The Annals of Probability
1992, Vol. 20, No. 3, 1441–1449

SUR LA REGULARITE DES FONCTIONS ALEATOIRES D'ORNSTEIN–UHLENBECK A VALEURS DANS l_p, $p \in [1, \infty[$

PAR X. FERNIQUE

Université Louis Pasteur

Dans ce travail, on continue l'étude de la régularité des fonctions aléatoires $X = (X_n,\ n \in \mathbb{N})$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ayant la forme suivante:

$$X_n(t) = a_n x_n(b_n t),\ t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},$$

où $\mathbf{a} = (a_n) \subset \mathbb{R}^+$, $\mathbf{b} = (b_n) \subset \mathbb{R}^+$ et où $(x_n,\ n \in \mathbb{N})$ est une suite indépendante et équidistribuée de fonctions aléatoires gaussiennes centrées stationnaires et réelles sur $\mathbb{R}$. On présente des critères totalement explicites déterminant si elles ont leurs trajectoires continues dans l_p, $1 \le p < \infty$. Les résultats obtenus précisent et prolongent des résultats précédents concernant les seuls cas où p est supérieur ou égal à 2 et utilisant des techniques voisines.

In this note, we study the regularity of $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$-valued random functions $X = (X_n,\ n \in \mathbb{N})$ on $\mathbb{R}$ such that

$$X_n(t) = a_n x_n(b_n t), \qquad t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},$$

where $\mathbf{a} = (a_n) \subset \mathbb{R}^+$, $\mathbf{b} = (b_n) \subset \mathbb{R}^+$ and $(x_n,\ n \in \mathbb{N})$ is an i.i.d. sequence of gaussian centered stationary real random functions on $\mathbb{R}$. If the common covariance of the x_n's verifies some very weak regularity assumptions, then their paths are continuous in l_p, $p \in [1, \infty[$ if and only if they are in this space and some integral depending uniquely on p and on $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$ is convergent. These results extend and refine some previous results concerning only the case $p \in [2, \infty[$.

1. Introduction, Notations, Résultats.

1.1. On se propose d'étudier les fonctions aléatoires $X = (X_n,\ n \in \mathbb{N})$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ayant la forme suivante:

$$X_n(t) = a_n x_n(b_n t), \qquad t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}, \tag{1.1.1}$$

où $\mathbf{a} = (a_n) \subset \mathbb{R}^+$, $\mathbf{b} = (b_n) \subset \mathbb{R}^+$ et où $(x_n,\ n \in \mathbb{N})$ est une suite indépendante et équidistribuée de fonctions aléatoires gaussiennes centrées stationnaires et réelles sur $\mathbb{R}$. On suppose que la loi commune des x_n est déterminée à partir de la distance d et de la fonction φ définies par

$$\begin{aligned} d^2(s,t) &= \mathbb{E}|x_n(s) - x_n(t)|^2, \\ \varphi(t) &= d(0,t) = d(s, s+t), \qquad s,t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

Received November 1990; revised June 1991.
AMS 1980 *subject classification*. 60G17.
Key words and phrases. Ornstein–Uhlenbeck functions, l_p spaces, regularity of paths.

et de la mesure positive bornée μ sur $\mathbb{R}^+$ définie par

$$\mathbb{E}\{x_n(0)x_n(s)\} = \int \cos us\mu(du),$$

(1.1.3)

$$\varphi^2(s) = 2\int(1 - \cos us)\mu(du), \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Par exemple, dans le cas particulier où

(1.1.4) $\varphi(s) = [1 - \exp(-|s|)]^{1/2}, \qquad \mu(du) = (2/\pi)du/(1 + u^2),$

X est la fonction aléatoire d'Ornstein–Uhlenbeck stationnaire sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ associée aux suites $\mathbf{a} = (a_n)$ et $\mathbf{b} = (b_n)$. Ce type de fonction aléatoire intervient dans un grand nombre de problèmes de modélisation associés à des phénomènes physiques, mécaniques, économiques, biologiques, même si la forme diagonale qu'il présente ici est sans doute trop spéciale pour permettre des modélisations réellement significatives.

On fixe un nombre p supérieur ou égal à 1 et on note q le nombre conjugué $(1 < q \leq \infty)$. On cherche à quelles conditions:

(1.1.5) X a une modification à valeurs dans l_p et à trajectoires continues (resp. à trajectoires localement bornées) pour la topologie de cet espace.

(1.1.6) Pour éviter les dégénérescences complètes, on suppose dans toute la suite que: Il existe un entier n tel que $[a_n b_n]$ soit non nul.

On suppose aussi que l'espace d'épreuves est complet.

1.2. Dans le cas des seules fonctions d'Ornstein–Uhlenbeck et pour le seul $p = 2$, le problème de la régularité de X a été partiellement étudié dans [8] et [6] à partir des seules propriétés markoviennes de ces fonctions. Il a obtenu dans les mêmes seuls cas et à partir des propriétés gaussiennes une solution approchée dans [5] et pour d'autres valeurs de p dans [7]. J'en ai moi-même obtenu dans des travaux précédents une solution sous la forme suivante ([1, 3, 4]):

THÉORÈME 1.2 ([4], Théorème 0.5). (a) *On suppose que* φ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}^+$; *on suppose de plus que la propriété* 1.1.5 *est vérifiée. Alors on a aussi*:

1.2.1. *L'intégrale* $\int_0^\infty [\mu\{u > \exp x^2\}]^{1/2}\, dx$ *est convergente.*
1.2.2. *La série* $\sum |a_n|^p$ *est convergente.*
1.2.3. *Il existe une partie compacte* (*resp. une partie bornée*) B *de* l_p *telle que*

$$\forall\, y \in l_q, \qquad \int_0^\infty \Big[\sum a_n^2 y_n^2 \mathbf{I}_{\{b_n > \exp x^2\}}\Big]^{1/2} dx \leq \sup_{x \in B} \langle x, y\rangle.$$

(b) *Inversement, on suppose que les propriétés* 1.2.1, 1.2.2 *et* 1.2.3 *sont vérifiées*; *alors la propriété* 1.1.5 *est aussi vérifiée.*

1.2.4 REMARQUE. On notera que dans le cas des fonctions aléatoires d'Ornstein–Uhlenbeck [cf. (1.1.4)], la fonction φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et la propriété 1.2.1 est vérifiée. Dans ces conditions, il y a alors équivalence entre 1.1.5 et {1.2.2, 1.2.3}.

La solution ci-dessus n'est pas satisfaisante du fait qu'elle n'est pas totalement explicite: elle introduit en effet dans la condition 1.2.3 deux paramètres étrangers, la partie B de l_p et l'élément y parcourant l_q. Dans la suite, on lui donne une forme plus explicite et plus directement utilisable en éliminant ces paramètres B et y. Ceci a été réalisé précédemment ([3], Théorème 2.1) dans le cas où p est supérieur ou égal à 2; on modifie ici les techniques utilisées là pour les adapter à la situation plus générale où p parcourt $[1, \infty[$; la solution aura d'ailleurs même dans le cas où p appartient à $[2, \infty[$ une forme plus simple que dans [3]:

THÉORÈME 1.3. (a) *On suppose que φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$; on suppose de plus que X a une modification à valeurs dans l_p et à trajectoires localement bornées pour la topologie de cet espace. Alors on a aussi*:

1.3.1. *L'intégrale $\int_0^\infty [\mu\{u > \exp x^2\}]^{1/2}\,dx$ est convergente.*
1.3.2. *La série $\sum |a_n|^p$ est convergente.*
1.3.3. *Si $p \in [1, 2[$, l'intégrale*

$$\int_0^\infty \Big[\sum |a_n|^r \mathbf{I}_{\{b_n > \exp x^2\}} \Big]^{1-p/2} x^{p-1}\,dx, \qquad r = 2p/(2-p),$$

est convergente; si $p \in [2, \infty[$, l'intégrale $\int_0^\infty [\sup\{|a_n|^p \mathbf{I}_{\{b_n > \exp x^2\}}\}] x^{p-1}\,dx$ est convergente.

(b) *Inversement, si les conditions* 1.3.1, 1.3.2 *et* 1.3.3 *sont vérifiées, alors X a une modification à valeurs dans l_p et à trajectoires continues pour la topologie de cet espace.*

1.3.4 REMARQUES. (a) On constatera que dans le cas où p est supérieur ou égal à 2, la condition 1.3.3 n'est qu'apparemment différente de la condition (iii) du Théorème 2.1 de [3]. C'est facile à voir si les suites **a** et **b** sont monotones et on peut montrer en analysant ces deux conditions que le cas général s'y réduit. On constatera aussi que dans le cas $p = 1$, la condition 1.3.3 est la condition naturelle. Le cas $p \in [0, 1[$ reste ouvert et relève nécessairement de méthodes différentes.

(b) Le théorème montre en particulier que dans l'intervalle de variations du paramètre p, l'existence d'une modification de X à trajectoires localement bornées dans l_p ou l'existence d'une modification à trajectoires faiblement continues dans l_p ou l'existence d'une modification à trajectoires fortement continues dans l_p sont des propriétés équivalentes. On a déjà montré que dans c_0 et dans l_∞, les choses sont différentes.

1.3.5 NOTATIONS. L'énoncé de la propriété 1.3.3 du théorème nous amène à poser pour toute partie J de $\mathbb{N}$ et toute suite $\mathbf{a} = (a_n)$ positive ou nulle tendant vers zéro quand n tend vers l'infini:

$$\Phi_p(\mathbf{a}, J) = \sup\{|a_n|^p \mathbf{I}_{\{n \in J\}}\} \qquad \text{si } p \geq 2,$$

$$\Phi_p(\mathbf{a}, J) = \left[\sum |a_n|^r \mathbf{I}_{\{n \in J\}}\right]^{1-p/2}, \qquad r = 2p/(2-p), \text{si } p < 2.$$

On constatera que dans l'un et l'autre cas, l'application $\Phi = \Phi_p$ possède les propriétés suivantes:

(i) Pour $\mathbf{a}$ fixé, l'application $J \to \Phi(\mathbf{a}, J)$ est positive, croissante, sous-additive.

(ii) Si pour tout $n \in J$, $a_n = b_n$, alors $\Phi(\mathbf{a}, J) = \Phi(\mathbf{b}, J)$.

(iii) Il existe un nombre δ strictement positif tel que pour tout J fixé, l'application: $\mathbf{a} \to \Phi(\mathbf{a}, J)$ soit homogène de degré δ.

(iv) Pour tout couple $(\mathbf{a}, J)$, il existe une suite $\mathbf{v} = v(\mathbf{a}, J)$ supérieure ou égale à 1 et tendant vers l'infini avec n telle que $\Phi(\mathbf{va}, J) \leq 2\Phi(\mathbf{a}, J)$.

2. La preuve du théorème. Elle consiste essentiellement à évaluer la borne supérieure sur la boule unité de l_q de la fonction intervenant dans la propriété 1.2.3. Pour évaluer cette borne, on construit une fonction ayant le même ordre de grandeur et définie par une série dont la borne supérieure s'évalue simplement à partir de la somme des bornes supérieures de ses termes.

2.1. *Quelques propriétés des applications* Φ_p. Nous notons $\Phi = \{\Phi(\mathbf{a}, J), \mathbf{a} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}, J \subset \mathbb{N}\}$, une application de $\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}} \times P(\mathbb{N})$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. (λ_n) est une suite positive ou nulle. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, nous posons

$$(2.1.1) \quad N(x) = \{n \in \mathbb{N}: \lambda_n > x\}, \qquad M(x) = \{n \in \mathbb{N}: x < \lambda_n \leq 2x\}.$$

Nous fixons un nombre $s \geq 0$ et une suite $\mathbf{a} = (a_n)$ positive ou nulle tendant vers zéro quand n tend vers l'infini.

LEMME 2.1.2. *On suppose que la fonction* Φ *vérifie la propriété* 1.3.5(i); *alors les inégalités suivantes sont vérifiées*:

$$(2.1.3) \quad \begin{aligned} \int_0^\infty \Phi(\mathbf{a}, M(x)) x^s \, dx &\leq \int_0^\infty \Phi(\mathbf{a}, N(x)) x^s \, dx \\ &\leq 2 \int_0^\infty \Phi(\mathbf{a}, M(x)) x^s \, dx, \end{aligned}$$

$$(2.1.4) \quad \begin{aligned} 2^{-(1+s)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{(1+s)k} \Phi(\mathbf{a}, M(2^k)) &\leq \int_0^\infty \Phi(\mathbf{a}, N(x)) x^s \, dx \\ &\leq 4 \cdot 2^s \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{(1+s)k} \Phi(\mathbf{a}, M(2^k)). \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. (a) Nous démontrons l'inégalité de droite (2.1.3); on a, en fonction des notations (2.1.1),

$$\int_0^\infty \Phi(\mathbf{a}, N(x)) x^s \, dx \leq \sum_{m \in \mathbb{N}} \left[\int_0^\infty \Phi(\mathbf{a}, M(2^m \cdot x)) x^s \, dx \right].$$

En utilisant dans la somme de droite les changements de variable: $x \to 2^m \cdot x$, $m \in \mathbb{N}$, on en déduit

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \Phi(\mathbf{a}, N(x)) x^s \, dx &\leq \sum_{m \in \mathbb{N}} \left[\int_0^\infty \Phi(\mathbf{a}, M(2^m \cdot x)) x^s \, dx \right] \\ &\leq \int_0^\infty \Phi(\mathbf{a}, M(x)) x^s \, dx \sum_{m \in \mathbb{N}} 2^{-m(1+s)}, \end{aligned}$$

et la relation (2.1.3) s'ensuit.

(b) Pour démontrer les inégalités (2.1.4), on décompose l'intervalle d'intégration le long de la suite $\{2^k, k \in \mathbb{Z}\}$. On obtient alors

$$\int_0^\infty \Phi(\mathbf{a}, N(x)) x^s \, dx \geq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[(2^k - 2^{k-1}) 2^{(k-1)s} \Phi(\mathbf{a}, M(2^k)) \right],$$

d'où l'inégalité de gauche.

On obtient aussi à partir de la même décomposition:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \Phi(\mathbf{a}, M(x)) x^s \, dx \\ &\quad \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[(2^{k+1} - 2^k) 2^{(k+1)s} \{ \Phi(\mathbf{a}, M(2^k)) + \Phi(\mathbf{a}, M(2^{k+1})) \} \right], \end{aligned}$$

d'où l'inégalité de droite après un glissement d'indice sur le dernier terme. □

LEMME 2.1.5. *On suppose que* Φ *vérifie les hypothèses* 1.3.5(i)–(iv); *on fixe la suite* $\mathbf{a}$. *Il existe alors une suite* $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{a})$ *supérieure ou égale à* 1 *tendant vers l'infini avec n telle que*

$$\int_0^\infty \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{a}, N(x)) \, dx \leq 16 \int_0^\infty \Phi(\mathbf{a}, N(x)) \, dx. \tag{2.1.6}$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de faire la preuve si le second membre de (2.1.6) est fini. L'inégalité (2.1.4), appliquée pour $s = 0$, montre que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^k \Phi(\mathbf{a}, M(2^k)) \leq 2 \int_0^\infty \Phi(\mathbf{a}, N(x)) \, dx;$$

les propriétés des séries convergentes à termes positifs montrent donc qu'il existe une suite $\mathbf{v} = \{v_k, k \in \mathbb{Z}\}$ supérieure ou égale à 1, tendant vers l'infini avec $|k|$, telle que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{v}_k 2^k \Phi(\mathbf{a}, M(2^k)) \leq 4 \int_0^\infty \Phi(\mathbf{a}, N(x)) \, dx. \tag{2.1.7}$$

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on note $\{w_n,\ n \in M(2^k)\}$, la restriction à $M(2^k)$ de la suite $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{a}, J)$ associée à $\mathbf{a} = (a_n)$ et à $J = M(2^k)$ par la propriété 1.3.5(iv). On définit ensuite la suite $\mathbf{u}$ en posant:

$$u_n = [v_k]^{1/\delta} w_n \quad \text{si } n \in M(2^k),\ k \in \mathbb{Z},$$
$$u_n = n + 1 \quad \text{si } n \notin \bigcup\{M(2^k),\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Alors pour tout nombre $M \geq 1$, on a d'après la définition ci-dessus, l'implication

$$(u_n \leq M, n > M\} \Rightarrow \{\exists\ k \in \mathbb{Z}: v_k \leq M^\delta,\ n \in M(2^k),\ w_n \leq M\};$$

ceci exprime exactement que l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}: u_n \leq M\}$ est fini, c'est-à-dire que la suite $\mathbf{u}$ supérieure ou égale à 1 tend vers l'infini avec n. De plus, la même définition de la suite $\mathbf{u}$ implique qu'on a

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^k \Phi(\mathbf{ua}, M(2^k)) \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^k v_k \Phi(\mathbf{wa}, M(2^k)) \leq 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^k v_k \Phi(\mathbf{a}, M(2^k)).$$

Une seconde application de l'inégalité (2.1.4), jointe à (2.1.7), fournit alors la relation (2.1.6). □

2.2. *Un calcul de variation.*

Lemme 2.2. *Soient* $\mathbf{a}$ *une suite positive ou nulle et* $\{N_k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ *une famille de parties de* $\mathbb{N}$ *disjointes; soit de plus* F *la fonction définie sur* l_q *par*

$$F(y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \sum \left[a_n^2 y_n^2 \mathbf{I}_{\{n \in N_k\}} \right] \right\}^{1/2}; \tag{2.2.1}$$

dans ces conditions, les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

$$F \text{ est bornée sur la boule unité de } l_q, \tag{2.2.2}$$

$$\text{la série } \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Phi_p(\mathbf{a}, N_k) \text{ est convergente}. \tag{2.2.3}$$

On a d'ailleurs

$$\sup\{F(y),\ \|y\|_q \leq 1\} = \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} \Phi_p(\mathbf{a}, N_k) \right]^{1/p}. \tag{2.2.4}$$

Démonstration. On prouve d'abord (2.2.4) si la suite (a_n) a un support fini et si la suite $(N_k,\ k \in \mathbb{N})$ est une partition de $\mathbb{Z}$. Sous ces hypothèses, deux applications de l'inégalité de Hölder montrent que pour tout $y \in l_q$, on a

$$\begin{aligned} F(y) &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \Phi_p(\mathbf{a}, N_k)^{1/p} \|(y_n, n \in N_k)\|_q \right\} \\ &\leq \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} \Phi_p(\mathbf{a}, N_k) \right]^{1/p} \|y\|_q; \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

plus précisément, l'égalité maximale de Hölder montre que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, il existe une suite $y^k = \{y_n,\ n \in N_k\}$ telle que

$$\|y^k\|_q = \Phi_p(\mathbf{a}, N_k)^{1/q} \quad \text{et} \quad \left\{\sum \left[a_n^2 y_n^2 \mathbf{I}_{\{n \in N_k\}}\right]\right\}^{1/2} = \Phi_p(\mathbf{a}, N_k)^{1/p};$$

en recollant les y^k, on obtient donc une suite $y = \{y_n, n \in N_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ telle que

$$\|y\|_q = \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} \Phi_p(\mathbf{a}, N_k)\right]^{1/q} \quad \text{et} \quad F(y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Phi_p(\mathbf{a}, N_k).$$

On pose alors $z = y\{\|y\|_q\}^{-1}$ et on a

$$\|z\|_q = 1 \quad \text{et} \quad F(z) = \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} \Phi_p(\mathbf{a}, N_k)\right]^{1/p}. \tag{2.2.6}$$

La relation (2.2.4) résulte alors de (2.2.5) et (2.2.6); le résultat général du lemme s'en déduit par un procédé de convergences monotones. □

2.3. *Démonstration du théorème.* (a) Pour tout $y \in l_q$, nous posons

$$J(y) = \int_0^\infty \left\{\sum \left[a_n^2 y_n^2 \mathbf{I}_{\{b_n > \exp x^2\}}\right]\right\}^{1/2} dx,$$

$$k(y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left\{2^{2k} \sum \left[a_n^2 y_n^2 \mathbf{I}_{\{\exp 2^{2k} < b_n \le \exp 2^{2k+2}\}}\right]\right\}^{1/2}.$$

Dans ces conditions, le Lemme 2.1.2, appliqué pour $s' = 0$, pour $\mathbf{a}' = \{a_n y_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ et pour $\lambda'_n = [\log^+ b_n]^{1/2}$ montre que $J(y)$ est borné sur la boule unité de l_q si et seulement si $K(y)$ a la même propriété. Le Lemme 2.2 implique que ceci est réalisé si et seulement si la série

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{kp} \Phi_p\left(\mathbf{a}, \left\{\exp 2^{2k} < b_n \le \exp 2^{2k+2}\right\}\right)$$

est convergente. Une seconde application du Lemme 2.1.2, appliqué pour $s = p - 1$, montre que la convergence de la dernière série est équivalente à celle de l'intégrale

$$\int_0^\infty \Phi_p\left(\mathbf{a}, \left\{b_n > \exp x^2\right\}\right) x^{p-1}\, dx.$$

Cette argumentation prouve donc l'équivalence des propriétés 1.2.3 (dans le cas borné) et 1.3.3 de sorte que la partie (a) du Théorème 1.3 résulte de la même partie du Théorème 1.2.

(b) Sous les hypothèses 1.3(b), le Lemme 2.1.5 et l'argumentation ci-dessus montrent qu'il existe une suite $\mathbf{v}$ supérieure à 1 et tendant vers l'infini avec n telle que la fonction aléatoire $\mathbf{v}X = \{v_n X_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ ait une modification Y dont les trajectoires sont dans l_p et localement bornées pour la topologie de cet espace.

Fixons alors un élément ω de Ω tel que l'application: $t \to Y(\omega, t)$ soit dans l_p et que son image soit localement bornée pour la topologie de cet espace. Puisque la suite numérique $\mathbf{v}$ est supérieure à 1 et tend vers l'infini avec n, l'application $t \to \{Y_n(\omega, t)/v_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ qui est une modification de X, sera aussi dans l_p et son image sera localement relativement compacte pour la topologie de cet espace. Cette propriété, jointe au fait que les différentes composantes X_n ont elles-mêmes des modifications (réelles) à trajectoires continues, suffit à montrer ([2], Théorème 4.2.1) que la fonction aléatoire X elle-même a une modification dont les trajectoires sont dans l_p et continues pour la topologie de cet espace. Le théorème est donc établi.

3. Un exemple. Soient X une fonction aléatoire du type (1.1.1) et $p \in [1, \infty[$; on suppose la suite $\mathbf{a} = (a_n)$ décroissante. Dans le cas où p est supérieur ou égal à 2, on a montré précédemment ([3], Corollaire 2.1.5) que si l'intégrale $\int_0^\infty [\mu\{u < \exp x^2\}]^{1/2}\, dx$ et la série $\sum |a_n|^p$ sont convergentes (conditions 1.3.1 et 1.3.2), alors pour que X ait une modification à trajectoires continues dans l_p, il suffit que la suite $\{(n+1)^{-2/p} \log^+ b_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ soit bornée. Utilisant le Théorème 1.3, nous pouvons prolonger cette condition suffisante au cas où p est compris entre 1 et 2. On obtient en effet:

COROLLAIRE 3.1. *Supposons la suite* $\mathbf{a}$ *décroissante et* $p \in [1, 2[$; *pour que* X *ait une modification à trajectoires continues dans* l_p, *il suffit que les conditions* 1.3.1 *et* 1.3.2 *soient satisfaites et que de plus*:

(3.1.1) *la suite* $\left\{(n+1)^{-1} \log^+ b_n,\ n \in \mathbb{N}\right\}$ *soit bornée.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que sous les hypothèses indiquées, l'intégrale

$$J = \int_0^\infty \left\{ \sum \left[|a_n|^r \mathbf{I}_{\{b_n > \exp x^2\}} \right] \right\}^{1-p/2} x^{p-1}\, dx$$

est finie; or par hypothèse, on a

$$J \leq \int_0^\infty \left\{ \sum \left[|a_n|^r \mathbf{I}_{\{x^2 < C(n+1)\}} \right] \right\}^{1-p/2} x^{p-1}\, dx;$$

le Lemme 2.1.1 fournit donc

$$J \leq 2\int_0^\infty \left\{ \sum \left[|a_n|^r \mathbf{I}_{\{(C/4)(n+1) \leq x^2 < C(n+1)\}} \right] \right\}^{1-p/2} x^{p-1}\, dx,$$

$$J \leq 2\int_0^\infty \left[|a_n|^p (4x^2/C) \mathbf{I}_{\{n = [x^2/C]\}} \right]^{1-p/2} x^{p-1}\, dx,$$

$$J \leq 2 \sum_{n=0}^{\infty} [4/C]^{1-p/2} |a_n|^p \int \mathbf{I}_{\sqrt{nC} \leq x \leq \sqrt{(n+1)C}}\, x\, dx \leq 4(C/4)^{p/2} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p,$$

d'où le corollaire. □

3.1.2 REMARQUE. Fixons un nombre $p \in [1, 2[$ et un nombre $\alpha > 0$. Définissons des suites $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ en posant:

$$a_n = (n+1)^{-1/p} [\log(n+3)]^{-2/p}, \qquad b_n = \exp\left[(n+1)^\alpha\right].$$

Alors les séries $\sum |a_n|^p$ et $\sum |a_n|^r$ convergent de sorte que dans ce cas, la condition 1.3.3 sera vérifiée si et seulement si l'intégrale

$$\int^{\infty} \Big[\sum \big\{ |a_n|^r \mathbf{I}_{\{b_n > \exp x^2\}} \big\} \Big]^{1-p/2} x^{p-1}\, dx$$

converge. Le choix particulier des suites **a** et **b** montre que cette condition intégrale est réalisée, indépendamment de la valeur de p, si et seulement si α est inférieur ou égal à 1. Cet exemple montre que dans le cas $p \in [1, 2[$, la condition 3.1.1 est la meilleure possible de ce type: on ne peut lui substituer aucune condition du type "$\{(n+1)^{-\alpha} \log^+ b_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ bornée" avec $\alpha > 1$!

Conclusion. En guise de conclusion, on peut souligner que si la régularité des fonctions aléatoires considérées semble dépendre d'un très grand nombre de paramètres, c'est-à-dire de p, de φ ou μ, des (a_n) et (b_n), les énoncés établis permettent dans une très grande mesure de séparer les effets de ces différentes classes de paramètres.

REFERENCES

[1] Fernique, X. (1989). La régularité des fonctions aléatoires d'Ornstein–Uhlenbeck à valeurs dans l_2, le cas diagonal. *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I* **309** 59–62.
[2] Fernique, X. (1990a). Fonctions aléatoires à valeurs dans les espaces lusiniens. *Expositiones Math.* **8** 289–364.
[3] Fernique, X. (1990b). Sur la régularité de certaines fonctions aléatoires d'Ornstein–Uhlenbeck. *Ann. Inst. H. Poincaré* **26** 399–417.
[4] Fernique, X. (1991). Régularité de fonctions aléatoires gaussiennes stationnaires. *Probab. Theory Related Fields* **88** 521–536.
[5] Iscoe, I., Marcus, M. B., McDonald, D., Talagrand, M. et Zinn, J. (1990). Continuity of l_2-valued Ornstein–Uhlenbeck. *Ann. Probab.* **18** 68–84.
[6] Iscoe, I. et McDonald, D. (1987). Continuity of l_2-valued Ornstein–Uhlenbeck processes. Manuscrit non publié.
[7] Marcus, M. B. (1990). Continuity in l^p of certain Ornstein–Uhlenbeck processes. In *Progress in Probability. Probability in Banach Spaces* **21** 7. Birkhäuser, Boston.
[8] Schmuland, B. (1988). Regularity of l_2-valued Ornstein–Uhlenbeck stationary processes. *C.R. Math. Acad. Sci. Rep. Canada* **10** 119–124.

Université Louis Pasteur
Département de Mathématique
7, Rue René Descartes
67084 Strasbourg Cédex
France