The Annals of Probability
1995, Vol. 23, No. 3, 1289–1299

CONTRÔLE DE LA NORME H^p D'UNE MARTINGALE PAR DES MAXIMUMS DE TEMPS LOCAUX

BY CHRISTOPHE LEURIDAN

Université de Grenoble

Soit B un mouvement brownien issu de 0. Notons $L_t^* = \max_{x \in \mathbb{R}} L_t^x$ le maximum des temps locaux à l'instant t. D'après les inégalités de Barlow–Yor, pour tout $p > 0$, il existe deux constantes $C_p > c_p > 0$ telles que pour tout temps d'arrêt τ, on ait

$$c_p \mathbb{E}[\tau^{p/2}] \leq \mathbb{E}[L_\tau^{*p}] \leq C_p \mathbb{E}[\tau^{p/2}].$$

Soit F un fermé de $\mathbb{R}$ fixé. Dans cet article on donne une condition nécessaire et suffisante sur F pour que l'on ait des inégalités semblables avec $\max_{x \in F} L_\tau^x$ au lieu de L_τ^*, et on démontre d'autres résultats du même type.

Let B be a brownian motion starting at 0. We denote by $L_t^* = \max_{x \in \mathbb{R}} L_t^x$ the maximum of local times at time t. The Barlow–Yor inequalities tell us that for every $p > 0$, there are constants $C_p > c_p > 0$ such that for every stopping time τ,

$$c_p \mathbb{E}[\tau^{p/2}] \leq \mathbb{E}[L_\tau^{*p}] \leq C_p \mathbb{E}[\tau^{p/2}].$$

Given a fixed closed set $F \subset \mathbb{R}$, we give a condition on F which is necessary and sufficient to derive similar inequalities with $\max_{x \in F} L_\tau^x$ instead of L_τ^* and we prove various related results.

Introduction et présentation des principaux résultats. Dans tout ce travail, $B = (B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ désignera un mouvement brownien dans $\mathbb{R}$, issu de 0, et $(\mathscr{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ une filtration qui fasse de B une martingale. Pour alléger les énoncés, on notera $\mathscr{T}$ l'ensemble des temps d'arrêt pour la filtration $(\mathscr{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$. On note L_t^x le temps local du mouvement brownien B à l'instant t et au point x.

La quantité $L_t^* = \max_{x \in \mathbb{R}} L_t^x$ est étudiée pour la première fois par Kesten, qui démontre en 1965 une loi du logarithme itéré dans [5].

En 1981, Barlow et Yor démontrent dans [1] la double inégalité

$$\forall p > 0, \forall \tau \in \mathscr{T}, \qquad c_p \mathbb{E}[\tau^{p/2}] \leq \mathbb{E}[L_\tau^{*p}] \leq C_p \mathbb{E}[\tau^{p/2}],$$

où $C_p > c_p > 0$ sont des constantes indépendantes de τ. Cette inégalité, que nous énonçons ici pour le mouvement brownien, s'étend par changement de temps à n'importe quelle martingale continue issue de 0. Barlow et Yor ont donné en 1982 dans [2] une généralisation de l'inégalité $\mathbb{E}[L_\tau^{*p}] \leq C_p \mathbb{E}[\tau^{p/2}]$ pour des semi-martingales continues.

Received January 1994; revised September 1994.

AMS 1991 *subject classifications.* Primary 60G44; secondary 60J55, 60J65.

Key words and phrases. Martingales, Brownian motion, local times, maximums of local times, H^P norms.

En 1987, Davis en donne dans [4] une démonstration simplifiée, au moyen "d'inégalités de bons λ." Peu de temps avant, Bass [3] énonçait grâce aux "inégalités de bons λ" des critères permettant de démontrer des inégalités $c\mathbb{E}[\tau^{p/2}] \leq \mathbb{E}[A_\tau^p]$ et $\mathbb{E}[A_\tau^p] \leq C\mathbb{E}[\tau^{p/2}]$ pour de nombreuses fonctionnelles continues et croissantes A du mouvement brownien, et en particulier pour les fonctionnelles B^* et L^*.

Compte tenu des inégalités de Burkholder, Davis et Gundy, cette double inégalité montre que pour $p > 0$, la fonctionnelle L^* permet d'estimer la norme $\mathbb{H}^p$ des martingales $B_{\cdot \wedge \tau}$, $\tau \in \mathscr{T}$ (ou la "pseudonorme" si $p < 1$). En est-il de même pour un maximum de temps locaux restreint à un fermé de $\mathbb{R}$ donné? Pour F fermé de $\mathbb{R}$, notons $L_t^F = \max_{x \in F} L_t^x$. Comme, bien sûr, $L_t^F \leq L_t^*$, on a toujours une inégalité de la forme

$$\forall\, p > 0, \forall\, \tau \in \mathscr{T}, \qquad \mathbb{E}\left[L_\tau^{Fp}\right] \leq C_p \mathbb{E}\left[B_\tau^{*\,p}\right],$$

en notant $B_t^* = \max_{s \in [0,t]} |B_s|$.

Le problème est donc de savoir pour quels fermés F on a une inégalité "réciproque,"

$$\forall\, p > 0, \forall\, \tau \in \mathscr{T}, \qquad \mathbb{E}\left[L_\tau^{Fp}\right] \leq c_p \mathbb{E}\left[B_\tau^{*\,p}\right],$$

où $c_p > 0$ est une constante ne dépendant que de p et de F.

Pour pouvoir appliquer le critère de Bass à la fonctionnelle L^F, il faudrait satisfaire la condition suivante: $P_x[L_{\lambda^2}^F < b\lambda] \to_{b \to 0} 0$ uniformément vis à vis de $x \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, en notant P_x la mesure de Wiener issue de x. Or lorsque $x \notin F$, on n'a même pas $P^x[L_1^F < b] \to_{b \to 0} 0$, si bien que parmi les fonctionnelles de la forme L^F, la fonctionnelle L^* est la seule pour laquelle le critère de Bass s'applique.

Cependant, nous allons voir par exemple que si F contient deux suites géométriques non constantes, opposées et indexées par $\mathbb{Z}$, on a effectivement une inégalité réciproque. C'est le cas de $F = \{\pm 2^n,\ n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$.

En fait, nous donnons une condition nécessaire et suffisante sur F pour qu'il y ait une inégalité réciproque, dans le Théorème 1:

THÉORÈME 1. *Soit* $p \geq 1$. *Pour avoir une inégalité de la forme*

$$\forall\, \tau \in \mathscr{T}, \qquad \mathbb{E}\left[L_\tau^{Fp}\right] \geq c_p \mathbb{E}\left[B_\tau^{*\,p}\right],$$

il faut et il suffit qu'il existe $\gamma \geq 1$ *tel que*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \qquad F \cap [x, \gamma x] \neq \varnothing.$$

REMARQUE. La condition du Théorème 1 ne dépend pas de p. Par conséquent, si on a pour une certaine valeur de p, supérieure ou égale à 1, une inégalité

$$\forall\, \tau \in \mathscr{T}, \qquad \mathbb{E}\left[L_\tau^{Fp}\right] \geq c_p \mathbb{E}\left[B_\tau^{*\,p}\right]$$

on a ce type d'inégalités pour toutes les valeurs de p supérieures ou égales à 1.

Que se passe-t-il pour $p \in]0,1[$? On va voir que la situation est notablement différente puisque le temps local en 0 suffit à contrôler les "pseudonormes" $\mathbb{H}^p$, comme le montre le Théorème 2:

THÉORÈME 2. *Pour $p \in]0,1[$, il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+^*$ telle que*

$$\forall\, \tau \in \mathscr{T}, \qquad \mathbb{E}\big[L_\tau^{*p}\big] \le C\mathbb{E}\big[L_\tau^{0p}\big].$$

D'après les inégalités de Barlow et Yor, ce théorème est équivalent au fait que l'on a, pour $p < 1$, une inégalité

$$\forall\, \tau \in \mathscr{T}, \qquad \mathbb{E}\big[B_\tau^{*p}\big] \le \tilde{C}\mathbb{E}\big[L_\tau^{0p}\big].$$

Cette inégalité a déjà été énoncée par Yor dans [11], pour toute martingale continue issue de 0, comme application de la relation de domination de Lenglart [7]. Nous verrons toutefois une autre démonstration du Théorème 2, qui a l'intérêt de fournir une bonne estimation de la meilleure constante.

Le Théorème 2 entraîne, lorsque $p \in]0,1[$, que pour avoir une inégalité réciproque,

$$\forall\, \tau \in \mathscr{T}, \qquad \mathbb{E}\big[L_\tau^{Fp}\big] \ge c_p\mathbb{E}\big[B_\tau^{*p}\big],$$

il faut et il suffit que F contienne le point 0. (On voit que cette condition est nécessaire en considérant le premier instant d'atteinte de F par le mouvement brownien B.)

Revenons au cas où $p \ge 1$. On peut chercher à obtenir un résultat pour des fermés comme $\{2^n,\ n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$, vérifiant la condition du Théorème 1 "à droite de 0," c'est-à-dire pour lesquels il existe $\gamma \ge 1$ tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad F \cap [\,x, \gamma x\,] \ne \varnothing.$$

Nous démontrerons une version "unilatérale" du Théorème 1, faisant intervenir la quantité $S_t = \max_{s\in[0,t]} B_s$ à la place de B_t^*. C'est l'objet du Théorème 3:

THÉORÈME 3. *Soit $p \ge 1$. Pour avoir une inégalité de la forme*

$$\forall\, \tau \in \mathscr{T}, \qquad \mathbb{E}\big[L_\tau^{Fp}\big] \ge c_p\mathbb{E}\big[S_\tau^{p}\big],$$

il faut et il suffit qu'il existe $\gamma \ge 1$ tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad F \cap [\,x, \gamma x\,] \ne \varnothing.$$

On peut enfin se demander ce que l'on peut dire pour des fermés comme $\{\pm 2^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ ou même $\{2^n,\ n \in \mathbb{N}\}$, ne vérifiant une propriété $F \cap [\,x, \gamma x\,] \ne \varnothing$ (avec $\gamma \ge 1$ fixé) que pour x assez grand. Nous verrons alors dans des "variantes" des Théorèmes 1 et 3 que l'on obtient des inégalités où figurent des constantes additives: on perd l'homogénéité qui était due à l'invariance d'échelle.

Notre travail comprend quatre parties:

1. Dans la première, nous démontrons que les conditions des Théorèmes 1 et 3 sont suffisantes. Pour cela, nous établissons des "inégalités de bons λ."

2. Dans la deuxième, nous démontrons qu'elles sont nécessaires. En supposant que F ne vérifie pas la condition:
$$\exists\, \gamma \geq 1, \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad F \cap [\, x, \gamma x\,] \neq \varnothing,$$
on construit effectivement une suite (τ_n) de temps d'arrêt telle que
$$\forall\, p \geq 1, \qquad \frac{\mathbb{E}\big[L_{\tau_n}^{Fp}\big]}{\mathbb{E}\big[S_{\tau_n}^p\big]} \to_{n \to +\infty} 0.$$
3. La troisième partie traite le cas où $p \in [0, 1[$: on y redémontre l'inégalité $\mathbb{E}[L_\tau^{*p}] \leq C\mathbb{E}[L_\tau^{0p}]$ et on donne une estimation de la meilleure constante.
4. La quatrième expose des variantes des résultas ci-dessus.

Première partie. Nous montrons que les conditions des Théorèmes 1 et 3 sont suffisantes.

Nous commençons par prouver que si F vérifie pour un certain $\gamma \geq 1$ la propriété
$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad F \cap [\, x, \gamma x\,] \neq \varnothing,$$
alors S_τ et L_τ^F vérifient des "inégalités de bons λ" indépendantes de τ. Plus précisément on a la proposition:

PROPOSITION 1. *Soit F un fermé de $\mathbb{R}$ vérifiant pour un certain $\gamma \geq 1$ la propriété*
$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad F \cap [\, x, \gamma x\,] \neq \varnothing.$$
Alors $\alpha > \gamma$ étant fixé, il existe une fonction η: $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ tendant vers 0 en 0 telle que
$$\forall\, \tau \in \mathscr{T}, \forall\, \beta, \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \qquad P\big[S_\tau \geq \alpha\lambda;\, L_\tau^F < \beta\lambda | S_\tau \geq \lambda\big] \leq \eta(\,\beta)$$
d'où, par des arguments classiques, le corollaire:

COROLLAIRE. *Sous les mêmes hypothèses que précédemment, on a*
$$\forall\, p > 0, \exists\, c_p \in \mathbb{R}_+^*, \forall\, \tau \in \mathscr{T}, \qquad \mathbb{E}\big[L_\tau^{Fp}\big] \geq c_p \mathbb{E}\big[S_\tau^p\big].$$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION. Pour $a \in \mathbb{R}$, notons $\sigma_a = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ | B_t = a\}$; $(\sigma_a)_{a \in \mathbb{R}_+}$ est un processus stable d'indice $\frac{1}{2}$, et on a
$$\begin{aligned} P\big[S_\tau \geq \alpha\lambda;\, L_\tau^F < \beta\lambda | S_\tau \geq \lambda\big] &= P\big[\tau \geq \sigma_{\alpha\lambda};\, L_\tau^F < \beta\lambda | \tau \geq \sigma_\lambda\big] \\ &\leq P\big[L_{\sigma_{\alpha\lambda}}^F < \beta\lambda | \tau \geq \sigma_\lambda\big]. \end{aligned}$$
Notons $\tilde{B}$ le mouvement brownien $B_{\sigma_\lambda +.} - \lambda$, issu de 0 et indépendant de $\mathscr{F}_{\sigma_\lambda}$. Alors en notant $\tilde{L}$ son temps local et $\tilde{\sigma}_a = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ | \tilde{B}_t = a\}$ pour $a \in \mathbb{R}$, on a
$$\sigma_{\alpha\lambda} = \sigma_\lambda + \tilde{\sigma}_{(\alpha - 1)\lambda}$$
et
$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+, \forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad L_{\sigma_\lambda + t}^x = L_{\sigma_\lambda}^x + \tilde{L}_t^{x-\lambda} \geq \tilde{L}_t^{x-\lambda}.$$

Ainsi,

$$L^F_{\sigma_{\alpha\lambda}} \geq \tilde{L}^{F-\lambda}_{\sigma_{(\alpha-1)\lambda}}, \quad \text{avec } F-\lambda = \{x-\lambda,\ x \in F\}.$$

Or

$$\{\tau \geq \sigma_\lambda\} \in \mathscr{F}_{\sigma_\lambda}.$$

Donc par indépendance de $\tilde{B}$ et $\mathscr{F}_{\sigma_\lambda}$, on a

$$P\left[S_\tau \geq \alpha\lambda;\ L^F_\tau < \beta\lambda | S_\tau \geq \lambda\right] \leq P\left[\tilde{L}^{F-\lambda}_{\sigma_{(\alpha-1)\lambda}} < \beta\lambda | \tau \geq \sigma_\lambda\right]$$
$$= P\left[L^{F-\lambda}_{\sigma_{(\alpha-1)\lambda}} < \beta\lambda\right] = P\left[L^{F/\lambda-1}_{\sigma_{\alpha-1}} < \beta\right],$$

par changement d'échelle. Par hypothèse $F \cap [\lambda, \gamma\lambda] \neq \varnothing$ d'où $F/\lambda - 1 \cap [0, \gamma-1] \neq \varnothing$. Donc

$$L^{F/\lambda-1}_{\sigma_{\alpha-1}} \geq \min_{x \in [0,\gamma-1]} L^x_{\sigma_{\alpha-1}}.$$

Comme on a choisi $\alpha > \gamma$, cette dernière variable aléatoire est p.s. strictement positive. En effet, le premier théorème de Ray et Knight nous dit que $(L^{\alpha-1-y}_{\sigma_{\alpha-1}})_{y \in [0,\alpha-1]}$ est le carré d'un processus de Bessel de dimension 2 et issu de 0, et ne repasse donc pas en 0. (On trouvera les démonstrations initiales dans [6] et [8]. On peut aussi se reporter à [9], Chapitre XI, Section 2, ou trouver une démonstration originale due à Walsh dans [10].)

Ainsi en posant

$$\eta(\beta) = P\left[\min_{x \in [0,\gamma-1]} L^x_{\sigma_{\alpha-1}} < \beta\right],$$

on a $\eta(\beta) \to_{\beta \downarrow 0} 0$ et

$$P\left[S_\tau \geq \alpha\lambda;\ L^F_\tau < \beta\lambda | S_\tau \geq \lambda\right] \leq \eta(\beta),$$

ce qu'on voulait démontrer.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1 (Partie condition suffisante). Le Théorème 1—partie condition suffisante—se déduit aisément du Théorème 3.

En effet, si F vérifie pour un certain $\gamma \geq 1$ la propriété

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \qquad F \cap [x, \gamma x] \neq \varnothing,$$

alors F et $-F$ vérifient la condition du Théorème 3, dont on vient de prouver la suffisance. On a donc des inégalités

$$\forall\, p > 0, \forall\, \tau \in \mathscr{T}, \qquad \mathbb{E}\left[L^{F\,p}_\tau\right] \geq c_p \mathbb{E}\left[S^p_\tau\right].$$

Pour le fermé $-F$, on applique le Théorème 3 au mouvement brownien $-B$, ce qui donne en notant $I_t = \max_{s \in [0,t]}(-B_s)$:

$$\forall\, p > 0, \forall\, \tau \in \mathscr{T}, \qquad \mathbb{E}\left[L^{F\,p}_\tau\right] \geq c_p \mathbb{E}\left[I^p_\tau\right].$$

Par addition on obtient

$$\mathbb{E}\left[L^{F\,p}_\tau\right] \geq \frac{c_p}{2}\left[\mathbb{E}[S^p_\tau] + \mathbb{E}[I^p_\tau]\right] \geq \frac{c_p}{2}\mathbb{E}\left[B^{*\,p}_\tau\right]. \qquad \square$$

REMARQUE. On peut chercher à démontrer directement le Théorème 1 en obtenant des "inégalités de bons λ" entre B_τ^* et L_τ^F. La démonstration est analogue mais plus difficile.

On pose pour $a \in \mathbb{R}_+$,

$$\sigma_a' = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \; |B_t| = a\} = \sigma_a \wedge \sigma_{-a},$$

et on considère cette fois le mouvement brownien $\tilde{B} = B_{\sigma_\lambda' + \cdot} - B_{\sigma_\lambda'}$ et on note avec un " $\sim$ " les quantités relatives à $\tilde{B}$. En remarquant que $\sigma_{\alpha\lambda}' \geq \sigma_\lambda' + \tilde{\sigma}_{(\alpha-1)\lambda}'$, on montre de façon analogue que

$$P\left[B_\tau^* \geq \alpha\lambda;\, L_\tau^F < \beta\lambda | B_\tau^* \geq \lambda\right] \leq P\left[\tilde{L}_{\tilde{\sigma}_{(\alpha-1)\lambda}'}^{F-B_{\sigma'\lambda}} < \beta\lambda | \tau \geq \sigma_\lambda'\right].$$

L'une des difficultés vient de ce que $B_{\sigma_\lambda'}$ peut valoir λ ou $-\lambda$ (tandis que $B_{\sigma_\lambda} = \lambda$). On conditionne alors par rapport à $\mathcal{F}_{\sigma_\lambda'}$ en écrivant

$$P\left[\tilde{L}_{\tilde{\sigma}_{(\alpha-1)\lambda}'}^{F-B_{\sigma'\lambda}} < \beta\lambda | \mathcal{F}_{\sigma_\lambda'}\right] = f(B_{\sigma_\lambda'})$$

avec

$$\begin{aligned} f(b) &= P\left[\tilde{L}_{\tilde{\sigma}_{(\alpha-1)\lambda}'}^{F-b} < \beta\lambda\right] \\ &= P\left[L_{\sigma_{\alpha-1}'}^{(F-b)/\lambda} < \beta\right] \end{aligned}$$

puis on majore $f(\lambda)$ et $f(-\lambda)$.

On a

$$f(\lambda) = P\left[L_{\tilde{\sigma}_{\alpha-1}'}^{F/\lambda-1} < \beta\right] \leq P\left[L_{\sigma_{\alpha-1}}^{F/\lambda-1} < \beta\right] + P\left[L_{\sigma_{-(\alpha-1)}}^{F/\lambda-1} < \beta\right].$$

Or F contient au moins un point dans les intervalles $[\lambda, \gamma\lambda]$ et $[\gamma^{-1}\lambda, \lambda]$. Donc $F/\lambda - 1$ contient au moins un point dans les intervalles $[0, \gamma - 1]$ et $[\gamma^{-1} - 1, 0]$. Comme $\gamma^{-1} - 1 \geq -(\gamma - 1)$, on a ainsi

$$f(\lambda) \leq P\left[\min_{x\in[0,\gamma-1]} L_{\sigma_{\alpha-1}}^x < \beta\right] + P\left[\min_{x\in[-(\gamma-1),0]} L_{\sigma_{-(\alpha-1)}}^x < \beta\right] = 2\eta(\beta).$$

De même $f(-\lambda) \leq 2\eta(\beta)$. Ainsi

$$P\left[\tilde{L}_{\tilde{\sigma}_{(\alpha-1)\lambda}'}^{F-B_{\sigma'\lambda}} < \beta\lambda | \mathcal{F}_{\sigma_\lambda'}\right] \leq 2\eta(\beta).$$

Comme $\{\tau \geq \sigma_\lambda'\} \in \mathcal{F}_{\sigma_\lambda'}$, on a finalement

$$\begin{aligned} P\left[B_\tau^* \geq \alpha\lambda;\, L_\tau^F < \beta\lambda | B_\tau^* \geq \lambda\right] &\leq P\left[\tilde{L}_{\tilde{\sigma}_{(\alpha-1)\lambda}'}^{F-B_{\sigma'\lambda}} < \beta\lambda | \tau \geq \sigma_\lambda'\right] \\ &\leq 2\eta(\beta). \end{aligned}$$

On a obtenu ainsi des "inégalités de bons λ" entre B_τ^* et L_τ^F.

Deuxième partie. On montre que les conditions des Théorèmes 1 et 3 sont nécessaires.

On suppose que F ne vérifie pas la condition du Théorème 1:

$$\exists\, \gamma \geq 1, \forall\, x \in \mathbb{R}^*, \qquad F \cap [x, \gamma x] \neq \varnothing.$$

Alors F ne vérifie pas l'une des deux conditions

$$\exists \gamma \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad F \cap [x, \gamma x] \neq \varnothing,$$
$$\exists \gamma \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \qquad F \cap [x, \gamma x] \neq \varnothing.$$

Supposons par exemple que F ne vérifie pas la première (qui est la condition du Théorème 3). On va construire une suite $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de temps d'arrêt telle que

$$\forall p \geq 1, \qquad \frac{\mathbb{E}\left[L_{\tau_n}^{Fp}\right]}{\mathbb{E}\left[S_{\tau_n}^p\right]} \to_{n \to +\infty} 0,$$

ce qui prouvera simultanément la nécessité des conditions des Théorèmes 1 et 3.

Pour $n \in N^*$, soit $x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $F \cap [x_n, nx_n] = \varnothing$. L'idée consiste à poser $\tau_n = \sigma_{-x_n} \wedge \sigma_{nx_n}$, en notant toujours $\sigma_a = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ | B_t = a\}$ pour $a \in \mathbb{R}$. On a alors d'une part

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x_n^p}\mathbb{E}\left[L_{\tau_n}^{Fp}\right] &\leq \frac{1}{x_n^p}\mathbb{E}\left[L_{\sigma_{-x_n} \wedge \sigma_{nx_n}}^{[-x_n, x_n]^p}\right] \quad (\text{car } F \cap [x_n, nx_n] = \varnothing)\\
&= \mathbb{E}\left[L_{\sigma_{-1} \wedge \sigma_n}^{[-1,1]^p}\right] \quad (\text{par changement d'échelle})\\
&\to_{n \to +\infty} \mathbb{E}\left[L_{\sigma_{-1}}^{[-1,1]^p}\right].
\end{aligned}$$

D'aprés le premier théorème de Ray et Knight (voir [6], [8], [9], Chapitre XI, Section 2, ou [10]) $(L_{\sigma_{-1}}^{-1+x})_{x \in \mathbb{R}_+}$ est une sous-martingale positive et $L_{\sigma_{-1}}^1$ a des moments de tous ordres. Donc en vertu des inégalités de Doob, l'espérance $\mathbb{E}[L_{\sigma_{-1}}^{[-1,1]^p}]$ est finie. D'autre part,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x_n^p}\mathbb{E}\left[S_{\tau_n}^p\right] &= \frac{1}{x_n^p}\mathbb{E}\left[S_{\sigma_{-x_n} \wedge \sigma_{nx_n}}^p\right]\\
&= \mathbb{E}\left[S_{\sigma_{-1} \wedge \sigma_n}^p\right] \quad (\text{par changement d'échelle})\\
&\to_{n \to +\infty} \mathbb{E}\left[S_{\sigma_{-1}}^p\right].
\end{aligned}$$

Cette demière espérance est infinie pour $p \geq 1$, car

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad P\left[S_{\sigma_{-1}} \geq x\right] = P[\sigma_x < \sigma_{-1}] = \frac{1}{1+x}.$$

Ainsi

$$\forall p \geq 1, \qquad \frac{\mathbb{E}\left[L_{\tau_n}^{Fp}\right]}{\mathbb{E}\left[S_{\tau_n}^p\right]} \to_{n \to +\infty} 0.$$

Troisième partie: le cas où $p \in]0,1[$. Commençons par démontrer le Théorème 2:

THÉORÈME 2. *Pour $p \in]0,1[$, il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+^*$ telle que*

$$\forall \tau \in \mathscr{T}, \qquad \mathbb{E}\left[L_\tau^{*p}\right] \leq C\mathbb{E}\left[L_\tau^{0p}\right].$$

DÉMONSTRATION. On note pour $r \in \mathbb{R}_+$: $\tau_r = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ | L_t^0 \geq r\}$. On fixe $r > 1$ et on écrit

$$L_\tau^* \leq \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ r^n \leq L_\tau^0}} \left(L_{\tau_{r^{n+1}}}^* - L_{\tau_{r^n}}^*\right).$$

Par sous-additivité de l'application $x \mapsto x^p$ sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$L_\tau^{*p} \leq \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ r^n \leq L_\tau^0}} \left(L_{\tau_{r^{n+1}}}^* - L_{\tau_{r^n}}^*\right)^p.$$

Donc

$$\mathbb{E}\left[L_\tau^{*p}\right] \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}\left[\left(L_{\tau_{r^{n+1}}}^* - L_{\tau_{r^n}}^*\right)^p \mathbb{1}_{\{r^n \leq L_\tau^0\}}\right].$$

Or pour $n \in \mathbb{Z}$, $L_{\tau_{r^{n+1}}}^* - L_{\tau_{r^n}}^* \leq \tilde{L}_{\tilde{\tau}_{r^{n+1}-r^n}}^*$, où $\tilde{L}$ et $\tilde{\tau}$ sont les homologues de L et τ relatifs au mouvement brownien $\tilde{B} = B_{\tau_{r^n}+\cdot}$, issu de 0 et indépendant de $\mathscr{F}_{\tau_{r^n}}$. Comme $\{r^n \leq L_\tau^0\} = \{\tau_{r^n} \leq \tau\} \in \mathscr{F}_{\tau_{r^n}}$, on a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(L_{\tau_{r^{n+1}}}^* - L_{\tau_{r^n}}^*\right)^p \mathbb{1}_{\{r^n \leq L_\tau^0\}}\right] &\leq \mathbb{E}\left[\tilde{L}_{\tilde{\tau}_{r^{n+1}-r^n}}^{*p} \mathbb{1}_{\{r^n \leq L_\tau^0\}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[L_{\tau_{r^{n+1}-r^n}}^{*p}\right] P\left[r^n \leq L_\tau^0\right] \\
&= \left(r^{n+1} - r^n\right)^p \mathbb{E}\left[L_{\tau_1}^{*p}\right] P\left[r^n \leq L_\tau^0\right],
\end{aligned}$$

par changement d'échelle. Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[L_\tau^{*p}\right] &\leq (r-1)^p \mathbb{E}\left[L_{\tau_1}^{*p}\right] \mathbb{E}\left[\sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{np} \mathbb{1}_{\{r^n \leq L_\tau^0\}}\right] \\
&\leq (r-1)^p \mathbb{E}\left[L_{\tau_1}^{*p}\right] \mathbb{E}\left[\frac{\left(L_\tau^0\right)^p}{1 - r^{-p}}\right].
\end{aligned}$$

D'après le deuxième théorème de Ray et Knight (voir [6], [8] ou [9], Chapitre XI, Section 2), $(L_{\tau_1}^x)_{x \in \mathbb{R}_+}$ et $(L_{\tau_1}^{-x})_{x \in \mathbb{R}_+}$ sont les carrés de deux processus de Bessel de dimension 0 et issus de 1. Ce sont donc deux martingales positives indépendantes, issues de 1 et finissant en 0. Par conséquent $L_{\tau_1}^{\mathbb{R}_+}$ et $L_{\tau_1}^{\mathbb{R}_-}$ sont deux variables aléatoires indépendantes, de même loi que $1/U$, où U suit la loi uniforme sur $[0, 1]$. On en déduit facilement que pour $p \in]0, 1[$, $\mathbb{E}[L_{\tau_1}^{*p}] = 2/((1-p)(2-p))$. Cela prouve que pour $p \in]0, 1[$, il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+^*$ telle que

$$\forall \tau \in \mathscr{T}, \qquad \mathbb{E}\left[L_\tau^{*p}\right] \leq C\mathbb{E}\left[L_\tau^{0p}\right]. \qquad \square$$

Nous allons maintenant démontrer des estimations sur la meilleure constante de cette inégalité:

PROPOSITION 2. *Soit C_p la meilleure constante de l'inégalité du Théorème 2. Alors en notant $\tau_1 = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ | L_t^0 \geq 1\}$, on a*

$$\forall\, p \in]0,1[, \qquad \mathbb{E}\big[L_{\tau_1}^{*p}\big] \leq C_p \leq 4\mathbb{E}\big[L_{\tau_1}^{*p}\big]$$

et même

$$C_p \sim \mathbb{E}\big[L_{\tau_1}^{*p}\big] \sim \frac{2}{1-p} \quad \textit{quand}\, p \uparrow 1.$$

DÉMONSTRATION. On a bien sûr

$$C_p \geq \frac{\mathbb{E}\big[L_{\tau_1}^{*p}\big]}{\mathbb{E}\big[L_{\tau_1}^{0p}\big]} = \mathbb{E}\big[L_{\tau_1}^{*p}\big].$$

Par ailleurs d'après la démonstration du Théorème 2,

$$C_p \leq A_p \mathbb{E}\big[L_{\tau_1}^{*p}\big] \quad \text{avec } A_p = \inf_{r>1} \frac{(r-1)^p}{1-r^{-p}}.$$

Le calcul de A_p n'est pas facile, mais on peut écrire d'une part:

$$A_p \leq \inf_{r>1} \frac{r^p}{1-r^{-p}} = \inf_{x>1} \frac{x}{1-x^{-1}} = 4;$$

d'autre part, pour tout $r > 1$,

$$\limsup_{p \uparrow 1} A_p \leq \lim_{p \uparrow 1} \frac{(r-1)^p}{1-r^{-p}} = \frac{r-1}{1-r^{-1}} = r,$$

d'où $\limsup_{p\uparrow 1} A_p \leq 1$. On obtient ainsi les estimations annoncées. □

REMARQUE. Des démonstrations similaires à celles du Théorème 2 et de la Proposition 2 permettent de voir que

$$\forall\, p \in]0,1[, \forall\, \tau \in \mathscr{T}, \qquad \mathbb{E}\big[\tau^{p/2}\big] \leq A_p \mathbb{E}\big[\tau_1^{p/2}\big]\mathbb{E}\big[L_\tau^{0p}\big].$$

Quatrième partie: Variantes des résultats précédents. Que se passe-t-il lorsque la propriété $F \cap [x, \gamma x] \neq \varnothing$ n'est vérifiée que pour $|x| \geq x_0$, ou même que pour $x \geq x_0$?

En reproduisant les démonstrations de la première partie, on remarque que le seul changement est que l'on n'obtient des "inégalités de bons λ" que pour $\lambda \geq \gamma x_0$ entre B_τ^* et L_τ^F dans le premier cas et pour $\lambda \geq x_0$ entre S_τ et L_τ^F dans le second.

Dans les inégalités $\mathbb{E}[B_\tau^{*p}] \leq c_p^{-1}\mathbb{E}[L_\tau^{Fp}]$ ou $\mathbb{E}[S_\tau^{Fp}] \leq c_p^{-1}\mathbb{E}[L_\tau^{Fp}]$ qu'on avait, apparaît donc une constante additive, la constante multiplicative n'étant pas modifiée. On obtient donc des inégalités de la forme

$$\mathbb{E}\big[B_\tau^{*p}\big] \leq c_p^{-1}\mathbb{E}\big[L_\tau^{Fp}\big] + D_p \quad \text{dans le premier cas,}$$

$$\mathbb{E}\big[S_\tau^{p}\big] \leq c_p^{-1}\mathbb{E}\big[L_\tau^{Fp}\big] + D_p \quad \text{dans le second cas.}$$

Lorsque la condition

$$\exists\, \gamma \geq 1, \exists\, x_0 \in \mathbb{R}_+ | \forall\, x \geq x_0, \qquad F \cap [x, \gamma x] \neq \varnothing$$

n'est pas vérifiée, on peut reproduire la démonstration de la deuxième partie en choisissant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ un réel $x_n > 0$ tel que $F \cap [x_n, n x_n] = \varnothing$ et tel que l'on ait en outre $x_n \geq n$. La suite $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de temps d'arrêt que l'on construit vérifie ainsi,

$$\forall\, p \geq 1, \qquad \frac{\mathbb{E}\left[L_{\tau_n}^{Fp}\right]}{\mathbb{E}\left[S_{\tau_n}^p\right]} \to_{n \to +\infty} 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\left[S_{\tau_n}^p\right] \to_{n \to +\infty} +\infty,$$

ce qui exclut toute inégalité du type

$$\forall\, \tau \in \mathscr{T}, \qquad \mathbb{E}[S_\tau^p] \leq C_p \mathbb{E}[L_\tau^{Fp}] + D_p,$$

avec C_p et D_p constantes positives indépendantes de τ. On peut donc énoncer une variante des Théorèmes 1 et 3:

THÉORÈME 1 (bis). *Soit $p \geq 1$. Pour avoir une inégalité de la forme*

$$\forall\, \tau \in \mathscr{T}, \qquad \mathbb{E}[B_\tau^{*p}] \leq C_p \mathbb{E}[L_\tau^{Fp}] + D_p,$$

il faut et il suffit qu'il existe $\gamma \geq 1$ et $x_0 \in \mathbb{R}_+$ tels que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad |x| \geq x_0 \quad \Rightarrow \quad F \cap [x, \gamma x] \neq \varnothing.$$

THÉORÈME 3 (bis). *Soit $p \geq 1$. Pour avoir une inégalité de la forme*

$$\forall\, \tau \in \mathscr{T}, \qquad \mathbb{E}[S_\tau^p] \leq C_p \mathbb{E}[L_\tau^{Fp}] + D_p,$$

il faut et il suffit qu'il existe $\gamma \geq 1$ et $x_0 \in \mathbb{R}_+$ tels que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad x \geq x_0 \quad \Rightarrow \quad F \cap [x, \gamma x] \neq \varnothing.$$

On peut également chercher à obtenir une variante du Théorème 2, où l'on majore pour $p \in]0, 1[$, $\mathbb{E}[L_\tau^{*p}]$ en fonction de $\mathbb{E}[L_\tau^{ap}]$, a étant un réel fixé.

Pour cela, on introduit le mouvement brownien $\tilde{B} = B_{\sigma_a + \cdot} - a$, issu de 0 et indépendant de $\mathscr{F}_{\sigma_a}$, et on note $\tilde{L}$ son temps local. On a alors

$$L_\tau^* \leq L_{\sigma_a}^* + \tilde{L}_{(\tau - \sigma_a)_+}^*, \quad \text{où } (\tau - \sigma_a)_+ = \max(\tau - \sigma_a, 0).$$

Par sous-additivité de l'application $x \mapsto x^p$ sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$\mathbb{E}[L_\tau^{*p}] \leq \mathbb{E}\left[L_{\sigma_a}^{*p}\right] + \mathbb{E}\left[\tilde{L}_{(\tau - \sigma_a)_+}^{*p}\right].$$

Pour la filtration $(\mathscr{F}_{\sigma_a + t})_{t \in \mathbb{R}_+}$, $\tilde{B}$ est une martingale et $(\tau - \sigma_a)_+$ un temps d'arrêt. D'après le Théorème 2, on a donc

$$\mathbb{E}\left[\tilde{L}_{(\tau - \sigma_a)_+}^{*p}\right] \leq C_p \mathbb{E}\left[\tilde{L}_{(\tau - \sigma_a)_+}^{0p}\right] = C_p \mathbb{E}[L_\tau^{ap}].$$

Ainsi

$$\mathbb{E}[L_\tau^{*p}] \leq C_p \mathbb{E}[L_\tau^{ap}] + D_p, \quad \text{avec } D_p = \mathbb{E}\left[L_{\sigma_a}^{*p}\right] = |a|^p \mathbb{E}\left[L_{\sigma_1}^{*p}\right].$$

Il reste à voir que D_p est fini. Or d'après le premier théorème de Ray et

Knight (voir [6], [8], [9], Chapitre XI, Section 2, ou [10]), le processus $(L_{\sigma_1}^{1-x})_{x \in \mathbb{R}_+}$ est markovien (inhomogène), $(L_{\sigma_1}^{1-x})_{x \in [0,1]}$ étant le carré d'un processus de Bessel de dimension 2 et issu de 0, et $(L_{\sigma_1}^{1-x})_{x \geq 1}$ étant le carré d'un processus de Bessel de dimension 0.

Par conséquent $L_{\sigma_1}^{\mathbb{R}_-} = L_{\sigma_1}^0 \times 1/U$, où U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$ et indépendante de $L_{\sigma_1}^0$. Comme $L_{\sigma_1}^0$ et $L_{\sigma_1}^{[0,1]}$ ont des moments de tous ordres on a donc $\mathbb{E}[L_{\sigma_1}^{]-\infty,1]p}] < +\infty$ pour $p \in]0,1[$, c'est-à-dire $D_p < +\infty$. On peut donc énoncer le Théorème 2 (bis):

THÉORÈME 2 (bis). *Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $p \in]0,1[$ il existe une constante $D_p \in \mathbb{R}_+$ telle que*

$$\forall \tau \in \mathcal{T}, \qquad \mathbb{E}[L_\tau^{*p}] \leq C_p \mathbb{E}[L_\tau^{ap}] + D_p,$$

où C_p est la meilleure constante du Théorème 2.

Remerciements. Je remercie Jean Brossard pour m'avoir soumis le problème que j'ai traité ici (peut-on remplacer L_τ^* par $\max_{x \in F} L_\tau^x \ldots$?) et Lucien Chevalier de m'avoir aiguillonné par des questions intéressantes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARLOW, M. T. and YOR, M. (1981). (Semi)-martingale inequalities and local times. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **55** 237–254.

[2] BARLOW, M. T. and YOR, M. (1982). Semi-martingale inequalities via the Garsia–Rodemich–Rumsey lemma and applications to local times. *J. Funct. Anal.* **49** 198–229.

[3] BASS, R. F. (1987). L_p inequalities for functionals of Brownian motion. *Séminaire de Probabilités XXI. Lecture Notes in Math.* **1247** 206–217. Springer, Berlin.

[4] DAVIS, B. (1987). On the Barlow–Yor inequalities for local time. *Séminaire de Probabilités XXI. Lecture Notes in Math.* **1247** 218–221. Springer, Berlin.

[5] KESTEN, H. (1965). An iterated logarithm law for local time. *Duke Math. J.* **32** 447–456.

[6] KNIGHT, F. B. (1963). Random walks and a sojourn density process. *Trans. Amer. Math. Soc.* **109** 56–86.

[7] LENGLART, E. (1977). Relation de domination entre deux processus. *Ann. Inst. H. Poincaré* **13** 171–179.

[8] RAY, D. B. (1963). Sojourn times of a diffusion process. *Illinois J. Math.* **7** 615–630.

[9] REVUZ, D. and YOR, M. (1991). *Continuous Martingales and Brownian Motion.* Springer, Berlin.

[10] WALSH, J. B. (1978). Downcrossings and the Markov property of local time. *Temps locaux. Astérisque* **52–53**.

[11] YOR, M. (1979). Les inégalités de sous-martingales comme conséquence de la relation de domination. *Stochastics* **3** 1–15.

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE I
INSTITUT FOURIER
URA 188 DU CNRS
B.P. 74
38402 ST MARTIN D'HÈRES CEDEX
FRANCE