The Annals of Probability
2001, Vol. 29, No. 4, 1859–1902

PRINCIPES D'INVARIANCE PAR MOYENNISATION LOGARITHMIQUE POUR LES PROCESSUS DE MARKOV

PAR FAÏZA MAAOUIA

Equipe d'Analyse Stochastique et de Modélisation Statistique

On généralise le théorème de la limite centrale presque-sûre aux martingales fonctionnelles additives d'un processus de Markov récurrent. Et dans le cas de la récurrence positive, on dégage deux principes d'invariance analogues au théorème de la limite centrale et à la loi du logarithme itéré.

We extend the almost-sure central limit theorem to martingale additive functionals of a recurrent Markov process. In the particular case of positive recurrence, we also derive two invariance principles similar to the central limit theorem and the law of the iterated logarithm.

1. Introduction.

1.1. *But de l'article.* Ce travail s'articule autour de deux thèmes, dont le premier est relatif à la généralisation du *théorème de la limite centrale presque-sûre* aux martingales fonctionnelles additives d'un processus de Markov (à temps discret ou continu) récurrent. Et dont le second, sous jacent au premier, vise l'obtention des vitesses de convergence en loi et au sens presque-sûr d'une *loi forte de grands nombres* associée de manière naturelle à ce théorème de la limite centrale presque-sûre pour les martingales fonctionnelles additives.

S'agissant du premier thème, les résultats obtenus constituent un prolongement naturel aux travaux de Brosamler [6], Schatte [33], Lacey et Philipp [23], Berkes et Dehling [3], Berkes [2], Rodzik et Rychlik [32] et Touati [37], qui donnent des versions fortes du théorème de la limite centrale presque-sûre pour des marches aléatoires de variables aléatoires (v. a.) réelles. Ils ont également un lien avec ceux obtenus par Peligard et Shao [31] et Hurelbaatar [22] pour des v.a. satisfaisant à des propriétés de mélange. Quant aux résultats relatifs au second thème, ils généralisent en particulier ceux obtenus par Csörgő et Horváth [14] et Berkes, Horváth et Khoshnevian [4] pour des marches aléatoires de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées.

Dans [8] Chaâbane propose des résultats semblables aux nôtres pour des martingales unidimensionnelles discrètes. On reviendra plus loin sur la comparaison de nos approches fondées toutes deux sur une approximation forte d'une martingale discrète par une trajectoire brownienne.

Les applications aux modèles statistiques markoviens des principaux résultats sont examinées dans [12].

Received January 2001.

AMS 2000 *subject classifications*. Primary 60F05, 60F15; secondary 60F17, 60J55.

Mots clés. Processus de Markov, martingale fonctionnelle additive, atome, petit ensemble, récurrence, théorème de la limite centrale presque-sûre, loi du logarithme itéré.

L'utilisation des chaînes atomiques et la technique de fission des chaînes de Markov ayant un petit ensemble présentent l'avantage ici de bâtir une approche incluant le cas où le processus de Markov est à temps continu.

Les principaux résultats sont énoncés au paragraphe 2 et démontrés aux paragraphes 4 et 5. Pour alléger leurs preuves, les outils techniques ont été rassemblés au paragraphe 3. Les preuves de ces outils sont reportées au paragraphe 6.

1.2. *Données et notations.* On donne $X = \{\Omega, \mathscr{F}, (\mathbb{P}_x)_{x\in E}, \mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{I}}, (X_t)_{t\in\mathbb{I}}\}$ une version canonique d'un processus de Markov homogène, indexé par $\mathbb{I} = \mathbb{N}$ (cas discret) ou $\mathbb{I} = \mathbb{R}_+$ (cas continu), à valeurs dans un espace mesurable $(E, \mathscr{E})$; $\mathbb{F}$ étant sa filtration naturelle, $\mathbb{P}_x$ sa loi partant de x.

Dans le cas continu, on ajoute les hypothèses suivantes:

1. $(E, \mathscr{E})$ est un espace localement compact à base dénombrable muni de sa tribu borélienne;
2. $\mathbb{F}$ est convenablement complétée et rendue continue à droite;
3. X est fortement markovien et continu à droite.

On désigne par Π ou $(\Pi_t)_{t\geq 0}$ la transition de X ou son semi-groupe et par $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ sa résolvante:

$$R_\lambda(x, A) = \begin{cases} \mathbb{E}_x\left(\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda k}\mathbf{1}_{\{X_k\in A\}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda k}\Pi_k(x, A) & \text{(cas discret)}, \\ \mathbb{E}_x\left(\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\mathbf{1}_{\{X_t\in A\}}\,dt\right) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\Pi_t(x, A)\,dt & \text{(cas continu)}. \end{cases}$$

1.3. *Notions de récurrence pour X.*

1.3.1. *Récurrence au sens de Harris.* Cette notion est familière en théorie des processus de Markov. Elle signifie l'existence d'une mesure μ, σ-finie, non nulle, invariante par Π ou $(\Pi_t)_{t\geq 0}$ et telle que:

$$\text{(i)} \qquad \forall\, x \in E, \forall\, A \in \mathscr{E} \text{ chargé par } \mu, \qquad \mathbb{P}_x\left(\limsup_{t\in\mathbb{I}}(X_t \in A)\right) = 1.$$

On montre alors l'unicité d'une telle mesure μ à la multiplication par une constante positive près.

Le processus X est dit *récurrent nul* ou *récurrent positif* selon que $\mu(E) = +\infty$ ou $\mu(E) < \infty$. Dans le second cas, on peut choisir μ telle que $\mu(E) = 1$.

1.3.2. *Petit ensemble récurrent de la résolvante de X et lien avec la récurrence au sens de Harris.* Une condition suffisante pour la récurrence au sens de Harris de X est que sa résolvante possède un *petit ensemble C*, fermé dans le cas continu, vérifiant la propriété suivante:

$$\text{(ii)} \quad \begin{aligned} &\mathbb{P}_x(\limsup(X_n \in C)) = \mathbb{P}_x\left(\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{1}_{\{X_k\in C\}} = +\infty\right) = 1 \qquad \forall x\in E \text{ (cas discret)};\\ &\mathbb{P}_x(\limsup(X_t \in C)) = \mathbb{P}_x\left(\int_0^{\infty}\mathbf{1}_{\{X_t\in C\}}\,dt = +\infty\right) = 1 \qquad \forall x\in E \text{ (cas continu)}. \end{aligned}$$

Suivant Duflo [18], Meyn et Tweedie [27, 28] et Nummelin [30], $C \in \mathscr{E}$ est un *petit ensemble pour la résolvante* de la chaîne ou du processus de Markov X, s'il existe une loi de probabilité ν sur $\mathscr{E}$, concentrée sur C, et deux constantes $\lambda_0 > 0$, $b \in]0, 1[$, pour lesquelles on a

$$\forall (x, A) \in \mathrm{E} \times \mathscr{E}, \qquad \lambda_0 \mathrm{R}_{\lambda_0}(x, A) \geq b\mathbf{1}_C(x)\nu(A).$$

Cette condition est automatiquement réalisée dans le cas discret dès que C est un *petit ensemble de la transition* Π de X, c'est-à-dire

$$\forall (x, A) \in \mathrm{E} \times \mathscr{E}, \qquad \Pi(x, A) \geq b\mathbf{1}_C(x)\nu(A).$$

Un petit ensemble C de Π tel que la fonction $x \longmapsto \Pi(x, \cdot)$ soit constante sur C s'appelle *atome*. L'exemple le plus courant d'*atome récurrent* [i.e., satisfaisant (ii)] est celui de *point récurrent*.

Notons que la condition (ii) est aussi nécessaire pour la récurrence au sens de Harris de X, à condition de supposer que dans le cas discret la tribu $\mathscr{E}$ est dénombrablement engendrée (cf. [18, 29]), ce qui est fréquemment le cas.

Sous la condition (ii), la récurrence de X est positive dès que:

(iii)

$$\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x(\mathrm{T}_C) < \infty$$

où

$$\mathrm{T}_C = \begin{cases} \inf\{k \geq 1, \mathrm{X}_k \in C\} & \text{(cas discret)}, \\ \mathrm{T}_C(\delta) = \inf\{t \geq \delta, \mathrm{X}_t \in \mathrm{C}\}, & \text{pour un } \delta > 0 \qquad \text{(cas continu)}. \end{cases}$$

La condition (iii) est également nécessaire, pourvu que dans le cas discret la tribu $\mathscr{E}$ soit dénombrablement engendrée (cf. [18, 27]).

Désormais, la phrase "*le processus* X *est récurrent*" signifie pour nous que la condition (ii) est réalisée.

1.4. *Fonctionnelles additives et martingales fonctionnelles additives de X.* Soient $(\theta_t)_{t\in\mathbb{I}}$ les opérateurs de translation sur $(\Omega, \mathscr{F})$. Une *fonctionnelle additive* (FA), $\mathrm{A} = (\mathrm{A}_t)_{t\in\mathbb{I}}$, de X est un processus $\mathbb{F}$-adapté (càd-làg dans le cas continu), nul en 0 et tel que

$$\mathrm{A}_{t+s} = \mathrm{A}_t + \mathrm{A}_s \circ \theta_t, \quad \mathbb{P}_\nu\text{-p.s. } \forall (t, s) \in \mathbb{I}^2,$$

pour toute mesure initiale ν.

Une *martingale fonctionnelle additive* (MFA), $\mathrm{M} = (\mathrm{M}_t)_{t\in\mathbb{I}}$, de X est une FA qui est, en outre, une $(\mathbb{F}, \mathbb{P}_\nu)$ martingale pour toute loi initiale ν, c'est-à-dire:

$$\mathbb{E}_x(\mathrm{M}_t) = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{I}, \forall x \in \mathrm{E}.$$

Si la MFA M est localement de carré intégrable, sa variation quadratique et sa variation quadratique prévisible sont des FA notées respectivement $[\mathrm{M}] = ([\mathrm{M}]_t)_{t\in\mathbb{I}}$ et $\langle \mathrm{M}\rangle = (\langle \mathrm{M}\rangle_t)_{t\in\mathbb{I}}$.

2. Enoncés des principaux résultats.

2.1. *Hypothèses et notations complémentaires.*

2.1.1. *Hypothèses.* Nos résultats portent sur des MFA, $M = (M_t)_{t\in\mathbb{I}}$, du processus de Markov X récurrent et de mesure invariante μ, qui selon le cas vérifient ou bien les hypothèses (H1) et (H′) ou bien les hypothèses (H1) et (H″) ou bien (Hα) et (R-R) explicitées ci-dessous:

$$(\mathrm{H}\alpha)\begin{cases} -\mathbb{E}_x(\mathrm{M}_t^2) < \infty & \forall\, t \in \mathbb{I}, \forall\, x \in \mathrm{E}; \quad \mathbb{E}_\mu(\mathrm{M}_1^2) = \sigma_\mathrm{M}^2 \quad \in]0, \infty[; \\ -\mathbb{E}_\mu(|\mathrm{M}_1|^{2\alpha}) < \infty, & \alpha \in [1, 2]. \end{cases}$$

(H′) *Il existe un processus positif* $\mathrm{V} = (\mathrm{V}_t)_{t\in\mathbb{I}}$, *continu à droite dans le cas continu, croissant vers l'infini et tel que*

$$\forall\, x \in \mathrm{E}, \qquad \mathrm{V}_t^{-2}\langle \mathrm{M}\rangle_t \to 1, \qquad \mathbb{P}_x\text{-p.s.} \qquad t \to \infty.$$

Dans le cas de la récurrence nulle (resp. positive) $\mathrm{V}_t^2 = \langle \mathrm{M}\rangle_t$ (resp. $\mathrm{V}_t^2 = \sigma_\mathrm{M}^2 t$) convient.

(H″) *C'est l'hypothèse (H′) avec un processus* V $\mathbb{F}$-*prévisible dans le cas discret et continu dans le cas continu.*

Dans le cas de la récurrence positive, $\mathrm{V}_t^2 = \sigma_\mathrm{M}^2 t$ convient. Et dans le cas de la récurrence nulle $\mathrm{V}_t^2 = \mathbb{E}_\mu(\langle \mathrm{M}^c\rangle_1)^{-1}\mathbb{E}_\mu(\langle \mathrm{M}\rangle_1)\langle \mathrm{M}^c\rangle_t$ convient, pourvu que la partie martingale continue M^c de M ne soit pas nulle.

Dans le cas où le processus X est récurrent positif, pour affiner l'approximation des MFA par des sommes aléatoires de variables aléatoires indépendantes, on ajoute l'hypothèse suivante sur la résolvante de X:

(R-R) *Il existe une fonction positive* f_0 μ-*intégrable*, $\int f_0\, d\mu > 0$, *telle que pour tout* $x \in C$, *la fonction* $\lambda \mapsto \frac{1}{\lambda}(\lambda R_\lambda f_0(x) - \int f_0\, d\mu)$ *admette une limite finie lorsque* λ *tend vers* 0.

Cette hypothèse signifie que pour tout $x \in C$, la fonction

$$\lambda \mapsto \begin{cases} \lambda \mathrm{R}_\lambda f_0(x), & \text{si } \lambda > 0, \\ \lim\limits_{\lambda\to 0} \lambda \mathrm{R}_\lambda f_0(x) = \int f_0\, d\mu, & \text{si } \lambda = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

est dérivable à droite en 0. Elle implique que la récurrence de X est positive et que $\mathbb{E}_\mu(\mathrm{T}_C) < \infty$ (cf. le théorème F du sous paragraphe 3.4). En outre, elle permet de dégager un résultat précieux sur le comportement asymptotique des fonctionnelles additives et intégrables sur X [cf. remarque (b) du sous paragraphe 2.3].

Le sigle (R-R) est justifié par le fait que si C est un atome pour la chaîne X, alors la condition (R-R) signifie que la récurrence de X est *riemanienne d'ordre* 2 c'est-à-dire $\mathbb{E}_x(\mathrm{T}_C^2) < \infty$, $\forall\, x \in C$ [cf. la partie (i) du théorème F].

2.1.2. *Notations complémentaires.* A toute MFA M, on associe:

1. $\{\Psi_n\}_n$ la suite de processus à valeurs dans $\mathscr{C}([0,1])$ (espace des fonctions continues de [0,1] dans $\mathbb{R}$) définis par

$$\begin{aligned}\Psi_n(t) &= \frac{1}{V_n}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{M_k + \frac{tV_n^2 - V_k^2}{V_{k+1}^2 - V_k^2}(M_{k+1} - M_k)\right\}\mathbf{1}_{[V_k^2/V_n^2, V_{k+1}^2/V_n^2[}(t),\\ \Psi_n(1) &= \frac{1}{V_n}M_n;\end{aligned} \tag{2.2}$$

2. $\{W_n\}_n$ la suite des *mesures moyennes empiriques logarithmiques associées aux processus* $\{\Psi_n\}_n$ *et à l'échelle* V définies par

$$W_n(\cdot) = \frac{1}{\ln V_n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{V_{k+1}^2 - V_k^2}{V_{k+1}^2}\,\delta_{\{\Psi_k \in \cdot\}}; \tag{2.3}$$

3. $\{\mu_t\}_{t\in\mathbb{I}}$ la suite des *mesures moyennes empiriques logarithmiques associées aux v.a.* $(V_t^{-1}M_t)$ *et à l'échelle* V définies par

$$\mu_n(\cdot) = \frac{1}{\ln V_n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{V_{k+1}^2 - V_k^2}{V_{k+1}^2}\,\delta_{\{V_k^{-1}M_k \in \cdot\}} \qquad \text{(cas discret)}, \tag{2.4}$$

$$\mu_T(\cdot) = \frac{1}{\ln V_T^2}\int_1^T \delta_{\{V_t^{-1}M_t \in \cdot\}}\frac{dV_t^2}{V_t^2} \qquad \text{(cas continu)}. \tag{2.5}$$

G_σ ou $\mathscr{N}(0,\sigma^2)$ désignera la loi gaussienne centrée et de variance σ^2 et $G = G_1$. La convergence en loi sera abrégée par "$\xrightarrow{\mathscr{L}}$" et la convergence étroite par "$\Longrightarrow$".

2.2. *Un théorème de la limite centrale presque-sûre fonctionnel et une loi forte logarithmique des grands nombres pour les martingales fonctionnelles additives.*

THÉORÈME 2.1. *Soit* $X = \{\Omega, \mathscr{F}, (\mathbb{P}_x)_{x\in E}, \mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{I}}, (X_t)_{t\in\mathbb{I}}\}$ *un processus de Markov récurrent indexé par* $\mathbb{I} = \mathbb{N}$ *ou* $\mathbb{I} = \mathbb{R}_+$. *Et soit* M *une* MFA *de* X.

(i) *Sous les hypothèses* (H1) *et* (H′), *du sous paragraphe* 2.1.1, M *vérifie un théorème de la limite centrale presque-sûre fonctionnel* (*TLCPSF*) *par rapport à l'échelle* $V = (V_t)_{t\in\mathbb{I}}$ *sous* $\mathbb{P}_x$ *pour tout état initial* x, *à savoir: presque-sûrement,* $\{W_n\}_n$ *converge étroitement vers la mesure de Wiener* W *sur* $\mathscr{C}([0,1])$.

(ii) *Sous les hypothèses* (H1) *et* (H″) *et en ajoutant la condition*

$$\forall\, x \in E, \qquad V_t^{-2}(\Delta M)_t^2 \to 0, \quad \mathbb{P}_x\text{-p.s.}, \quad t \to \infty$$

dans le cas continu, M *vérifie une loi forte quadratique des grands nombres* (*LFQ*) *par rapport à l'échelle* $\mathrm{V} = (\mathrm{V}_t)_{t\in\mathbb{I}}$, *à savoir pour tout état initial* x:

$$\frac{1}{\ln \mathrm{V}_n^2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\mathrm{V}_{k+1}^2 - \mathrm{V}_k^2}{\mathrm{V}_{k+1}^2} \right) \frac{\mathrm{M}_k^2}{\mathrm{V}_k^2} \to 1, \qquad n \to \infty,$$

$$\textit{ou } \frac{1}{\ln \mathrm{V}_T^2} \int_1^T \frac{\mathrm{M}_t^2}{\mathrm{V}_t^2} \frac{d\mathrm{V}_t^2}{\mathrm{V}_t^2} \to 1, \qquad \mathbb{P}_x\text{-p.s.}, T \to \infty.$$

Dans ces conditions, M *vérifie aussi une loi forte logarithmique des grands nombres* (*LFL*), *à savoir*: *presque-sûrement*,

$$\int f\, d\mu_R \to \int f\, dG \quad \textit{pour toute } f \in \mathbb{G}, R \to \infty$$

où $\mathbb{G}$ *désigne la classe des fonctions* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *presque partout continues et vérifiant* $\sup_{x\in\mathbb{R}} x^{-2}|f(x)| < \infty$ *et* G *dénote la loi normale centrée réduite* $\mathscr{N}(0,1)$.

Si le processus X est récurrent positif, il convient plutôt de considérer les mesures empiriques

$$\widetilde{W}_n(\cdot) = \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}\, \delta_{\{\widetilde{\Psi}_k \in \cdot\}} \tag{2.6}$$

associées aux processus $(\widetilde{\Psi}_n)_n$,

$$\widetilde{\Psi}_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \{\mathrm{M}_{[nt]} + (nt - [nt])(\mathrm{M}_{[nt]+1} - \mathrm{M}_{[nt]})\}, \tag{2.7}$$

ou les mesures empiriques

$$W'_T(\cdot) = \frac{1}{\ln T} \int_1^T \frac{dr}{r}\, \delta_{\{\Psi'_r \in \cdot\}}, \qquad T \ge 2, \tag{2.8}$$

associées aux processus $(\Psi'_r)_r$,

$$\Psi'_r(t) = \frac{1}{\sqrt{r}} M_{rt}, \qquad 0 \le t \le 1, r > 0. \tag{2.9}$$

COROLLAIRE 2.2. *Dans le cadre du théorème précédent, supposons que la récurrence du processus ou de la chaîne de Markov X est positive. Alors, pour toute* MFA M *de X satisfaisant l'hypothèse* (H1), *les mesures aléatoires* $(\widetilde{W}_n)_n$ *et* $(W'_T)_T$, *définies respectivement par* (2.6) *et* (2.8) *convergent étroitement vers* W_{σ_M}, *où* W_{σ_M} *est la mesure définie sur* $\mathscr{C}([0,1])$ *par* $W_{\sigma_\mathrm{M}}(\cdot) = W(\sigma_\mathrm{M}\cdot)$, W *étant la mesure de Wiener sur* $\mathscr{C}([0,1])$. *Cette propriété est valable* $\mathbb{P}_x$ *-presque-sûrement pour tout état initial* x.

2.3. *Un théorème de la limite centrale et une loi du logarithme itéré avec poids logarithmique.* Quelles sont les vitesses de convergence en loi et au sens (p.s.) associées à cette LFL? Pour répondre à cette question, on introduit les ensembles suivants:

$$\mathbf{L}^2(G_\sigma) = \Big\{ f \text{ mesurable}; \int f^2\, dG_\sigma < \infty \Big\},$$

$$\mathbf{L}_0^2(G_\sigma) = \Big\{ f \in \mathbf{L}^2(G_\sigma); \int f\, dG_\sigma = 0 \Big\}$$

et

$$\begin{aligned}\mathscr{G}_{\sigma,b} = \big\{ f \in \mathbf{L}_0^2(G_\sigma); \forall (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, |f(x)-f(y)| \\ \le \text{const.}\, |x-y|(1+|x|^b+|y|^b) \big\}\end{aligned}$$

où $0 \le b \le 1$.

Pour une MFA, $\mathrm{M} = (\mathrm{M}_t)_{t\in\mathbb{I}}$ de X et une fonction quelconque f de $\mathbf{L}^2(G_\sigma)$, on pose

$$\mathbb{K}_R^{\mathrm{M},f} = \sum_{k=1}^{R} \frac{1}{k} f\left(\frac{\mathrm{M}_k}{\sqrt{k}}\right) \quad \text{(cas discret)} \qquad \text{ou} \quad \int_1^R f\left(\frac{\mathrm{M}_t}{\sqrt{t}}\right)\frac{dt}{t} \quad \text{(cas continu)} \tag{2.10}$$

et

$$\mathbb{K}_R^{\mathrm{M}} = \mathbb{K}_R^{\mathrm{M},f} \quad \text{dans le cas particulier où } f(x)=x^2. \tag{2.11}$$

THÉORÈME 2.3. *On suppose que le processus de Markov X vérifie l'hypothèse* (R-R) *du sous paragraphe* 2.1.1. *Alors toute* MFA M *de* X *satisfaisant l'hypothèse* (Hα) *pour un* $\alpha \in]1,2]$, *vérifie un théorème de la limite centrale avec poids logarithmique* (*TLCL*) *et une loi du logarithme itéré avec poids logarithmique* (*LLIL*) *sous* $\mathbb{P}_x$, *pour tout* $x \in \mathrm{E}$, *à savoir, pour toute fonction* f *de* $\mathscr{G}_{\sigma_{\mathrm{M}},b}$:

(i) *TLCL*: $(\ln R)^{-1/2}\, \mathbb{K}_R^{\mathrm{M},f} \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathscr{N}(0,\sigma_f^2)$, $R\to\infty$;

(ii) *LLIL*: $\limsup_{R\to\infty}(2\ln R \ln\ln\ln R)^{-1/2}|\mathbb{K}_R^{\mathrm{M},f}| = \sigma_f$ p.s.

Dans (i) *et* (ii), *la variance* σ_f^2 *est liée à* f *par la relation* $\sigma_f^2 = -2\int fg\, dG_{\sigma_{\mathrm{M}}}$, *où* g *est une fonction de* $\mathbf{L}^2(G_{\sigma_{\mathrm{M}}})$, *telle que* $f = \widehat{\mathrm{L}}g$ *et* $\widehat{\mathrm{L}}$ *désigne l'extension à* $\mathbf{L}^2(G_{\sigma_{\mathrm{M}}})$ *de l'opérateur* $\mathrm{L} = \frac{1}{2}\sigma_{\mathrm{M}}^2 \frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{2}x\frac{d}{dx}$.

REMARQUES. (a) Vu que $\mathscr{G}_{\sigma_{\mathrm{M}},b}$ est un sous-espace de $\mathbf{L}_0^2(G_{\sigma_{\mathrm{M}}})$, on a la version multidimensionnelle suivante du TLCL:

$$\forall (f_1,\dots,f_d) \in (\mathscr{G}_{\sigma_{\mathrm{M}},b})^d,$$

$$(\ln R)^{-1/2}\Big(\mathbb{K}_R^{\mathrm{M},f_1},\dots,\mathbb{K}_R^{\mathrm{M},f_d}\Big) \underset{R\to\infty}{\xrightarrow{\mathscr{L}}} \mathscr{N}_d(0,\Gamma_{\mathrm{M}}),$$

avec

$$\Gamma_{\mathrm{M}} = \left(- \int (f_i g_j + f_j g_i) \, dG_{\sigma_{\mathrm{M}}} \right)_{1 \le i,\, j \le d} \quad \text{et} \quad f_i = \widehat{\mathrm{L}} g_i, \qquad 1 \le i \le d.$$

(b) On montrera, grâce au théorème F (signalé ci-dessus), que l'hypothèse (R-R) implique la suivante portant sur la variation quadratique prévisible de toute MFA M vérifiant (Hα) pour un $\alpha \in]1, 2]$:

$$(2.12) \qquad t^{-1} \langle \mathrm{M} \rangle_t - \sigma_{\mathrm{M}}^2 = o\big(t^{-1} g_{\alpha,\,\delta}(t)\big), \quad \mathbb{P}_x\text{-p.s.}, \ \forall\, x \in \mathrm{E}, \forall\, \delta > \frac{\alpha+1}{2\alpha},$$

où $g_{\alpha,\,\delta}(t) = t^{(1+\alpha)/2\alpha} (\ln t)^{\delta}$.

Une hypothèse semblable permet à Chaâbane (cf. [8], théorème 2.2) de montrer les propriétés TLCL et LLIL (avec pondération aléatoire) pour une martingale discrète ou à trajectoires continues.

(c) Pour la fonction $f(x) = x^2 - \sigma_{\mathrm{M}}^2$, on a $\sigma_f^2 = 4$ *et* comme $(\sum_{k=1}^{R} \frac{1}{k} - \ln R)$ est une suite bornée, les propriétés (i) et (ii) du théorème précédent s'écrivent respectivement

$$(\ln R)^{1/2} \Big\{ (\ln R)^{-1} \mathbb{K}_R^{\mathrm{M}} - \sigma_{\mathrm{M}}^2 \Big\} \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathscr{N}(0, 4\sigma_{\mathrm{M}}^4), \qquad R \to \infty,$$

et

$$\limsup_{R \to \infty} \sqrt{\frac{\ln R}{2 \ln \ln \ln R}} \Big| (\ln R)^{-1} \mathbb{K}_R^{\mathrm{M}} - \sigma_{\mathrm{M}}^2 \Big| = 2\sigma_{\mathrm{M}}^2 \quad \text{p.s.}$$

2.3.1. *Méthodologie des preuves.* Pour prouver les théorèmes 2.1, 2.3 et le corollaire 2.2, on distingue les étapes suivantes.

ETAPE 1. On suppose que X est une chaîne de Markov possédant un atome récurrent Δ tel que tout point x de E conduise $\mathbb{P}_x$-p.s. vers Δ.

ETAPE 2. On suppose que X est une chaîne de Markov dont la transition Π possède un petit ensemble récurrent C. On se ramène au cadre de l'étape 1 en associant à X, par la technique de fission, une chaîne de Markov atomique $\overline{\mathrm{X}}$ (voir le sous paragraphe 4.2).

ETAPE 3. On suppose que X est une chaîne ou un processus de Markov dont la résolvante possède un petit ensemble récurrent C. On se ramène au cadre de l'étape 2 en associant à X, par une technique de discrétisation aléatoire, une chaîne de Markov $\widehat{\mathrm{X}}$ dont la transition admet C comme petit ensemble.

3. Outils des démonstrations. Dans ce paragraphe, on donne une série d'outils techniques pour mener à bien les démonstrations des principaux résultats du paragraphe précédent. Les preuves de ces outils figurent au paragraphe 6.

3.1. *TLCPSF, LFL, TLCL et LLIL pour le mouvement brownien.* On sait que si $\mathrm{B} = (\mathrm{B}_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien standard, alors le processus $\mathrm{Y} = (\mathrm{Y}_t = e^{-t/2}\mathrm{B}_{e^t})_{t\geq 0}$ est un processus d'Ornstein–Uhlenbeck, vérifiant les propriétés suivantes:

1. Y est solution forte de l'équation différentielle stochastique

$$\text{(EDS)} \qquad d\mathrm{Y}_t = -\tfrac{1}{2}\mathrm{Y}_t\,dt + d\beta_t$$

   où $\beta = (\beta_t)_{t\geq 0} = (\int_1^{e^t} \frac{1}{\sqrt{r}}\,dB_r)_{t\geq 0}$ est encore un mouvement brownien standard;
2. Y est un processus de Markov récurrent positif de mesure invariante $G = \mathscr{N}(0,1)$.

Le résultat suivant, du à Brosamler [6], est une transcription au mouvement brownien du théorème ergodique vérifié par le processus Y. Une démonstration, basée sur le calcul stochastique, de ce résultat est proposée par Touati [37].

THÉORÈME A. *Soit* $\mathrm{B} = (\mathrm{B}_t)_{t\geq 0}$ *un mouvement brownien standard, alors on a les deux propriétés suivantes*:

TLCPSF—presque-sûrement les mesures aléatoires

$$\left((\ln n)^{-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\delta_{\{k^{-1/2}\mathrm{B}_{[k.]}\}}\right) \quad ou \quad \left((\ln R)^{-1}\int_1^R \delta_{\{r^{-1/2}\mathrm{B}_{r.}\}}\frac{dr}{r}\right)$$

convergent étroitement vers la mesure de Wiener sur $\mathscr{C}([0,1])$.

3. Soit $(\mathrm{P}_t)_{t\geq 0}$ le semi-groupe du processus d'Ornstein–Uhlenbeck Y. Alors $(\mathrm{P}_t)_{t\geq 0}$ est fortement continu sur $\mathbf{L}^2(G)$:

$$\forall f \in \mathbf{L}^2(G), \qquad \lim_{t\searrow 0}\|f - \mathrm{P}_t f\|_2 = 0.$$

Son générateur infinitésimal (restreint à l'espace des fonctions réelles deux fois continûment dérivables et à supports compacts sur $\mathbb{R}$) est: $\mathrm{L} = -\frac{1}{2}x\frac{d}{dx} + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}$; il admet une extension $\widehat{\mathrm{L}}$ à $\mathbf{L}^2(G)$: $\forall g \in \mathbf{L}^2(G)$, $\widehat{\mathrm{L}}(g) = \lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{P}_t g - g}{t}$ au sens de $\mathbf{L}^2(G)$.

En outre, $\sup\{\|\mathrm{P}_t h\|_2;\ h \in \mathbf{L}^2(G), \|h\|_2 = 1\} = e^{-t/2}$ (cf. [14]).

Par suite, pour toute fonction $f \in \mathbf{L}_0^2(G)$, la fonction $g = -\int_0^\infty \mathrm{P}_t f\,dt$ vérifie

$$\|g\|_2 \leq \left(\int_0^\infty e^{-t/2}\,dt\right)\|f\|_2 = 2\|f\|_2,$$

$$\lim_{t\searrow 0}\frac{\mathrm{P}_t g - g}{t} = \lim_{t\searrow 0}\frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{P}_s f\,ds = f = \widehat{\mathrm{L}}(g);$$

autrement dit l'image de $\widehat{\mathrm{L}}$ coïncide avec $\mathbf{L}_0^2(G)$. Par conséquent, pour toute fonction f dans $\mathbf{L}_0^2(G)$, on a

$$f = \widehat{\mathrm{L}}g \quad \text{avec } g = -\int_0^{+\infty} \mathrm{P}_t f\, dt.$$

Dans ces conditions, on notera

$$[\mathrm{Var}(f)] \qquad \sigma_f^2 = -2\int gf\, dG = -2\int g\widehat{\mathrm{L}}g\, dG.$$

Il est à remarquer que $\sigma_f^2 = \int (\nabla g)^2\, dG$ où le gradient de g est considéré au sens faible dans $\mathbf{L}^2(G)$. Et comme nous l'avons déjà signalé, pour $f(x) = x^2 - 1$, $\sigma_f^2 = 4$.

Le résultat suivant est une transcription au mouvement brownien du théorème de la limite centrale et de la loi du logarithme itéré qui sont valables pour Y (cf. [2, 35, 36]).

THÉORÈME B. *Soit* $\mathrm{B} = (\mathrm{B}_t)_{t\geq 0}$ *un mouvement brownien standard. On a les propriétés suivantes*:

(i) *TLCL*,

$$(\ln T)^{-1/2}\int_1^T f\big(t^{-1/2}\mathrm{B}_t\big)\frac{dt}{t} \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathscr{N}(0, \sigma_f^2), \qquad T \to \infty;$$

(ii) *LLIL*,

$$\limsup (2\ln T \ln\ln\ln T)^{-1/2}\left|\int_1^T f(t^{-1/2}\mathrm{B}_t)\,\frac{dt}{t}\right| = \sigma_f \quad p.s.;$$

où f est une fonction quelconque de $\mathbf{L}_0^2(G)$ et σ_f est la constante définie par la relation $[\mathrm{Var}(f)]$. *Plus généralement, ces deux propriétés sont vraies en substituant à la variable déterministe T, un processus croissant, positif, continu à droite*, $\mathrm{N} = (\mathrm{N}_R)_{R>0}$, *vérifiant* $\frac{\mathrm{N}_R}{R} \to 1$ *p.s.*, $R \to \infty$.

3.2. *Traduction des théorèmes A et B pour une marche aléatoire avec ou sans renouvellement.* Une approximation adéquate d'une marche aléatoire de v.a. i.i.d. par une trajectoire brownienne permet d'obtenir les deux transcriptions suivantes des théorèmes A et B.

THÉORÈME C. *On donne une suite* $(\xi_k, \tau_k)_{k\geq 1}$ *de variables aléatoires à valeurs dans* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$, *indépendantes, identiquement distribuées et on pose*

$$\mathrm{S}_0 = \mathrm{T}_0 = 0, \qquad \mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^n \xi_k, \qquad \mathrm{T}_n = \sum_{k=1}^n \tau_k, \tag{3.1}$$
$$\mathrm{S}_n^* = \mathrm{S}_{\mathrm{N}_n}, \qquad \mathrm{N}_t = \inf\{k \geq 0, \mathrm{T}_{k+1} > t\}.$$

Supposons que la suite des v.a. $(\xi_k)_{k\geq 1}$ *vérifie les propriétés suivantes*:

$$\mathbb{E}(\xi_1) = 0, \qquad \mathbb{E}(\xi_1^2) = \sigma_\xi^2 > 0; \tag{3.2}$$

et considérons pour une suite croissante $\mathrm{V} = (\mathrm{V}_n)_n$ *de v.a. positives vérifiant*

$$\tag{3.3} \begin{aligned} &\mathrm{V}_n \to \infty, \quad n \to \infty, \qquad \frac{\mathrm{V}_n}{\mathrm{V}_{n+1}} \to 1, \quad n \to \infty, \\ &\frac{\mathrm{V}_n^2}{\mathrm{N}_n} \to \sigma_\xi^2, \quad n \to \infty, \qquad \frac{1}{\mathrm{V}_n} \max_{k \le n} \left| \mathrm{S}_k^* - \mathrm{S}_{k-1}^* \right| \to 0 \quad \text{p.s.}, n \to \infty, \end{aligned}$$

les mesures moyennes empiriques logarithmiques $\{W_n^*\}_n$ *et* $\{\mu_n^*\}_n$ *définies comme dans* (2.3) *et* (2.4) *en changeant la suite* (M_n) *par la suite* (S_n^*).

Alors la suite $\mathrm{S}^* = (\mathrm{S}_n^*)$ *vérifie un* TLCPSF *à savoir, presque-sûrement*:

TLCPSF—$W_n^* \Longrightarrow W$, $n \to \infty$, *où* W *est la mesure de Wiener sur* $\mathscr{C}([0,1])$; *donc* $\mu_n^* \Longrightarrow G$, $n \to \infty$.

REMARQUES. (i) Prenons $\tau_k \equiv 1$, $\mathrm{V}_n^2 = \mathbb{E}(\mathrm{S}_n^2)$ et supposons que les (ξ_k) sont indépendantes mais non nécessairement de même loi. Alors la première partie du théorème C est encore vraie dès que $\sup_k \mathbb{E}(|\xi_k|^{2+\delta}) < \infty$, pour un $\delta > 0$. En outre, s'il existe des réels δ et β vérifiant $\delta > \beta > 1$ et $\sum_n \mathrm{V}_n^{-2\beta} \mathbb{E}(|\xi_n|^{2\delta}) < \infty$, alors (S_n) vérifie les propriétés TLCL et LLIL.

(ii) Si on renforce la dernière propriété de (3.3) comme suit

$$\tag{3.4} \frac{1}{\mathrm{V}_n} \max_{k \le n} \max_{k-1 \le t \le k} |\mathrm{S}_{\mathrm{N}_t} - \mathrm{S}_{\mathrm{N}_{k-1}}| \to 0 \quad \text{p.s.}, n \to \infty$$

alors la suite $\mathrm{S}^* = (\mathrm{S}_n^*)$ vérifie une LFQ et une LFL, à savoir, presque-sûrement:

$$\frac{1}{\ln \mathrm{V}_n^2} \sum_{k=1}^n \frac{\mathrm{V}_{k+1}^2 - \mathrm{V}_k^2}{\mathrm{V}_k^2} \left(\frac{\mathrm{S}_k^*}{\mathrm{V}_k} \right)^2 \to \sigma_\xi^2, \qquad n \to \infty,$$

et

$$\int f \, d\mu_n^* \Longrightarrow \int f \, dG \quad \text{pour toute } f \in \mathbb{G}, n \to \infty.$$

Le théorème suivant généralise les résultats de Csörgő et Horvàth établis dans [14].

THÉORÈME D. *On se place dans le cadre du théorème* C *en supposant que les v.a.* $(\xi_k, \tau_k)_{k \ge 1}$ *vérifient les hypothèses suivantes*:

$$\tag{3.5} \begin{aligned} &\mathbb{E}(\xi_1) = 0, \qquad \mathbb{E}(\xi_1^2) = \sigma_\xi^2 > 0, \\ &\mathbb{E}\big(|\xi_1|^2 \ln(|\xi_1| + 1)^\alpha\big) < \infty, \quad \textit{pour un } \alpha \in]1,2]; \end{aligned}$$

$$\tag{3.6} \mathbb{E}(\tau_1) = m_\tau > 0, \qquad \mathbb{E}\big(\tau_1^\delta\big) < \infty, \quad \textit{pour un } \delta \in]1,2].$$

Alors $\forall f \in \mathscr{G}_{\sigma,b} = \{f \in \mathbf{L}_0^2(G_\sigma); \forall (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, |f(x)-f(y)| \le c^{te}|x-y|(1+|x|^b+|y|^b)\}$, *on a*:

(i) TLCL,

$$(\ln n)^{-1/2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}f\left(\frac{\mathrm{S}_k}{\sqrt{k}}\right) \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathscr{N}\big(0, \sigma_\xi^4\sigma_f^2\big), \qquad n\to\infty;$$

(ii) LLIL,

$$\lim_{n\to\infty}\sup(2\ln n\ln\ln\ln n)^{-1/2}\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}f\left(\frac{\mathrm{S}_k}{\sqrt{k}}\right)\right| = \sigma_\xi^2\sigma_f \quad \text{p.s.};$$

où $\sigma_f^2 = -2\int gf\,dG = -2\int g\widehat{\mathrm{L}}g\,dG$, $\widehat{\mathrm{L}}$ *étant l'extension à* $\mathbf{L}^2(G)$ *de l'opérateur* $\mathrm{L} = \frac{1}{2}\sigma_\xi^2\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{2}x\frac{d}{dx}$. *Ces deux propriétés sont également vraies en remplaçant* S_n *par* S_n^* *et* σ_ξ^2 *par* $\sigma^2 = (\mathrm{m}_\tau)^{-1}\sigma_\xi^2$.

3.3. *LFQ pour les MFA de X.* Un résultat semblable au suivant est établi dans [8] (resp. [9]) pour les martingales à temps discret (resp. continu).

THÉORÈME E. *Soit* $\mathrm{X} = \{\Omega, \mathscr{F}, (\mathbb{P}_x)_{x\in\mathrm{E}}, \mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{I}}, (\mathrm{X}_t)_{t\in\mathbb{I}}\}$ *un processus de Markov récurrent indexé par* $\mathbb{I} = \mathbb{N}$ *ou* $\mathbb{I} = \mathbb{R}_+$. *Alors toute* MFA M *de* X *satisfaisant aux hypothèses* (H1) *et* (H″) *du sous paragraphe* 2.1.1 *et à la condition supplémentaire*

$$\forall x \in \mathrm{E}, \qquad \mathrm{V}_t^{-2}(\Delta\mathrm{M})_t^2 \to 0, \quad \mathbb{P}_x\text{-p.s.}, t\to\infty, \tag{3.7}$$

dans le cas continu, vérifie une LFQ *par rapport à l'échelle* $\mathrm{V} = (\mathrm{V}_t)_{t\in\mathbb{I}}$ *sous* $\mathbb{P}_x$ *pour tout état initial* x, *à savoir*:

$$\frac{1}{\ln \mathrm{V}_n^2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{V}_{k+1}^2-\mathrm{V}_k^2}{\mathrm{V}_{k+1}^2}\right)\frac{\mathrm{M}_k^2}{\mathrm{V}_k^2} \to 1, \qquad n\to\infty, \tag{LFQ}$$

ou

$$\frac{1}{\ln \mathrm{V}_T^2}\int_1^T \frac{\mathrm{M}_t^2}{\mathrm{V}_t^2}\frac{d\mathrm{V}_t^2}{\mathrm{V}_t^2} \to 1 \quad \text{p.s.}, T\to\infty.$$

3.4. *Conséquences de la condition* (R-R). Le résultat suivant est essentiel pour la preuve du théorème 2.3 et permet de justifier la remarque (b) du sous paragraphe 2.3.

THÉORÈME F. *Soit* X *une chaîne ou un processus de Markov récurrent et de mesure invariante* μ. *Alors on a les résultats suivants*:

(i) *La condition* (R-R) *suivante*:

> *Il existe une fonction positive* f_0 μ*-intégrable*, $\int f_0 d\mu > 0$, *telle que pour tout* $x\in C$, *la fonction* $\lambda \mapsto \frac{1}{\lambda}(\lambda\mathrm{R}_\lambda f_0(x) - \int f_0 d\mu)$ *admette une limite finie lorsque* λ *tend vers* 0;

implique que $\mathbb{E}_\mu(\mathrm{T}_C) < \infty$. *L'implication inverse a lieu lorsque* X *est une chaîne atomique.*

(ii) *Si la condition* (R-R) *est réalisée, alors, pour toute FA A de* X *vérifiant* $\mathbb{E}_\mu(\mathrm{A}_1^\gamma) < \infty$ *pour un* $\gamma \in]1, 2]$, *on a*

$$\text{(3.8)}\quad \begin{aligned} &\mathrm{A}_t - t\mathbb{E}_\mu(\mathrm{A}_1) = o(g_{\gamma,\,\eta}(t)) \quad \textit{avec} \\ &\quad g_{\gamma,\,\eta}(t) = t^{(\gamma+1)/2\gamma}(\ln t)^\eta \ \textit{et}\ \eta > \frac{\gamma+1}{2\gamma}, \qquad \mathbb{P}_x\text{-p.s. } \forall\, x \in \mathrm{E}. \end{aligned}$$

3.5. *Outils de contiguité pour les preuves des théorèmes C, D, 2.1, 2.3 et du corollaire 2.2.*

3.5.1. *Lemmes de contiguïté pour des fonctionnelles de MFA.* Pour démontrer le théorème 2.1 et le corollaire 2.2 dans le cadre 1 ou 3, on a besoin du résultat suivant établi au sous paragraphe 6.5.

LEMME 3.1. *Si* X *est une chaîne ou un processus de Markov récurrent positif et si* $\mathrm{M} = (\mathrm{M}_t)_{t\in\mathbb{I}}$ *vérifie l'hypothèse* (H1), *du sous paragraphe* 2.1.1, *alors posant* $\overline{\overline{\Psi}}_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\mathrm{M}_{[nt]}$, *on a les propriétés suivantes pour les processus* $(\widetilde{\Psi}_n)$ *et* (Ψ'_n) *définis respectivement par* (2.7) *et* (2.9):

(i)

$$\sup_{0\le t\le 1}\left|\widetilde{\Psi}_n(t) - \overline{\overline{\Psi}}_n(t)\right| \to 0, \quad \mathbb{P}_x\text{-p.s.}, n \to \infty;$$

(ii)

$$\sup_{0\le t\le 1}\left|\Psi'_r(t) - \overline{\overline{\Psi}}_{[r]}(t)\right| \to 0, \quad \mathbb{P}_x\text{-p.s.}, r \to \infty.$$

Le lemme suivant est important pour la preuve du théorème 2.1 et du corollaire 2.2 dans le cadre 3. Il a déjà été utilisé dans [36]. Pour la commodité du lecteur, sa preuve est réécrite au sous paragraphe 6.5. Pour les besoins de ce lemme on désigne par F la loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre $\mathrm{p}_0 = 1 - e^{-\lambda_0}$ (resp. la loi exponentielle sur $\mathbb{R}^+$ de paramètre λ_0) et par $\mathrm{T}' = \{\Omega', \mathscr{F}', \mathbb{P}', (\mathrm{T}'_n)_{n\ge 0}\}$ une version canonique de la marche aléatoire associée à F et partant de 0. A toute famille $\mathrm{Z} = (\mathrm{Z}_t)_{t\in\mathbb{I}}$ de v.a. sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}_x)$, on associe la suite $\widehat{\mathrm{Z}} = (\widehat{\mathrm{Z}}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de v.a. sur $(\Omega\times\Omega', \mathscr{F}\otimes\mathscr{F}', \widehat{\mathbb{P}}_x = \mathbb{P}_x\otimes\mathbb{P}')$ définies par

$$\text{(3.9)}\qquad \widehat{\mathrm{Z}}_n(\omega, \omega') = \mathrm{Z}_{\mathrm{T}'_n(\omega')}(\omega).$$

LEMME 3.2. *Soit* $\mathrm{M} = (\mathrm{M}_t)_{t\in\mathbb{I}}$ *une* MFA *de* X *vérifiant les hypothèses* (H1) *et* (H″), *du sous paragraphe* 2.1.1, *avec un processus* $\mathrm{V} = (\mathrm{V}_t)_{t\in\mathbb{I}}$. *Soient* $\widehat{\mathrm{M}} = (\widehat{\mathrm{M}}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\widehat{\mathrm{V}} = (\widehat{\mathrm{V}}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *les suites associées par* (3.9). *Alors les propriétés suivantes sont valables* $\widehat{\mathbb{P}}_x$*-presque-sûrement pour tout* $x \in \mathrm{E}$:

(i)

$$\langle \mathrm{M}\rangle_n^{-1}\langle \widehat{\mathrm{M}}\rangle_n \to 1, \qquad n \to \infty;$$

(ii)

$$\widehat{\mathrm{V}}_n^{-2}\mathrm{V}_n^2 \to 1, \qquad n \to \infty.$$

En conséquence $\mathrm{V}_n^{-2}\langle\widehat{\mathrm{M}}\rangle_n \to 1, n \to \infty$.

(iii) *Posant*

$$\Delta_n(u) = \sum_{k=0}^{n-1}\left\{\mathrm{M}_k + \frac{u-\mathrm{V}_k^2}{\mathrm{V}_{k+1}^2-\mathrm{V}_k^2}\Delta\mathrm{M}_{k+1}\right\}\mathbf{1}_{[\mathrm{V}_k^2,\,\mathrm{V}_{k+1}^2[}(u), \qquad \Delta_n(\mathrm{V}_n^2) = \mathrm{M}_n,$$

$$\widehat{\Delta}_n(u) = \sum_{k=0}^{n-1}\left\{\widehat{\mathrm{M}}_k + \frac{u-\mathrm{V}_k^2}{\mathrm{V}_{k+1}^2-\mathrm{V}_k^2}\Delta\widehat{\mathrm{M}}_{k+1}\right\}\mathbf{1}_{[\mathrm{V}_k^2,\,\mathrm{V}_{k+1}^2[}(u), \qquad \widehat{\Delta}_n(\mathrm{V}_n^2) = \widehat{\mathrm{M}}_n,$$

on a

$$\frac{1}{\mathrm{V}_n}\sup_{0\le u\le \mathrm{V}_n^2}\left|\Delta_n(u)-\widehat{\Delta}_n(u)\right| \to 0, \qquad n \to \infty.$$

3.5.2. *Lemmes de contiguité pour les preuves des théorèmes C, D et 2.3.* Les trois premiers lemmes suivants ont été élaborés en collaboration avec F. Chaâbane [8].

LEMME 3.3. *Soit* $\mathrm{V} = (\mathrm{V}_n)_n$ *une suite croissante de v.a. positives et telle que*

$$\mathrm{V}_n \to \infty, \qquad n \to \infty, \qquad \frac{\mathrm{V}_n}{\mathrm{V}_{n+1}} \to 1, \qquad n \to \infty.$$

Si $(\mathrm{X}_n)_n$ *et* $(\mathrm{Y}_n)_n$ *sont deux suites de* $\mathscr{D} = \mathscr{D}([0,1])$ (*espace des fonctions continues à droites et limitées à gauches de* [0,1] *dans* $\mathbb{R}$), *telles que*

$$\|\mathrm{X}_n - \mathrm{Y}_n\|_\infty = \sup_{0\le t\le 1}|\mathrm{X}_n(t) - Y_n(t)| \to 0, \qquad n \to \infty,$$

alors pour toute fonction f uniformément continue et bornée sur $\mathscr{D}$, *on a*

$$\frac{1}{\ln \mathrm{V}_n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{V}_{k+1}^2-\mathrm{V}_k^2}{\mathrm{V}_{k+1}^2}[f(\mathrm{X}_k)-f(\mathrm{Y}_k)] \to, 0, \qquad n \to \infty.$$

LEMME 3.4. *Soit* $\beta = \{\beta(t)\}_{t\ge 0}$ *un processus càd-làg, à valeurs réelles et soit* (V_n) *une suite croissante de v.a. positives, telles que*

$$\mathrm{V}_n \to \infty, \qquad n \to \infty, \qquad \frac{\mathrm{V}_n}{\mathrm{V}_{n+1}} \to 1 \quad \text{p.s.}, n \to \infty.$$

On pose

$$\Gamma(r) = \inf\{n \geq 0, V_{n+1}^2 > r\}, \qquad F(r) = V_{\Gamma(r)}^2,$$

$$\beta^{(r)} = \left\{\frac{1}{\sqrt{r}}\beta(rt)\right\}_{0\leq t\leq 1}, \qquad \widetilde{\beta}^{(r)} = \beta^{(F(r))},$$

$$W'_T(\cdot) = \frac{1}{\ln T}\int_1^T \frac{dr}{r}\delta_{\{\beta^{(r)}\in\cdot\}}, \qquad \widetilde{W}'_T(\cdot) = \frac{1}{\ln T}\int_1^T \frac{dr}{r}\delta_{\{\tilde{\beta}^{(r)}\in\cdot\}}.$$

Et on note W la mesure de Wiener sur $\mathscr{C}([0,1])$:

(i) *Si, presque-sûrement*, (W'_T) *converge étroitement vers W et on a*

$$\sup_{t\in[0,1]} |\tilde{\beta}^{(r)} - \beta^{(r)}| \to 0, \qquad r \to \infty,$$

alors

$$\widetilde{W}'_T(\cdot) \Longrightarrow W \quad \text{p.s.}, T \to \infty.$$

(ii) *Si, presque-sûrement*, $(\widetilde{W}'_T)$ *converge vers W, alors*

$$W_n^{\#}(\cdot) = \frac{1}{\ln V_n^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{V_{k+1}^2 - V_k^2}{V_{k+1}^2}\delta_{\{\beta^{(V_k^2)}\in\cdot\}} \Longrightarrow W \quad \text{p.s.}, n \to \infty.$$

Pour les besoins du lemme suivant, on considère sur l'espace de Skorokhod $\mathscr{D} = \mathscr{D}([0,1],\mathbb{R})$ une famille d'applications $(\alpha_r)_{r\in\mathbb{I}}$ ($\mathbb{I} = \mathbb{R}_+$, resp. $\mathbb{I} = \mathbb{N}$), croissantes, nulles en 0 telles que

$$\forall\, t \in [0,1], \qquad \alpha_r(t) \to t, \qquad r \to \infty, \qquad \text{et} \quad \sup_{r\in\mathbb{I}} \alpha_r(1) < \infty.$$

Notant $\mathscr{C}_L = \mathscr{C}([0,L],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[0,L]$ dans $\mathbb{R}$ avec $L \geq \sup_{r\in\mathbb{I}} \alpha_r(1)$, alors on a

$$\sup_{0\leq t\leq 1} |\alpha_r(t) - t| \to 0, \qquad r \to \infty; \tag{3.10}$$

$$\forall\, X \in \mathscr{C}_L, \qquad \sup_{0\leq t\leq 1} |X(\alpha_r(t)) - X(t)| \to 0, \qquad r \to \infty. \tag{3.11}$$

LEMME 3.5. *Soit* $\{\nu(r,\cdot)\}_{r\in\mathbb{I}}$ *une famille de noyaux positifs sur* $\mathscr{C}_L$, *uniformément bornés et dont les moyennes logarithmiques* $(\bar{\nu}_T)_{T\in\mathbb{I}}$, *définies par*

$$\left\{\frac{1}{\ln T}\int_1^T \nu(r,\cdot)\frac{dr}{r}\right\}_{T\geq 2} \quad ou \quad \left\{\left(\sum_{k=1}^{T}\frac{1}{k}\right)^{-1}\sum_{k=1}^{T}\frac{1}{k}\nu k,\cdot)\right\}_{T\geq 2}$$

convergent étroitement vers la mesure $\nu(\cdot)$.

Si $\mathscr{L}$ *est la projection canonique de* $\mathscr{C}_L$ *sur* $\mathscr{D}$ *et si* $\{\mathscr{L}_r\}_{r\in\mathbb{I}}$ *est la famille des applications de* $\mathscr{C}_L$ *dans* $\mathscr{D}$ *définies par*

$$\mathscr{L}_r\colon X(\cdot) \in \mathscr{C}_L \mapsto X(\alpha_r(\cdot)) \in \mathscr{D},$$

alors, la famille des moyennes logarithmiques des noyaux images des $\{\nu(r,\cdot)\}_{r\in\mathbb{I}}$ *par les applications* $\{\mathscr{L}_r\}_{r\in\mathbb{I}}$ *converge étroitement vers la mesure image de* $\nu(\cdot)$ *par la projection* $\mathscr{L}$.

LEMME 3.6. *Soit* $\mathrm{B}=\{\mathrm{B}(t)\}_{t\geq 0}$ *un processus brownien standard et* (V_n) *une suite croissante de v.a. comme dans le lemme* 3.4. *On pose, pour tout* $r>0$,

$$\mathrm{B}^{(r)}=\left\{\frac{1}{\sqrt{r}}\mathrm{B}(rt)\right\}_{0\leq t\leq 1},\qquad \widetilde{\mathrm{B}}^{(r)}=\mathrm{B}^{(\mathrm{F}(r))}\quad \textit{avec } \mathrm{F}(r)=\mathrm{V}^2_{\Gamma(r)},$$

$$\Gamma(r)=\inf\{n\geq 0,\mathrm{V}^2_{n+1}>r\};$$

et on note W la mesure de Wiener sur $C([0,1])$. *Alors, presque-sûrement, les moyennes empiriques logarithmiques*

$$\widetilde{\mathrm{W}}'_T(\cdot)=\frac{1}{\ln T}\int_1^T\frac{dr}{r}\delta_{\{\widetilde{\mathrm{B}}^{(r)}\in\cdot\}}\quad \textit{et}\quad \mathrm{W}^{\#}_n(\cdot)=\frac{1}{\ln \mathrm{V}^2_n}\sum_{k=1}^n\frac{\mathrm{V}^2_{k+1}-\mathrm{V}^2_k}{\mathrm{V}^2_{k+1}}\delta_{\{\mathrm{B}^{(\mathrm{V}^2_k)}\in\cdot\}}$$

convergent étroitement vers W.

LEMME 3.7. *Soit* $T=(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de v.a. à valeurs dans* $\mathbb{N}^*$ *ou* $\mathbb{R}^+$ *et* $\alpha=(\alpha_t)_{t\in\mathbb{I}}$, $\beta=(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *deux familles de v.a. On suppose que*:

(i) $T_n-n\mathrm{m}=o(\frac{n}{\sqrt{\ln n}})$, m *constante* >0;

(ii) $\sup_{T_n\leq t<T_{n+1}}|\alpha_t-\beta_n|=o(\sqrt{\frac{n}{\ln n}})$;

(iii) *pour toute fonction* $g\in\mathbb{G}$, *les v.a.* $(\mathbb{K}_R^{\alpha,g})$ *et* $(\mathbb{K}_n^{\mathrm{m}^{-1/2}\beta,g})$ *définies par*

$$\mathbb{K}_R^{\alpha,g}=\sum_{k=1}^R\frac{1}{k}g\left(\frac{\alpha_k}{\sqrt{k}}\right)\quad (\textit{cas discret})\quad \textit{ou}\quad \int_1^R g\left(\frac{\alpha_t}{\sqrt{t}}\right)\frac{dt}{t}\quad (\textit{cas continu})$$

et

$$\mathbb{K}_n^{\mathrm{m}^{-1/2}\beta,g}=\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}g\left(\frac{\mathrm{m}^{-1/2}\beta_k}{\sqrt{k}}\right),$$

vérifient une loi forte logarithmique:

$$(\mathrm{LFL})\qquad \begin{aligned}&(\ln R)^{-1}\mathbb{K}_R^{\alpha,g}\to C(g),\qquad R\to\infty,\\ &(\ln n)^{-1}\mathbb{K}_n^{\mathrm{m}^{-1/2}\beta,g}\to C'(g)\quad \text{p.s.}, n\to\infty,\end{aligned}$$

où $C(g)$ *et* $C'(g)$ *sont des constantes indépendantes de* α *et* β.

Alors, quelle que soit $f\in\mathscr{G}_{1,b}$, *on a*

$$\sup_{\mathrm{T}_n\leq R<\mathrm{T}_{n+1}}\left|(\ln R)^{-1/2}\mathbb{K}_R^{\alpha,f}-(\ln n)^{-1/2}\mathbb{K}_n^{\mathrm{m}^{-1/2}\beta,f}\right|\to 0\quad \text{p.s.}, n\to\infty. \tag{3.12}$$

4. Preuves du théorème 2.1 et du corollaire 2.2. Ce paragraphe est une section de mise en œuvre markovienne de divers outils donnés dans le paragraphe précédent afin de prouver le théorème 2.1 et son corollaire 2.2.

4.1. *Cadre 1: cas d'une chaîne de Markov dont la transition possède un atome récurrent.* On suppose ici que X est la version canonique d'une chaîne de Markov ayant un *atome récurrent* Δ tel que tout point de E conduise presque-sûrement à Δ. Cela signifie que d'une part la probabilité de transition $\Pi(\delta, \cdot)$ de X est la même pour tout $\delta \in \Delta$ et que d'autre part

$$\forall\, x \in \mathrm{E}, \qquad \mathbb{P}_x(\limsup\{\mathrm{X}_n \in \Delta\}) = 1. \tag{4.1}$$

Soit $\mathrm{T} = \mathrm{T}_\Delta$ le premier temps de retour de X dans Δ:

$$\mathrm{T} = \inf\{n \geq 1, \mathrm{X}_n \in \Delta\}. \tag{4.2}$$

Alors la mesure invariante de X est donnée par la formule

$$\mu(A) = \mathbb{E}_\Delta\left(\sum_{k=0}^{\mathrm{T}-1} \mathbf{1}_{\{\mathrm{X}_k \in A\}}\right) \qquad \forall\, A \in \mathscr{E}; \tag{4.3}$$

$\mathbb{E}_\Delta$ étant l'opérateur d'espérance sous $\mathbb{P}_\Delta = \mathbb{P}_\delta$, $\forall\, \delta \in \Delta$.

Dorénavant $(\mathrm{T}_n)_{n \geq 0}$ désignera la suite des temps de retour de X dans Δ, définie par

$$\mathrm{T}_0 = 0, \qquad \mathrm{T}_1 = \mathrm{T} \quad \text{et} \quad \mathrm{T}_{n+1} = \mathrm{T}_n + \mathrm{T} \circ \theta_{\mathrm{T}_n}. \tag{4.4}$$

Preuve du théorème 2.1. Elle s'appuie sur le théorème C.

(i) Pour une MFA, $\mathrm{M} = (\mathrm{M}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de X satisfaisant à l'hypothèse (H1), la propriété forte de Markov implique que les v.a. $\{(\xi_k, \tau_k, \eta_k)\}_{k \geq 2}$, définies par

$$\begin{aligned} \xi_{k+1} &= \mathrm{M}_{\mathrm{T}_{k+1}} - \mathrm{M}_{\mathrm{T}_k} = \mathrm{M}_\mathrm{T} \circ \theta_{\mathrm{T}_k}, \\ \tau_{k+1} &= \mathrm{T}_{k+1} - \mathrm{T}_k = \mathrm{T} \circ \theta_{\mathrm{T}_k}, \\ \eta_{k+1} &= \langle \mathrm{M} \rangle_{\mathrm{T}_{k+1}} - \langle \mathrm{M} \rangle_{\mathrm{T}_k} = \langle \mathrm{M} \rangle_\mathrm{T} \circ \theta_{\mathrm{T}_k}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

sont $\mathbb{P}_x$-indépendantes et identiquement distribuées selon la loi de la v.a. $(\mathrm{M}_\mathrm{T}, \mathrm{T}, \langle \mathrm{M} \rangle_\mathrm{T})$ sous $\mathbb{P}_\Delta$. En outre

$$\mathbb{E}(\xi_1) = \mathbb{E}_\Delta(\mathrm{M}_\mathrm{T}) = 0, \quad \mathbb{E}(\xi_1^2) = \mathbb{E}_\Delta(\mathrm{M}_\mathrm{T}^2) = \mathbb{E}_\Delta(\langle \mathrm{M} \rangle_\mathrm{T}) = \mathbb{E}_\mu(\mathrm{M}_1^2) = \sigma_\mathrm{M}^2. \tag{4.6}$$

Ainsi les v.a. (ξ_k) vérifient les hypothèses (3.2) du théorème C.

(ii) Montrons maintenant que si de plus M vérifie l'hypothèse

$$(\mathrm{H}')\text{:} \quad \frac{\langle \mathrm{M} \rangle_n}{\mathrm{V}_n^2} \to 1, \quad \mathbb{P}_x\text{-p.s.}, n \to \infty,$$

alors les hypothèses (3.3) du théorème C sont vérifiées par les suites $\mathrm{S}^* = (\mathrm{S}_n^*)_n$ et $(\mathrm{V}_n)_n$ où

$$\begin{aligned} &\mathrm{S}_n^* = \mathrm{S}_{N_n} \quad \text{avec } \mathrm{S}_n = \sum_{k=2}^{n} \xi_k = \mathrm{M}_{\mathrm{T}_n} - \mathrm{M}_\mathrm{T} \text{ et} \\ &N_t = \inf\{k \geq 0, \mathrm{T}_{k+1} > t\}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

En effet, grâce au théorème ergodique quotient, on a $\frac{\langle M\rangle_n}{\langle M\rangle_{n+1}} \to 1$ $\mathbb{P}_x$-p.s., $n \to \infty$ (cf. preuve du lemme 3.2); d'où

$$\frac{V_{n+1}^2}{V_n^2} = \frac{V_{n+1}^2}{\langle M\rangle_{n+1}} \times \frac{\langle M\rangle_{n+1}}{\langle M\rangle_n} \times \frac{\langle M\rangle_n}{V_n^2} \to 1, \quad \mathbb{P}_x\text{-p.s.}, n \to \infty,$$

pour toute échelle (V_n) satisfaisant l'hypothèse (H′). Par ailleurs, les propriétés

$$\frac{\langle M\rangle_{T_{N_n}}}{N_n} \to \sigma_M^2, \qquad n \to \infty, \qquad \text{et} \qquad T_{N_n} \le n < T_{N_n+1} \quad \mathbb{P}_x\text{-p.s.}$$

impliquent

$$\frac{\langle M\rangle_n}{N_n} \to \sigma_M^2, \quad \mathbb{P}_x\text{-p.s.}, n \to \infty$$

donc

$$\frac{N_n}{V_n^2} = \frac{N_n}{\langle M\rangle_n} \times \frac{\langle M\rangle_n}{V_n^2} \to \frac{1}{\sigma_M^2}, \quad \mathbb{P}_x\text{-p.s.}, n \to \infty.$$

Pour montrer que

$$\frac{1}{V_n} \sup_{k\le n} \left|\Delta S_k^*\right| \to 0, \quad \mathbb{P}_x\text{-p.s.}, n \to \infty,$$

on remarque, comme dans [36], que $\Delta S_{k+1}^* = S_{k+1}^* - S_k^* = M_{T_{N_{k+1}}} - M_{T_{N_k}}$ vérifie

$$\begin{aligned}\left|\Delta S_{k+1}^*\right| &= \left|M_{T_{N_{k+1}}} - M_{T_{N_k}}\right| \le \sup_{T_{N_k} \le n \le T_{N_{k+1}}} \left|M_n - M_{T_{N_k}}\right| \\ &\le \sup_{0\le n \le T_{N_{k+1}} - T_{N_k}} \left|M_{n+\ T_{N_k}} - M_{T_{N_k}}\right| = Y_{N_k}\end{aligned}$$

avec $Y_p = \sup_{0\le n\le T_{p+1}-T_p} |M_{n+T_p} - M_{T_p}|$. Or, sous $\mathbb{P}_x$, la suite $(Y_p)_{p\ge1}$ est i.i.d. selon la loi de Y_0 sous $\mathbb{P}_\Delta$ et grâce à l'inégalité de Doob, on a

$$\mathbb{E}_\Delta(Y_0^2) \le \mathbb{E}_\Delta\left(\sup_{0\le n\le T} |M_n|^2\right) \le 4\mathbb{E}_\Delta(M_T^2) = 4\sigma_M^2;$$

par conséquent la loi forte des grands nombres s'applique aux v.a. $(Y_p)_{p\ge1}$ et il en résulte que

$$n^{-1} Y_n^2 \to 0 \quad \mathbb{P}_x\text{-p.s.}, n \to \infty.$$

Cette propriété implique les suivantes:

$$n^{-1} \sup_{k\le n} Y_k^2 \to 0, \qquad n \to \infty, \qquad N_n^{-1/2} \sup_{k\le N_n} Y_k \to 0, \qquad n \to \infty,$$

$$N_n^{-1/2} \sup_{k\le n} Y_{N_k} \to 0, \quad \mathbb{P}_x\text{-p.s.}, n \to \infty;$$

d'où l'on déduit

$$\frac{1}{\mathrm{V}_n}\sup_{k\le n}\left|\Delta \mathrm{S}^*_{k+1}\right| \le \sqrt{\frac{N_n}{\mathrm{V}_n^2}}\frac{1}{\sqrt{N_n}}\sup_{k\le n}\mathrm{Y}_{N_k} \to 0, \quad \mathbb{P}_x\text{-p.s.}, n\to\infty.$$

D'après le théorème C la suite S^* vérifie un TLCPSF par rapport à l'échelle V.

(iii) Posons

$$\Psi_n(t) = \frac{1}{\mathrm{V}_n}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\mathrm{M}_k + \frac{t\mathrm{V}_n^2 - \mathrm{V}_k^2}{\mathrm{V}_{k+1}^2 - \mathrm{V}_k^2}\Delta \mathrm{M}_{k+1}\right\}\mathbf{1}_{[\mathrm{V}_k^2/\mathrm{V}_n^2,\, \mathrm{V}_{k+1}^2/\mathrm{V}_n^2[}(t),$$

$$\Psi_n(1) = \frac{1}{\mathrm{V}_n}\mathrm{M}_n.$$

Vu que $\mathrm{M}_n = \mathrm{S}^*_n + (\mathrm{M}_n - \mathrm{M}_{\mathrm{T}_{N_n}}) + \mathrm{M}_\mathrm{T}$, les processus $(\Psi^*_n)_n$ associés à la suite $(\mathrm{S}^*_n)_n$ par (2.2) vérifient

$$\sup_{t\in[0,\,1]}\left|\Psi^*_n(t) - \Psi_n(t)\right| \to 0, \quad \mathbb{P}_x\text{-p.s.}, n\to\infty,$$

car

$$\sup_{t\in[0,1]}\left|\Psi^*_n(t) - \Psi_n(t)\right| \le \frac{3}{\mathrm{V}_n}\sup_{k\le n+1}\left|\mathrm{M}_k - \mathrm{S}^*_k\right|$$

et on a

$$\left|\mathrm{M}_n - \mathrm{S}^*_n\right| \le \left|\mathrm{M}_n - \mathrm{M}_{\mathrm{T}_{N_n}}\right| + |\mathrm{M}_\mathrm{T}| \le \mathrm{Y}_{N_n} + |\mathrm{M}_\mathrm{T}|$$

donc

$$\frac{1}{\mathrm{V}_n}\sup_{k\le n}\left|\mathrm{M}_k - \mathrm{S}^*_k\right| \le \frac{1}{\mathrm{V}_n}\sup_{k\le n}\mathrm{Y}_{N_k} + \frac{|\mathrm{M}_\mathrm{T}|}{\mathrm{V}_n} \to 0, \quad \mathbb{P}_x\text{-p.s.}, n\to\infty.$$

Grâce à la partie (ii) de la preuve et au lemme 3.3, on peut donc affirmer que M vérifie un TLCPSF par rapport à l'échelle V. La partie (i) du théorème 2.2 est donc établie dans le cadre 1. Quant à la partie (ii), elle résulte manifestement du théorème E et du TLCPSF vérifié par le couple (M, V) lorsque celui-ci satisfait aux hypothèses (H1) et (H″).

Le théorème 2.1 est prouvé dans le cadre 1. □

PREUVE DU COROLLAIRE 2.2. Si l'atome Δ est récurrent positif, on peut prendre $\mathrm{V}_n^2 = n\sigma_\mathrm{M}^2$ et remplacer μ par

$$\mu' = (\mathbb{E}_\Delta(\mathrm{T}))^{-1}\mu, \quad \text{car } \|\mu\| = \mu(\mathrm{E}) = \mathbb{E}_\Delta(\mathrm{T}) < \infty.$$

Alors la propriété (i) du lemme 3.1 permet de justifier le transfert du TLCPSF des mesures (W_n) aux mesures (W'_n), c'est-à-dire le résultat du corollaire 2.2.

Le corollaire 2.2 est établi dans le cadre 1 envisagé. □

4.2. *Cadre 2: cas d'une chaîne de Markov dont la transition possède un petit ensemble récurrent.* On rapelle que la transition Π de la chaîne de Markov X possède un petit ensemble C, si

$$\forall (x, A) \in \mathrm{E} \times \mathscr{E}, \qquad \Pi(x, A) \geq b\mathbf{1}_C(x)\nu(A). \tag{4.8}$$

Dans ce cas, pour une probabilité de transition Q, on a

$$\Pi = b\mathbf{1}_C \otimes \nu + (1 - b\mathbf{1}_C)Q. \tag{4.9}$$

PREUVES DU THÉORÈME 2.1 ET DU COROLLAIRE 2.2 DANS LE CADRE 2. On se ramène au cadre 1 grâce à la technique classique suivante consistant à grossir l'espace $(\mathrm{E}, \mathscr{E})$ pour construire une chaîne atomique. Précisons brièvement les étapes de cette construction. Pour les détails on peut consulter [18, 28, 30, 36].

Dorénavant, on note

$$\begin{aligned}
&\overline{\mathrm{E}} = \mathrm{E} \times \{0, 1\}, \qquad \overline{\Omega} = \mathrm{E}^{\mathbb{N}} \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \Omega \times \Omega', \\
&\overline{\mathscr{E}} = \mathscr{E} \otimes \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\} = \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}', \\
&\overline{\mathscr{F}} = \mathscr{E}^{\mathbb{N}} \otimes \mathscr{E}'^{\mathbb{N}},
\end{aligned} \tag{4.10}$$

et $\{\bar{\theta}_n\}_n$ les opérateurs de translation sur $\overline{\Omega}$.

Si λ est une mesure positive, $\lambda(f)$ dénote l'intégrale par rapport à λ. A toute mesure λ sur E, on associe une mesure $\bar{\lambda}$ sur $\overline{\mathrm{E}}$, définie par

$$\begin{gathered}
\forall (A, B) \in \mathscr{E} \times \mathscr{E}', \\
\bar{\lambda}(A \times B) = \lambda\{(b\mathbf{1}_C\mathbf{1}_A)\delta_0(B) + ((1 - b\mathbf{1}_C)\mathbf{1}_A)\delta_1(B)\}.
\end{gathered} \tag{4.11}$$

Toute fonction $\mathscr{E}$-mesurable f définie sur E peut être prolongée en une fonction $\overline{\mathscr{E}}$-mesurable $\bar{f}$ définie sur $\overline{\mathrm{E}}$, en posant $\bar{f}(x, 0) = \bar{f}(x, 1) = f(x)$, $\forall x \in \mathrm{E}$.

De même, toute v.a. Y sur $(\Omega, \mathscr{F})$ peut être considérée comme une v.a. $\overline{Y}$ sur $(\overline{\Omega}, \overline{\mathscr{F}})$ définie par $\overline{Y}(\omega, \omega') = Y(\omega)$; d'où, en particulier

$$\overline{Y \circ \theta_n} = \overline{Y} \circ \bar{\theta}_n \quad \text{et} \quad \mathbb{E}_{\bar{\lambda}}(\overline{Y}) = \mathbb{E}_{\lambda}(Y) \quad \text{pour toute mesure initiale } \lambda.$$

A la probabilité de transition Π on associe la probabilité de transition $\overline{\Pi}$ définie, pour tout $x \in \mathrm{E}$ et tout $A \times B \in \mathscr{E} \times \mathscr{E}'$, par

$$\begin{aligned}
\overline{\Pi}\{(x, 0); A \times B\} &= \nu\{(b\mathbf{1}_C\mathbf{1}_A)\delta_0(B) + ((1 - b\mathbf{1}_C)\mathbf{1}_A)\delta_1(B)\} \\
\overline{\Pi}\{(x, 1); A \times B\} &= \int Q(x, dy)\{(b\mathbf{1}_C\mathbf{1}_A)(y)\delta_0(B) \\
&\qquad + ((1 - b\mathbf{1}_C)\mathbf{1}_A)(y)\delta_1(B)\}.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Et on considère la chaîne de Markov canonique $\overline{\mathrm{X}}$ sur $\overline{\Omega}$, de probabilité de transition $\overline{\Pi}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \overline{\omega} = (\omega, \omega') \in \overline{\Omega}, \quad \overline{\mathrm{X}}_n(\overline{\omega}) = (\mathrm{X}_n(\omega), \mathrm{X}'_n(\omega')) = (\omega_n, \omega'_n). \tag{4.13}$$

Alors $\Delta = C \times \{0\}$ est un atome de $\overline{\mathrm{X}}$. Plus précisément, si $\widetilde{\mathrm{T}} = \inf\{n \geq 1, \overline{\mathrm{X}}_n \in \Delta\}$, on a

$$\overline{\mathbb{P}}_{\bar{x}}(\widetilde{\mathrm{T}} < \infty) = 1 \qquad \forall\, \bar{x} \in \overline{\mathrm{E}} \text{ et } \bar{\mu}(\overline{\Gamma}) = \overline{\mathbb{E}}_{(a,\,0)}\left\{\sum_{k=0}^{\widetilde{\mathrm{T}}-1} \mathbf{1}_{\overline{\Gamma}}(\overline{\mathrm{X}})\right\}, \forall\, a \in \mathrm{E}, \forall\, \overline{\Gamma} \in \overline{\mathrm{E}},$$

est une mesure σ-finie sur $\overline{\mathrm{E}}$, invariante par $\overline{\Pi}$ et telle que pour tout x dans E,

$$\overline{\mathbb{E}}_{(x,\,0)}(\widetilde{\mathrm{T}}) = \bar{\mu}(\overline{\mathrm{E}}) = \mu(\mathrm{E}).$$

Si Z est une FA ou une MFA de X, $\overline{\mathrm{Z}}$ est une FA ou une MFA de $\overline{\mathrm{X}}$. Si $\mathrm{M} = (\mathrm{M}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une MFA de X vérifiant les hypothèses (H1) et (H′1), alors $\overline{\mathrm{M}} = (\overline{\mathrm{M}}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ [resp. $\overline{\langle \mathrm{M}\rangle} = (\langle \overline{\mathrm{M}}\rangle_n)_{n\in\mathbb{N}}$] est aussi une MFA de $\overline{\mathrm{X}}$ vérifiant (H1) et (H′1) (resp. une FA de $\overline{\mathrm{X}}$); de plus on a

$$\sigma^2_{\overline{\mathrm{M}}} = \overline{\mathbb{E}}_{\bar{\mu}}\left(\overline{\mathrm{M}}_1^2\right) = \mathbb{E}_{\mu}(\mathrm{M}_1^2) = \sigma^2_{\mathrm{M}}.$$

A la lumière de ce qui précède et du sous paragraphe 4.1, on peut affirmer que le théorème 2.1 et le corollaire 2.2 restent vrais dans le cadre 2. □

4.3. *Cadre 3: cas d'une chaîne ou d'un processus dont la résolvante possède un petit ensemble récurrent.* On exploite ici un schéma classique permettant de passer d'une chaîne ou d'un processus de Markov X dont la résolvante possède un petit ensemble à une chaîne de Markov $\widehat{\mathrm{X}}$ dont la probabilité de transition possède elle aussi un petit ensemble.

4.3.1. *Construction de la chaîne de Markov $\widehat{X}$.* Dans le cas discret (resp. continu), on désigne par F la loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre $\mathrm{p}_0 = 1 - e^{-\lambda_0}$ (resp. la loi exponentielle sur $\mathbb{R}^+$ de paramètre λ_0) et par $\mathrm{T}' = \{\Omega', \mathscr{F}', \mathbb{P}', (\mathrm{T}'_n)_{n\geq 0}\}$ une version canonique de la marche aléatoire associée à F et partant de 0. Ensuite, on pose

$$\widehat{\Omega} = \Omega \times \Omega', \qquad \widehat{\mathscr{F}} = \mathscr{F} \otimes \mathscr{F}', \qquad \widehat{\mathscr{F}_n} = \mathscr{F}_n \otimes \mathscr{F}',$$
$$\widehat{\mathbb{F}} = (\widehat{\mathscr{F}_n})_{n\geq 0}, \qquad \widehat{\mathbb{P}}_x = \mathbb{P}_x \otimes \mathbb{P}', \tag{4.14}$$

$$\widehat{\mathrm{X}}_n(\omega, \omega') = \mathrm{X}_{\mathrm{T}'_n(\omega')}(\omega) = \omega_{\omega'_n},$$
$$\widehat{\theta}_n(\omega, \omega') = \left(\left(\omega_{t+\omega'_n}\right)_{t\in\mathbb{I}}, \left(\omega'_{k+n} - \omega'_n\right)_{k\in\mathbb{N}}\right) \tag{4.15}$$

[$(\hat{\theta}_n)_n$ sont les opérateurs de translation sur $\widehat{\Omega}$] (cf. [36]). Alors le processus $\widehat{\mathrm{X}} = \{\widehat{\Omega}, \widehat{\mathscr{F}}, (\widehat{\mathbb{P}}_x)_{x\in\mathrm{E}}, \widehat{\mathbb{F}}, (\widehat{\mathrm{X}}_n)_{n\geq 0}\}$ est une chaîne de Markov à valeurs dans (E, $\mathscr{E}$), de probabilité de transition

$$\widehat{\Pi} = (1 - e^{-\lambda_0})e^{\lambda_0}\mathrm{R}_{\lambda_0} \quad \text{dans le cas discret}$$
$$(\text{resp. } \widehat{\Pi} = \lambda_0 \mathrm{R}_{\lambda_0}, \quad \text{dans le cas continu}), \tag{4.16}$$

et satisfaisant l'hypothèse du cadre 2:

$$\forall\, (x, A) \in \mathrm{E} \times \mathscr{E}, \qquad \widehat{\Pi}(x, A) \geq b\mathbf{1}_C(x)\nu(A). \tag{4.17}$$

A toute famille $Z = (Z_t)_{t\in\mathbb{I}}$ de v.a. sur Ω associons la suite $\widehat{Z} = (\widehat{Z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\widehat{\Omega}$ définie par $\widehat{Z}_n(\omega, \omega') = Z_{T'_n(\omega')}(\omega)$.

Si Z est une FA ou une MFA de X, alors $\widehat{Z}$ est une FA ou une MFA de $\widehat{X}$. En particulier, si $M = (M_t)_{t\in\mathbb{I}}$ est une MFA de X vérifiant l'hypothèse (H1), il en est de même pour la MFA $\widehat{M} = (\widehat{M}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\widehat{X}$ qui lui est associée et on a $\widehat{\mathbb{E}}_\mu(\widehat{M}_1^2) = \mathbb{E}_\mu(M_1^2) = \sigma_M^2$.

PREUVE DU THÉORÈME 2.1 ET DU COROLLAIRE 2.2 DANS LE CADRE 3. On associe au processus X la chaîne $\widehat{X}$ considérée plus haut, dont la transition possède un petit ensemble comme au sous paragraphe 4.2:

(i) Si $M = (M_t)_{t\in\mathbb{I}}$ une MFA de X vérifiant les hypothèses (H1) et (H′), du sous paragraphe 2.1.1, on vient de voir que la MFA $\widehat{M} = (\widehat{M}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\widehat{X}$ qui lui est associée vérifie également ces hypothèses. On peut donc affirmer que $\widehat{M}$ vérifie un TLCPSF par rapport à l'échelle V sous $\widehat{\mathbb{P}}_x$ pour tout $x \in E$. Plus précisément, notons

$$\widehat{\Psi}_n(t) = \frac{1}{V_n}\widehat{\Delta}_n(tV_n^2) = \frac{1}{V_n}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\widehat{M}_k + \frac{tV_n^2 - V_k^2}{V_{k+1}^2 - V_k^2}\Delta\widehat{M}_{k+1}\right\}\mathbf{1}_{[V_k^2,\, V_{k+1}^2[}(tV_n^2),$$
$$0 \le t < 1,$$
$$\widehat{\Psi}_n(1) = \frac{1}{V_n}\widehat{\Delta}_n(V_n^2) = \frac{1}{V_n}\widehat{M}_n \quad \text{et} \quad \widehat{W}_n(\cdot) = \frac{1}{\ln V_n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{V_{k+1}^2 - V_k^2}{V_{k+1}^2}\delta_{\{\widehat{\Psi}_k \in \cdot\}},$$

alors, $\widehat{\mathbb{P}}_x$-presque-sûrement, les mesures aléatoires $(\widehat{W}_n)_n$ convergent étroitement vers la mesure de Wiener W sur $\mathscr{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Mais compte tenu de la partie (iii) du lemme 3.2, posant

$$\Psi_n(t) = \frac{1}{V_n}\Delta_n(tV_n^2) = \frac{1}{V_n}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{M_k + \frac{tV_n^2 - V_k^2}{V_{k+1}^2 - V_k^2}\Delta M_{k+1}\right\}\mathbf{1}_{[V_k^2,\, V_{k+1}^2[}(tV_n^2),$$
$$0 \le t < 1,$$
$$\Psi_n(1) = \frac{1}{V_n}\Delta_n(V_n^2) = \frac{1}{V_n}M_n,$$

on a

$$\sup_{0\le t\le 1}\left|\widehat{\Psi}_n(t) - \Psi_n(t)\right| \to 0, \quad \widehat{\mathbb{P}}_x\text{-p.s.}, n \to \infty.$$

On en déduit, grâce au lemme 3.3, que M vérifie un TLCPSF avec la pondération V, sous $\mathbb{P}_x$ pour tout x dans E. Le fait que M vérifie la propriété LFL découle du résultat précédent et de la propriété LFQ qui est valable pour M, en vertu du théorème E. Le théorème 2.1 est établi.

(ii) Si la récurrence de la chaîne ou du processus de Markov X est positive, l'hypothèse (H′) est automatiquement vérifiée en prenant $V_t^2 = t\sigma_M^2$, $t \in \mathbb{I}$. L'assertion du corollaire 2.2 relative aux mesures aléatoires $(\widetilde{W}_n)$ est donc une transcription de la partie (i) du théorème 2.1. On en déduit la convergence étroite $\mathbb{P}_x$-p.s. des mesures aléatoires (W'_T) vers $\mathrm{W}_{\sigma_{\mathrm{M}}}$ grâce à la partie (ii) du lemme 3.1. Le corollaire 2.2 est établi. □

5. Preuve du théorème 2.3. On procède en trois étapes comme au paragraphe précédent.

ETAPE 1 (Cas d'une chaîne atomique). On se place dans le cadre 1 du sous paragraphe 4.1 en supposant en plus que X vérifie la condition (R-R) du sous paragraphe 2.1.1:

(i) Soit $\mathrm{M} = (\mathrm{M}_n)_n$ une MFA de X satisfaisant l'hypothèse (Hα) pour un $\alpha \in]1, 2]$ et (ξ_k, τ_k) la suite de v.a. i.i.d. qui lui est associée par les formules (4.5).

On sait déjà que cette suite satisfait aux propriétés suivantes:

$$\mathbb{E}_\Delta(\xi_1) = \mathbb{E}_\Delta(\mathrm{M}_\mathrm{T}) = 0;$$

$$\mathbb{E}_\Delta\big(\xi_1^2\big) = \mathbb{E}_\Delta\big(\mathrm{M}_\mathrm{T}^2\big) = \mathbb{E}_\Delta(\langle \mathrm{M}\rangle_\mathrm{T}) = \mathbb{E}_\mu\big(\mathrm{M}_1^2\big) = \sigma_\mathrm{M}^2;$$

et que d'après le théorème F, la condition (R-R) équivaut à $\mathbb{E}_\Delta(\tau_1^2) < \infty$. D'où la propriété suivante:

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_n &= n\mathrm{m} + O(\sqrt{n \ln\ln n}) \\ &= n\mathrm{m} + o\left(\sqrt{\frac{n}{\ln n}}\right), \qquad \mathbb{P}_x\text{-p.s. avec m } = \mathbb{E}_\Delta(\tau_1). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Montrons maintenant que l'hypothèse (Hα) implique la suivante:

$$\mathbb{E}_\Delta\big(|\xi_1|^{2\beta}\big) = \mathbb{E}_\Delta\big(|\mathrm{M}_\mathrm{T}|^{2\beta}\big) < \infty \quad \text{avec } \beta = \frac{2\alpha}{\alpha+1} \in]1, 2[.$$

En effet, le théorème de Rosenthal (cf. [21], Théorème 2.12, page 23) implique que $\mathbb{E}_\mu(\langle \mathrm{M}\rangle_1^\alpha) < \infty$; d'où l'on déduit par le calcul suivant que $\mathbb{E}_\Delta(\langle \mathrm{M}\rangle_\mathrm{T}^\beta) < \infty$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\Delta\big(\langle \mathrm{M}\rangle_\mathrm{T}^\beta\big) &= \mathbb{E}_\Delta\left(\left(\sum_{k=0}^{\mathrm{T}-1} \langle \mathrm{M}\rangle_{k+1} - \langle \mathrm{M}\rangle_k\right)^\beta\right) \\ &\le \sum_{n\ge 1} (\mathbb{P}_\Delta(\mathrm{T}=n))^{(\alpha-\beta)/\alpha}\left(\mathbb{E}_\Delta\left(1_{\{\mathrm{T}=n\}}\sum_{k=0}^{n-1}(\langle \mathrm{M}\rangle_{k+1} - \langle \mathrm{M}\rangle_k)^\alpha\right)\right)^{\beta/\alpha} \\ &\le \sum_{n\ge 1} (\mathbb{P}_\Delta(\mathrm{T}=n))^{(\alpha-\beta)/\alpha} n^{\beta(\alpha-1)/\alpha} \\ &\qquad \times \left(\mathbb{E}_\Delta\left(1_{\{\mathrm{T}=n\}}\sum_{k=0}^{n-1}(\langle \mathrm{M}\rangle_{k+1} - \langle \mathrm{M}\rangle_k)^\alpha\right)\right)^{\beta/\alpha}; \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\mathbb{E}_\Delta\Big(\langle \mathrm{M}\rangle_\mathrm{T}^\beta\Big) \le \big(\mathbb{E}_\Delta(\mathrm{T}^2)\big)^{(\alpha-\beta)/\alpha}\big(\mathbb{E}_\mu(\langle \mathrm{M}\rangle_1^\alpha)\big)^{\beta/\alpha} < \infty.$$

Une nouvelle application du théorème de Rosenthal permet de déduire que $\mathbb{E}_\Delta(|\mathrm{M_T}|^{2\beta}) < \infty$.

Ainsi, les conditions (3.5) du théorème D sont vérifiées par la suite (ξ_k). Il s'en suit que les propriétés TLCL et LLIL sont vraies pour (S_n) avec $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^n \xi_k = \mathrm{M}_{\mathrm{T}_n} - \mathrm{M_T}$.

(ii) Par ailleurs, les v.a. $\alpha_n = \mathrm{M}_n$ et $\beta_n = \mathrm{S}_n = \mathrm{M}_{\mathrm{T}_n} - \mathrm{M_T}$ vérifient

$$\sup_{\mathrm{T}_n \le k \le \mathrm{T}_{n+1}} |\alpha_k - \beta_n| \le \sup_{\mathrm{T}_n \le k \le \mathrm{T}_{n+1}} |\mathrm{M}_k - \mathrm{M}_{\mathrm{T}_n}| + |\mathrm{M_T}| = \mathrm{Y}_0 \circ \theta_{\mathrm{T}_n} + |\mathrm{M_T}|$$

avec $\mathrm{Y}_0 = \sup_{0 \le k \le \mathrm{T}} |\mathrm{M}_k|$; et on peut affirmer que

$$\sup_{\mathrm{T}_n \le k \le \mathrm{T}_{n+1}} |\alpha_k - \beta_n| = o(n^{1/\beta}) = o\left(\sqrt{\frac{n}{\ln n}}\right), \quad \mathbb{P}_x\text{-p.s,}$$

car d'après l'inégalité de Doob $\mathbb{E}_\Delta(\mathrm{Y}_0^{2\beta}) < \infty$; donc

$$\mathrm{Y}_n = \mathrm{Y}_0 \circ \theta_{\mathrm{T}_n} = o(n^{1/\beta}) = o\left(\sqrt{\frac{n}{\ln n}}\right) \quad \mathbb{P}_x\text{-p.s, puisque } \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha+1}{2\alpha} \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[.$$

Vu que les suites (α_n) et (β_n) vérifient aussi la propriété LFL, le lemme 3.7 nous permet d'affirmer que pour toute fonction $f \in \mathscr{G}_{\sigma_{\mathrm{M}}, b}$,

$$\sup_{\mathrm{T}_p \le n < \mathrm{T}_{p+1}} \left| (\ln n)^{-1/2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} f\left(\frac{\mathrm{M}_k}{\sqrt{k}}\right) - (\ln p)^{-1/2} \sum_{r=1}^{p} \frac{1}{r} f\left(\frac{\mathrm{S}_r}{\sqrt{r \mathbb{E}_\Delta(\mathrm{T})}}\right) \right| \to 0, \tag{5.2}$$

$$\mathbb{P}_x\text{-p.s., } p \to \infty.$$

Grâce à cette propriété et à la partie (i) de la preuve, on peut conclure que le théorème 2.3 est vrai dans le cadre 1.

ETAPE 2 (Cas d'une chaîne de Markov dont la transition possède un petit ensemble récurrent). Si la chaîne de Markov X satisfait l'hypothèse (R-R), alors la chaîne atomique $\overline{\mathrm{X}}$ satisfait aussi cette hypothèse (R-R) (voir la preuve du théorème F au sous paragraphe 6.4). Par suite le temps de retour $\widetilde{\mathrm{T}}$ de $\overline{\mathrm{X}}$ dans l'atome Δ est tel que $\overline{\mathbb{E}}_\Delta(\widetilde{\mathrm{T}}^2) < \infty$. Par ailleurs, toute MFA M de X vérifiant l'hypothèse (Hα) pour un $\alpha \in]1, 2]$ peut être considérée comme une MFA de $\overline{\mathrm{X}}$ vérifiant la même hypothèse. Ainsi, grâce à la première étape de la démonstration, M satisfait aux propriétés TLCL et LLIL sous $\mathbb{P}_x$ pour tout $x \in \mathrm{E}$.

ETAPE 3 (Cas d'une chaîne ou d'un processus de Markov X dont la résolvante possède un petit ensemble récurrent). On associe au processus de Markov X la chaîne $\widehat{\mathrm{X}}$ construite au sous paragraphe 4.3 et dont la transition possède un petit ensemble récurrent.

(i) Il est immédiat de voir que la propriété (R-R) est vraie pour X si et seulement si elle l'est pour $\widehat{\mathrm{X}}$. Par ailleurs, si M est une MFA de X vérifiant l'hypothèse (Hα), $\alpha \in]1, 2]$, alors $\widehat{\mathrm{M}}$ est aussi une MFA de $\widehat{\mathrm{X}}$ satisfaisant la même hypothèse, car

$$\widehat{\mathbb{E}}_\mu\Big(\widehat{\mathrm{M}}_1^2\Big) = \mathbb{E}'(\mathrm{T}'_1)\sigma_{\mathrm{M}}^2, \qquad \widehat{\mathbb{E}}_\mu\Big(|\widehat{\mathrm{M}}_1|^{2\alpha}\Big) \le \text{const.}\, \mathbb{E}_\mu\Big(|\mathrm{M}_1|^{2\alpha}\Big) < \infty. \tag{5.3}$$

D'après la seconde étape de la preuve, $\widehat{\mathrm{M}}$ vérifie les propriétés TLCL et LLIL sous $\widehat{\mathbb{P}}_x$ pour tout $x \in \mathrm{E}$.

(ii) En remarquant maintenant que le lemme 3.7 s'applique aux v.a. $(\alpha_t) = (\mathrm{M}_t)_{t\in\mathbb{I}}$ et $(\beta_n) = (\widehat{\mathrm{M}}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on déduit la propriété suivante:

$$\forall f \in \mathscr{G}_{\sigma_{\mathrm{M}}, b}, \qquad \sup_{\mathrm{T}'_p \le R < \mathrm{T}'_{p+1}} \Big|(\ln R)^{-1/2}\mathbb{K}_R^{\mathrm{M}, f} - (\ln p)^{-1/2}\mathbb{K}_p^{\mathbb{E}(\mathrm{T}')^{-1/2}\widehat{\mathrm{M}}, f}\Big| \to 0, \qquad \widehat{\mathbb{P}}_x\text{-p.s.}, \ p \to \infty, \tag{5.4}$$

qui implique, grâce à la première partie de la preuve, que le théorème 2.3 est établi dans le cadre 3. □

6. Preuves des outils.

6.1. *Preuve du théorème C.* La preuve du théorème C repose sur le théorème A et les lemmes 3.3, 3.4, 3.5 et 3.6 qui seront établis au sous paragraphe 6.5.

ETAPE 1. On utilise d'abord la représentation de Skorokhod. Il existe un espace probabilisé $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathscr{F}}, \widetilde{\mathbb{P}})$, une v.a. $\widetilde{\mathrm{B}}$: $\widetilde{\Omega} \to \mathscr{C}_0([0, \infty[)$ (espace des fonctions continues et nulles en 0 de $[0, \infty[$ dans $\mathbb{R}$) et des temps d'arrêts $0 = \widetilde{\mathrm{R}}_0 \le \widetilde{\mathrm{R}}_1 \le \widetilde{\mathrm{R}}_2 \le \cdots$ $\widetilde{\mathbb{P}}$-p.s. finis tels que

(6.1a) $\widetilde{\mathrm{B}}$ soit un mouvement brownien;

(6.1b) la suite $\Big(\widetilde{\mathrm{B}}_{\widetilde{\mathrm{R}}_i} - \widetilde{\mathrm{B}}_{\widetilde{\mathrm{R}}_{i-1}}\Big)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est de même loi que $(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$;

(6.1c) $\widetilde{\mathrm{R}}_i - \widetilde{\mathrm{R}}_{i-1}$ sont indépendantes avec $\mathbb{E}(\widetilde{\mathrm{R}}_i - \widetilde{\mathrm{R}}_{i-1}) = \sigma^2$.

(Voir [20], Chapitre 1, théorème 117, et [6], page 570.)

Soit maintenant $\Omega = \widetilde{\Omega} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$, $\mathscr{F}$ la σ-algèbre produit correspondante et $\mathbb{P}$ la probabilité définie par

$$\mathbb{P}(A \times A_1 \times \cdots \times A_n \times \mathbb{R} \times \cdots) = \int_A \prod_{i=1}^n \eta_i\Big(\widetilde{\mathrm{B}}_{\widetilde{\mathrm{R}}_i} - \widetilde{\mathrm{B}}_{\widetilde{\mathrm{R}}_{i-1}}, A_i\Big)\, d\widetilde{\mathbb{P}}, \tag{6.2}$$

où $\eta_i(t, \cdot)$ désigne une version régulière de la distribution conditionnelle $\mathbb{P}(\tau_i \in \cdot | \xi_i = t)$. Si on pose $\mathrm{B}(\widetilde{\omega}, (t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}) = \widetilde{\mathrm{B}}(\widetilde{\omega})$, $\mathrm{R}(\widetilde{\omega}, (t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}) = \widetilde{\mathrm{R}}(\widetilde{\omega})$, alors les propriétés (6.1a)–(6.1.c) restent vraies en remplaçant le mouvement brownien $\widetilde{\mathrm{B}}$ par le mouvement brownien B et les temps d'arrêt $(\widetilde{\mathrm{R}}_i)$ par la marche aléatoire

(R_i). Autrement dit, on vient de construire un nouvel espace probabilisé [noté encore $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$] sur lequel les v.a. (ξ_k, τ_k), sont définies simultanément avec un mouvement brownien réel standard $B = (B_t)_{t\geq 0}$ tel que $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k = B_{R_n}$ où (R_n) est une marche aléatoire sur $\mathbb{R}_+$ avec $\mathbb{E}(R_1) = \sigma^2$. Par conséquent $S_n^* = S_{N_n} = B_{H_n}$ où $H_n = R_{N_n}$.

ETAPE 2. On exploite ensuite les 4 lemmes 3.3, 3.4, 3.5 et 3.6 comme suit. On remarque que

$$\frac{H_n}{V_n^2} = \frac{R_{N_n}}{N_n} \times \frac{N_n}{V_n^2} \to \sigma^2 \times \frac{1}{\sigma^2} = 1 \quad \text{p.s.}, n \to \infty,$$

ce qui implique que pour $\Gamma(r) = \inf\{n \geq 0, V_{n+1}^2 > r\}$ et $H^{(r)} = \{H_{\Gamma(rt)}/r\}_{0\leq t\leq 1}$, on a

$$\sup_{t\in[0,1]} |H^{(r)}(t) - t| \to 0 \quad \text{p.s.}, r \to \infty.$$

Par conséquent

$$\sup_{t\in[0,1]} |H^{(F(r))}(t) - t| \to 0 \quad \text{p.s.}, r \to \infty, \text{ où } F(r) = V_{\Gamma(r)}^2.$$

Remarquons maintenant que d'après le lemme 3.6, les moyennes logarithmiques des noyaux $\nu(r, \cdot) = \delta_{\{\widetilde{B}^{(r)} \in \cdot\}}$ avec $\widetilde{B}^{(r)} = B^{(F(r))}$ et $B^{(r)} = \{\frac{1}{\sqrt{r}} B_{rt}\}_{0\leq t\leq 1}$, à savoir, $W'_T = \frac{1}{\ln T}\int_1^T \frac{dr}{r}\nu(r, \cdot)$ vérifient $W'_T \Longrightarrow_{T\to\infty} W$ p.s., $T \to \infty$. On en déduit en appliquant le lemme 3.5 au noyaux $(\nu(r, \cdot))$ et aux changements de temps $(\alpha_r) = (H^{(F(r))})$ que

$$\frac{1}{\ln T}\int_1^T \frac{dr}{r}\delta_{\{\widetilde{\beta}^{(r)} \in \cdot\}} \Longrightarrow W \quad \text{p.s.}, T \to \infty,$$

où $\widetilde{\beta}^{(r)} = \beta^{(F(r))}$ et $\beta^{(r)} = \{\frac{1}{\sqrt{r}}\beta(rt)\}_{0\leq t\leq 1}$ avec $\beta(u) = B_{H_{\Gamma(u)}}$ pour $u > 0$.

Par ailleurs, les processus

$$\gamma^{(r)} = \left\{\frac{1}{\sqrt{r}}\gamma(rt)\right\}_{0\leq t\leq 1} \quad \text{avec } \gamma(u) = \beta(u) + \left\{\frac{u - V_{\Gamma(u)}^2}{V_{\Gamma(u)+1}^2 - V_{\Gamma(u)}^2}\right\}\Delta S_{\Gamma(u)+1}^* \tag{6.3}$$

vérifient la propriété

$$\sup_{t\in[0,1]} |\gamma^{(r)}(t) - \beta^{(r)}(t)| \to 0 \quad \text{p.s.}, r \to \infty,$$

en vertu de l'hypothèse $\frac{1}{V_n}\max_{k\leq n+1} |\Delta S_k^*| \to 0$ p.s., $n \to \infty$.

Donc on a également

$$\sup_{t\in[0,1]} |\tilde{\gamma}^{(r)}(t) - \tilde{\beta}^{(r)}(t)| \to 0 \quad \text{p.s. } n \to \infty,$$

en posant $\tilde{\gamma}^{(r)} = \gamma^{(F(r))}$. Combinée avec le TLCPSF vérifié par les processus $(\tilde{\beta}^{(r)})$ et le lemme 3.3, la dernière propriété implique que

$$\frac{1}{\ln T}\int_1^T \frac{dr}{r}\delta_{\{\tilde{\gamma}^{(r)}\in\cdot\}} \underset{T\to\infty}{\Longrightarrow} \mathrm{W} \quad \text{p.s.}, T\to\infty.$$

D'où l'on déduit grâce à la partie (ii) du lemme 3.4,

$$\mathrm{W}_n^{\#}(\cdot) = \frac{1}{\ln \mathrm{V}_n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{V}_{k+1}^2 - \mathrm{V}_k^2}{\mathrm{V}_{k+1}^2}\delta_{\{\gamma^{(\mathrm{V}_k^2)}\in\cdot\}} \Longrightarrow \mathrm{W} \quad \text{p.s.}, T\to\infty.$$

On conclut en remarquant que $\mathrm{W}_n^{\#}(\cdot) = \mathrm{W}_n^{*}(\cdot)$, car $\gamma^{(\mathrm{V}_k^2)}(t) = \Psi_n^*(t), \forall\, t\in[0,1]$. □

6.2. *Preuve du théorème D.* La preuve repose sur le théorème B et le lemme 3.7 qui sera démontré au sous paragraphe 6.5.

On rappelle que si $b\in[0,1]$,

$$\mathscr{G}_{\sigma,b} = \big\{f\in \mathbf{L}_0^2(G_\sigma); \forall\,(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}, |f(x)-f(y)| \\ \leq \text{const.}\,|x-y|(1+|x|^b+|y|^b)\big\}$$

et que $\mathbb{G}$ désigne la classe des fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sous-quadratique et presque partout continue (par rapport à la mesure de Lebesgue).

Quitte à remplacer (ξ_k,τ_k) par $(\sigma_\xi^{-1}\xi_k, \mathrm{m}_\tau^{-1}\tau_k)$ on peut supposer que $\mathrm{m}_\tau = \sigma_\xi = 1$.

ETAPE 1. On suppose que $\tau_n \equiv 1, \forall\, n\in\mathbb{N}^*$. D'après le théorème 2 de Einmahl (cf. [18]), on peut construire un espace de probabilité sur lequel la suite (ξ_k) est définie conjointement avec un mouvement brownien standard $\mathrm{B} = (\mathrm{B}_t)_{t\geq 0}$, tel que $\mathrm{S}_{[t]} - \mathrm{B}_t = o((\frac{t}{\ln t})^{1/2})$ p.s.

En appliquant le lemme 3.7 à $\alpha_t = \mathrm{B}_t$, $\beta_n = \mathrm{S}_n$ et $\mathrm{T}_n = n$, il vient

$$\sup_{n\leq R<n+1}\left|(\ln R)^{-1/2}\int_1^R f\left(\frac{\mathrm{B}_t}{\sqrt{t}}\right)\frac{dt}{t} - (\ln n)^{-1/2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}f\left(\frac{\mathrm{S}_k}{\sqrt{k}}\right)\right| \to 0 \tag{6.4}$$

p.s., $n\to\infty$.

Les propriétés TLCL et LLIL valables pour B (cf. théorème B), sont donc vraies pour la marche aléatoire S.

ETAPE 2. Si la suite (τ_k) admet un moment d'ordre δ, alors le théorème de Chow permet d'affirmer que presque-sûrement

$$\mathrm{T}_n - n = o(n^{1/\delta}(\ln n)^\gamma) \quad \text{pour tout } \gamma > \frac{1}{\delta}. \tag{6.5}$$

Comme $\sup_{\mathrm{T}_n\leq k<\mathrm{T}_{n+1}} |\mathrm{S}_k^* - \mathrm{S}_n| = 0$, le lemme 3.7 assure que

$$\sup_{\mathrm{T}_n\leq R<\mathrm{T}_{n+1}}\left|(\ln R)^{-1/2}\sum_{k=1}^{R}\frac{1}{k}f\left(\frac{\mathrm{S}_k^*}{\sqrt{k}}\right) - (\ln n)^{-1/2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}f\left(\frac{\mathrm{S}_k}{\sqrt{k}}\right)\right| \to 0 \tag{6.6}$$

p.s., $n\to\infty$.

En conséquence:

$$\left|(\ln R)^{-1/2}\sum_{k=1}^{R}\frac{1}{k}f\left(\frac{S_k^*}{\sqrt{k}}\right)-(\ln N_R)^{-1/2}\sum_{k=1}^{N_R}\frac{1}{k}f\left(\frac{S_k}{\sqrt{k}}\right)\right|\to 0 \quad \text{p.s., } R\to\infty. \tag{6.7}$$

Compte tenu de cette propriété, de l'étape 1 de la preuve et du fait que $\frac{N_R}{R}\to 1$ p.s., $R\to\infty$, le théorème D est établi. □

6.3. *Preuve du théorème E.* On la donne d'abord dans le cas discret, car celle du cas continu est tout à fait semblable. On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{V_{k+1}^2-V_k^2}{V_{k+1}^2}\left(\frac{M_k}{V_k}\right)^2 &= \sum_{k=1}^{n}(V_k^{-2}-V_{k+1}^{-2})M_k^2\\ &= \sum_{k=1}^{n}V_k^{-2}(M_k^2-M_{k-1}^2)-V_{n+1}^{-2}M_n^2\\ &= \sum_{k=1}^{n}V_k^{-2}(\Delta M_k)^2+2\sum_{k=1}^{n}V_k^{-2}M_{k-1}\Delta M_k-V_{n+1}^{-2}M_n^2\\ &= G_n+2Z_n+R_n\end{aligned}$$

où:

1. $Z_n=\sum_{k=1}^{n}V_k^{-2}M_{k-1}\Delta M_k$ est une martingale dont la variation quadratique prévisible vaut $\langle Z\rangle_n=\sum_{r=1}^{n}V_k^{-4}M_{k-1}^2(\langle M\rangle_k-\langle M\rangle_{k-1})$;
2. $G_n=\sum_{k=1}^{n}(V_k^{-2}-V_{k+1}^{-2})[M]_k=\sum_{k=1}^{n}V_k^{-2}(\Delta M_k)^2-V_{n+1}^{-2}[M]_n$;
3. $R_n=-V_{n+1}^{-2}(M_n^2-[M]_n)$.

Prenant $V_k^2=\langle M\rangle_k$, on a également

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(\langle M\rangle_k^{-1}-\langle M\rangle_{k+1}^{-1}\right)M_k^2 &= G'_n+2Z'_n+R'_n\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\langle M\rangle_k^{-1}-\langle M\rangle_{k+1}^{-1}\right)[M]_k\\ &\quad +2\sum_{k=1}^{n}\langle M\rangle_k^{-1}M_{k-1}\Delta M_k-\langle M\rangle_{n+1}^{-1}\left(M_n^2-[M]_n\right).\end{aligned}$$

Vu que

$$\begin{aligned}\langle Z'\rangle_n &= \sum_{r=1}^{n}\langle M\rangle_k^{-2}M_{k-1}^2(\langle M\rangle_k-\langle M\rangle_{k-1})\\ &= \sum_{r=1}^{n}\langle M\rangle_k^{-1}\langle M\rangle_{k-1}M_{k-1}^2\left(\langle M\rangle_{k-1}^{-1}-\langle M\rangle_k^{-1}\right)\end{aligned}$$

et

$$\langle Z\rangle_n = \sum_{r=1}^{n} \big(V_k^{-2}\langle M\rangle_k\big)\big(V_{k-1}^{-2}\langle M\rangle_{k-1}\big)\big(V_k^{-2}V_{k-1}^2\big)M_{k-1}^2\big(\langle M\rangle_{k-1}^{-1} - \langle M\rangle_k^{-1}\big),$$

il est clair que $\langle Z\rangle_n \sim \langle Z'\rangle_n \sim \sum_{k=1}^n M_{k-1}^2(\langle M\rangle_{k-1}^{-1} - \langle M\rangle_k^{-1})$ $\mathbb{P}_x$-p.s. pour $n \to \infty$, car $\lim_{n\to\infty}\langle M\rangle_n = \infty$ $\mathbb{P}_x$-p.s. et donc $\lim_{n\to\infty}\langle M\rangle_n^{-1}M_n = 0$ $\mathbb{P}_x$-p.s.

Par ailleurs, on a $\lim_{n\to\infty}(\ln V_n^2)^{-1}G_n = \lim_{n\to\infty}(\ln V_n^2)^{-1}G'_n = 1$ $\mathbb{P}_x$-p.s. grâce à l'hypothèse (H″) et au théorème ergodique quotient. On a également

$$\lim_{n\to\infty}\big(\ln V_n^2\big)^{-1}R_n = \lim_{n\to\infty}\big(\ln V_n^2\big)^{-1}R'_n = 0, \quad \mathbb{P}_x\text{-p.s.},$$

en vertu de la loi du logarithme itéré qui est valable pour la martingale M (cf. [36]). En conséquence, on peut affirmer que $\lim_{n\to\infty}\langle Z'\rangle_n = \infty$ $\mathbb{P}_x$-p.s. et que la propriété suivante a lieu:

$$(G'_n)^{-1}\left\{\big(\langle M\rangle_{n+1}^{-1}M_n^2\big) + \sum_{k=1}^{n} M_{k-1}^2\big(\langle M\rangle_{k-1}^{-1} - \langle M\rangle_k^{-1}\big)\right\} \to 1, \qquad \mathbb{P}_x\text{-p.s.}, n \to \infty.$$

D'où les propriétés:

$$\lim_{n\to\infty}\big(\ln V_n^2\big)^{-1}\langle Z'\rangle_n = \lim_{n\to\infty}\big(\ln V_n^2\big)^{-1}\langle Z\rangle_n = 1, \qquad \mathbb{P}_x\text{-p.s.}$$

et

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(\ln\langle M\rangle_n)^{-1}&\sum_{k=1}^{n} M_{k-1}^2\big(\langle M\rangle_{k-1}^{-1} - \langle M\rangle_k^{-1}\big)\\ &= \lim_{n\to\infty}\big(\ln V_n^2\big)^{-1}\sum_{k=1}^{n}\big(V_k^{-2} - V_{k+1}^{-2}\big)M_k^2 = 1, \quad \mathbb{P}_x\text{-p.s.}\end{aligned}$$

La loi forte quadratique est établie pour la martingale M dans le cas discret. On l'obtient exactement de la même manière dans le cas continu en exploitant d'une part les deux formules d'intégration par parties suivantes (qui ont lieu parce que le processus V est supposé continu):

$$\begin{aligned}d\left(\frac{M_s^2}{V_s^2}\right) &= \frac{d(M_s^2)}{V_s^2} - \frac{M_{s-}^2}{V_s^2}\frac{d(V_s^2)}{V_s^2} = 2\frac{M_{s-}d(M_s)}{V_s^2} + \frac{d([M]_s)}{V_s^2} - \frac{M_{s-}^2}{V_s^2}\frac{d(V_s^2)}{V_s^2},\\ \frac{d([M]_s)}{V_s^2} &= d\left(\frac{[M]_s}{V_s^2}\right) - \frac{[M]_{s-}}{V_s^2}\frac{d(V_s^2)}{V_s^2} = d\left(\frac{[M]_s}{V_s^2}\right) - \frac{[M]_s}{V_s^2}\frac{d(V_s^2)}{V_s^2} + \frac{(\Delta M_s)^2}{V_s^2}\frac{d(V_s^2)}{V_s^2};\end{aligned}$$

et d'autre part la condition

$$\forall x \in E, \qquad V_t^{-2}(\Delta M)_t^2 \to 0, \qquad \mathbb{P}_x\text{-p.s.}, t \to \infty. \qquad \square$$

6.4. *Preuve du théorème F.* On suit la méthodologie des sous paragraphes 4.1, 4.2 et 4.3.

Preuve de la première assertion du théorème F.

Etape 1. *Cadre* 1. Pour toute fonction f positive de $\mathbf{L}^1(\mu)$ et pour tout δ dans Δ, on a

$$\text{(6.8)}\qquad \mathrm{R}_\lambda f(\delta) = \mathbb{E}_\Delta\left(\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda k} f(\mathrm{X}_k)\right) = \left(1 - \mathbb{E}_\Delta(e^{-\lambda \mathrm{T}})\right)^{-1} \mathbb{E}_\Delta\left(\sum_{k=0}^{\mathrm{T}-1} e^{-\lambda k} f(\mathrm{X}_k)\right).$$

Comme

$$\mu(f) = \int f\, d\mu = (\mathbb{E}_\Delta(\mathrm{T}))^{-1} \mathbb{E}_\Delta\left(\sum_{k=1}^{\mathrm{T}} f(\mathrm{X}_k)\right),$$

alors un calcul immédiat montre que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda}\{\lambda \mathrm{R}_\lambda f(\delta) - \mu(f)\} &\underset{\lambda\to 0}{\simeq} \mu(f)\big(\lambda \mathbb{E}_\Delta(1 - e^{-\lambda \mathrm{T}})\big)^{-1} \mathbb{E}_\Delta(e^{-\lambda \mathrm{T}} - 1 + \lambda \mathrm{T}) \\ &\underset{\lambda\to 0}{\simeq} \frac{1}{2}(\mathbb{E}_\Delta(\mathrm{T}))^{-1}\mathbb{E}_\Delta(\mathrm{T}^2).\end{aligned}$$

Vu que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\mu(\mathrm{T}_\Delta) &= (\mathbb{E}_\Delta(\mathrm{T}_\Delta))^{-1}\mathbb{E}_\Delta\left(\sum_{k=0}^{\mathrm{T}_\Delta - 1} \mathbb{E}_{\mathrm{X}_k}(\mathrm{T}_\Delta)\right) \\ &= (\mathbb{E}_\Delta(\mathrm{T}_\Delta))^{-1}\mathbb{E}_\Delta\left(\sum_{k=0}^{\mathrm{T}_\Delta - 1} (\mathrm{T}_\Delta - k)\right) \\ &= (\mathbb{E}_\Delta(\mathrm{T}_\Delta))^{-1}\mathbb{E}_\Delta\left(\frac{1}{2}(\mathrm{T}_\Delta + 1)\mathrm{T}_\Delta\right),\end{aligned}$$

la partie (i) du lemme est établie dans le cas atomique.

Etape 2. *Cadre* 2. On suppose que X est une chaîne de Markov dont la transition possède un petit ensemble C récurrent, soit μ sa mesure invariante. Alors la chaîne fissurée $\overline{\mathrm{X}}$ associée à X possède $\Delta = C \times \{0\}$ comme atome récurrent. Soient

$$\text{(6.9)}\qquad \overline{\mathrm{T}}_C = \inf\{k \geq 1, \overline{\mathrm{X}}_k \in C \times \{0,1\}\} \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathrm{T}}_\Delta = \inf\{k \geq 1, \overline{\mathrm{X}}_k \in C \times \{0\}\}.$$

Vu que $\mathbb{E}_\mu(\mathrm{T}_C) = \overline{\mathbb{E}}_{\bar{\mu}}(\overline{\mathrm{T}}_C) \leq \overline{\mathbb{E}}_{\bar{\mu}}(\widetilde{\mathrm{T}}_\Delta)$, d'après l'étape 1 de la preuve il suffit de montrer que la chaîne $\overline{\mathrm{X}}$ vérifie la condition (R-R).

Or, pour toute fonction f positive de $\mathbf{L}^1(\mu)$ et pour tout x dans E, on a

$$
\begin{aligned}
\mathrm{R}_\lambda f(x) &= b\overline{\mathrm{R}}_\lambda \bar{f}(x,0) + (1-b)\overline{\mathrm{R}}_\lambda \bar{f}(x,1),\\
\Big(1-\overline{\mathbb{E}}_\Delta(e^{-\lambda \widetilde{\mathrm{T}}_\Delta})\Big)\overline{\mathrm{R}}_\lambda \bar{f}(x,0) &= \overline{\mathbb{E}}_\Delta\left(\sum_{k=0}^{\widetilde{\mathrm{T}}_\Delta - 1} e^{-\lambda k}\bar{f}(\overline{\mathrm{X}}_k)\right),\\
\overline{\mathrm{R}}_\lambda \bar{f}(x,1) &= \overline{\mathbb{E}}_{(x,1)}\left(\sum_{k=1}^{\widetilde{\mathrm{T}}_\Delta} e^{-\lambda k}\bar{f}(\overline{\mathrm{X}}_k)\right)\\
&\quad + \overline{\mathbb{E}}_{(x,1)}(e^{-\lambda \widetilde{\mathrm{T}}_\Delta})\overline{\mathrm{R}}_\lambda \bar{f}(x,0).
\end{aligned}
\tag{6.10}
$$

D'où l'on déduit que

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\lambda}\{\lambda \overline{\mathrm{R}}_\lambda \overline{f_0}(x,0) - \bar{\mu}(\overline{f_0})\}\\
&\quad = \frac{1}{\lambda}\{\lambda \mathrm{R}_\lambda f_0(x) - \mu(f_0)\} - (1-b)\overline{\mathbb{E}}_{(x,1)}\left(\sum_{k=1}^{\widetilde{\mathrm{T}}_\Delta} e^{-\lambda k}\overline{f_0}(\overline{\mathrm{X}}_k)\right)\\
&\quad\quad - (1-b)\frac{\overline{\mathbb{E}}_{(x,1)}(e^{-\lambda \widetilde{\mathrm{T}}_\Delta}) - 1}{\lambda}\lambda \overline{\mathrm{R}}_\lambda \overline{f_0}(x,0) \qquad \forall\, x \in C.
\end{aligned}
\tag{6.11}
$$

Comme $\lambda \overline{\mathrm{R}}_\lambda \overline{f_0}(x,0) \to \mu(f_0)$, $t \to \infty, \forall\, x \in C$, la condition (R-R) sera vérifiée par la chaîne $\overline{\mathrm{X}}$ si la propriété suivante a lieu

$$
\overline{\mathbb{E}}_{(x,1)}\left(\sum_{k=1}^{\widetilde{\mathrm{T}}_\Delta} \overline{f_0}(\overline{\mathrm{X}}_k)\right) + \overline{\mathbb{E}}_{(x,1)}(\widetilde{\mathrm{T}}_\Delta) < \infty \quad \text{pour } \mu \text{ presque tout } x \in C.
\tag{6.12}
$$

Pour montrer cette propriété, on remarque, comme dans [35] que pour toute fonction g positive de $\mathbf{L}^1(\bar{\mu})$, l'ensemble

$$
\Gamma_g = \left\{\bar{x} \in \mathrm{E} \times \{0,1\}, \overline{\mathbb{E}}_{\bar{x}}\left(\sum_{k=1}^{\widetilde{\mathrm{T}}_\Delta} g(\overline{\mathrm{X}}_k)\right) < \infty\right\}
\tag{6.13}
$$

est tel que $\bar{\mu}(\Gamma_g^c) = 0$. En effet, si $\widetilde{\mathrm{T}}_{\Gamma_g^c} = \inf\{k \geq 1, \overline{\mathrm{X}}_k \in \Gamma_g^c\}$ alors

$$
\varphi(\bar{x}) = \overline{\mathbb{E}}_{\bar{x}}\left(\sum_{k=1}^{\widetilde{\mathrm{T}}_\Delta} g(\overline{\mathrm{X}}_k)\right) \qquad \forall\, \bar{x} \in \mathrm{E} \times \{0,1\},
\tag{6.14}
$$

vérifie

$$\begin{aligned}\bar{\mu}(g)\overline{\mathbb{E}}_\Delta(\widetilde{\mathrm{T}}_\Delta) &= \overline{\mathbb{E}}_\Delta\left(\sum_{k=1}^{\widetilde{\mathrm{T}}_\Delta} g(\overline{\mathrm{X}}_k)\right) \geq \overline{\mathbb{E}}_\Delta\left(\mathbf{1}_{\{\widetilde{\mathrm{T}}_{\Gamma_g^c}<\widetilde{\mathrm{T}}_\Delta\}} \sum_{k=1}^{\widetilde{\mathrm{T}}_\Delta} g(\overline{\mathrm{X}}_k)\right)\\ &\geq \overline{\mathbb{E}}_\Delta\left(\mathbf{1}_{\{\widetilde{\mathrm{T}}_{\Gamma_g^c}<\widetilde{\mathrm{T}}_\Delta\}}\overline{\mathbb{E}}_{\overline{\mathrm{X}}_{\widetilde{\mathrm{T}}_{\Gamma_g^c}}}\left(\sum_{k=1}^{\widetilde{\mathrm{T}}_\Delta} g(\overline{\mathrm{X}}_k)\right)\right)\\ &= \overline{\mathbb{E}}_\Delta\left(\mathbf{1}_{\{\widetilde{\mathrm{T}}_{\Gamma_g^c}<\widetilde{\mathrm{T}}_\Delta\}}\varphi\left(\overline{\mathrm{X}}_{\widetilde{\mathrm{T}}_{\Gamma^c}}\right)\right).\end{aligned}$$

Comme $\bar{\mu}(g) < \infty$ et $\varphi(\overline{\mathrm{X}}_{\widetilde{\mathrm{T}}_{\Gamma_g^c}}) = \infty$, on a nécessairement $\overline{\mathbb{P}}_\Delta(\widetilde{\mathrm{T}}_{\Gamma_g^c} < \widetilde{\mathrm{T}}_\Delta) = 0$; d'où

$$\bar{\mu}(\Gamma_g^c) = \overline{\mathbb{E}}_\Delta(\widetilde{\mathrm{T}}_\Delta)^{-1}\overline{\mathbb{E}}_\Delta\left(\sum_{k=1}^{\widetilde{\mathrm{T}}_\Delta} \mathbf{1}_{\Gamma_g^c}(\overline{\mathrm{X}}_k)\right) = 0.$$

On en déduit que l'ensemble

$$A_g = \left\{x \in C \Big/ \overline{\mathbb{E}}_{(x,1)}\left(\sum_{k=1}^{\widetilde{\mathrm{T}}_\Delta} g(\overline{\mathrm{X}}_k)\right) < \infty\right\}$$

vérifie $\mu(A_g) = \mu(C)$, car

$$\mu(A_g) = (1-b)^{-1}\bar{\mu}(A_g \times \{1\})$$

et

$$\bar{\mu}(A_g \times \{1\}) = \bar{\mu}(C \times \{1\} \cap \Gamma_g) = \bar{\mu}(C \times \{1\}) = (1-b)\mu(C).$$

La propriété (6.12) a donc lieu pour tout $x \in A_{1+\overline{f_0}}$. En conséquence, la partie (i) du lemme est étabie dans le cadre envisagé.

Etape 3. *Cadre* 3. On suppose que X est une chaîne ou un processus de Markov dont la résolvante possède un petit ensemble C récurrent et qui vérifie la condition (R-R) du sous paragraphe 2.1.1, soit μ sa mesure invariante. Alors C est un petit ensemble récurrent de la transition $\widehat{\Pi}$ de la chaîne $\widehat{\mathrm{X}} = (\mathrm{X}_{\mathrm{T}'_n})$ qui vérifie également la condition (R-R). Compte tenu de l'étape 2 de la preuve, on a $\widehat{\mathbb{E}}_\mu(U) < \infty$ avec

$$U = \inf\{k \geq 1, \widehat{\mathrm{X}}_k \in C\} = \inf\{k \geq 1, \mathrm{X}_{\mathrm{T}'_k} \in C\}. \tag{6.15}$$

Vu que $\mathrm{T}'_U \geq \mathrm{T}_C$, on a $\mathbb{E}_\mu(\mathrm{T}_C) \leq \widehat{\mathbb{E}}_\mu(\mathrm{T}'_U) = \mathbb{E}'(\mathrm{T}'_1)\widehat{\mathbb{E}}_\mu(U)$ grâce au théorème de Wald.

La partie (i) du lemme est donc établie dans le cadre envisagé. □

Preuve de la partie (ii) du théorème F.

Etape 1. *Cadre* 1. Dans ce cadre atomique, la partie (ii) du lemme est conséquence du théorème de Chow. En effet, la suite (T_n) des instants de retour de la chaîne X dans l'atome Δ vérifie

$$\mathbb{E}_\Delta(\mathrm{T})^{-1}\mathrm{T}_n = n + o\left(\frac{n}{\sqrt{\ln n}}\right), \qquad \mathbb{P}_x\text{-p.s. pour tout } x \in \mathrm{E}. \tag{6.16}$$

En appliquant le théorème de Chow puis le lemme de Kronecker à la martingale $\mathrm{Z} = (\mathrm{Z}_n)$,

$$\mathrm{Z}_n = \sum_{k=2}^{n} g_{\gamma,\eta}(k)^{-1}\{\rho_k - \mathbb{E}_\Delta(\mathrm{A_T})\}, \qquad \rho_k = \mathrm{A}_{\mathrm{T}_k} - \mathrm{A}_{\mathrm{T}_{k-1}},\; g_{\gamma,\eta}(t) = t^{(\gamma+1)/2\gamma}(\ln t)^\eta$$

et $\eta > (\gamma+1)/2\gamma$, on obtient la propriété suivante:

$$\mathrm{A}_{\mathrm{T}_n} - n\mathbb{E}_\Delta(\mathrm{A_T}) = o(g_{\gamma,\eta}(n)) \quad \text{et} \quad \mathrm{A}_{\mathrm{T}_{n+1}} - \mathrm{A}_{\mathrm{T}_n} = o(g_{\gamma,\eta}(n)), \quad \mathbb{P}_x\text{-p.s.}$$

Vu que $n \in [\mathrm{T}_{\mathrm{N}_n}, \mathrm{T}_{\mathrm{N}_n+1}[$, il vient

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_n - n\mathbb{E}_\mu(\mathrm{A}_1) &= (\mathrm{A}_n - \mathrm{N}_n\mathbb{E}_\Delta(\mathrm{A_T})) + \big(\mathrm{N}_n - n\mathbb{E}_\Delta(\mathrm{T})^{-1}\big)\mathbb{E}_\Delta(\mathrm{A_T}) \\ &= o(g_{\gamma,\eta}(n)), \end{aligned} \tag{6.17}$$

car, d'après la loi du logarithme itéré (cf. [16]),

$$\mathrm{N}_n - n(\mathbb{E}_\Delta(\mathrm{T}))^{-1} = O(\sqrt{n \ln\ln n}) = o(g_{\gamma,\eta}(n)) \quad \text{p.s.}$$

La partie (ii) du lemme est donc établie dans le cas atomique.

Etape 2. *Cadre* 2. En remarquant que toute FA A de X vérifiant l'hypothèse, $\mathbb{E}_\mu(\mathrm{A}_1^\gamma) < \infty$, pour un $\gamma \in [1,2]$, peut être considérée comme une FA de $\overline{\mathrm{X}}$ vérifiant la même hypothèse, on conclut que la partie (ii) du lemme est également vraie dans le cadre 2.

Etape 3. *Cadre* 3. Si A est une FA de X vérifiant l'hypothèse $\mathbb{E}_\mu(\mathrm{A}_1^\gamma) < \infty$ pour un $\gamma \in [1,2]$, alors $\widehat{\mathrm{A}}$ est également une FA de $\widehat{\mathrm{X}}$ satisfaisant la même hypothèse car

$$\widehat{\mathbb{E}}_\mu(\widehat{\mathrm{A}}_1^\gamma) \le \text{const.}\, \mathbb{E}_\mu(\mathrm{A}_1^\gamma) < \infty.$$

Et d'après l'étape 2, $\widehat{\mathrm{A}}$ vérifie la propriété $\widehat{\mathrm{A}}_t - t\mathbb{E}_\mu(\widehat{\mathrm{A}}_1) = o(g_{\gamma,\eta}(t))$ p.s.

Vu les propriétés

$$\mathrm{A}_t - t\mathbb{E}_\mu(\mathrm{A}_1) = \left(\mathrm{A}_t - \widehat{\mathrm{A}}_{\mathrm{N}'_t}\right) + \left(\widehat{\mathrm{A}}_{\mathrm{N}'_t} - \mathrm{N}'_t\widehat{\mathbb{E}}_\mu(\widehat{\mathrm{A}}_1)\right) + \big(t - \mathbb{E}'(\mathrm{T}'_1)\mathrm{N}'_t\big)\mathbb{E}_\mu(\mathrm{A}_1),$$

$$\Delta_n = \sup_{\mathrm{T}'_n \le t < \mathrm{T}'_{n+1}} |\mathrm{A}_t - \widehat{\mathrm{A}}_n| = \Delta_0 \circ \widehat{\theta}_n = o\big(n^{\frac{1}{\gamma}}\big), \quad \widehat{\mathbb{P}}_x\text{-p.s.},$$

$$\mathrm{N}'_t - t(\mathbb{E}'(\mathrm{T}'_1))^{-1} = O(\sqrt{t\ln\ln t}) = o(g_{\gamma,\eta}(t)) \quad \text{p.s.},$$

où $\mathrm{N}'_t = \inf\{k \ge 0, \mathrm{T}'_{k+1} > t\}$; on peut affirmer que

$$\mathrm{A}_t - t\mathbb{E}_\mu(\mathrm{A}_1) = o(g_{\gamma,\eta}(t)), \quad \mathbb{P}_x\text{-p.s.}$$

Le théorème F est donc établi. □

6.5. *Preuves des lemmes*

PREUVE DU LEMME 3.1. Pour établir ce lemme, montrons d'abord les deux propriétés:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sup_{k\le n} \sup_{k\le s\le k+1} |\mathrm{M}_s - \mathrm{M}_k| \to 0, \qquad \mathbb{P}_x\text{-p.s.}, n \to \infty, \tag{6.18}$$

$$r^{-3/2} \sup_{s\le r} |\mathrm{M}_s| \le \sup_{s\le r} \big| s^{-3/2}\mathrm{M}_s \big| \to 0, \qquad \mathbb{P}_x\text{-p.s.}, r \to \infty. \tag{6.19}$$

La propriété (6.19) résulte de la loi du logarithme itéré établie dans [36]. On obtient la propriété (6.18) en posant

$$\mathrm{Z}_p = \sup_{p\le s\le p+1} |\mathrm{M}_s - \mathrm{M}_p| = \sup_{0\le s\le 1} |\mathrm{M}_{s+p} - \mathrm{M}_p| = \mathrm{Z}_0 \circ \theta_p,$$

$$\mathrm{A}_n = \sum_{p=0}^{n-1} \mathrm{Z}_p^2, \qquad n \ge 1,$$

et en remarquant que $\mathbb{E}_\mu(\mathrm{A}_1) \le 4\mathbb{E}_\mu(\mathrm{M}_1^2) < \infty$. Donc, grâce au théorème ergodique, on a $\frac{\mathrm{A}_n}{n} \to \mathbb{E}_\mu(\mathrm{A}_1)$, $\mathbb{P}_x$-p.s., $n \to \infty$, et par suite $\frac{1}{n}\sup_{k\le n} \mathrm{Z}_k^2 \to 0$ $\mathbb{P}_x$-p.s., $n \to \infty$.

La partie (i) du lemme résulte alors de l'inégalité

$$\big\| \widetilde{\Psi}_n - \overline{\overline{\Psi}}_n \big\| = \sup_{0\le t\le 1} \big| \widetilde{\Psi}_n(t) - \overline{\overline{\Psi}}_n(t) \big| \le \frac{1}{\sqrt{n}} \sup_{0\le k\le n} |\Delta \mathrm{M}_{k+1}| \to 0, \qquad \mathbb{P}_x\text{-p.s.}, n \to \infty.$$

Tandis que la partie (ii) s'obtient en exploitant les inégalités suivantes et les propriétés (6.18) et (6.19),

$$\begin{aligned}
\big\| \Psi'_r - \overline{\overline{\Psi}}_{[r]} \big\| &= \sup_{0\le t\le 1} \big| \Psi'_r(t) - \overline{\overline{\Psi}}_{[r]}(t) \big| \\
&\le \frac{2}{\sqrt{[r]}} \sup_{0\le s\le [r]+1} |\mathrm{M}_s - \mathrm{M}_{[s]}| + \frac{1}{\sqrt{[r]}} \sup_{0\le s\le [r]} |\Delta \mathrm{M}_{[s]+1}| \\
&\quad + \left(\frac{1}{\sqrt{[r]}} - \frac{1}{\sqrt{r}} \right) \sup_{0\le s\le [r]} |\mathrm{M}_s| \\
&\le \frac{3}{\sqrt{[r]}} \sup_{0\le k\le [r]} Z_k + \frac{1}{[r]^{3/2}} \sup_{0\le s\le [r]} |\mathrm{M}_s| \to 0 \quad \mathbb{P}_x\text{-p.s.}, r \to \infty.
\end{aligned}$$

Le lemme 3.1 est établi. □

PREUVE DU LEMME 3.2. Ce lemme est établi dans [36]. Pour la commodité du lecteur on réécrit sa preuve. Soit f une fonction positive, bornée, μ-intégrable, $\mu(f) > 0$. Posant $\mathrm{A}_n^f = \sum_0^n f(\mathrm{X}_k)$ on a

$$0 \le \big(\mathrm{A}_n^f\big)^{-1} \mathrm{A}_{n+1}^f - 1 = \big(\mathrm{A}_n^f\big)^{-1} \big(\mathrm{A}_{n+1}^f - \mathrm{A}_n^f\big) \le \big(\mathrm{A}_n^f\big)^{-1} \|f\|_\infty \to 0, \quad \mathbb{P}_x\text{-p.s.}, n \to \infty.$$

Le théorème ergodique quotient implique alors que $\mathbb{P}_x$-p.s. $(\mathrm{A}_n^f)^{-1}\langle \mathrm{M}\rangle_n \to \mu(f)^{-1}\sigma_{\mathrm{M}}^2$, $n\to\infty$, et par suite: $\langle \mathrm{M}\rangle_{n+1}^{-1}\langle \mathrm{M}\rangle_n \to 1$, $n\to\infty$.

De même, on montre que $\langle \widehat{\mathrm{M}}\rangle_{n+1}^{-1}\langle \widehat{\mathrm{M}}\rangle_n \to 1$ $\widehat{\mathbb{P}}_x$-p.s., $n\to\infty$.

On sait que dans le cas de la récurrence positive, presque-sûrement,

$$\frac{\langle \mathrm{M}\rangle_n}{n} \to \sigma_{\mathrm{M}}^2, \qquad n\to\infty, \qquad \frac{\langle \widehat{\mathrm{M}}\rangle_n}{n} = \frac{\langle \widehat{\mathrm{M}}\rangle_{\mathrm{T}'_n}}{n} \to \sigma_{\mathrm{M}}^2, \qquad n\to\infty,$$

et alors $\langle \mathrm{M}\rangle_n^{-1}\langle \widehat{\mathrm{M}}\rangle_n \to 1$, $n\to\infty$.

Dans le cas de la récurrence nulle, cette dernière propriété est une conséquence de la variante suivante du théorème ergodique quotient:

THÉORÈME. *Pour tout couple de FA* (A,B) *de* X *tel que* $\mathbb{E}_\mu(\mathrm{A}_1)<\infty$, $\mathbb{E}_\mu(\mathrm{B}_1)<\infty$ *et pour tous réels* $\gamma>0$, $\delta>0$ *les convergences suivantes*:

$$(6.20)\qquad \begin{aligned} (\mathrm{B}_{n\delta})^{-1}A_{n\gamma} &\to \delta^{-1}\gamma(\mathbb{E}_\mu(\mathrm{B}_1))_\mu^{-1}\mathbb{E}(A_1), \qquad n\to\infty \ (\textit{cas continu}),\\ (\mathrm{B}_{[n\delta]})^{-1}A_{[n\gamma]} &\to \delta^{-1}\gamma(\mathbb{E}_\mu(\mathrm{B}_1))^{-1}\mathbb{E}_\mu(A_1), \qquad n\to\infty \ (\textit{cas discret}),\end{aligned}$$

ont lieu $\mathbb{P}_x$-p.s. *quelque soit* $x\in \mathrm{E}$.

Soit $\varepsilon\in]0,1[$. Vu que $\frac{\mathrm{T}'_n}{n}\to 1$, $\mathbb{P}'$-p.s., $n\to\infty$, les inégalités suivantes ont lieu $\widehat{\mathbb{P}}_x$-p.s. pour n assez grand:

$$\langle \mathrm{M}\rangle_n \le \langle \widehat{\mathrm{M}}\rangle_n \le \langle \widehat{\mathrm{M}}\rangle_{[(1+\varepsilon)n]} \quad \text{(cas discret)},$$

$$\langle \mathrm{M}\rangle_{n(1-\varepsilon)} \le \langle \widehat{\mathrm{M}}\rangle_n \le \langle \widehat{\mathrm{M}}\rangle_{(1+\varepsilon)n} \quad \text{(cas continu)}.$$

D'où $1-\varepsilon \le \liminf \langle \mathrm{M}\rangle_n^{-1}\langle \widehat{\mathrm{M}}\rangle_n \le \limsup \langle \mathrm{M}\rangle_n^{-1}\langle \widehat{\mathrm{M}}\rangle_n \le 1+\varepsilon$ $\widehat{\mathbb{P}}_x$-p.s. $\forall\,\varepsilon\in]0,1[$.

La partie (i) du lemme est établie. La partie (ii) en résulte grâce à l'hypothèse (H′).

Pour montrer la partie (iii), on remarque que pour tout u tel que

$$\mathrm{V}_k^2 \le u < \mathrm{V}_{k+1}^2, \qquad 0\le k\le n-1, \ \text{ou } u=\mathrm{V}_n^2,$$

on a

$$\sup_{0\le u\le \mathrm{V}_n^2}\left|\Delta_n(u)-\widehat{\Delta}_n(u)\right| \le \sup_{k\le n}\left|\mathrm{M}_k-\widehat{\mathrm{M}}_k\right|.$$

Soit

$$\mathrm{Y}_p = \sup_{\mathrm{T}'_p\le k\le \mathrm{T}'_{p+1}}\left|\mathrm{M}_k-\mathrm{M}_{\mathrm{T}'_p}\right| = \sup_{0\le k\le \mathrm{T}'_{p+1}-\mathrm{T}'_p}\left|\mathrm{M}_{k+\mathrm{T}'_p}-\mathrm{M}_{\mathrm{T}'_p}\right| = \mathrm{Y}_0\circ\hat\theta_p,$$

d'après l'inégalité de Doob appliquée d'abord sous $\widehat{\mathbb{P}}_x$, on a $\mathbb{E}_\mu(\mathrm{Y}_0^2) \le 4\mathbb{E}_\mu(\mathrm{M}_{\mathrm{T}'_1}^2) = 4\sigma_{\mathrm{M}}^2$.

Le théorème ergodique quotient étant valable pour la chaîne $\widehat{\mathrm{X}}$, donc $\widehat{\mathbb{P}}_x$-p.s. pour tout $x\in\mathrm{E}$: $\langle \widehat{\mathrm{M}}\rangle_n^{-1}\sum_{p=0}^n \mathrm{Y}_p^2 \to \sigma_{\mathrm{M}}^{-2}\mathbb{E}_\mu(\mathrm{Y}_0^2)$, $n\to\infty$.

Vu que

$$\Big(\sum_{p=0}^{n} \mathrm{Y}_p^2\Big)^{-1} \sum_{p=0}^{n+1} \mathrm{Y}_p^2 \to 1, \quad \widehat{\mathbb{P}}_x\text{-p.s.}, n \to \infty,$$

on en déduit

$$\frac{\mathrm{Y}_n}{\sqrt{\langle \widehat{\mathrm{M}} \rangle_n}} \to 0, \qquad n \to \infty \qquad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{\langle \widehat{\mathrm{M}} \rangle_n}} \sup_{p \le n} \mathrm{Y}_p \to 0, \quad \widehat{\mathbb{P}}_x\text{-p.s.}, n \to \infty.$$

Compte tenu de ce qui précède et des propriétés

$$\frac{\langle \widehat{\mathrm{M}} \rangle_n}{\mathrm{V}_n^2} \to 1, n \to \infty \qquad \text{et} \qquad \frac{\langle \mathrm{M} \rangle_n}{\mathrm{V}_n^2} \underset{n \to \infty}{\to} 1, \qquad n \to \infty,$$

il vient

$$\frac{1}{\mathrm{V}_n} \sup_{0 \le u \le \mathrm{V}_n^2} \big|\Delta_n(u) - \widehat{\Delta}_n(u)\big| \le \frac{1}{\mathrm{V}_n} \sup_{k \le n} \mathrm{Y}_k \to 0, \quad \widehat{\mathbb{P}}_x\text{-p.s.}, n \to \infty.$$

Le lemme 3.2 est établi. □

Preuve du lemme 3.3. Soit d_s la distance de Skorokhod sur $\mathscr{D}$. Grâce à l'uniforme continuité de f, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout X, Y dans $\mathscr{D}$ satisfaisant $d_s(X, Y) < \delta$ on a $|f(X) - f(Y)| < \varepsilon$. Comme $\|\mathrm{X}_n - \mathrm{Y}_n\|_{\mathscr{C}} \to 0$, $n \to \infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \ge n_0$, $d_s(\mathrm{X}_n, \mathrm{Y}_n) < \delta$ et alors $|f(\mathrm{X}_n) - f(\mathrm{Y}_n)| < \varepsilon$. Par suite:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \sup \left| \frac{1}{\ln \mathrm{V}_n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{V}_{k+1}^2 - \mathrm{V}_k^2}{\mathrm{V}_{k+1}^2} (f(\mathrm{X}_k) - f(\mathrm{Y}_k)) \right| \\
&\qquad \le \lim_{n\to\infty} \sup \frac{1}{\ln \mathrm{V}_n^2} \left\{ \sum_{k=1}^{n_0 - 1} \frac{\mathrm{V}_{k+1}^2 - \mathrm{V}_k^2}{\mathrm{V}_{k+1}^2} 2\|f\|_\infty + \sum_{k=n_0}^{n} \frac{\mathrm{V}_{k+1}^2 - \mathrm{V}_k^2}{\mathrm{V}_{k+1}^2} \varepsilon \right\} \\
&\qquad \le \varepsilon \quad \forall\, \varepsilon > 0;
\end{aligned}$$

autrement dit,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln \mathrm{V}_n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{V}_{k+1}^2 - \mathrm{V}_k^2}{\mathrm{V}_{k+1}^2} (f(\mathrm{X}_k) - f(\mathrm{Y}_k)) = 0. \qquad \square$$

Preuve du lemme 3.4. (i) Grâce aux propriétés $\mathrm{W}'_T \Longrightarrow W$, $T \to \infty$, $\frac{\mathrm{V}_n}{\mathrm{V}_{n+1}} \to 1$, $n \to \infty$, $\sup_{t \in [0,1]} |\beta^{(\mathrm{V}^2_{\Gamma(r)})} - \beta^{(r)}| \to 0$, p.s., $r \to \infty$, on peut affirmer, grâce au lemme 3.3, que $\widetilde{\mathrm{W}}'_T \Longrightarrow W$ p.s., $T \to \infty$.

En particulier

$$\frac{1}{\ln \mathrm{V}_n^2} \int_{\mathrm{V}_1^2}^{\mathrm{V}_n^2} \frac{dr}{r} \nu\big(\mathrm{V}^2_{\Gamma(r)}, \cdot\big) \Longrightarrow W \quad \text{p.s.}, T \to \infty,$$

avec $\nu(r, \cdot) = \delta_{\beta^{(r)}}$.

(ii) Vu que

$$(\ln \mathrm{V}_n^2)\mathrm{W}_n^{\#}(\cdot) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{V}_{k+1}^2 - \mathrm{V}_k^2}{\mathrm{V}_{k+1}^2} \nu(\mathrm{V}_k^2, \cdot) \sim \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathrm{V}_k^2}^{\mathrm{V}_{k+1}^2} \frac{dr}{r} \nu(\mathrm{V}_{\Gamma(r)}^2, \cdot)$$
$$\sim \int_{\mathrm{V}_1^2}^{\mathrm{V}_{n+1}^2} \frac{dr}{r} \nu(\mathrm{V}_{\Gamma(r)}^2, \cdot) \sim (\ln \mathrm{V}_n^2)\widetilde{\mathrm{W}}'_{\mathrm{V}_{n+1}^2} \quad \text{p.s.},$$

on a la propriété

$$\frac{1}{\ln \mathrm{V}_n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{V}_{k+1}^2 - \mathrm{V}_k^2}{\mathrm{V}_{k+1}^2} \nu(\mathrm{V}_k^2, \cdot) \Longrightarrow W(\cdot) \quad \text{p.s.}, n \to \infty. \tag{6.21}$$

Le lemme 3.4 est donc établi. □

Preuve du lemme 3.5. Notons $\widehat{\nu}$ la mesure image de la mesure ν par la fonction $\mathscr{L}$, $\hat{\nu}(r,)$ le noyau image du noyau $\nu(r,)$ par la fonction $\mathscr{L}_r$ et enfin $(\hat{\nu}_T)$ les moyennes logarithmiques de ces noyaux images.

Soient $\mathscr{D} = \mathscr{D}([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues à droite et limitées à gauche de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la distance de Skorokhod d_s, $\mathscr{C}_L = \mathscr{C}([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[0, L]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|X\|_{\mathscr{C}_L} = \sup_{t\in[0, L]} |X(t)|$ et $\mathscr{C} = \mathscr{C}_1$.

Pour toute fonction Φ: $\mathscr{D} \to \mathbb{R}$, uniformément continue et bornée par $\|\Phi\|_C = \|\Phi\| > 0$, posons

$$D_T(\Phi) = \int_{\mathscr{C}_L} \Phi(X)\hat{\nu}_T(dX) - \int_{\mathscr{C}_L} \Phi(X)\hat{\nu}(dX)$$
$$= \int_{\mathscr{C}_L} \Phi(X)\hat{\nu}_T(dX) - \int_{\mathscr{C}_L} \Phi \circ \mathscr{L}(X)\nu(dX)$$

et montrons que: $\lim_{T\to\infty} D_T(\Phi) = 0$. On a

$$|D_T(\Phi)| \le |\Delta_T(\Phi)| + \left| \int_{\mathscr{C}_L} \Phi \circ \mathscr{L}(X)\bar{\nu}_T(dX) - \int_{\mathscr{C}_L} \Phi \circ \mathscr{L}(X)\nu(dX) \right|$$

avec

$$\Delta_T(\Phi) = \int_{\mathscr{C}_L} \Phi(X)\hat{\nu}_T(dX) - \int_{\mathscr{C}_L} \Phi \circ \mathscr{L}(X)\bar{\nu}_T(dX)$$

et il est clair que

$$\left| \int_{\mathscr{C}_L} \Phi \circ \mathscr{L}(X)\bar{\nu}_T(dX) - \int_{\mathscr{C}_L} \Phi \circ \mathscr{L}(X)\nu(dX) \right| \to 0, \qquad T \to \infty, \tag{6.22}$$

donc pour conclure il reste à prouver que $\Delta_T(\Phi) \underset{T\to\infty}{\to} 0$, $T \to \infty$. A cet effet, montrons que l'inégalité suivante a lieu pour tout compact K de $\mathscr{C}_L$ et tout $r_0 \in]1, R]$:

$$\begin{aligned} |\Delta_T(\Phi)| \le 2\|\Phi\|\bar{\nu}_T(K^c) &+ \left(\sup_{r\ge 1} \nu(r, \mathscr{C}_L)\right) \\ &\times \left\{ \sup_{r_0\le r\le T} \sup_{X\in K} |\Phi \circ \mathscr{L}_r(X) - \Phi \circ \mathscr{L}(X)| + \frac{2\|\Phi\|}{\ln T}(\ln r_0 + 1) \right\}. \end{aligned} \tag{6.23}$$

(a) *Cas discret.* On a

$$
\begin{aligned}
|\Delta_T(\Phi)| &= \left|\left(\sum_{r=1}^{T}\frac{1}{r}\right)^{-1}\sum_{r=1}^{T}\frac{1}{r}\int_{\mathscr{C}_L}(\Phi\circ\mathscr{L}_r(X)-\Phi\circ\mathscr{L}(X))\nu(r,dX)\right| \\
&\le 2\|\Phi\|\bar{\nu}_T(K^c)+\left(\sup_{r\ge 1}\nu(r,\mathscr{C}_L)\right) \qquad (6.24)\\
&\quad\times\left\{\sup_{r_0\le r\le T}\sup_{X\in K}|\Phi\circ\mathscr{L}_r(X)-\Phi\circ\mathscr{L}(X)|+2\|\Phi\|\left(\sum_{r=1}^{T}\frac{1}{r}\right)^{-1}\sum_{r=1}^{r_0}\frac{1}{r}\right\}.
\end{aligned}
$$

(b) *Cas continu.* On a

$$
\begin{aligned}
|\Delta_T(\Phi)| &= \left|(\ln T)^{-1}\int_1^T\frac{dr}{r}\left\{\int_{\mathscr{C}_L}(\Phi\circ\mathscr{L}_r(X)-\Phi\circ\mathscr{L}(X))\nu(r,dX)\right\}\right| \\
&\le 2\|\Phi\|\bar{\nu}_T(K^c)+\left(\sup_{r\ge 1}\nu(r,\mathscr{C}_L)\right) \\
&\quad\times\left\{\sup_{r_0\le r\le T}\sup_{X\in K}|\Phi\circ\mathscr{L}_r(X)-\Phi\circ\mathscr{L}(X)|+\frac{2\|\Phi\|}{\ln T}(\ln r_0)\right\}.
\end{aligned}
$$

L'inégalité annoncée est donc établie. Par ailleurs, tenant compte de la tension des mesures $\{\bar{\nu}_T(\cdot)\}_{T\in\mathbb{I}}$, pour tout $\varepsilon>0$ donné, il existe un compact K de $\mathscr{C}_L$ tel que $\lim_{T\to\infty}\bar{\nu}_T(K^c)<\varepsilon$. Or pour $X,Y\in\mathscr{C}_L$, on a $\|\mathscr{L}_r(X)-\mathscr{L}_r(Y)\|_{\mathscr{C}}\le\|X-Y\|_{\mathscr{C}_L}$ et $\|\mathscr{L}_r(X)-\mathscr{L}_r(Y)\|_{\mathscr{C}}\to 0$, $r\to\infty$, ce qui implique grâce à l'uniforme continuité de $\mathscr{L}$ sur K: $\sup_{X\in K}\|\mathscr{L}_r(X)-\mathscr{L}(X)\|_{\mathscr{C}}\to 0$, $r\to\infty$; donc $\sup_{X\in K}d_s(\mathscr{L}_r(X),\mathscr{L}(X))_{\mathscr{C}}\to 0$, $r\to\infty$. Comme l'application Φ est uniformément continue de $\mathscr{D}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $\eta>0$ tel que pour $u,v\in\mathscr{D}$ vérifiant $d_s(u,v)<\eta$, on ait $|\Phi(u)-\Phi(v)|<\varepsilon$. Il existe aussi $r_0>0$ tel que pour tous $r>r_0$ et $X\in K$, $d_s(\mathscr{L}_r(X),\mathscr{L}(X))<\eta$; d'où $\sup_{x\in K}|\Phi(\mathscr{L}_r(x))-\Phi(\mathscr{L}(x))|<\varepsilon$ pour tout $r\ge r_0$. En conclusion:

$$
\lim_{T\to\infty}\sup|\Delta_T(\Phi)|\le\varepsilon\left(\sup_{r\in\mathbb{I}}\nu(r,\mathscr{C}_L)+2\|\Phi\|\right)\qquad\forall\,\varepsilon>0,
$$

ce qui signifie que $\lim_{T\to\infty}|\Delta_T(\Phi)|=0$. Le lemme 3.5 est donc établi. □

PREUVE DU LEMME 3.6. L'application définie sur $\mathscr{C}([0,1])$ par $X\mapsto\|X\|_\infty=\sup_{0\le t\le 1}|X(t)|$ étant continue, le TLCPSF vérifié par le mouvement brownien, permet de déduire que

$$
v_T^*(\cdot)=\frac{1}{\ln T}\int_1^T\frac{dr}{r}\delta_{\{\|\mathrm{B}^{(r)}\|_\infty\in\cdot\}}\Longrightarrow v^*(\cdot)\quad\text{p.s., } T\to\infty, \tag{6.25}
$$

où v^* est la loi de la v.a.

$$
\mathrm{B}_1^*=\sup_{0\le t\le 1}|\mathrm{B}_t|\quad\text{et}\quad\mathrm{B}^{(r)}=\left\{\frac{1}{\sqrt{r}}\mathrm{B}_{rt}\right\}_{0\le t\le 1},\qquad r>0.
$$

Cette propriété et la suivante,

$$\sup_{t\in[0,1]}\left|\frac{1}{\sqrt{r}}\mathrm{B}_{rt}-\frac{1}{\mathrm{V}_{\Gamma(r)}}\mathrm{B}_{rt}\right| = \|\mathrm{B}^{(r)}\|_\infty\left|1-\frac{\sqrt{r}}{\mathrm{V}_{\Gamma(r)}}\right| = o\big(\|\mathrm{B}^{(r)}\|_\infty\big)\quad \text{p.s.,} \tag{6.26}$$

impliquent que le processus $(\widehat{\mathrm{B}}^{(r)} = (\sqrt{r}/\mathrm{V}_{\Gamma(r)})\mathrm{B}^{(r)})_{r>0}$ vérifie le TLCPSF suivant:

$$\widehat{\mathrm{W}}_T(\cdot) = \frac{1}{\ln T}\int_1^T \frac{dr}{r}\delta_{\{\widehat{\mathrm{B}}^{(r)}\in\cdot\}} \Longrightarrow_{T\to\infty} W \quad \text{p.s., } T\to\infty. \tag{6.27}$$

En effet, pour toute application lipschitzienne et bornée Φ de $\mathscr{D}$ dans $\mathbb{R}$ et pour tout $A>0$ on a

$$\begin{aligned}
\left|\int\Phi(x)\widehat{\mathrm{W}}_T(dx)-\int\Phi(x)\mathrm{W}(dx)\right| &\le \frac{1}{\ln T}\int_1^T\frac{dr}{r}\left|\Phi(\widehat{\mathrm{B}}^{(r)})-\Phi(\mathrm{B}^{(r)})\right| \\
&\quad + \left|\frac{1}{\ln T}\int_1^T\frac{dr}{r}\Phi(\mathrm{B}^{(r)})-\int\Phi(x)\mathrm{W}(dx)\right| \\
&\le \frac{1}{\ln T}\int_1^T\frac{dr}{r}\left|\Phi(\widehat{\mathrm{B}}^{(r)})-\Phi(\mathrm{B}^{(r)})\right|\mathbf{1}_{\{\|\mathrm{B}^{(r)}\|_\infty\le A\}} \\
&\quad + 2\|\Phi\|_\infty\frac{1}{\ln T}\int_1^T\frac{dr}{r}\mathbf{1}_{\{\|\mathrm{B}^{(r)}\|_\infty> A\}} + o(1)\quad\text{p.s.} \\
&\le o\left(\frac{1}{\ln T}\int_1^T\frac{dr}{r}\|\mathrm{B}^{(r)}\|_\infty\mathbf{1}_{\{\|\mathrm{B}^{(r)}\|_\infty\le A\}}\right) \\
&\quad + 2\|\Phi\|_\infty\frac{1}{\ln T}\int_1^T\frac{dr}{r}\mathbf{1}_{\{\|\mathrm{B}^{(r)}\|_\infty> A\}} + o(1)\quad\text{p.s.}
\end{aligned}\tag{6.28}$$

La propriété annoncée découle du fait que si A est un point de continuité de v^*,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{\ln T}\int_1^T\frac{dr}{r}\mathbf{1}_{\{\|\mathrm{B}^{(r)}\|_\infty>A\}} = v^*\{X;\|X\|_\infty>A\}+o(1)\to 0\quad\text{p.s., } A\to\infty,$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{\ln T}\int_1^T\frac{dr}{r}\|\mathrm{B}^{(r)}\|_\infty\mathbf{1}_{\{\|\mathrm{B}^{(r)}\|_\infty\le A\}} = v^*\{X;\|X\|_\infty\le A\}\le 1\quad\text{p.s.}$$

La première assertion du lemme résulte de l'application du lemme 3.5 aux noyaux $(\nu(r,\cdot)) = (\delta_{\{\widehat{\mathrm{B}}^{(r)}\in\cdot\}})$ et aux changements de temps $(\alpha_r) = \{\frac{F(r)}{r}t\}_{0\le t\le 1}$ où $F(r)=\mathrm{V}^2_{\Gamma(r)}$, car $\widetilde{\mathrm{B}}^{(r)} = \mathrm{B}^{(F(r))} = \widehat{\mathrm{B}}^{(r)}\circ\alpha_r$.

La seconde assertion du lemme est une conséquence de la partie (ii) du lemme 3.4. Le lemme 3.6 est établi. □

Preuve du lemme 3.7. Pour tout $R>0$, on pose

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}_R &= \inf\{r\ge 0, \mathrm{T}_{r+1}>R\},\\
\Lambda_R &= \left|(\ln R)^{-1/2}\mathbb{K}_R^{\alpha,f}-(\ln \mathrm{N}_R)^{-1/2}\mathbb{K}_{\mathrm{N}_R}^{\mathrm{m}^{-1/2}\beta,f}\right|.
\end{aligned}\tag{6.29}$$

Ecrivant N au lieu de N_R pour simplifier, on a

$$\begin{aligned}\Lambda_R &\le \left|(\ln R)^{-1/2}\Big(\mathbb{K}_R^{\alpha,f} - \mathbb{K}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{m}^{-1/2}\beta,f}\Big)\right| \\ &\quad + \left|(\ln R)^{-1/2} - (\ln \mathrm{N})^{-1/2}\right|\mathbb{K}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{m}^{-1/2}\beta,|f|} = \Lambda_R' + \Lambda_R''.\end{aligned} \tag{6.30}$$

Or

$$\begin{aligned}\Lambda_R'' &= |(\ln R)^{-1/2} - (\ln \mathrm{N})^{-1/2}|\mathbb{K}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{m}^{-1/2}\beta,|f|} \\ &= o((\ln \mathrm{N})^{-1/2})(\ln \mathrm{N})^{-1}\mathbb{K}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{m}^{-1/2}\beta,|f|} \to 0 \quad \text{p.s.}, R\to\infty.\end{aligned} \tag{6.31}$$

Etudions maintenant le comportement de $\Lambda_R' = (\ln R)^{-1/2}|\mathbb{K}_R^{\alpha,f} - \mathbb{K}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{m}^{-1/2}\beta,f}|$.
Dans le cas continu, on a

$$\begin{aligned}(\ln R)^{1/2}\Lambda_R' &\le \sum_{k=1}^{\mathrm{N}}\int_{\mathrm{T}_k}^{\mathrm{T}_{k+1}}\frac{dt}{t}\left|f\left(\frac{\alpha_t}{\sqrt{t}}\right) - f\left(\frac{\beta_k}{\sqrt{k\mathrm{m}}}\right)\right| \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\mathrm{N}}\left|\int_{\mathrm{T}_k}^{\mathrm{T}_{k+1}}\frac{dt}{t} - \frac{1}{k}\right|\left|f\left(\frac{\beta_k}{\sqrt{k\mathrm{m}}}\right)\right| + \int_1^{\mathrm{T}_1}\frac{dt}{t}\left|f\left(\frac{\alpha_t}{\sqrt{t}}\right)\right| \\ &\quad + \left|\int_{\mathrm{T}_{\mathrm{N}}}^{\mathrm{R}}\frac{dt}{t} - \frac{1}{\mathrm{N}}\right|\left|f\left(\frac{\beta_{\mathrm{N}}}{\sqrt{\mathrm{Nm}}}\right)\right|.\end{aligned} \tag{6.32}$$

Le terme général de la première somme du membre de droite de (6.32), soit

$$\Delta_k = \int_{\mathrm{T}_k}^{\mathrm{T}_{k+1}}\frac{dt}{t}\left|f\left(\frac{\alpha_t}{\sqrt{t}}\right) - f\left(\frac{\beta_k}{\sqrt{k\mathrm{m}}}\right)\right|$$

est majoré par la somme des deux termes suivants:

$$\Delta_k^{(1)} = \int_{\mathrm{T}_k}^{\mathrm{T}_{k+1}}\frac{dt}{t}\left|f\left(\frac{\alpha_t}{\sqrt{t}}\right) - f\left(\frac{\beta_k}{\sqrt{t}}\right)\right|$$

et

$$\Delta_k^{(2)} = \int_{\mathrm{T}_k}^{\mathrm{T}_{k+1}}\frac{dt}{t}\left|f\left(\frac{\beta_k}{\sqrt{t}}\right) - f\left(\frac{\beta_k}{\sqrt{k\mathrm{m}}}\right)\right|.$$

De plus:

$$\begin{aligned}\Delta_k^{(1)} &\le \text{const.}\int_{\mathrm{T}_k}^{\mathrm{T}_{k+1}}\frac{dt}{t}\left|\frac{\alpha_t - \beta_k}{\sqrt{t}}\right|\left\{1 + \left|\frac{\alpha_t}{\sqrt{t}}\right|^b + \left|\frac{\beta_k}{\sqrt{t}}\right|^b\right\} \\ &= o\left(\int_{\mathrm{T}_k}^{\mathrm{T}_{k+1}}\frac{dt}{t}(\ln t)^{-1/2}\left(1 + \left|\frac{\alpha_t}{\sqrt{t}}\right|^b\right)\right) + o\left(\int_{\mathrm{T}_k}^{\mathrm{T}_{k+1}}\frac{dt}{t}(\ln t)^{-1/2}\left|\frac{\beta_k}{\sqrt{k\mathrm{m}}}\right|^b\right) \\ &= o\left(\int_{\mathrm{T}_k}^{\mathrm{T}_{k+1}}(\ln t)^{-1/2}d\left(\int_{\mathrm{T}_1}^{t}\frac{ds}{s}\left\{1 + \left|\frac{\alpha_s}{\sqrt{s}}\right|^b\right\}\right)\right) + o\left((\ln k)^{-1/2}\frac{1}{k}\left|\frac{\beta_k}{\sqrt{k\mathrm{m}}}\right|^b\right).\end{aligned}$$

Vu que $\ln \mathrm{T}_{k+1} - \ln \mathrm{T}_k \sim \frac{\mathrm{T}_{k+1}-\mathrm{T}_k}{\mathrm{T}_k} \sim \frac{1}{k}$, on en déduit la propriété

$$\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \int_{\mathrm{T}_k}^{\mathrm{T}_{k+1}} \frac{dt}{t} \left| f\left(\frac{\alpha_t}{\sqrt{t}}\right) - f\left(\frac{\beta_k}{\sqrt{t}}\right) \right| = o\big((\ln \mathrm{T}_{\mathrm{N}+1})^{1/2}\big) = o((\ln R)^{1/2}) \tag{6.33}$$

en procédant comme suit.

Par intégration par parties, la propriété LFL vérifiée par la famille α, $(\ln R)^{-1}\mathbb{K}_R^{\alpha, f} \to C(f)$, $R \to \infty$, implique que

$$\begin{aligned} &\int_{\mathrm{T}_1}^{\mathrm{T}_{\mathrm{N}+1}} (\ln t)^{-1/2} d\left(\int_{\mathrm{T}_1}^{t} \frac{ds}{s} \left\{1 + \left|\frac{\alpha_s}{\sqrt{t}}\right|^b\right\}\right) \\ &\quad = \left[(\ln t)^{-1/2} \int_{\mathrm{T}_1}^{t} \frac{ds}{s} \left\{1 + \left|\frac{\alpha_s}{\sqrt{s}}\right|^b\right\}\right]_{\mathrm{T}_1}^{\mathrm{T}_{\mathrm{N}+1}} \\ &\qquad + \frac{1}{2} \int_{\mathrm{T}_1}^{\mathrm{T}_{\mathrm{N}+1}} \frac{dt}{t} (\ln t)^{-1/2} \frac{1}{\ln t} \int_{\mathrm{T}_1}^{t} \frac{ds}{s} \left\{1 + \left|\frac{\alpha_s}{\sqrt{t}}\right|^b\right\} \\ &\quad = O\big((\ln \mathrm{T}_{\mathrm{N}+1})^{1/2}\big). \end{aligned}$$

De même l'usage de la transformation d'Abel et de la propriété LFL pour la famille β, $(\ln n)^{-1}\mathbb{K}_n^{\mathrm{m}^{-1/2}\beta, f} \to C'(f)$, $n \to \infty$, implique que

$$\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} (\ln k)^{-1/2} \frac{1}{k} \left|\frac{\beta_k}{\sqrt{k\mathrm{m}}}\right|^b = O((\ln \mathrm{N})^{1/2}). \tag{6.34}$$

D'où la propriété (6.33). Par ailleurs

$$\begin{aligned} \Delta_k^{(2)} &\le \text{const.} \int_{\mathrm{T}_k}^{\mathrm{T}_{k+1}} \frac{dt}{t} \left|\frac{\sqrt{t} - \sqrt{k\mathrm{m}}}{\sqrt{t}}\right| \left|\frac{\beta_k}{\sqrt{k\mathrm{m}}}\right| \left\{1 + \left|\frac{\beta_k}{\sqrt{t}}\right|^b + \left|\frac{\beta_k}{\sqrt{k\mathrm{m}}}\right|^b\right\} \\ &= o\left(\int_{\mathrm{T}_k}^{\mathrm{T}_{k+1}} \frac{dt}{t} (\ln t)^{-1/2}\right) \left|\frac{\beta_k}{\sqrt{k\mathrm{m}}}\right| \left\{1 + 2\left|\frac{\beta_k}{\sqrt{k\mathrm{m}}}\right|^b\right\} \\ &= o\left(\frac{1}{k} (\ln k)^{-1/2}\right) \left|\frac{\beta_k}{\sqrt{k\mathrm{m}}}\right| \left\{1 + 2\left|\frac{\beta_k}{\sqrt{k\mathrm{m}}}\right|^b\right\}. \end{aligned}$$

On en déduit comme pour la propriété (6.32):

$$\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \int_{\mathrm{T}_k}^{\mathrm{T}_{k+1}} \frac{dt}{t} \left| f\left(\frac{\beta_k}{\sqrt{t}}\right) - f\left(\frac{\beta_k}{\sqrt{k\mathrm{m}}}\right) \right| = o\big((\ln \mathrm{T}_{\mathrm{N}+1})^{1/2}\big) = o((\ln \mathrm{N})^{1/2}). \tag{6.35}$$

Le terme général de la deuxième somme du membre de la droite de (6.31) vérifie

$$\Delta_k^{(3)} = \left|\int_{\mathrm{T}_k}^{\mathrm{T}_{k+1}} \frac{dt}{t} - \frac{1}{k}\right| \left| f\left(\frac{\beta_k}{\sqrt{k\mathrm{m}}}\right)\right| = o\left(\frac{1}{k} (\ln k)^{-\frac{1}{2}}\right) \left| f\left(\frac{\beta_k}{\sqrt{k\mathrm{m}}}\right)\right|,$$

car $\ln \mathrm{T}_{k+1} - \ln \mathrm{T}_k - \frac{1}{k} = o(\frac{1}{k}(\ln k)^{-\frac{1}{2}})$ $(k \to \infty)$. [C'est à ce niveau de la preuve qu'intervient l'hypothèse faite sur la vitesse de convergence de la suite $(n^{-1}\mathrm{T}_n)$ vers m.]

Quant au dernier terme du membre de droite de (6.32), il est majoré par

$$\left|\int_{\mathrm{T_N}}^{\mathrm{R}} \frac{dt}{t} - \frac{1}{\mathrm{N}}\right| \left|f\left(\frac{\beta_{\mathrm{N}}}{\sqrt{\mathrm{Nm}}}\right)\right| = o((\ln \mathrm{N})^{-1/2}) \frac{1}{\mathrm{N}} \left|f\left(\frac{\beta_{\mathrm{N}}}{\sqrt{\mathrm{Nm}}}\right)\right| = o((\ln \mathrm{N})^{1/2});$$

d'où

$$\begin{aligned}(6.36) \qquad & \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \left|\int_{\mathrm{T}_k}^{\mathrm{T}_{k+1}} \frac{dt}{t} - \frac{1}{k}\right| \left|f\left(\frac{\beta_k}{\sqrt{k\mathrm{m}}}\right)\right| + \left|\int_{\mathrm{T_N}}^{\mathrm{R}} \frac{dt}{t} - \frac{1}{\mathrm{N}}\right| \left|f\left(\frac{\beta_{\mathrm{N}}}{\sqrt{\mathrm{Nm}}}\right)\right| \\ & \quad = o((\ln \mathrm{N})^{1/2}).\end{aligned}$$

Grâce aux propriétés (6.30)–(6.36), le lemme est établi dans le cas continu. Ces propriétés sont également valables dans le cas discret à condition de remplacer les intégrales

$$\int_{\mathrm{T}_k}^{\mathrm{T}_{k+1}} \frac{dt}{t} f\left(\frac{\alpha_t}{\sqrt{t}}\right)$$

par les sommes

$$\sum_{r=\mathrm{T}_k}^{\mathrm{T}_{k+1}-1} \frac{1}{r} f\left(\frac{\alpha_r}{\sqrt{r}}\right)$$

dans l'expression de Λ_R pour $R \in \mathbb{N}^*$. □

Remerciements. Je remercie bien vivement les professeurs M. Duflo, A. Touati et le rapporteur pour leurs commentaires et suggestions qui ont été déterminants pour la réalisation de ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ATLAGH, M. et WEBER, M. (1992). Un théorème central limite presque-sûr relatif à des sous-suites. *C. R. Acad. Sci. Paris* **315** 203–206.

[2] BERKES, I. (1995). On the almost sure central limit theorem and domains of attraction. *Probab. Theory Related Fields* **102** 1–18.

[3] BERKES, I. et DEHLING, H. (1993). Some limit theorems in log density. *Ann. Probab.* **23** 1640–1670.

[4] BERKES, I., HORVATH, L. et KHOSHNEVIAN, D. (1998). Logarithmic averages of stable random variables are asymptotically normal. *Stochastic Process. Appl.* **77** 35–51.

[5] BHATTACHARYA, R. N. (1982). On the functional central limit theorem and the law of iterated logarithm for Markov processes. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **60** 185–201.

[6] BROSAMLER, G. (1988). An almost everywhere central limit theorem. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **104** 561–574.

[7] CADRE, B. (1995). Thèse de Doctorat, Univ. Rennes I, France.

[8] CHAÂBANE, F. (1998). Invariance principles with logarithmic averaging for martingales. *Studia Sci. Math. Hungar*. A paraître.

[9] CHAÂBANE, F. (1998). Principes d'invariance par moyennisation logarithmique: le cas des martingales à temps continu.

[10] CHAÂBANE, F. et MAAOUIA, F. (2000). Théorèmes limites avec poids pour les martingales vectorielles. *ESAIM Probability and Statistics* **4** 137–189.

[11] CHAÂBANE, F., MAAOUIA, F. et TOUATI, A. (1998). Généralisation du théorème de la limite centrale presque-sûr pour les martingales vectorielles. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I* **326** 229–232.

[12] CHAÂBANE, F., MAAOUIA, F. et TOUATI, A. (1999). Théorèmes asymptotiques à poids pour des modèles statistiques.

[13] CHAÂBANE, F., MAAOUIA, F. et TOUATI, A. (2001). Versions fortes associées aux théorèmes limites en loi pour les martingales vectorielles. Soumis pour publication.

[14] CSÖRGŐ, M. et HORVÁTH, L. (1992). Invariance principles for logarithmic averages. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 112–195.

[15] DACUNHA-CASTELLE, D. et DUFLO, M. (1983). *Probabilités et statistiques* **2**. *Problèmes à temps mobile*. Masson, Paris.

[16] DEUSCHEL, J. D. et STROOCK, D. W. (1989). *Large Deviations*. Academic Press, New York.

[17] DUFLO, M. (1996). *Algorithmes stochastiques*. Masson, Paris.

[18] DUFLO, M. (1997). *Random Iterative Models*. Masson, Paris.

[19] EINMAHL, U. (1987). Strong invariance principles for partial sums of independent random vectors. *Ann. Probab.* **15** 1419–1440.

[20] FREEDMAN, D. (1983). *Brownian Motion and Diffusion*. Springer, New York.

[21] HALL, P. et HEYDE, C. C. (1980). Martingale limit theory and its applications. In *Probability and Mathematical Statistics*. Academic Press, New York.

[22] HURELBAATAR, G. (1996). On the almost sure central limit theorem for Φ-mixing random variables. *Studia Sci. Math. Hungarica* **31** 197–202.

[23] LACEY, M. L. et PHILIPP, W. (1990). A note on the almost sure central limit theorem. *Statist. Probab. Lett.* **9** 201–205.

[24] MAAOUIA, F. (1987). Comportements asymptotiques des fonctionnelles additives des processus de Markov récurrents au sens de Harris. Thèse de 3ème cycle, Univ. Paris VII, France.

[25] MAAOUIA, F. (1996). Versions fortes du théorème de la limite centrale pour les processus de Markov. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I* **323** 293–296.

[26] MAAOUIA, F. (1997). Strong versions of the central limit theorem for Markov processes.

[27] MEYN, S. P. et TWEEDIE, R. L. (1992). Criteria for stability of Markovian processes I: discrete time. *Adv. in Appl. Probab.* **24** 542–574.

[28] MEYN, S. P. et TWEEDIE, R. L. (1993). Stability of Markovian processes II: continuous time and sampled chains. *Adv. in Appl. Probab.* **25** 487–517.

[29] MEYN, S. P. et TWEEDIE, R. L. (1993). *Markov Chains and Stochastic Stability*. Springer, New York.

[30] NUMMELIN, E. (1983). *General Irreducible Markov Chains and Negative Operators*. Cambridge Univ. Press.

[31] PELIGARD, M. et SHAO, Q. M. (1995). A note on the almost sure central limit theorem for weakly dependent random variables. *Statist. Probab. Lett.* **22** 131–136.

[32] RODZIK, B. et RYCHLIK, Z. (1994). An almost sure central limit theorem for independent random variables. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **30** 1–11.

[33] SCHATTE, P. (1988). On strong versions of the central limit theorem. *Math. Nachr.* **137** 249–256.

[34] TOUATI, A. (1987). Théorèmes limites pour les processus de Markov récurrents. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I* **305** 841–844.

[35] TOUATI, A. (1989). Principes d'invariance avec limites non browniennes. Thèse de Doctorat d'Etat, Univ. Paris-Nord, France.

[36] TOUATI, A. (1990). Loi fonctionnelle du logarithme itéré pour des processus de Markov récurrents. *Ann. Probab.* **18** 140–159.

[37] TOUATI, A. (1995). Sur les versions fortes du théorème de la limite centrale. Prépublication, 23, Univ. Marne La Vallée.
[38] WEI, C. Z. (1985). Asymptotic properties of least squares estimators in stochastic regression models. *Ann. Statist.* **13** 1498–1508.
[39] WEI, C. Z. (1987). Multivariate adaptive stochastic approximation. *Ann. Statist.* **15** 1115–1130.

FACULTÉ DES SCIENCES DE TUNIS
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
CAMPUS UNIVERSITAIRE
1060-TUNIS
TUNISIA
E-MAIL: faiza.maaouia@fst.rnu.tn