The Annals of Probability
1999, Vol. 27, No. 3, 1304–1323

NUMEROTATION DES RECORDS D'UN PROCESSUS DE POISSON PONCTUEL

BY JEAN BROSSARD ET CHRISTOPHE LEURIDAN

Université Joseph Fourier

Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson ponctuel à valeurs dans $]0;+\infty[$. On suppose que la mesure caractéristique μ est infinie, mais que $0 < \mu]a;+\infty[< +\infty$ pour tout $a > 0$. On démontre qu'il n'est pas possible d'énumérer les instants de records *larges* du processus X par une suite strictement croissante de temps d'arrêt (indexée par $\mathbf{Z}$). La preuve repose sur l'inexistence de chaînes de Markov *indexées par* $\mathbf{Z}$ pour les probabilités de transition $\pi_x = \mathbb{1}_{[x;+\infty[}\mu/\mu[x;+\infty[= \mu[\cdot \mid [x;+\infty[\,]$. Lorsqu'on s'intéresse aux records *stricts*, ce résultat peut être mis en défaut: nous donnons une condition nécessaire et suffisante sur la mesure μ pour que l'on puisse énumérer les instants de records stricts par une suite strictement croissante de temps d'arrêt. Enfin, nous étudions s'il est possible ou non de numéroter cycliquement et optionnellement les instants de records larges dans une filtration pour laquelle le processus X soit Poissonien. Nous montrons que cela dépend de la filtration et que c'est impossible dans la filtration naturelle associée au processus X.

1. Introduction. On considère un processus de Poisson ponctuel $X = (X_t)_{t\geq 0}$ valeurs dans $]0\,;+\infty[$, de mesure caractéristique μ, où μ est une mesure positive sur $]0\,;+\infty[$ de masse totale infinie, telle que $0 < \mu\,]a;+\infty[< +\infty$ pour tout $a > 0$. Ces hypothèses assurent qu'avant tout instant $t > 0$, le processus X prend une infinité (dénombrable) de valeurs strictement positives, mais seulement un nombre fini de valeurs supérieures à n'importe quel réel $a > 0$ donné. On convient de poser $X_t = 0$ lorsque X_t n'est pas défini. Pour $t > 0$, on note

$$M_t = \sup\{X_s; 0 \leq s \leq t\},$$

et on appelle D l'ensemble des instants de records larges du processus X,

$$D = \{t > 0\colon X_t \geq M_{t-}\}.$$

Il est facile de montrer que l'ensemble aléatoire D est optionnel et qu'il est isomorphe à $\mathbf{Z}$ pour l'ordre (en particulier les instants de record s'accumulent en 0). Peut-on numéroter ces instants par $\mathbf{Z}$ et de façon optionnelle?

Nous montrons que non. Plus précisément, soit $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration contenant la filtration naturelle du processus X et pour laquelle le processus X est Poissonien, au sens où pour tout $t > 0$, le processus $(X_{t+s})_{s>0}$ est indépendant de la tribu $\mathscr{F}_t$. Nous montrons qu'il n'est pas possible de trouver une suite strictement croissante $(T_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ de temps d'arrêt telle que D soit

Received January 1998; revised March 1999.
AMS 1991 *subject classifications*. Primary 60G55; secondary 60J05.
Key words and phrases. Processus de Poisson ponctuel, énumération optionnelle, numérotation cyclique, chaînes de Markov indexées par $\mathbf{Z}$.

exactement égal à l'ensemble des instants $\{T_n; n \in \mathbf{Z}\}$ (nous dirons qu'une telle suite *énumère* D). Ce résultat fait l'objet du Théorème 2.2.

L'idée de la démonstration est la suivante: si une telle suite de temps d'arrêt existait, alors la suite des records $(X_{T_n})_{n\in\mathbf{Z}}$ serait une chaîne de Markov sur $]0;+\infty[$ admettant comme probabilités de transition la famille $(\pi_x)_{x>0}$, où

$$\pi_x = \mathbf{I}_{[x;+\infty[}\mu/\mu[x;+\infty[= \mu[\cdot \mid [x;+\infty[].$$

Nous mettons en évidence quelques propriétés remarquables des chaînes de Markov ayant ce type de probabilités de transition, pour montrer par l'absurde qu'il n'existe pas de chaîne de Markov *indexée par* $\mathbf{Z}$ admettant ces probabilités de transition (Théorème 2.1). L'obstruction à la numérotation se situe donc clairement au niveau des lois et non de la filtration dans laquelle le processus X est Poissonien.

Que se passe-t-il si l'on regarde l'ensemble des records stricts? On pourrait s'attendre au même résultat que pour les records larges, vu la similitude des problèmes. Ce n'est pas le cas, et nous verrons qu'il existe des mesures μ pour lesquelles on peut énumérer l'ensemble des instants de records stricts par une suite de temps d'arrêt. Le Théorème 6.1 en donne une caractérisation complète.

Le dernier problème que nous examinons est celui de la numérotation cyclique des records larges: étant donné un entier $q \geq 2$, existe-t-il un processus adapté continu à droite $(K_t)_{t>0}$ à valeurs dans $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$, qui saute de 1 à chaque instant de record large du processus X et ne varie pas le reste du temps? Lorsqu'on se place dans la filtration naturelle du processus X, la réponse est encore non (Théorème 7.1 et Corollaire 7.1). Mais nous montrons (Théorème 7.2) comment construire une filtration à peine plus grosse dans laquelle la réponse est oui. Cette fois, il n'y a donc pas d'obstruction au niveau des lois (contrairement au cas de la numérotation par $\mathbf{Z}$): le problème se situe au niveau de la filtration. Les filtrations dans lesquelles la numérotation cyclique est possible ont un comportement surprenant et paradoxal: elles contiennent à chaque instant $t > 0$ une information indépendante du processus X qui n'est pas présente dans $\mathscr{F}_{0+}$. La possibilité de numéroter cycliquement et optionnellement les instants de records larges dépend ainsi de la filtration considérée, et il se produit des phénomènes assez proches de ceux que présente M.Yor dans [3] et [4], à propos de l'équation de Tsirel'son.

1.1. *Un exemple concret: les excursions longues du mouvement brownien.* Le problème de la numérotation des excursions longues du mouvement Brownien a été soulevé par M. Emery aux Journées de Probabilités de 1994, à Marseille–Luminy. C'est en fait ce problème qui a motivé notre étude: on considère un mouvement Brownien dans $\mathbf{R}$, issu de 0. On appelle excursion *longue* du mouvement Brownien toute excursion plus longue que toutes celles qui l'ont précédée. L'ensemble des instants qui sont des fins d'excursions longues est optionnel et isomorphe à $\mathbf{Z}$ pour l'ordre. M. Emery a montré par un argument d'ergodicité qu'il est impossible de numéroter cycliquement (et a fortiori par $\mathbf{Z}$) les fins d'excursions longues de façon optionnelle dans la filtration engendrée par l'ensemble des zéros du mouvement Brownien B, ni même dans la filtation Brownienne. Ce résultat reste-il vrai dans d'autres filtrations?

Ce problème rentre dans le cadre de notre étude. En effet, regardées aux instants inverses du temps local en 0, les longueurs des excursions forment un processus de Poisson ponctuel à valeurs dans $]0;+\infty[$, de mesure caractéristique μ donnée par $\mu(dx) = (2\pi)^{-1/2}x^{-3/2}\,dx$ (la mesure μ est l'image de la mesure d'Itô par la fonctionnelle qui à une excursion associe sa longueur). L'étude faite dans les premières parties montre clairement qu'il est impossible de numéroter optionnellement par $\mathbf{Z}$ les fins d'excursions longues (quelle que soit la filtration considérée). Pour ce qui est de la numérotation cyclique, les idées développées dans la dernière partie permettent de montrer qu'un processus $(K_t)_{t>0}$ adapté continu à droite comptant modulo q les fins d'excursions longues a la propriété remarquable suivante: pour tout $t > 0$, K_t est indépendant du mouvement Brownien et suit la loi uniforme. Un tel processus ne peut donc pas être adapté à la filtation Brownienne.

2. Quelques remarques élémentaires. Nous renvoyons le lecteur au Chapitre XII de [1] pour la théorie des excursions Browniennes et les propriétés de base des processus de Poisson ponctuels, et notamment au Lemme 1.13 que nous énonçons dans le cas particulier qui nous intéresse.

LEMME 2.1. *Posons $\tau_a = \inf\{t \geq 0\colon X_t \geq a\}$ pour $a > 0$. Alors*:

(i) *τ_a suit la loi exponentielle de paramètre $\mu[a;+\infty[$*;
(ii) *X_{τ_a} suit la loi $\pi_a = \mu[\cdot \mid [a;+\infty[\,]$*;
(iii) *Les variables τ_a et X_{τ_a} sont indépendantes.*

NOTATION. Si T est un temps d'arrêt strictement positif et fini presque sûrement, on note $\sigma(T)$ le premier instant de record suivant T. Autrement dit,

$$\sigma(T) = \inf\{t > T\colon X_t \geq M_t\} = \inf\{t > T\colon X_t \geq M_T\}.$$

On définit par récurrence $\sigma^n(T)$, en posant $\sigma^n(T) = \sigma(\sigma^{n-1}(T))$.

Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration dans laquelle le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson ponctuel, c'est-à-dire telle que pour tout instant $t > 0$, le processus $(X_{t+s})_{s>0}$ est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_t$. En appliquant la propriété de Markov au temps d'arrêt T, et en utilisant le lemme ci-dessus, on voit que:

1. $\sigma(T)$ est un temps d'arrêt $> T$ et fini presque sûrement.
2. Les variables $\sigma(T) - T$, $X_{\sigma(T)}$ et la tribu $\mathcal{F}_T$ sont indépendantes conditionnellement à M_T.
3. La loi de $\sigma(T) - T$ sachant que $M_T = a$ est la loi exponentielle de paramètre $\mu[a;+\infty[$.
4. La loi de $X_{\sigma(T)}$ sachant que $M_T = a$ est la loi $\pi_a = \mu[\cdot \mid [a;+\infty[\,]$.

On en déduit facilement le Corollaire suivant.

COROLLAIRE 2.1. *Pour tout $\varepsilon > 0$, on a presque sûrement $D \cap]\varepsilon;+\infty[= \{\sigma^n(\varepsilon); n \in \mathbf{N}^*\}$.*

Par ailleurs, la remarque précédente montre que si l'on pouvait énumérer D par une suite strictement croissante $(T_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ de temps d'arrêt, la suite des records $(X_{T_n})_{n\in\mathbf{Z}}$ serait une chaîne de Markov sur $]0;+\infty[$ admettant comme probabilités de transition la famille $(\pi_x)_{x>0}$. Nous allons donc montrer le résultat suivant.

THÉORÈME 2.1. *Il n'existe pas de chaîne de Markov indexée par $\mathbf{Z}$ pour les probabilités de transition $(\pi_x)_{x>0}$.*

De ce théorème et des remarques ci-dessus, on déduit le Théorème 2.2.

THÉORÈME 2.2. *Il n'est pas possible d'énumérer l'ensemble D par une suite strictement croissante de temps d'arrêt indexée par $\mathbf{Z}$.*

Nous allons maintenant étudier les propriétés des chaînes de Markov admettant comme probabilités de transition la famille $(\pi_x)_{x>0}$ pour montrer ensuite que de telles chaînes ne peuvent être indexées par $\mathbf{Z}$.

3. Étude des chaînes de Markov de probabilités de transition $(\pi_x)_{x>0}$. On considère une chaîne de Markov $(Z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sur $]0;+\infty[$, issue de a sous la probabilité P_a, admettant comme probabilités de transition $(\pi_x)_{x>0}$. Pour $b > 0$, on pose

$$N_b = \inf\{n \in \mathbf{N}\colon Z_n \geq b\}.$$

On vérifie facilement que $N_b < +\infty$ presque sûrement. Nous allons étudier la famille croissante de temps d'arrêt $(N_b)_{b>0}$. La propriété principale que nous allons établir est l'indépendance des accroissements sous les probabilités P_a et $P_{\pi_a} = \int_{]0;+\infty[} P_z \pi_a(dz)$.

LEMME 3.1. *Soient $b > a > 0$. Alors sous la probabilité P_a, les variables N_b et Z_{N_b} sont indépendantes, et la variable Z_{N_b} suit la loi π_b.*

DÉMONSTRATION. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout Borélien B de $\mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}
P_a[N_b = n; Z_{N_b} \in B] &= P_a[Z_{n-1} < b \leq Z_n; Z_n \in B] \\
&= \int_{]0;b[} P_a[Z_{n-1} \in dz] P_z[b \leq Z_1; Z_1 \in B] \\
&= \int_{]0;b[} P_a[Z_{n-1} \in dz] \pi_z[B \cap [b;+\infty[\,] \\
&= \int_{]0;b[} P_a[Z_{n-1} \in dz] \frac{\mu[b;+\infty[}{\mu[z;+\infty[} \times \pi_b(B). \qquad \square
\end{aligned}$$

Il est remarquable de constater que le résultat précédent reste vrai si l'on remplace la probabilité P_a par P_{π_a}. En revanche, il n'est plus vrai pour la probabilité $P_{\pi_a^2}$, où $(\pi^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est le semigroupe associé aux probabilités de transition $(\pi_x)_{x>0}$ (voir remarque ci-dessous).

LEMME 3.2. *Soient $b > a > 0$. Alors sous la probabilité P_{π_a}, les variables N_b et Z_{N_b} sont indépendantes, et la variable Z_{N_b} suit la loi π_b.*

DÉMONSTRATION. Notons $\tilde{Z}_n = Z_{n+1}$ et $\tilde{N}_b = \inf\{n \in \mathbf{N}\colon \tilde{Z}_n \geq b\}$. Alors on a P_a-presque sûrement $\tilde{N}_b = N_b - 1$ et $\tilde{Z}_{\tilde{N}_b} = Z_{N_b}$. Or comme la loi de Z_1 sous P_a est π_a, on a l'identité en loi,

$$(Z_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ sous } P_{\pi_a} \stackrel{\mathscr{L}}{=} (\tilde{Z}_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ sous } P_a,$$

d'où

$$(N_b, Z_{N_b}) \text{ sous } P_{\pi_a} \stackrel{\mathscr{L}}{=} (N_b - 1, Z_{N_b}) \text{ sous } P_a.$$

Il suffit alors d'utiliser le lemme précédent. □

REMARQUE. La démonstration ci-dessus ne marche pas pour la loi $P_{\pi_a^2}$. La raison est que si l'on pose $\tilde{Z}_n = Z_{n+2}$ et $\tilde{N}_b = \inf\{n \in \mathbf{N}\colon \tilde{Z}_n \geq b\}$, l'égalité $\tilde{N}_b = N_b - 2$ n'est pas vraie P_a-presque sûrement: elle est fausse sur l'événement $[Z_1 \geq b]$.

Nous pouvons maintenant énoncer le Théorème.

THÉORÈME 3.1. *Soit $a > 0$. Sous les probabilités P_a et P_{π_a}, le processus $(N_b)_{b>0}$ est à accroissements indépendants.*

DÉMONSTRATION. Il suffit d'appliquer le lemme précédent par récurrence, en remarquant que $(Z'_n) = (Z_{N_b+n})$ est une chaîne de Markov de loi initiale π_b et de mêmes probabilités de transition que (Z_n), et que pour tout $c > b$, $N_c - N_b = N'_c$, *où* $N'_c = \inf\{n \in \mathbf{N}\colon Z'_n \geq c\}$. □

Nous allons maintenant nous intéresser à la loi des accroissements. Remarquons que par construction, le processus $(N_b)_{b>0}$ est à valeurs dans $\mathbf{N}$, croissant et continu à gauche. Par ailleurs, pour $c > b$, la différence $N_c - N_b$ représente le temps de séjour de la chaîne (Z_n) dans l'intervalle $[b; c[$.

PROPOSITION 3.1. *Soient $b > a > 0$. Alors sous les probabilités P_a et P_{π_a}, la variable $\Delta N_b = N_{b+} - N_b$ suit une loi géométrique de paramètre $\pi_b\{b\}$. Plus précisément, pour tout $n \in \mathbf{N}$,*

$$P_a[\Delta N_b = n] = P_{\pi_a}[\Delta N_b = n] = (1 - \pi_b\{b\})(\pi_b\{b\})^n.$$

Nous laissons la démonstration de ce résultat au lecteur.

PROPOSITION 3.2. *Soient $c > b > a > 0$. Supposons que la mesure μ ne possède pas d'atome dans l'intervalle $[b; c[$. Alors sous les probabilités P_a et P_{π_a}, la différence $N_c - N_b$ suit la loi de Poisson de paramètre* $\ln \mu[b; +\infty[- \ln \mu[c; +\infty[$.

DÉMONSTRATION. En appliquant la propriété de Markov au temps d'arrêt N_b, on voit que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\begin{aligned}
&P_a[N_c - N_b = n] \\
&\quad = P_{\pi_a}[N_c - N_b = n] \\
&\quad = P_{\pi_b}[N_c = n] \\
&\quad = P_{\pi_b}[Z_{n-1} < c \leq Z_n] \\
&\quad = \int_{0<z_0\leq\cdots\leq z_n} \mathbf{I}_{[z_{n-1}<c\leq z_n]} \pi_b(dz_0)\pi_{z_0}(dz_1)\cdots\pi_{z_{n-1}}(dz_n) \\
&\quad = \int_{b\leq z_0\leq\cdots\leq z_{n-1}<c} \frac{\mu(dz_0)\mu(dz_1)\cdots\mu(dz_{n-1})\mu[c; +\infty[}{\mu[b; +\infty[\mu[z_0; +\infty[\cdots\mu[z_{n-2}; +\infty[\mu[z_{n-1}; +\infty[} \\
&\quad = \frac{\mu[c; +\infty[}{\mu[b; +\infty[} \times \frac{(\ln \mu[b; +\infty[- \ln \mu[c; +\infty[\,)^n}{n!},
\end{aligned}$$

car la restriction de la mesure μ à l'intervalle $[b\,; c[$ est diffuse.

Des propositions précédentes découle un résultat remarquable pour le processus de Poisson ponctuel $X = (X_t)_{t\geq 0}$.

COROLLAIRE 3.1. *Si la mesure μ est diffuse, les valeurs des records larges du processus de Poisson ponctuel $X = (X_t)_{t\geq 0}$ sont réparties suivant une mesure de Poisson aléatoire d'intensité $\mu(dx)/\mu[x; +\infty[$.*

DÉMONSTRATION. En effet, pour tout $a > 0$, la suite des records larges $\geq a$ forme une chaîne de Markov sur $]0; +\infty[$ de loi initiale π_a, et de probabilités de transition $(\pi_x)_{x>0}$. On peut donc lui appliquer les résultats du Théorème 3.1 et de la Proposition 3.2.

Lorsque la mesure μ n'est pas diffuse, la loi des accroissements du processus $(N_x)_{x>0}$ est plus difficile à expliciter. On peut toutefois donner une équation intégrale satisfaite par les fonctions caractéristiques en un point $\theta \in \mathbf{R}$.

PROPOSITION 3.3. *Pour $y > x > a > 0$, et $\theta \in \mathbf{R}$, on a*

$$P_{\pi_a}\big[\exp(i\theta(N_y - N_x))\big] = \frac{\mu[y; +\infty[}{\mu[x; +\infty[} + e^{i\theta} \int_{[x;\, y[} P_{\pi_a}\big[\exp(i\theta(N_y - N_z))\big] \frac{\mu(dz)}{\mu[x;\, +\infty[}.$$

DÉMONSTRATION. Notons $(\mathscr{Z}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la filtration engendrée par la chaîne $(Z_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Comme l'accroissement $N_y - N_x$ est l'analogue du temps d'arrêt

N_y pour la chaîne $(Z_{N_x+n})_{n\in\mathbf{N}}$, on obtient par la propriété de Markov

$$P_{\pi_a}\big[\exp(i\theta(N_y - N_x))|\mathscr{G}_{N_x}\big] = f(Z_{N_x}),$$

où pour tout $z \geq x$,

$$f(z) = P_{\pi_a}\big[\exp(i\theta(N_y - N_x)) \mid Z_{N_x} = z\big] = P_z\big[\exp(i\theta N_y)\big].$$

Pour tout $z \geq y$, on a $N_y = 0$ presque sûrement sous P_z, d'où $f(z) = 1$. Pour tout $z < y$, on a $N_y \geq 1$ presque sûrement sous P_z, d'où en appliquant la propriété de Markov à l'instant 1,

$$f(z) = P_{\pi_z}\big[\exp(i\theta(N_y + 1))\big] = P_{\pi_a}\big[\exp(i\theta N_y - N_z + 1))\big].$$

En d'autres termes, pour $z \in [x; y[$, la loi de $N_y - N_x$ sachant $Z_{N_x} = z$ est égale à la loi de $N_y - N_z + 1$. Ainsi, comme la loi de Z_{N_x} sous P_{π_a} est π_x,

$$\begin{aligned} &P_{\pi_a}\big[\exp(i\theta(N_y - N_x))\big] \\ &\quad = \pi_x\big[y; +\infty[+ \textstyle\int_{[x;\,y[} P_{\pi_a}\big[\exp(i\theta(N_y - N_z + 1))\big]\pi_x(dz). \end{aligned}$$ □

4. Inexistence d'une chaîne de Markov de probabilités de transition $(\pi_x)_{x>0}$ indexée par Z: une preuve "probabiliste." Nous allons maintenant utiliser les notations et les résultats de la précédente partie pour montrer qu'il n'est pas possible de construire une chaîne de Markov indexée par $\mathbf{Z}$ pour les probabilités de transition $(\pi_x)_{x>0}$. Pour cela, on suppose que $(Y_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est une telle chaîne, et on cherche à obtenir une absurdité.

Dans la preuve "probabiliste," on est amené à distinguer deux cas, suivant que $(Y_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ prend ou non une infinité de valeurs dans A, où A est l'ensemble des atomes < 1 de la mesure μ. Nous commençons par faire quelques remarques préliminaires sous l'hypothèse absurde où $(Y_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est une chaîne de Markov sur $]0; +\infty[$ de probabilités de transition $(\pi_x)_{x>0}$.

LEMME 4.1. *On a $Y_n \to 0$ quand $n \to -\infty$ et $Y_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$. Autrement dit, les temps d'arrêt $(N_x = \inf\{n \in \mathbf{Z}\colon Y_n \geq x\})_{x>0}$ ne prennent pas les valeurs $+\infty$ ou $-\infty$.*

Nous montrons seulement la convergence $Y_n \to 0$ quand $n \to -\infty$: comme la suite $(Y_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est croissante et ne peut pas prendre une infinité de fois la même valeur, Y_n tend vers une variable $L \geq 0$ par valeurs strictement supérieures quand n tend vers $-\infty$. On a donc presque sûrement la convergence étroite $\pi_{Y_n} \to \pi_{L+}$ quand $n \to -\infty$, en notant $\pi_{x+} = \mu[\cdot|]x; +\infty[\,]$ pour $x > 0$, et $\pi_{0+} = \delta_0$. Soit $f\colon \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ une fonction continue bornée strictement croissante. L'égalité $\mathbf{E}[f(Y_{n+1})] = \mathbf{E}[\int f(y)\pi_{Y_n}(dy)]$ entraîne $\mathbf{E}[f(L)] = \mathbf{E}[\int f(y)\pi_{L+}(dy)]$ par passage à la limite. Or on a $\int f(y)\pi_{L+}(dy) > f(L)$ sur l'événement $[L > 0]$ (par croissance stricte de f), tandis qu'il y a égalité sur l'événement $[L = 0]$. Donc $L = 0$ presque sûrement. □

LEMME 4.2. *Pour tout $x > 0$, le variable Y_{N_x} est indépendante de N_x, et suit la loi π_x.*

DÉMONSTRATION. Pour tout Borélien B de $]0;+\infty[$, et tout couple d'entiers $m < n$,

$$\begin{aligned} P[N_x = n; Y_{N_x} \in B; Y_m < x] &= \mathbf{E}[\mathbf{I}_{[Y_m<x]} P_{Y_m}[N_x = n-m; Z_{N_x} \in B]] \\ &= \mathbf{E}[\mathbf{I}_{[Y_m<x]} P_{Y_m}[N_x = n-m]]\pi_x(B) \\ &= P[N_x = n; Y_m < x]\pi_x(B). \end{aligned}$$

En passant à la limite quand $m \to -\infty$, on obtient

$$P[N_x = n; Y_{N_x} \in B] = P[N_x = n]\pi_x(B). \qquad \square$$

En appliquant la propriété de Markov aux temps d'arrêt N_x et le Théorème 3.1, on obtient alors le lemme suivant.

LEMME 4.3. *Le processus $(N_x)_{x>0}$ est à accroissements indépendants.*

Pour $x \in A$, notons E_x l'événement: "la valeur x est atteinte par la chaîne $(Y_n)_{n\in\mathbf{Z}}$." En remarquant que $E_x = [\Delta N_x \neq 0]$, on montre que les événements E_x sont indépendants et que $P(E_x) = \pi_x\{x\} = \mu\{x\}/\mu[x;+\infty[$. On distingue deux cas, suivant la nature de la série $\sum_{x\in A} P(E_x)$.

Premier cas. $\sum_{x\in A} P(E_x) = +\infty$.

Par indépendance des accroissements du processus $(N_x)_{x>0}$, on a pour tout $\theta \in \mathbf{R}\backslash 2\pi\mathbf{Z}$,

$$\begin{aligned} \left|\mathbf{E}[\exp(i\theta N_1)]\right| &\le \prod_{x\in A} \left|\mathbf{E}[\exp(i\Delta N_x)]\right| \\ &= \prod_{x\in A} \frac{1-\pi_x\{x\}}{\left|1-\pi_x\{x\}\exp(i\theta)\right|} \\ &= \prod_{x\in A} \frac{\mu]x;+\infty[}{\left|\mu[x;+\infty[-\mu\{x\}\exp(i\theta)\right|} \\ &\le \prod_{x\in A} \frac{\mu]x;+\infty[}{\mu[x;+\infty[-\mu\{x\}\cos(\theta)} \\ &= \prod_{x\in A} \left(1+(1-\cos\theta)\frac{\mu\{x\}}{\mu]x;+\infty[}\right)^{-1} \\ &= 0, \quad \text{car } \sum_{x\in A} \frac{\mu\{x\}}{\mu]x;+\infty[} = +\infty. \end{aligned}$$

On obtient ainsi une absurdité.

Second cas. $\sum_{x\in A} P(E_x) < +\infty$.

Regardons d'abord le cas particulier où la restriction de la mesure μ à l'intervalle $]0;1[$ est diffuse. D'après les résultats de la partie précédente, on sait que pour tout $x \in]0;1[$, la différence $N_1 - N_x$ suit la loi de Poisson de paramètre $\ln \mu[x;+\infty[- \ln \mu[1;+\infty[$. Par indépendance des accroissements, on a donc pour tout $\theta \in \mathbf{R}\backslash 2\pi\mathbf{Z}$,

$$\begin{aligned}\left|\mathbf{E}[\exp(i\theta N_1)]\right| &\leq \left|\mathbf{E}[\exp(i\theta(N_1 - N_x))]\right| \\ &= \left|\exp\left(\ln \frac{\mu[x;+\infty[}{\mu[1;+\infty[}(e^{i\theta} - 1)\right)\right| \\ &= \exp\left(\ln \frac{\mu[x;+\infty[}{\mu[1;+\infty[}(\cos\theta - 1)\right).\end{aligned}$$

En faisant tendre x vers 0, on obtient $\mathbf{E}[\exp(i\theta N_1)] = 0$ pour tout $\theta \in \mathbf{R}\backslash 2\pi\mathbf{Z}$, ce qui est absurde.

Voyons maintenant comment le second cas ($\sum_{x\in A} P(E_x) < +\infty$) se ramène au cas particulier ci-dessus. Soit $\mu' = \mu - \sum_{x\in A} \mu\{x\}\delta_x = \mathbf{I}_{A^c}\mu$. On vérifie que la mesure μ' satisfait aux mêmes hypothèses que la mesure μ. Le seul point non évident est que μ' est de masse totale infinie. Raisonnons par l'absurde: si μ' était de masse totale finie, cela entraînerait (comme μ est de masse totale infinie) que $\sum_{x\in A} \mu\{x\} = +\infty$, et donc que $\mu[x;+\infty[\sim \sum_{y\in A; y\geq x} \mu\{y\}$ quand x tend vers 0. Comme $\sum_{x\in A} \mu\{x\}/\mu[x;+\infty[= \sum_{x\in A} P(E_x) < +\infty$, on aurait donc

$$\sum_{x\in A} \frac{\mu\{x\}}{\sum_{y\in A; y\geq x} \mu\{y\}} < +\infty,$$

ce qui contredirait le fait que $\sum_{x\in A} \mu\{x\} = +\infty$.

On définit alors les probabilités de transition $\pi'_x = \mu'[\cdot \mid [x;+\infty[\,]$. En modifiant le processus $(Y_n)_{n\in\mathbf{Z}}$, on va construire une chaîne de Markov $(Y'_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ de probabilités de transition $(\pi'_x)_{x>0}$.

D'après le lemme de Borel–Cantelli, la chaîne $(Y_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ n'atteint presque sûrement qu'un nombre fini de valeurs de A. Le temps d'arrêt $N = \inf\{n \in \mathbf{Z}\colon Y_n \in A\}$ est donc différent de $-\infty$. On construit le processus $(Y'_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ de la façon suivante: soit $(Z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une chaîne de Markov sur $]0;+\infty[$ de probabilités de transition $(\pi'_x)_{x>0}$, issue de Y_{N-1}, et indépendante du processus $(Y_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ conditionnellement à Y_{N-1}. On pose $Y'_n = Y_n$ sur $[n < N]$ et $Y'_n = Z_{n-N+1}$ sur $[n \geq N]$. Le processus $(Y'_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ ainsi construit est alors une chaîne de Markov de probabilités de transition $(\pi'_x)_{x>0}$. En effet, notons $\mathscr{G}_n$ la tribu engendrée par les variables Y_m et $\mathbf{I}_{[N=m]}Z_k$ pour $m \leq n$ et $0 \leq k \leq n-m+1$. Le processus $(Y'_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est adapté pour la filtration $(\mathscr{G}_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ puisque N est un temps d'arrêt et

$$Y'_n = \mathbf{I}_{[N>n]}Y_n + \sum_{m\leq n} \mathbf{I}_{[N=m]}Z_{n-m+1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{Z}.$$

On a alors pour tout $n \in \mathbf{Z}$ et tout Borélien B de $\mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}
P\big[Y'_{n+1} \in B \mid \mathscr{G}_n\big] &= P\big[Y'_{n+1} \in B; N > n+1 \mid \mathscr{G}_n\big] \\
&\quad + P\big[Y'_{n+1} \in B; N = n+1 \mid \mathscr{G}_n\big] \\
&\quad + \sum_{m \le n} P\big[Y'_{n+1} \in B; N = m \mid \mathscr{G}_n\big] \\
&= P\big[Y_{n+1} \in B \backslash A; N > n \mid \mathscr{G}_n\big] \\
&\quad + P\big[Z_1 \in B; Y_{n+1} \in A; N > n \mid \mathscr{G}_n\big] \\
&\quad + \sum_{m \le n} P\big[Z_{n-m+2} \in B; N = m \mid \mathscr{G}_n\big] \\
&= \mathbf{I}_{[N>n]} \pi_{Y_n}(B \backslash A) + \mathbf{I}_{[N>n]} \pi'_{Y_n}(B) \pi_{Y_n}(A) \\
&\quad + \sum_{m \le n} \mathbf{I}_{[N=m]} \pi'_{Z_{n-m+1}}(B) \\
&= \mathbf{I}_{[N>n]} \frac{\mu'(B \cap [Y_n; +\infty[)}{\mu[Y_n; +\infty[} \left(1 + \frac{\mu(A \cap [Y_n; +\infty[)}{\mu'[Y_n; +\infty[}\right) \\
&\quad + \mathbf{I}_{[N \ge n]} \pi'_{Y'_n}(B) \\
&= \pi'_{Y'_n}(B). \qquad \square
\end{aligned}$$

5. Inexistence d'une chaîne de Markov de probabilités de transition $(\pi_x)_{x>0}$ indexée par Z: une preuve "analytique." Nous donnons maintenant une preuve "analytique" de l'inexistence, en étudiant l'équation intégrale que nous avons établie à la fin de la troisième partie. Supposons que $(Y_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ est une chaîne de Markov de probabilités de transition $(\pi_x)_{x>0}$, et posons $N_x = \inf\{n \in \mathbf{Z}: Y_n \ge x\}$ pour $x > 0$.

Pour tout $a > 0$, le processus $(Z_n^a = Y_{N_a + n})_{n \in \mathbf{N}}$ est une chaîne de Markov de probabilités de transition $(\pi_x)_{x>0}$ et de loi initiale π_a. En notant $N_x^a = \inf\{n \in \mathbf{N}: Z_n^a \ge x\}$ pour $x > 0$, on voit que pour $y > x > a > 0$, l'accroissement $N_y - N_x$ est égal à l'accroissement $N_y^a - N_x^a$. Cela montre que l'on a

$$\mathbf{E}\big[\exp(i\theta(N_y - N_x))\big] = \frac{\mu[y; +\infty[}{\mu[x; +\infty[} + \int_{[x;y[} e^{i\theta} \mathbf{E}\big[\exp(i\theta(N_y - N_z))\big] \frac{\mu(dz)}{\mu[x; +\infty[}$$

pour tout $y > x > 0$, et tout $\theta \in \mathbf{R}$.

Fixons $\theta \in]0; 2\pi[$ assez proche de 0 pour que $[\exp(i\theta N_1)]$ ne soit pas nul. Par indépendance des accroissements, $|\mathbf{E}[\exp(i\theta N_x)]|$ décroît en fonction de x. Donc pour tout $x \in]0; 1[$, $\mathbf{E}[\exp(i\theta N_x)] \neq 0$ et $\mathbf{E}[\exp(i\theta(N_1 - N_x))] = \mathbf{E}[\exp(i\theta N_1)]/\mathbf{E}[\exp(i\theta N_x)]$. Donc en posant $F(x) = \mathbf{E}[\exp(i\theta N_x)]^{-1}$, et en prenant $y = 1$ dans l'équation ci-dessus, on obtient

$$(\mathscr{E}) \qquad F(x)\mu[x; +\infty[= F(1)\mu[1; +\infty[+ e^{i\theta} \int_{[x;1[} F(z)\mu(dz).$$

Nous allons nous intéresser au comportement des différents termes quand $x \to 0$, et montrer que l'équation $(\mathscr{E})$ entraîne que $F(x) \to 0$, ce qui est absurde.

Supposons en effet que $F(x)$ ne tende pas vers 0. Comme $|F|$ est une fonction croissante, on aurait alors $|F(x)| \to l$, avec $l > 0$. Comme $\mu[x;+\infty[\to +\infty$, on aurait d'après $(\mathscr{E})$,

$$\frac{\int_{[x;1[} F(y)\mu(dy)}{F(x)\mu[x;+\infty[} \to e^{-i\theta}.$$

Notons $\phi(x)$ l'argument de $F(x)$ dans $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$. En remarquant que

$$\left|\frac{\int_{[x;1[}\big(F(y)-l\exp(i\phi(y))\big)\mu(dy)}{F(x)\mu[x;+\infty[}\right| \leq \frac{\int_{[x;1[}\big(|F(y)|-l\big)\mu(dy)}{|F(x)|\mu[x;+\infty[} \to 0,$$

on obtiendrait

$$\frac{\int_{[x;1[} l\exp(i\phi(y))\mu(dy)}{F(x)\mu[x;+\infty[} \to e^{-i\theta},$$

d'où, comme $(|F(x)|)/l)(\mu[x;+\infty[/\mu[x\ ;\ 1[) \to 1$,

$$\frac{\int_{[x;1[}\exp(i(\phi(y)-\phi(x)+\theta))\mu(dy)}{\mu[x;1[} \to 1.$$

Cette dernière égalité indique que pour $x > 0$ assez petit, une certaine combinaison convexe de complexes de module 1 serait proche de 1. Par conséquent, les arguments $\phi(y)-\phi(x)+\theta$ devraient être proches de 0 pour "la plupart" des $y \in [x;1[$, ce qui conduit rapidement à une contradiction. Précisons ce point.

Pour $x > 0$ tel que $\mu[x;1[> 0$, notons μ_x la probabilité $\mathbf{I}_{[x;1[}\mu/\mu[x;1[= \mu[\cdots \mid [x;1[\,]$ et $m(x)$ une valeur médiane de μ_x. D'après ce qui précède,

$$\int(\cos(\phi(y)-\phi(x)+\theta)-1)\mu_x(dy) \to 0.$$

En notant $|\cdot|$ la distance à 0 dans $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ et en utilisant l'inégalité $1-\cos\psi \geq (2/\pi^2)|\psi|^2$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\int\big|\phi(y)-\phi(x)+\theta\big|\mu_x(dy) \to 0,$$

ce qui entraîne $\mu_x\{y \in [x\ ;1[: |\phi(y)-\phi(x)+\theta| \geq \theta/2\} \to 0$. Pour tout x assez petit, on a donc $\mu_x\{y \in [x;1[\colon |\phi(y) - \phi(x) + \theta| \geq \theta/2\} < 1/2$, donc il existe $z(x) \in [x; m(x)]$ tel que $|\phi(z(x)) - \phi(x) + \theta| < \theta/2$, d'où $|\phi(z(x)) - \phi(x)| > \theta/2$. En remarquant que l'inégalité $z(x) \leq m(x)$ entraîne $\mu[z(x);1[\geq 1/2\mu[x;1[$, d'où $\mu_{z(x)} \leq 2\ \mu_x$ et $z(x) \to 0$ quand $x \to 0$, on obtient ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{\theta}{2} &< \int \big|\phi(z(x)) - \phi(x)\big| \mu_{z(x)}(dy) \\
&\leq \int \big|\phi(y) - \phi(x) + \theta\big| \mu_{z(x)}(dy) + \int \big|\phi(y) - \phi(z(x)) + \theta\big| \mu_{z(x)}(dy) \\
&\leq 2 \int \big|\phi(y) - \phi(x) + \theta\big|\ \mu_x(dy) + \int \big|\phi(y) - \phi(z(x)) + \theta\big| \mu_{z(x)}(dy),
\end{aligned}$$

ce qui est absurde puisque le membre de droite tend vers 0 quand $x \to 0$.

6. Cas des records stricts. On peut choisir de s'intéresser aux records stricts au lieu des records larges. Nous allons voir que dans certains cas, on peut énumérer l'ensemble $\tilde{D} = \{t > 0 \colon X_t > M_{t-}\}$ par une suite strictement croissante de temps d'arrêts, contrairement à ce qu'on a vu pour les records larges, qu'il n'est jamais possible d'énumérer.

En effet, on montre comme dans la deuxième partie que si $(T_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est une suite strictement croissante de temps d'arrêt énumérant l'ensemble $\tilde{D}$, alors la suite des records $(X_{T_n})_{n\in\mathbf{Z}}$ serait une chaîne de Markov sur $]0;+\infty[$ admettant comme probabilités de transition la famille $(\pi_{x+})_{x>0}$, où $\pi_{x+} = \mu[\cdot\,|]x;+\infty[\,]$ pour $x > 0$.

Lorsque la mesure μ est diffuse, les probabilités $(\pi_{x+})_{x>0}$ sont égales aux probabilités $(\pi_x)_{x>0}$, et il n'y a presque sûrement pas de différence entre les records stricts et les records larges. En revanche, lorsque la mesure μ n'est pas diffuse, une différence importante apparaît puisqu'un atome de μ peut réaliser plusieurs fois un record large, mais seulement une fois un record strict. Pour cette raison, les Théorèmes 2.1 et 2.2 ne se transposent pas en toute généralité aux records stricts. Nous donnons dans le Théorème 6.1 une caractérisation des mesures μ pour lesquelles on peut énumérer l'ensemble $\tilde{D} = \{t > 0 \colon X_t > M_{t-}\}$ par une suite strictement croissante de temps d'arrêt.

Commençons par quelques résultats préliminaires mettant en évidence le rôle des atomes.

PROPOSITION 6.1. *Si la mesure μ vérifie $\sum_{x\in A} \min(\pi_x\{x\}, 1 - \pi_x\{x\}) = +\infty$, où A est l'ensemble de ses atomes < 1, alors il n'existe pas de chaîne de Markov indexée par $\mathbf{Z}$ pour les probabilités de transition $(\pi_{x+})_{x>0}$.*

DÉMONSTRATION. Supposons que $(Y_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est une chaîne de Markov de probabilités de transition $(\pi_{x+})_{x>0}$. Posons $N_x = \inf\{n \in \mathbf{Z} \colon Y_n \geq x\}$ pour $x > 0$. On montre comme avant que le processus $(N_x)_{x>0}$ est à accroissements indépendants, et que pour tout $x > 0$, l'accroissement $\Delta N_x = N_{x+} - N_x$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $\pi_x\{x\} = \mu\{x\}/\mu[x;+\infty[$. Par indépendance des accroissements du processus, on a pour tout $\theta \in \mathbf{R}\backslash 2\pi\mathbf{Z}$,

$$\begin{aligned}
\big|\mathbf{E}\big[\exp(i\theta N_1)\big]\big|^2 &\le \prod_{x\in A} \big|\mathbf{E}[\exp(i\Delta N_x)]\big|^2 \\
&= \prod_{x\in A} \big|1-\pi_x\{x\}+\pi_x\{x\}e^{i\theta}\big|^2 \\
&= \prod_{x\in A} \big(1-2(1-\cos\theta)\pi_x\{x\}(1-\pi_x\{x\})\big) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

car

$$\sum_{x\in A} \pi_x\{x\}\big(1-\pi_x\{x\}\big) \ge 2\sum_{x\in A} \min\big(\pi_x\{x\}, 1-\pi_x\{x\}\big) = +\infty.$$

On obtient ainsi une absurdité. □

Dans tout ce qui suit, on note $A_g = \{x \in A\colon \pi_x\{x\} \ge 1/2\}$, on appelle *gros atomes* les éléments de A_g, et *petits atomes* les éléments de $A\backslash A_g$. Remarquons que pour tout $a > 0$, le fait que $\mu[a;+\infty[\, < +\infty$ entraîne qu'il n'y a qu'un nombre fini de gros atomes dans l'intervalle $[a;1[$. Autrement dit, le seul point d'accumulation possible de A_g est 0.

PROPOSITION 6.2. *Si la mesure μ est discrète et si $\sum_{x\in A}\min(\pi_x\{x\}, 1-\pi_x\{x\}) < +\infty$, alors il existe une suite $(T_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ strictement croissante de temps d'arrêt énumérant l'ensemble $\tilde{D}$, et la suite des records stricts $(X_{T_n})_{n\in\mathbf{Z}}$ est une chaîne de Markov de probabilités de transition $(\pi_{x+})_{x>0}$.*

DÉMONSTRATION. Comme la mesure μ est discrète et infinie, on a

$$\sum_{x\in A} \pi_x\{x\} = \sum_{x\in A} \big(\mu\{x\}/\mu[x;+\infty[\big) = +\infty.$$

Donc la condition $\sum_{x\in A}\min(\pi_x\{x\}, 1-\pi_x\{x\}) < +\infty$ entraîne qu'il y a une infinité de gros atomes. Donc l'ensemble A_g est de la forme $\{a_{-n}; n \in \mathbf{N}^*\}$, où $(a_{-n})_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite strictement décroissante de réels convergeant vers 0. On posera $a_0 = a_{-1}$.

Pour $x \in A$, notons E_x l'événement: "la valeur x réalise un record du processus X." Comme $P(E_x) = \pi_x\{x\}$, on a

$$\sum_{x\in A_g} P\big(E_x^c\big) < +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{x\in A\backslash A_g} P(E_x) < +\infty.$$

D'après le lemme de Borel–Cantelli, tous les gros atomes à un nombre fini d'exceptions près réalisent un record, et aucun petit atome à un nombre fini d'exceptions près ne réalise de record. Notons $S_n = \inf\{t \ge 0\colon X_t > a_{n-1}\}$ pour $n \in -\mathbf{N}^*$, et

$$\tilde{\sigma}(T) = \inf\big\{t > T\colon X_t > M_{t-}\big\} = \inf\big\{t > T\colon X_t > M_T\big\}$$

pour tout instant T. Posons

$$N = \inf\{n \in -\mathbf{N}\colon X_{S_n} \neq a_n\}.$$

Autrement dit, N le plus petit entier $n \in -\mathbf{N}$ tel que le premier record $> a_{n-1}$ ne soit pas égal à a_n. Lorsque N est différent de 0, N est donc le plus petit entier $n \in -\mathbf{N}^*$ tel que a_n ne réalise pas de record ou tel qu'un petit atome appartenant à l'intervalle $]a_{n-1}; a_n[$ réalise un record. D'après ce qui précède, la variable N est à valeurs dans $-\mathbf{N}$ presque sûrement. On peut donc définir une suite $(T_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ d'instants par $T_n = S_n$ sur l'événement $[n \le N]$ et $T_n = \tilde{\sigma}^{n-N}(S_N)$ sur l'événement $[n > N]$. La suite d'instants ainsi construite est strictement croissante, et énumère bien l'ensemble $\tilde{D}$. On vérifie que les instants T_n sont bien des temps d'arrêt en écrivant que pour tout $t \in \mathbf{R}_+$,

$$[T_n \le t] = \big([N \ge n] \cap [S_n \le t]\big) \cup \bigcup_{k\in\mathbf{N}^*} \big([N = n-k] \cap [\tilde{\sigma}^k(S_{n-k}) \le t]\big),$$

et en remarquant que pour $m \in -\mathbf{N}$, l'événement $[N = m]$ appartient à la tribu $\mathscr{F}_{S_m}$. □

Nous allons maintenant voir une caractérisation des mesures μ pour lesquelles on peut énumérer l'ensemble $\tilde{D}$ par une suite strictement croissante de temps d'arrêt. Lorsque x est un gros atome, on note $s(x)$ le gros atome suivant, autrement dit $s(x) = \inf(A_g \cap]x; +\infty[)$.

THÉORÈME 6.1. *Il y a équivalence entre*:

(i) *On peut énumérer l'ensemble* $\tilde{D}$ *par une suite strictement croissante de temps d'arrêt.*

(ii) *Il existe une chaîne de Markov indexée par* $\mathbf{Z}$ *pour les probabilités de transition* $(\pi_{x+})_{x>0}$.

(iii) *L'ensemble* A_g *est infini, mais les sommes* $\sum_{x\in A_g} \pi_x]x; +\infty[$ *et* $\sum_{x\in A_g} \pi_{x+}]x; s(x)[$ *sont finies.*

(iv) *Il existe une suite strictement décroissante* $(a_{-n})_{n\in\mathbf{N}^*}$ *de réels convergeant vers* 0 *telle que* $\prod_{n\le -2} \pi_{a_n+}\{a_{n+1}\} > 0$.

De plus, lorsque ces conditions sont vérifiées, on peut prendre la suite des gros atomes rangés dans l'ordre décroissant comme suite $(a_{-n})_{n\in\mathbf{N}^*}$.

DÉMONSTRATION. On montre les implications (1) ⇒ (2) ⇒ (3) ⇒ (4) ⇒ (1).

L'implication (1) ⇒ (2) a déjà été vue: il suffit d'adapter les raisonnements de la deuxième partie.

(2) ⇒ (3). Supposons que $(Y_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est une chaîne de Markov de probabilités de transition $(\pi_{x+})_{x>0}$. D'après la Proposition 6.2, $\sum_{x\in A} \min(\pi_x\{x\}, 1 - \pi_x\{x\}) < +\infty$, ce qui entraîne que les sommes $\sum_{x\in A_g} \pi_x]x; +\infty[$ et $\sum_{x\in A\setminus A_g} \pi_x\{x\}$ sont finies. Il reste donc à montrer que l'ensemble A_g est infini, et que $\sum_{x\in A_g} \pi_{x+}]x; s(x)[< +\infty$.

Soit $\mu' = \mu - \sum_{x\in A\setminus A_g} \mu\{x\}\delta_x = \mathbf{I}_{(A\setminus A_g)^c}\mu$. En raisonnant comme dans le "second cas" de la quatrième partie, on vérifie que la mesure μ' satisfait aux mêmes hypothèses que μ, et on construit une chaîne de Markov $(Y'_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ de probabilités de transition $(\pi'_{x+})_{x>0}$, où $\pi'_{x+} = \mu'[\,\cdot\,|\,]x;+\infty[\,]$. Comme A_g est l'ensemble de tous les atomes < 1 de μ', A_g est infini (sans quoi, la restriction de la mesure μ' à un certain intervalle $]0;a[$ serait diffuse, et sur cet intervalle, la chaîne $(Y'_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ se comporterait comme une chaîne de Markov de probabilités de transition $(\pi'_x)_{x>0}$, où $\pi'_x = \mu'[\,\cdot\,|\,[x;+\infty[\,]$).

Notons $(a_{-n})_{n\in\mathbf{N}^*}$ la suite des éléments de A_g rangés dans l'ordre décroissant, et posons $N'_x = \inf\{n \in \mathbf{Z}\colon Y'_n \geq x\}$ pour $x > 0$. Alors pour tout entier $n \leq -2$, la restriction de la mesure μ' à l'intervalle $]a_n;a_{n+1}[$ est diffuse, donc l'accroissement $N'_{a_{n+1}} - N'_{a_n+}$ suit la loi de Poisson de paramètre $\ln \mu']a_n;+\infty[- \ln \mu'[a_{n+1};+\infty[$. Par indépendance des accroissements, on a pour tout $\theta \in \mathbf{Z}$,

$$\begin{aligned}
\big|\mathbf{E}\big[\exp(i\theta N_{a_{-1}})\big]\big| &\leq \prod_{n\leq -2} \big|\mathbf{E}\big[\exp(i\theta(N'_{a_{n+1}} - N'_{a_n+}))\big]\big| \\
&= \prod_{n\leq -2} \left|\exp\left(\ln \frac{\mu']a_n;+\infty[}{\mu'[a_{n+1};+\infty[}(e^{i\theta}-1)\right)\right| \\
&= \prod_{n\leq -2} \left(\frac{\mu']a_n;+\infty[}{\mu'[a_{n+1};+\infty[}\right)^{\cos\theta - 1} \\
&= \prod_{n\leq -2} \left(1 - \frac{\mu']a_n;a_{n+1}[}{\mu']a_n;+\infty[}\right)^{1-\cos\theta} \\
&= \left(\prod_{n\leq -2} (1 - \pi'_{a_n+}]a_n;a_{n+1}[)\right)^{1-\cos\theta}.
\end{aligned}$$

Comme $\mathbf{E}[\exp(i\theta N_{a_{-1}})] \neq 0$ pour θ assez proche de 0, le produit infini doit donc être non nul, ce qui entraîne que la somme $\sum_{n\leq -2} \pi'_{a_n+}]a_n;a_{n+1}[$ est finie. Or

$$\begin{aligned}
\pi_{a_n+}]a_n;a_{n+1}[&= \frac{\mu]a_n;a_{n+1}[}{\mu]a_n;+\infty[} \\
&= \frac{\mu']a_n;a_{n+1}[}{\mu]a_n;+\infty[} + \sum_{x\in A\setminus A_g;\, a_n<x<a_{n+1}} \frac{\mu\{x\}}{\mu]a_n;+\infty[} \\
&\leq \frac{\mu']a_n;a_{n+1}[}{\mu']a_n;+\infty[} + \sum_{x\in A\setminus A_g;\, a_n<x<a_{n+1}} \frac{\mu\{x\}}{\mu[x;+\infty[}. \\
&= \pi'_{a_n+}]a_n;a_{n+1}[+ \sum_{x\in A\setminus A_g;\, a_n<x<a_{n+1}} \pi_x\{x\}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{n\leq -2} \pi_{a_n+}]a_n;a_{n+1}[\leq \sum_{n\leq -2} \pi'_{a_n+}]a_n;a_{n+1}[+ \sum_{x\in A\setminus A_g;\, x<a_{-1}} \pi_x\{x\} < +\infty,$$

ce qui montre que $\sum_{x\in A_g} \pi_{x+}]x;s(x)[< +\infty$.

(3) $\Rightarrow$ (4). Supposons que l'ensemble A_g est infini, et que les sommes $\sum_{x\in A_g} \pi_x]x;+\infty[$, $\sum_{x\in A_g} \pi_{x+}]x;s(x)[$ sont finies. Alors l'ensemble A_g est de la forme $\{a_{-n}; n \in \mathbf{N}^*\}$, où $(a_{-n})_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite strictement décroissante de réels convergeant vers 0, et on a

$$\begin{aligned}\sum_{n\le -2}(1-\pi_{a_n+}\{a_{n+1}\}) &= \sum_{n\le -2}\frac{\mu]a_n;a_{n+1}[+\mu]a_{n+1};+\infty[}{\mu]a_n;+\infty[}\\ &\le \sum_{n\le -2}\left(\frac{\mu]a_n;a_{n+1}[}{\mu]a_n;+\infty[}+\frac{\mu]a_{n+1};+\infty[}{\mu[a_{n+1};+\infty[}\right)\\ &= \sum_{n\le -2}\pi_{a_n+}]a_n;a_{n+1}[+\sum_{n\le -2}\pi_{a_{n+1}}]a_{n+1};+\infty[\\ &< +\infty.\end{aligned}$$

Donc $\prod_{n\le -2}\pi_{a_n+}\{a_{n+1}\} > 0$.

(4) $\Rightarrow$ (1). Supposons qu'il existe une suite strictement décroissante $(a_{-n})_{n\in\mathbf{N}^*}$ de réels convergeant vers 0 telle que $\prod_{n\le -2}\pi_{a_n+}\{a_{n+1}\} > 0$.

Pour $n \in -\mathbf{N}^*$, posons $S_n = \inf\{t \ge 0\colon X_t > a_{n-1}\}$. Alors $P[X_{S_n} = a_n] = 1 - \pi_{a_{n-1}+}\{a_n\}$. D'après le lemme de Borel–Cantelli, on a donc presque sûrement $X_{S_n} = a_n$ sauf pour un nombre fini d'entiers n. La variable $N = \inf\{n \in -\mathbf{N}\colon X_{S_n} \ne a_n\}$ est donc à valeurs dans $-\mathbf{N}$, et on construit une suite $(T_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ de temps d'arrêt en posant $T_n = S_n$ sur l'événement $[n < N]$ et $T_n = \tilde{\sigma}^{n-N}(S_N)$ sur l'événement $[n \ge N]$. La suite d'instants ainsi construite est strictement croissante, et énumère bien l'ensemble $\tilde{D}$. $\square$

7. Numérotation cyclique des records. Dans toute cette partie, q désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2, et nous nous intéressons au problème suivant: peut-on numéroter cycliquement par $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$ les instants de records larges du processus de Poisson ponctuel $X = (X_t)_{t\ge 0}$?

Nous allons voir que dans ce problème, les questions de filtration ont une importance capitale, contrairement à ce qui se passait pour le problème d'énumération des instants de records par une suite strictement croissante de temps d'arrêt. Nous allons montrer en particulier que dans la filtration $(\mathscr{X}_t)_{t\ge 0}$ engendrée par le processus X, il n'est pas possible de numéroter cycliquement et de façon optionnelle les instants de records larges du processus X, mais que cela est possible dans une filtration à peine plus grosse pour laquelle le processus X est encore Poissonien.

THÉORÈME 7.1. *Soit $(\mathscr{F}_t)_{t\ge 0}$ une sur-filtration de $(\mathscr{X}_t)_{t\ge 0}$ dans laquelle le processus X est Poissonien, au sens où pour tout $t \ge 0$, le processus X_{t+} est indépendant de la tribu $\mathscr{F}_t$. Supposons qu'il existe un processus adapté continu à droite $(K_t)_{t>0}$ à valeurs dans $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$ qui saute de 1 à chaque instant de record large du processus X, et ne varie pas le reste du temps. Alors pour tout instant aléatoire T qui est une fonctionnelle du processus X, la variable aléatoire K_T est indépendante du processus X et suit la loi uniforme sur $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$.*

COROLLAIRE 7.1. *Dans la filtration $(\mathscr{X}_t)_{t\geq 0}$, il n'est pas possible de numéroter cycliquement et de façon optionnelle les instants de records larges du processus X.*

DÉMONSTRATION. On commence par prouver la propriété pour les temps de la forme $\tau_x = \inf\{t \geq 0: X_t \geq x\}$, avec $x > 0$. Les arguments sont assez similaires à ceux des parties 3, 4 et 5; les processus $(K_{\tau_x})_{x>0}$ et $(X_{\tau_x})_{x>0}$ remplaçant les processus $(N_x)_{x>0}$ et $(Y_{N_x})_{x>0}$. La différence entre les deux situations est qu'il n'existe pas de loi uniforme sur $\mathbf{Z}$, alors que dans $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$, il en existe une qui jouit de la propriété essentielle suivante: si D est une variable aléatoire $\mathscr{F}$-mesurable à valeurs dans $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$, et si U est une variable indépendante de $\mathscr{F}$ et de loi uniforme sur $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$, alors $U + D$ est encore une variable indépendante de $\mathscr{F}$ et de loi uniforme sur $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$.

On démontre d'abord comme au Lemme 4.2 que pour tout $x > 0$, les variables K_{τ_x} et X_{τ_x} sont indépendantes. D'après la propriété de Markov, cela entraîne que le processus $(X_{\tau_x+t})_{t\geq 0}$ est indépendant de la variable K_{τ_x}. La différence $K_{\tau_y} - K_{\tau_x}$ est le nombre de records du processus X dans l'intervalle $[x; y[$ modulo q. Comme fonctionnelle du processus $(X_{\tau_x+t})_{t\geq 0}$, elle est donc indépendante de la variable K_{τ_x}.

Ensuite, on déduit de la Proposition 3.3 que pour tout réel θ multiple de $2\pi/q$, et pour tout $y > x > 0$, on a

$$E\big[\exp(i\theta(K_{\tau_y} - K_{\tau_x}))\big] = \frac{\mu[y; +\infty[}{\mu[x; +\infty[} + e^{i\theta} \int_{[x;y[} E\big[\exp(i\theta(K_{\tau_y} - K_{\tau_x}))\big] \frac{\mu(dz)}{\mu[x; +\infty[}.$$

En effet, pour $a > 0$ fixé tel que $y > x > a > 0$, la suite $(Z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ des records larges supérieurs ou égaux à a est une chaîne de Markov de loi P_{π_a}, et on a $K_{\tau_y} - K_{\tau_x} = (N_y - N_x) \bmod q$, en notant $N_b = \inf\{n \in \mathbf{N}: Z_n \geq b\}$.

Fixons $y > 0$, et en posons $F(x) = E[\exp(i\theta(K_{\tau_y} - K_{\tau_x}))]$ pour $x \in]0; y]$. On a alors

$$F(x)\mu[x; +\infty[= F(y)\mu[y; +\infty[+ e^{i\theta} \int_{[x;y[} F(z)\mu(dz).$$

Une démonstration identique à celle de la cinquième partie montre alors que si θ n'est pas multiple de 2π, $F(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0. Autrement dit, la loi de $K_{\tau_y} - K_{\tau_x}$ tend vers la loi uniforme sur $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$.

Or pour tout $x \in]0; y[$, on a $|E[\exp(i\theta K_{\tau_y})]| \leq |E[\exp(i\theta(K_{\tau_y} - K_{\tau_x}))]|$, par indépendance de K_{τ_x} et $K_{\tau_y} - K_{\tau_x}$. D'après ce qui précède, on voit donc que pour tout $y > 0$, la variable K_{τ_y} suit la loi uniforme sur $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$.

Ecrivons la variable aléatoire K_{τ_y} comme la somme de K_{τ_x} et de $K_{\tau_y} - K_{\tau_x}$. La variable K_{τ_x} est indépendante du processus $(X_{\tau_x+t})_{t\geq 0}$ et uniformément distribuée sur $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$, tandis que la variable $K_{\tau_y} - K_{\tau_x}$ est une fonctionnelle du processus $(X_{\tau_x+t})_{t\geq 0}$. On en déduit que la variable aléatoire K_{τ_y} est elle aussi indépendante du processus $(X_{\tau_x+t})_{t\geq 0}$ (et uniformément distribuée sur

$\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$). Comme cela est vrai pour tout $x \in]0; y[$, on en déduit finalement que la variable K_{τ_y} est indépendante du processus X.

Considérons maintenant un instant aléatoire $T > 0$ qui est une fonctionnelle du processus X. Ecrivons la variable K_T comme la somme de K_{τ_1} et de $K_T - K_{\tau_1}$. La variable $K_T - K_{\tau_1}$ est une fonctionnelle de X. Comme la variable K_{τ_1} est indépendante de X et suit la loi uniforme sur $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$, il en est donc de même pour la variable K_T. □

THÉORÈME 7.2. *Supposons que le processus de Poisson ponctuel X est défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$. Pour qu'il existe une filtration $(\mathscr{G}_t)_{t\geq 0}$ de $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ pour laquelle le processus X soit Poissonien et dans laquelle on puisse numéroter cycliquement par $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$ et de façon optionnelle les instants de records larges du processus X, il faut et il suffit qu'il existe une variable aléatoire indépendante de X et de loi uniforme sur $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$.*

DÉMONSTRATION. La condition est nécessaire d'après le Théorème 7.1. Montrons qu'elle est suffisante.

Soit U une variable aléatoire indépendante de X et uniformément distribuée sur $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$. Appelons $T_1, T_2, \ldots$ les instants successifs de records larges du processus X après l'instant 1, et $T_0, T_{-1}, T_{-2}, \ldots$ les instants de records larges du processus X avant l'instant 1, pris dans l'ordre décroissant. Pour $t > 0$, posons $N_t = \max\{n \in \mathbf{Z}\colon T_n \leq t\}$, puis $K_t = U + (N_t \bmod q)$.

Soit $(\mathscr{G}_t)_{t\geq 0}$ la filtration naturelle associée au processus $(X_t, K_t)_{t>0}$. Alors le processus $(K_t)_{t>0}$ est évidemment adapté pour la filtration $(\mathscr{G}_t)_{t\geq 0}$, et il est continu à droite. Montrons que X est encore un processus de Poisson ponctuel dans la filtration $(\mathscr{G}_t)_{t\geq 0}$.

Fixons un instant $t_0 > 0$. La variable N_{t_0} est une fonctionnelle du processus X. Comme la variable U est indépendante de X et de loi uniforme sur $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$, il en est donc de même pour la variable $K_{t_0} = U + (N_{t_0} \bmod q)$.

On remarque alors que $\mathscr{G}_t = \sigma((X_s)_{0\leq s\leq t}, K_{t_0})$ pour tout $t \geq t_0$, puisque connaissant le processus X jusqu'à l'instant t, il suffit de connaître K_{t_0} pour reconstituer le processus K jusqu'à l'instant t. Comme la variable K_{t_0} est indépendante de X, on voit donc que pour tout $t \geq t_0$, le processus $X_{t+\cdot}$ est indépendant de la tribu $\mathscr{G}_t$.

Comme l'instant $t_0 > 0$ peut être pris arbitrairement petit, on a bien montré que X est un processus de Poisson ponctuel dans la filtration $(\mathscr{G}_t)_{t\geq 0}$. □

REMARQUE. Dans l'exemple ci-dessus, notons $(\mathscr{X}_t)_{t\geq 0}$ et $(\mathscr{K}_t)_{t\geq 0}$ les filtrations naturelles engendrées par les processus X et K. Alors les filtrations $(\mathscr{X}_t)_{t\geq 0}$ et $(\mathscr{G}_t)_{t\geq 0}$ croissent de la même façon: pour passer des tribus $\mathscr{X}_t$ et $\mathscr{G}_t$ aux tribus $\mathscr{X}_{t'}$ et $\mathscr{G}_{t'}$, avec $t' > t > 0$, on ajoute l'information indépendante consituée par la restriction du processus X à l'intervalle de temps $]t\,; t']$. On montre facilement que les tribus asymptotiques $\mathscr{X}_{0+}$ et $\mathscr{G}_{0+}$ sont triviales (voir démonstration ci-dessous). Pourtant les filtrations $(\mathscr{X}_t)_{t\geq 0}$ et $(\mathscr{G}_t)_{t\geq 0}$ ne sont pas presque surement égales, puisque $\mathscr{G}_t = \sigma(\mathscr{X}_t, K_t)$ et K_t est indépendante de $\mathscr{X}_t$. Nous sommes dans un cas où la “propriété d’échange” n’est pas vérifiée, autrement dit l’inclusion,

$$\sigma(X, \mathscr{K}_{0+}) \subset \bigcap_{t>0} \sigma(X, \mathscr{K}_t)$$

est stricte, car $\sigma(X, \mathscr{K}_t) = \sigma(X, K_1)$ pour tout $t > 0$. Le lecteur trouvera des résultats sur la propriété d’échange dans [2].

DÉMONSTRATION. Il suffit de vérifier que la tribu $\mathscr{G}_{0+}$ est triviale. Soit donc $A \in \mathscr{G}_{0+}$. Fixons $y > 0$, et montrons que A est indépendant du processus $(X_{\tau_y+t}, K_{\tau_y+t})_{t\geq 0}$.

Pour tout $x \in]0; y[$, $A \in \mathscr{G}_{\tau_x} = \sigma(\mathscr{X}_{\tau_x}, K_{\tau_x})$. Pour tout $k \in \mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$, on peut donc trouver un événement $A_{k,x} \in \mathscr{X}_{\tau_x}$ tel que $A \cap [K_{\tau_x} = k] = A_{k,x} \cap [K_{\tau_x} = k]$.

De même, pour tout $l \in \mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$, on peut donc trouver un événement B_l appartenant à la tribu engendrée par le processus $(X_{\tau_y+t})_{t\geq 0}$ tel que $B \cap [K_{\tau_y} = l] = B_l \cap [K_{\tau_y} = l]$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
P(A \cap B) &= \sum_{k,l} P\big[A; K_{\tau_x} = k; B; K_{\tau_y} = l\big] \\
&= \sum_{k,l} P\big[A_{k,x}; K_{\tau_x} = k; B_l; K_{\tau_y} - K_{\tau_x} = l - k\big] \\
&= \sum_{k} \bigg(P(A_{k,x}) P[K_{\tau_x} = k] \sum_{l} P(B_l) P\big[K_{\tau_y} - K_{\tau_x} = l - k\big] \bigg),
\end{aligned}$$

car la variable K_{τ_x} est indépendante du processus X, et car $K_{\tau_y} - K_{\tau_x}$ ne dépend que de la restriction du processus X à l’intervalle de temps $]\tau_x; \tau_y]$. Pour tout $x > 0$, on a

$$\sum_{k} P(A_{k,x}) P[K_{\tau_x} = k] = P(A).$$

Par ailleurs, pour tout $k \in \mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$, on a d’après la démonstration du Théorème 7.1,

$$\sum_{l} P(B_l) P\big[K_{\tau_y} - K_{\tau_x} = l - k\big] \to \sum_{l} P(B_l) \frac{1}{q} = P(B) \quad \text{quand } x \to 0.$$

Comme tous les termes sont bornés, on obtient en passant à la limite $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, ce qui montre que l’événement A est indépendant du processus $(X_{\tau_y+t}, K_{\tau_y+t})_{t\geq 0}$. Comme y peut être pris arbitrairement petit, on voit que A est indépendant du processus $(X_t, K_t)_{t\geq 0}$, ce qui entraîne que $P(A)$ vaut 0 ou 1. $\square$

REFERENCES

REVUZ, D. and YOR, M. (1991). *Continuous Martingales and Brownian Motion.* Springer, Berlin.

VON WEIZSCKER, H. (1983). Exchanging the order of taking suprema and countable intersection of sigma algebras. *Ann. Inst. H. Poincaré* **19** 91–100.

YOR, M. (1983). De nouveaux résultats sur l'équation de Tsirel'son. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I* **309** 511–514.

YOR, M. (1992). Tsirel'son's equation in discrete time. *Probab. Theory Related Fields* **91** 135–152.

INSTITUT FOURIER BP 74
UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER
38402 SAINT MARTIN D'HÈRES CEDEX
FRANCE
E-MAIL: leuridan@fourier.ujf-grenoble.fr
brossard@fourier.ujf-grenoble.fr