite (T_k) de temps d'arrêt tels que*

$$T\Omega(A) = \bigcup_{k\geq 0}\{\tau_A \circ \theta_{T_k} + T_k = \zeta \ \ et \ \ \forall\, n,\, \tau_n \circ \theta_{T_k} + T_k < \zeta\}\,.$$

DÉMONSTRATION. D'après le Théorème 2 et le lemme précédent, il suffit de montrer que la suite $(T_k(\omega))$ des temps de passage dans A ne possède pas de point d'accumulation à gauche. Sinon, soit $T(\omega) = \lim_{k_i \to \infty} T_{k_i}(\omega)$ un point d'accumulation à gauche, on a $P_x^{k_x T(\omega)}[R_A] = 1$. Or pour tout z, par hypothèse, la relation $P_x^{k_z}(R_A) = 0$ est vérifiée. On obtient une contradiction.

REMARQUE. Si $T\Omega(A)$ est réunion *dénombrable* de translatés de $\Omega(A)$ comme dans le cas précédent, la relation $P_x^h[T\Omega(A)] = 0$ est équivalente à la relation $P_x^h[\Omega(A)] = 0$ [condition (α')].

REFERENCES

[1] AIRAULT, H. (1973). Théorème de Fatou et frontière de Martin. *J. Functional Analysis* **12** 418–455.

[2] AIRAULT, H. (1974). Minorantes harmoniques et potentiels. *Ann Inst. Fourier* **3** 67–118.

[3] AIRAULT, H. (1975). Variation de flot à travers une suite décroissante d'ensembles. C. R. *Acad. Sci. Paris Sér. A.* **281** 211–213.

[4] BAUER, H. (1966). Harmonische Raüme und ihre Potentialtheorie. *Lecture Notes in Mathematics* **22** 59.

[5] BRELOT, M. (1965). Capacity and balayage for decreasing sets. *Proc. Fifth Berkeley Symp. Math. Statist. Prob.* **2**, Univ of California Press.

[6] DOOB, J. L. (1957). Conditional Brownian motion and the boundary limits of harmonic functions. *Bull. Soc. Math. France* **85** 431–458.

[7] DYNKIN, E. B. (1965). *Markov Process*. Springer-Verlag, Berlin.

[8] DYNKIN, E. B. (1969). The space of exits of a Markov process. *Russian Math. Surveys* **24** 89–157.

[9] KUNITA, H. and WATANABE, T. (1966). On certain reversed processes and their applications to potential theory and boundary theory. *J. Math. Mechanics* **15** 393–434.

[10] MEYER, P. A. (1969). Un résultat de théorie du potentiel. Séminaire de Probabilités III, *Lecture Notes in Mathematics* **88** 144–151.

INSTITUT HENRI POINCARÉ
11 RUE PIERRE ET MARIE CURIE
75.005, PARIS, FRANCE