The Annals of Probability
1986, Vol. 14, No. 3, 1070–1074

REPRÉSENTATION PRÉVISIBLE ET CHANGEMENT DE TEMPS

PAR CHRISTOPHE STRICKER

Université de Franche-Comté

This paper deals with predictable representation and time changed processes. Let $(M^i)_{i \geq 0}$ be a sequence of independent local martingales. Suppose that each M^i has the property of predictable representation with respect to its natural filtration. Suppose also that $(A^i)_{i \geq 1}$ is a sequence of continuous, increasing, $(\mathscr{F}_t^{M^0})$ adapted processes. We study sufficient conditions in order that $M = M^0 + \Sigma M^i_{A^i}$ be a local martingale and M have the property of predictable representation with respect to the filtration $(\mathscr{F}_t^{M^0}) \vee (\mathscr{F}_t^{M^1_{A^1}}) \vee (\mathscr{F}_t^{M^2_{A^2}}) \vee \cdots$. Such problems arise in the modeling of a security market with continuous trading [1].

Harrison et Pliska [1] ont introduit à propos d'un problème issu de l'économie le processus suivant: soit B un mouvement brownien standard, N un processus de Poisson, L le temps local de B en 0 et (X_i) une suite de variables aléatoires indépendantes prenant les valeurs ± 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$. On suppose que B, N et (X_i) sont indépendants et on pose:

$$X = B + N_L - L + \sum_{i=1}^{\infty} X_i 1_{[T_i, +\infty[}$$

où $T_i = \inf\{t > 0, B_t = i\}$. Dans [6] nous avons montré que la filtration naturelle de X était engendrée par B, N_L, et $K = \sum_{i=1}^{\infty} X_i 1_{[T_i, +\infty[}$ et que X était une martingale possédant la propriété de représentation prévisible, répondant ainsi positivement à une conjecture de Harrison et Pliska. L'objet de cet article est de généraliser les résultats précités. Grâce aux techniques de grossissement de filtration nous donnerons aussi la décomposition canonique de la martingale qui illustrait notre article [6] et qui montre la nécessité de certaines hypothèses du théorème 1 ci-dessous.

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), P)$ un espace probabilisé filtré vérifiant les conditions habituelles. Si X est un processus adapté à $(\mathscr{F}_t)$, nous noterons $(\mathscr{F}_t^X)$ la filtration naturelle de X, c'est-à-dire la plus petite sous-filtration de $(\mathscr{F}_t)$ vérifiant les conditions habituelles et à laquelle X est adapté. On dit que le couple $(X, (\mathscr{G}_t))$ possède la propriété de représentation prévisible [notée (R)] si X est une $(\mathscr{G}_t)$-martingale locale et si pour toute $(\mathscr{G}_t)$-martingale M il existe un processus prévisible X-intégrable H tel que $M = M_0 + H \cdot X$. Dans la suite, on prendra également $(\mathscr{G}_t) = (\mathscr{F}_t^X)$ et $\mathscr{G}_0$ sera la tribu triviale, auquel cas $M_0 = E[M_t]$ pour tout t. On dit qu'une suite de temps d'arrêt (T_n) *réduit* la martingale locale N si la suite (T_n) tend en croissant vers $+\infty$ et si le processus N arrêté à l'instant T_n

Received November 1984; revised March 1985.

AMS 1980 *subject classifications*. Primary 60G44; secondary 60H05.

Key words and phrases. Semimartingale, stochastic integral, representation of martingales, time changed processes.

est une martingale appartenant à $\mathscr{H}^1$. Rappelons qu'une $(\mathscr{F}_t)$-martingale locale N n'est pas nécessairement une $(\mathscr{F}_t^N)$-martingale locale [5]. Il en est ainsi si et seulement s'il existe une suite de $(\mathscr{F}_t^N)$ temps d'arrêt rêduisant N. Nous dirons qu'un ensemble prévisible B porte le processus croissant A si $1_{B^c} \cdot A = 0$.

Voici le résultat principal de cet article qui généralise l'étude entreprise dans [6].

THEOREME 1. *Soient* $(M^i)_{i \geq 0}$ *une suite de* $(\mathscr{F}_t^{M^i})$*-martingales locales indépendantes et* $(A^i)_{i \geq 1}$ *une suite de processus croissants, continus, nuls en* 0, $(\mathscr{F}_t^{M^0})$ *adaptés et vérifiant* $A^i_\infty = +\infty$ *pour tout i. On pose pour* $i \geq 1$, $\overline{M}^i = M^i_{A^i}$ *et* $(\mathscr{H}_t) = (\mathscr{F}_t^{M^0}) \vee (\mathscr{F}_t^{\overline{M}^1}) \vee \cdots$. *Si les processus croissants* $[M^i, M^i]_{A^i}$ *sont portés par des ensembles* $(\mathscr{H}_t)$ *prévisibles deux à deux disjoints et si* $([M^0, M^0] + \sum_{i \geq 1}[M^i, M^i]_{A^i})^{1/2}$ *est localement intégrable dans* $(\mathscr{H}_t)$, *alors* $M = M^0 + \sum_{i \geq 1}\overline{M}^i$ *est une* $(\mathscr{H}_t)$*-martingale locale. Si, de plus, pour tout* $i \geq 0$, $(M^i, (\mathscr{F}_t^{M^i}))$ *possède* (R), *alors* $(M, (\mathscr{H}_t))$ *possède aussi* (R).

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin de plusieurs lemmes.

LEMME 1. *Soient* $(\mathscr{F}_t')$ *une sous-filtration de* $(\mathscr{F}_t)$, M *une* $(\mathscr{F}_t^M)$*-martingale locale indépendante de* $(\mathscr{F}_t')$, A *un processus croissant continu, nul en* 0 *et* $(\mathscr{F}_t')$ *adapté. On grossit la filtration* $(\mathscr{F}_t^M)$ *en ajoutant* $\mathscr{F}'_\infty$ *à* $\mathscr{F}_0^M$. *La nouvelle filtration ainsi obtenue est notée* $(\mathscr{G}_t)$. *Alors si* $\overline{M} = M_A$:

(*i*) *La filtration* $(\mathscr{K}_t) = (\mathscr{F}_t') \vee (\mathscr{F}_t^{\overline{M}})$ *est contenue dans* $(\mathscr{G}_{A_t})$.

(*ii*) $\overline{M}$ *est une* $(\mathscr{G}_{A_t})$*-martingale locale et* $[M_A, M_A] = [M, M]_A$.

(*iii*) $\overline{M}$ *est une* $(\mathscr{K}_t)$*-martingale locale si et seulement si* $[M, M]_A^{1/2}$ *est localement intégrable dans* $(\mathscr{K}_t)$.

DEMONSTRATION. (i) Comme $\overline{M}$ est $(\mathscr{G}_{A_t})$ adapté et que $\mathscr{F}'_\infty$ est contenue dans $\mathscr{G}_0 = \mathscr{G}_{A_0}$, $(\mathscr{K}_t)$ est une sous-filtration de $(\mathscr{G}_{A_t})$.

(ii) En vertu de l'indépendance des processus M et A, M est encore une $(\mathscr{G}_t)$-martingale locale. Mais (A_t) est continu et pour chaque t, A_t est un $(\mathscr{G}_s)$ temps d'arrêt. Selon les résultats classiques de changement de temps, $\overline{M}$ est une $(\mathscr{G}_{A_t})$-martingale locale. M étant une $(\mathscr{F}_t^M)$-martingale locale, il en est de même pour $M^2 - [M, M] = 2M_- M$, si bien que $M^2 - [M, M]$ (resp. $M_A^2 - [M, M]_A$) est une $(\mathscr{G}_t)$ [resp. $(\mathscr{G}_{A_t})$] martingale locale. D'autre part $[M, M]_A$ a les mêmes sauts que $\overline{M}$ car A est continu. Or $[M_A, M_A]$ est caractérisé par le fait que $[M_A, M_A]$ et $\overline{M}$ ont mêmes sauts et $M_A^2 - [M_A, M_A]$ est une martingale locale. Donc $[M_A, M_A] = [M, M]_A$.

(iii) est évident car $[M, M]_A^{1/2}$ et $\overline{M}$ sont $(\mathscr{K}_t)$ adaptés.

LEMME 2. *Soit* M *un processus c.àd. et adapté à* $(\mathscr{F}_t)$. *Si* H *est un processus* $(\mathscr{F}_t^M)$ *prévisible, si* $(\mathscr{F}_t')$ *est une sous-filtration de* $(\mathscr{F}_t)$ *et si* A *est un processus croissant nul en* 0, *continu et adapté à* $(\mathscr{F}_t')$, *alors* $\overline{H} = H_A$ *est prévisible par rapport à* $(\mathscr{F}_t') \vee (\mathscr{F}_t^{\overline{M}})$.

DEMONSTRATION. D'après le théorème des classes monotones, il suffit de le démontrer lorsque $H = f(M_{t_1}, \ldots, M_{t_n})1_{]t, +\infty[}$ où $t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t$ et f est une fonction borélienne de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Soit $C_t = \inf\{u, A_u > t\}$. Dans ce cas $\overline{H} = f(\overline{M}_{C_{t_1}}, \ldots, \overline{M}_{C_{t_n}})1_{]C_t, +\infty[}$. Ce processus est $(\mathscr{F}_t') \vee (\mathscr{F}_t^{\overline{M}})$ prévisible car C_t est un $(\mathscr{F}_t') \vee (\mathscr{F}_t^{\overline{M}})$ temps d'arrêt!

LEMME 3. *On suppose que M et A vérifient les hypothèses du Lemme* 1. *Si H est M intégrable et $(\mathscr{F}_t^M)$ prévisible, alors*

$$(*) \qquad \int_0^t \overline{H}_s \, d\overline{M}_s = \int_0^{A_t} H_u \, dM_u.$$

DEMONSTRATION. Toujours d'après le théorème des classes monotones, il suffit d'établir $(*)$ pour $H = 1_{]U, V]}$, U et V étant deux $(\mathscr{F}_t^M)$ temps d'arrêt. Or $H_A = 1_{]C_U, C_V]}$ et $A_{C_t} = t$ sur $\{C_t < +\infty\}$, si bien que la relation $(*)$ est trivialement vérifiée dans ce cas.

Avant de passer à la démonstration proprement dite du théorème 1, il nous reste à rappeler un résultat dû à Yor [7] et à généraliser le Lemme 3.7. de [6].

THEOREME 2. *Soit M une $(\mathscr{F}_t)$-martingale locale. Supposons que $(Y_t^n), (Y_t)$ sont des $(\mathscr{F}_t)$-martingales uniformément intégrables telles que Y_∞^n converge vers Y_∞ faiblement dans L^1. Si chaque Y_∞^n est une intégrale stochastique par rapport à M, il en est de même pour Y_∞.*

LEMME 4. *Soit (N^i) une suite de $(\mathscr{F}_t)$-martingales locales telles qu'il existe une suite (E_i) d'ensembles prévisibles deux à deux disjoints vérifiant $1_{E_i} \cdot [N^i, N^i] = [N^i, N^i]$. Supposons de plus que $(\Sigma_i[N^i, N^i])^{1/2}$ est localement intégrable. Si $(\mathscr{F}^i)$ est une suite de sous-tribus de $\mathscr{F}_\infty$ et si pour toute $\mathscr{F}^i$ variable aléatoire bornée X_i, la martingale $X_t^i = E[X_i|\mathscr{F}_t]$ est une intégrale stochastique par rapport à N^i, alors pour toute $(\vee_i \mathscr{F}^i)$ variable aléatoire bornée Y, la martingale $E[Y|\mathscr{F}_t]$ est une intégrale stochastique par rapport à la martingale locale $\Sigma_i N^i$.*

DEMONSTRATION. Commençons par montrer que $\Sigma_i N^i$ converge localement dans $\mathscr{H}^1$. Par arrêt, nous pouvons supposer que $(\Sigma_i[N^i, N^i])^{1/2}$ est intégrable. Or:

$$[N^i, N^j] = \left[1_{E_i} \cdot N^i, 1_{E_j} \cdot N^j\right] = 1_{E_i \cap E_j} \cdot [N^i, N^j] = 0 \text{ pour } i \neq j.$$

Nous sommes alors ramenés au Lemme 3 de [4] qui nous permet d'affirmer que ΣN^i converge localement dans $\mathscr{H}^1$ vers une martingale locale N. Passons maintenant *à* la propriété de représentation prévisible. D'après la formule d'Itô [2],

$$X_t^i X_t^j = \int_0^t X_{s-}^i \, dX_s^j + \int_0^t X_{s-}^j \, dX_s^i + [X^i, X^j]_t.$$

Mais par hypothèse

$$X^i = X_0^i + H^i \cdot N^i = X_0^i + \left(1_{E_i} H^i\right) \cdot \left(N^i + \sum_{j \neq i} N^j\right) = X_0^i + \left(1_{E_i} H^i\right) \cdot N.$$

Et de même pour X^j. Ainsi $[X^i, X^j] = X_0^i X_0^j$ car $E_i \cap E_j = \varnothing$, si bien que $X^i X^j$ est une martingale locale et que $X^i X^j = X_0^i X_0^j + H^{i,j} \cdot N$, $H^{i,j}$ étant le processus prévisible obtenu par la formule d'Itô ci-dessus. Une récurrence immédiate montre qu'il en est de même pour tout produit fini $\prod_{j \le n} X_j$. Grâce au théorème des classes monotones et au Théorème 2, le Lemme 4 est encore vrai pour toute variable aléatoire bornée $(\vee_i \mathscr{F}_i)$ mesurable.

Nous venons maintenant à la démonstration proprement dite du Théorème 1.

Demonstration du Theoreme 1. Utilisons d'abord le Lemme 1. A cet effet prenons pour M la martingale locale M^i, pour $(\mathscr{F}_t')$ la filtration naturelle de M^0 et de la suite $(\overline{M}^j)_{j \neq i, j \ge 1}$. Alors $\overline{M}^i = M^i_{A^i}$ est une martingale locale par rapport à la filtration $(\mathscr{H}_t)$. Selon les Lemmes 2 et 3, si H est un processus $(\mathscr{F}_t^{M^i})$ prévisible qui est M intégrable, alors $\overline{H} = H_{A^i}$ est $(\mathscr{H}_t)$ prévisible et on a pour tout t,

$$(*) \qquad \int_0^t \overline{H}_s \, d\overline{M}_s^i = \int_0^{A_t^i} H_u \, dM_u^i.$$

Soit X_i une variable aléatoire bornée $\mathscr{F}_\infty^{M^i}$ mesurable. Par hypothèse, il existe un processus $(\mathscr{F}_t^{M^i})$ prévisible H tel que $E[X_i | \mathscr{F}_t^{M^i}] = E[X_i | \mathscr{F}_0^{M^i}] + (H \cdot M^i)_t$. Or $(H \cdot M^i)_{A^i}$ est une $(\mathscr{H}_t)$ martingale bornée, si bien que

$$X^i = E\left[X_i | \mathscr{F}_0^{M^i}\right] + (H \cdot M^i)_{A_\infty} = E\left[X_i | \mathscr{F}_0^{M^i}\right] + (\overline{H} \cdot \overline{M}^i)_\infty.$$

On peut alors appliquer le Lemme 4 en posant $N^0 = M^0$ et pour $i \ge 1$, $N^i = \overline{M}^i$, $(\mathscr{F}_t) = (\mathscr{H}_t)$, $\mathscr{F}^i = \mathscr{F}_\infty^{M^i}$. Notons que $\mathscr{F}_\infty^{M^i}$ est bien une sous-tribu de $\mathscr{H}_\infty$ car A^i est continu et pour tout t, A_t^i et $\overline{M}_t^i$ sont $\mathscr{H}_\infty$ mesurables. En outre $\mathscr{H}_\infty = \vee_i \mathscr{F}_\infty^i$ et le théorème 1 est alors une conséquence immédiate du Lemme 4.

Voici l'application promise dans l'introduction. Soit B un mouvement brownien issu de 0, N un processus de Poisson standard, L le temps local de B en 0 et (X_i) une suite de variables aléatoires indépendantes prenant les valeurs ± 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$. On suppose que B, N et (X_i) sont indépendants et on pose

$$X = B + N_L - L + \sum_{i=1}^{\infty} X_i 1_{[T_i, +\infty[} \quad \text{où} \quad T_i = \inf\{t > 0, B_t = i\}.$$

Reprenant les notations du Théorème 1, nous avons

$$M_t^0 = B_t, \qquad M_t^1 = N_t - t, \qquad M_t^2 = \sum_{i=1}^{\infty} X_i 1_{[i, +\infty[}(t),$$

$$A_t^1 = L_t, \qquad A_t^2 = \sup_{s \le t} B_s.$$

Par ailleurs

$$[M^1, M^1] = N \quad \text{et} \quad E\left[N_{L_t}\right] = E[L_t] < +\infty,$$

$$[M^2, M^2]_{A_t^2} = \sum_{i \ge 1} P\left[\sup_{s \le t} B_s \ge i\right] \le c \sum_{i \ge 1} t i^{-2}$$

d'après l'inégalité de Doob dans L^2. Ainsi M^0, $\overline{M}^1$ et $\overline{M}^2$ sont des martingales de carré intégrable par rapport à la filtration $(\mathscr{F}_t^B) \vee (\mathscr{F}_t^{\overline{M}^1}) \vee (\mathscr{F}_t^{\overline{M}^2})$ qui est égale à $(\mathscr{F}_t^X)$ d'après [6]. Enfin le processus croissant (L_t) ne charge que l'ensemble $\{B = 0\}$ tandis que $[\overline{M}^2, \overline{M}^2] = \sum_{i=1}^{\infty} 1_{[T_i, +\infty[}$ ne charge que les ensembles $\{B = i\}$ pour $i \geq 1$. Comme ces ensembles sont deux à deux disjoints et négligeables pour la mesure de Lebesgue, le Théorème 1 implique que X est une martingale de carré intégrale possédant la propriété de représentation prévisible par rapport à $(\mathscr{F}_t^X)$.

Pour conclure, nous passons à l'exemple illustrant notre article [6] et qui montre la nécessité de certaines hypothèses du Théorème 1. En général, la filtration $(\mathscr{H}_t) = (\mathscr{F}_t^{M^0}) \vee (\mathscr{F}_t^{\overline{M}_1}) \vee \cdots$ mentionnée au Théorème 1, est plus grande que la filtration naturelle de $M = M^0 + \sum_{i \geq 1} \overline{M}^i$. Soit B un mouvement brownien, N un processus de Poisson indépendant, L le temps local de B à l'origine,

$$M_t^0 = |B_t| - L_t, \qquad M_t^1 = -2(N_t - t), \qquad A_t^1 = L_t \quad \text{et} \quad \overline{M}_t^1 = N_{L_t} - L_t.$$

Comme L_t ne charge que $\{B = 0\}$, $L_t = -\inf_{s \leq t} M_s^0$ et L est adapté à la filtration naturelle de M^0, donc à $(\mathscr{H}_t) = (\mathscr{F}_t^{M^0}) \vee (\mathscr{F}_t^{\overline{M}_1})$. Or dans [6] nous avions montré que la filtration naturelle de M ne contenait pas L et qu'ainsi $(\mathscr{F}_t^M)$ était contenue strictement dans $(\mathscr{H}_t)$. Nous allons compléter cette étude en précisant la décomposition canonique de la martingale M dans sa filtration naturelle. Si

$$D_t = \sup\{u \leq t, \Delta M_u \neq 0\}, \qquad \varphi(x) = (xe^{-x} - 1 + e^{-x})(1 - e^{-x})^{-1} x^{-1}$$

et si $Y_t = M_t - \sum_{s \leq t} \Delta M_s$, alors Y est un processus de Bessel d'ordre 3 et $M_t^c = Y_t - \int_0^t [(Y_u - Y_{D_u})^{-1} + \varphi(Y_u - Y_{D_u})]\, du$. Nous ne détaillerons pas les calculs qui permettent d'obtenir cette formule et qui reposent sur les techniques de grossissement de filtration [3].

REFERENCES

[1] HARRISON, J. M. and PLISKA, S. R. (1981). Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic Process. Appl.* **11** 215–260.

[2] ITÔ, K. and MCKEAN, H. P. (1965). *Diffusion Processes and Their Sample Paths*. Springer, New York.

[3] JEULIN, T. et YOR, M. (1978). Grossissement d'une filtration: formules explicites. *Lecture Notes in Math.* **649** 78–97.

[4] MEYER, P. A. et STRICKER, C. (1981). Sur les semimartingales au sens de Laurent Schwartz. In *Mathematical Analysis and Applications, Part B* (L. Nachbin, ed.) 577–601. Academic, New York.

[5] STRICKER, C. (1977). Quasimartingales, martingales locales, semimartingales et filtration naturelle. *Z. Wahrsch. verw. Gebiete* **39** 55–64.

[6] STRICKER, C. Integral representation in the theory of continuous trading. A paraître.

[7] YOR, M. (1978). Sous-espaces denses dans L ou H^1 et représentation des martingales. *Lecture Notes in Math.* **649** 265–309.

UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ
FACULTÉ DES SCIENCES–MATHÉMATIQUES
(U.A. NO 741)
25030 BESANCON CEDEX
FRANCE